

П Р А К Т И К У М

**по курсу “Колебания в системах с
дискретным временем”**

(2 курс, 4 семестр)

Практическая работа N 1

“Исследование динамики одномерного логистического отображения”

1. Теоретические сведения

Логистическое отображение (также *квадратичное отображение* или *отображение Фейгенбаума*) — это полиномиальное отображение, которое описывает, как меняется численность популяции с течением времени. Его часто приводят в пример того, как из очень простых нелинейных уравнений может возникать сложное, хаотическое поведение. Логистическое отображение — дискретный аналог непрерывного логистического уравнения Ферхюльста. Оно отражает тот факт, что прирост популяции происходит в дискретные моменты времени.

Отображение Фейгенбаума имеет следующий вид:

$$x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n), \quad (1)$$

где x_n принимает значения от 0 до 1 и отражает численность популяции в n -ом году, а x_0 обозначает начальную численность (в год номер 0); λ — положительный параметр, характеризующий скорость размножения (роста) популяции.

Иногда уравнение (1) называют отображением Ферхюльста (или Ферхюльста-Пирла), а логистическим отображением называется другое, но эквивалентное по свойствам уравнение:

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2. \quad (2)$$

Нелинейное отображение (1) описывает два эффекта:

— с одной стороны, когда численность популяции x_n мала, она размножается со скоростью, пропорциональной этой численности, так как $x_{n+1} \sim \lambda x_n$, если $x_n < 1$;

— с другой стороны, поскольку популяция обитает в среде с ограниченной «ёмкостью», то при росте плотности популяции скорость размножения падает, возрастает конкуренция и смертность (имеет место нелинейное ограничение роста: $-\lambda x_n^2$).

Логистическое отображение получило широкую известность благодаря тому факту, что оно является простейшей моделью, демонстрирую-

щей переход к хаотическому поведению через последовательность бифуркаций удвоения периода (сценарий Фейгенбаума). Кроме того, на его базе М. Фейгенбаумом были получены количественные закономерности перехода к хаосу и доказан их универсальный характер для одномерных и двумерных отображений с квадратичным максимумом. Исследования показали, что универсальность Фейгенбаума выполняется для широкого класса нелинейных диссипативных систем, описываемых дифференциальными уравнениями.

Логистическое отображение (1) имеет две неподвижные точки $x^* = 0$ и $x^* = 1 - 1/\lambda$. Исследуем устойчивость тривиальной точки $x^* = 0$, для чего вычислим ее мультипликатор:

$$\mu = f'(x^* = 0) = (\lambda - 2\lambda x^*) = \lambda. \quad (3)$$

Таким образом, устойчивость неподвижной точки $x^* = 0$ однозначно определяется значением параметра отображения. Следовательно, точка $x^* = 0$ устойчива, когда $\lambda < 1$ и неустойчива при $\lambda > 1$. Если λ немного больше 1, то итерации будут сходиться к другой неподвижной точке $x^* = 1 - 1/\lambda$. Данная точка существует и устойчива в интервале значений параметра $1 < \lambda < 3$. При $\lambda = \lambda_1 = 3$ ее мультипликатор $\mu = \lambda - 2\lambda x^* = 2 - \lambda$ обращается в -1 , что является бифуркационным условием для бифуркации удвоения периода. В результате этой бифуркации неподвижная точка теряет свою устойчивость, но не исчезает. В ее окрестности мягко рождаются две неподвижные точки, которые образуют устойчивый *цикл периода 2* или *2-цикл* (рис. 1). Точки 2-цикла x_1^*, x_2^* удовлетворяют условию

$$\begin{aligned} x_1^* &= f(x_2^*) = \lambda x_2^*(1 - x_2^*), \\ x_2^* &= f(x_1^*) = \lambda x_1^*(1 - x_1^*). \end{aligned} \quad (4)$$

Координаты точек 2-цикла имеют вид:

$$x_{1,2}^* = \frac{1 + \lambda \pm \sqrt{(\lambda - 3)(\lambda + 1)}}{2\lambda}. \quad (5)$$

Если дальше увеличивать λ , то при определенном значении параметра мультипликатор 2-цикла обращается в -1 , и цикл становится неустойчивым. Бифуркационное значение параметра λ можно найти аналитически.

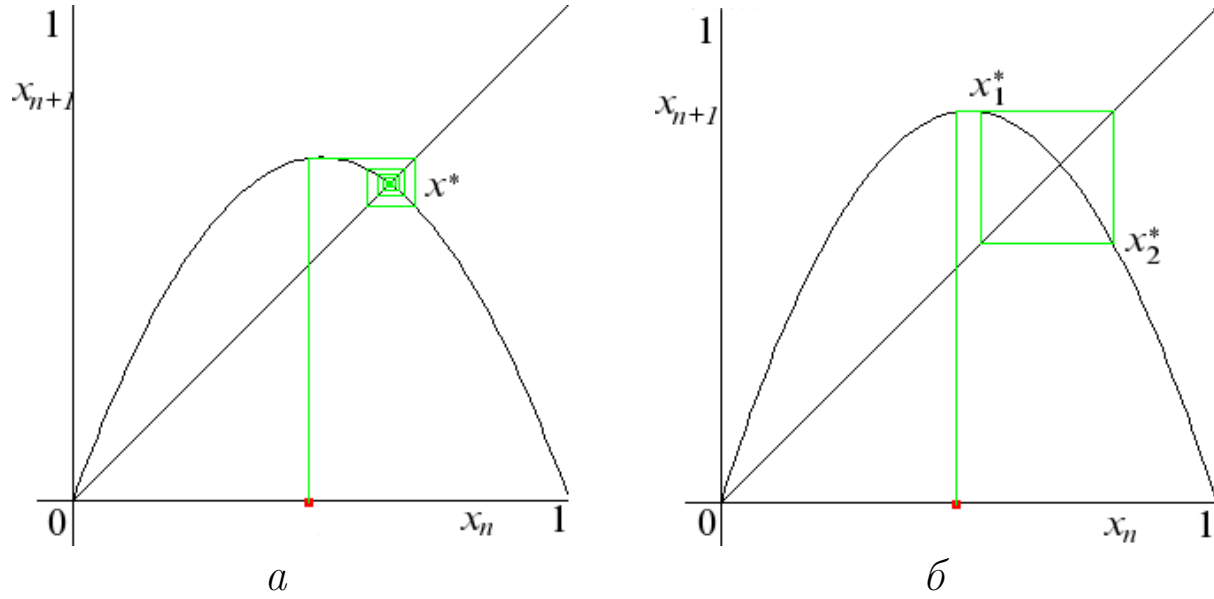


Рис. 1: Иллюстрация бифуркации удвоения периода в отображении (1): (а) – устойчивая неподвижная точка; (б) – устойчивый 2-цикл

Для этого находим мультипликатор 2-цикла

$$\begin{aligned}\mu &= f'(x_2^*)f'(x_1^*) = \lambda^2(1 - 2x_2^*)(1 - 2x_1^*) = \\ &= -\lambda^2 + 2\lambda + 4.\end{aligned}\quad (6)$$

Мультипликатор 2-цикла (6) обращается в -1 при $\lambda_2 = 1 + \sqrt{6} = 3.4494 \dots$ и происходит вторая бифуркация удвоения. При этом каждая из точек цикла “удваивается”, и траектория начинает циклировать между 4 точками. Реализуется *цикл периода 4* или *4-цикл*. При дальнейшем увеличении параметра λ происходит следующая бифуркация удвоения периода и цикл периода 4 сменяется циклами периода 8, 16, 32 и т.д. до бесконечности. При переходе через критическую точку $\lambda_\infty = 3.569 \dots$ в системе возникает сложный непериодический процесс, соответствующий режиму динамического хаоса или хаотическому аттрактору.

Бифуркационные значения параметра λ_k , $k = 1, 2, \dots$ при $k \rightarrow \infty$ сходятся к некоторому конечному пределу

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{\lambda_{k+2} - \lambda_{k+1}} = \delta. \quad (7)$$

Константа $\delta = 4.669201 \dots$ называется *универсальной константой Фейгенбаума* и является одинаковой для любых систем, демонстрирующих последовательность бифуркаций удвоения периода.

Каскад бифуркаций удвоения периода в логистическом отображении можно наглядно представить с помощью фазопараметрической диаграммы, называемой также *однопараметрической бифуркационной диаграммой* или *деревом Фейгенбаума* (рис. 2).

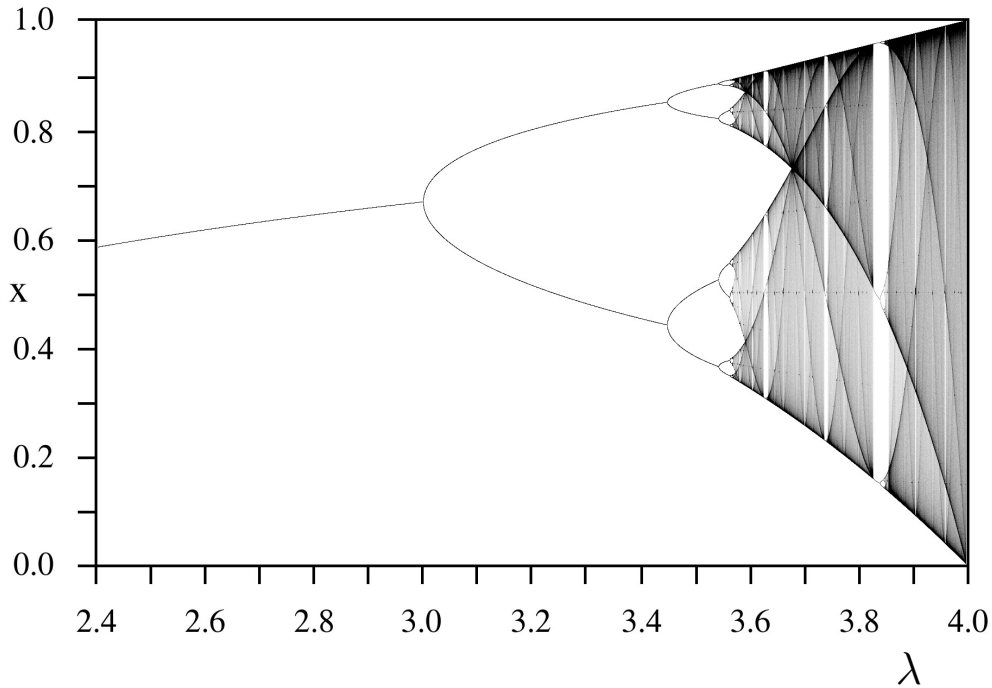


Рис. 2: Фазопараметрическая диаграмма для логистического отображения (1)

Подобная диаграмма характерна для всех систем с каскадом удвоений периодов, приводящим к хаосу. Бифуркационное дерево (рис. 2) можно построить численно с помощью компьютера. Сначала задаются некоторые начальные значения переменной x_0 и управляющего параметра. Затем отображение итерируется несколько сот раз для того, чтобы были исключены переходные процессы и был получен правильный установившийся режим. Полученные значения переменной записываются в файл данных (первые 50–80 значений x нужно отбросить, так как они соответствуют переходному режиму). Затем процедура повторяется для следующих значений параметра, взятых с некоторым небольшим шагом, и продолжается до конца диапазона значений параметра. Зависимость полученных значений переменной x от соответствующих им значений управляющего параметра представляется в виде графика, как показано на рис. 2.

На рисунке 2 хорошо видны точки бифуркаций удвоения периода, когда

каждая ветвь бифуркационного дерева расщепляется на две. При достаточно больших значениях параметра λ наблюдается большое количество точек по оси ординат x , которые соответствуют хаотическому режиму. Области хаоса чередуются с так называемыми «окнами периодичности» (или *устойчивости*), в которых реализуются периодические режимы — циклы различных периодов. Появление циклов в закритической области, а, следовательно, и окон периодичности, определяется *порядком Шарковского*

$$\begin{aligned} 3 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 * 2 \rightarrow 5 * 2 \rightarrow 7 * 2 \rightarrow \dots \rightarrow 3 * 2^2 \rightarrow \\ \rightarrow 5 * 2^2 \rightarrow 7 * 2^2 \rightarrow \dots \rightarrow 2^3 \rightarrow 2^2 \rightarrow 2 \rightarrow 1. \end{aligned} \quad (8)$$

В (8) цифры означают периоды циклов отображений, а $*2$ — тот факт, что этот цикл претерпевает каскад бифуркаций удвоения периода.

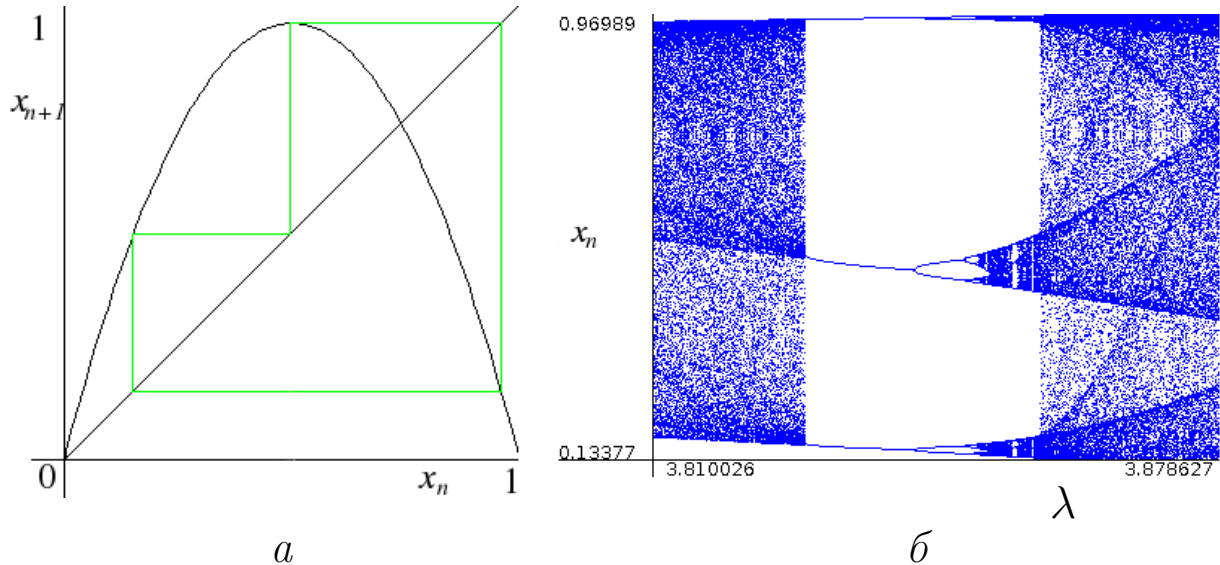


Рис. 3: Цикл периода 3 (а) и его окно устойчивости (б) (увеличенный фрагмент бифуркационной диаграммы рис. 2)

Самым сложным в смысле Шарковского оказывается цикл периода 3. Из его существования следует существование циклов любого периода. Самое широкое окно устойчивости имеет цикл периода 3 (рис. 3, а), который возникает в результате касательной бифуркации и с ростом параметра претерпевает последовательность бифуркаций удвоения периода. На рис. 3, б показан увеличенный фрагмент бифуркационного дерева (рис. 2), соответствующий окну устойчивости цикла периода 3. Аналогично возникают и эволюционируют в окнах устойчивости циклы других периодов.

2. Экспериментальная часть

Лабораторная работа представляет собой программу, разработанную в среде LabView. Рабочее окно программы представлено на рис. 4.

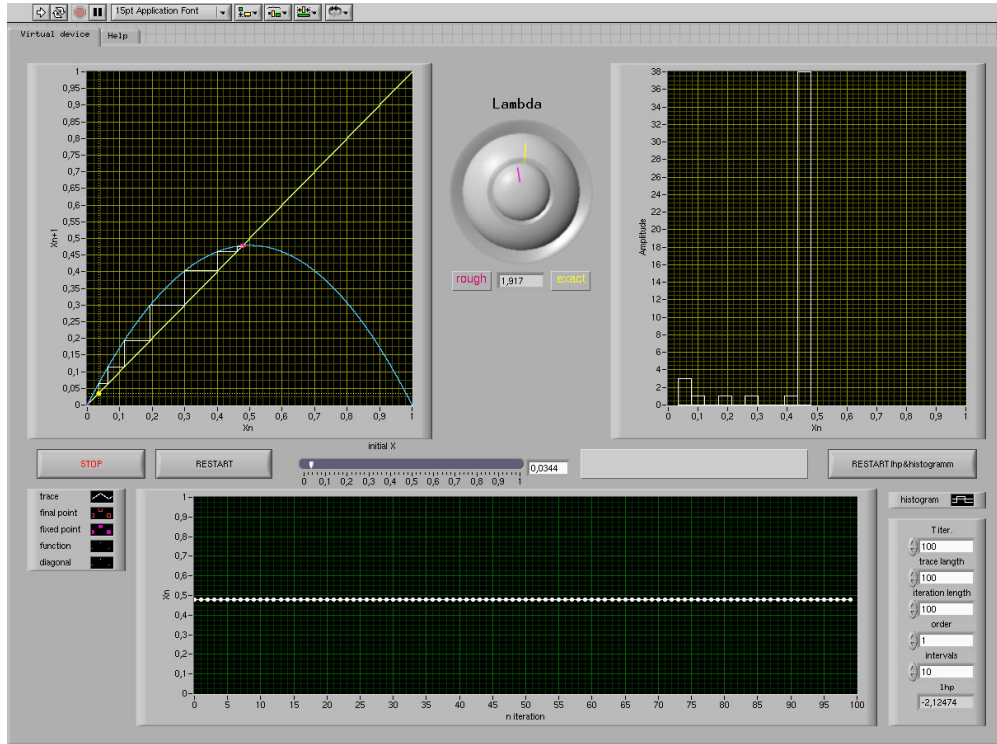


Рис. 4: Диалоговое окно программы для исследования динамики одномерного логистического отображения

Кнопками в верхней левой части рабочего окна производится соответственно запуск и остановка процесса итерирования. Перед запуском программы необходимо установить параметры численного счета в таблице, расположенной в нижнем правом углу рабочего окна: $T_{iter} = 100$, $T_{trace\ length} = 100$.

На верхнем левом графике строятся график функции $x_{n+1} = f(x_n)$ (синий цвет), диаграмма Ламерея (белый цвет) и неподвижные точки отображения (красный цвет). Управляющий параметр λ изменяется в интервале $[0; 4]$ с помощью двойного лимба, расположенного в центре окна. Значения параметра устанавливаются грубо («rough») с помощью внутреннего (розового) лимба и точно («exact») с помощью внешнего (желтого) лимба. Начальное значение координаты x выбирается на горизонтальной шкале «initial x » (расположена под лимбом изменения параметра λ) или пере-

движением курсором желтой точки на верхнем левом графике.

Верхний правый график отображает гистограмму «амплитуда — x_n », т.е. количество попаданий траектории в процессе итерирования в точку с координатой x_n . На нижнем графике приводится временная реализация процесса: значение координаты x на каждой итерации n . Краткую информацию о дополнительных параметрах вычислений можно найти в разделе «Help», нажав на соответствующую кнопку в верхней левой части рабочего окна.

3. Практические задания

1. Используя лабораторную установку, найти циклы периода 1, 2, 4, 8 отображения, определить области их устойчивости (т.е. найти соответствующие бифуркационные значения параметра λ их рождения через бифуркацию удвоения периода и исчезновения) и проиллюстрировать соответствующими итерационными диаграммами.
2. Используя полученные в 1-м задании значения параметра λ , соответствующие первым 3-м бифуркациям удвоения периода, рассчитать экспериментальное значение универсальной константы δ по формуле (7).
3. Пронаблюдать переход от периодического к хаотическому режиму: найти критическое значение параметра λ , соответствующее переходу к хаосу, и проиллюстрировать данный переход соответствующим графиком.
4. В интервале значений параметра $\lambda \in [3.83, 3.86]$ найти «окно» периодичности (устойчивости) отображения, определить период цикла и область его существования по параметру. Пронаблюдать в указанном интервале значений λ каскад бифуркаций удвоения найденного цикла, определить соответствующие бифуркационные значения параметра. Проиллюстрировать соответствующими графиками.

Практическая работа N 2

“Исследование динамики двумерного отображения Эно”

1. Теоретические сведения

Отображение Эно (Henon map) было предложено в 1976 г. французским астрофизиком М. Эно (Michel Henon) как абстрактный пример динамической системы, обладающей странным аттрактором. Сейчас известно, что оно может служить для описания динамики ряда простых физических систем, таких как частица в вязкой среде под действием импульсных толчков, интенсивность которых зависит от координаты.

Двумерное квадратичное обратимое отображение Эно имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 - ax_n^2 + y_n, \\y_{n+1} &= bx_n.\end{aligned}\tag{9}$$

Динамику отображения (9) нужно анализировать на *фазовой плоскости* двух переменных (x, y) , задавая значения двух управляющих параметров a и b . Параметр b характеризует степень диссипативности отображения (9), $0 < b < 1$. Обычно его фиксируют на уровне $b = 0.3$. Параметр a отвечает за нелинейность, по смыслу он эквивалентен параметру λ в отображении Фейгенбаума.

Неподвижные точки отображения Эно находятся из условия

$$\begin{aligned}x^* &= 1 - ax^{*2} + y^*, \\y^* &= bx^*.\end{aligned}\tag{10}$$

Данная система уравнений имеет два решения, которые и определяют координаты неподвижных точек отображения (9):

$$\begin{aligned}x_1^* &= \frac{-(1-b) + \sqrt{(1-b)^2 + 4a}}{2a}, & y_1^* &= bx_1^*, \\x_2^* &= \frac{-(1-b) - \sqrt{(1-b)^2 + 4a}}{2a}, & y_2^* &= bx_2^*.\end{aligned}\tag{11}$$

При выполнении условия $a = \frac{-(1-b)^2}{4}$ в отображении (9) появляются устойчивая и неустойчивая точки в результате касательной (или седло-узловой)

бифуркации. Собственные значения или мультипликаторы неподвижных точек находятся из решения характеристического уравнения

$$\det \begin{bmatrix} -2ax^* - \mu & 1 \\ b & -\mu \end{bmatrix} = 0. \quad (12)$$

В результате имеем

$$\mu_{1,2} = -ax^* \pm \sqrt{ax^{*2} + b} \quad (13)$$

для каждой из 2-х неподвижных точек.

При $a \rightarrow 0$ неподвижные точки «уходят» на бесконечность. Зафиксируем параметр $b = 0.3$ и проанализируем характер устойчивости неподвижных точек при изменении параметра $a > 0$. Точка с координатами (x_2^*, y_2^*) является седлом для любых a , так как один из ее мультипликаторов всегда положителен и больше 1, а второй — отрицателен и близок к 0. Мультипликаторы другой неподвижной точки с координатами (x_1^*, y_1^*) по модулю меньше единицы, что соответствует устойчивому узлу. При $a = 0.3675$ один из мультипликаторов данной точки достигает значения -1 , что соответствует бифуркации удвоения периода и рождению цикла периода 2. При дальнейшем увеличении параметра a цикл периода 2 становится неустойчивым и рождается цикл периода 4 и т.д.

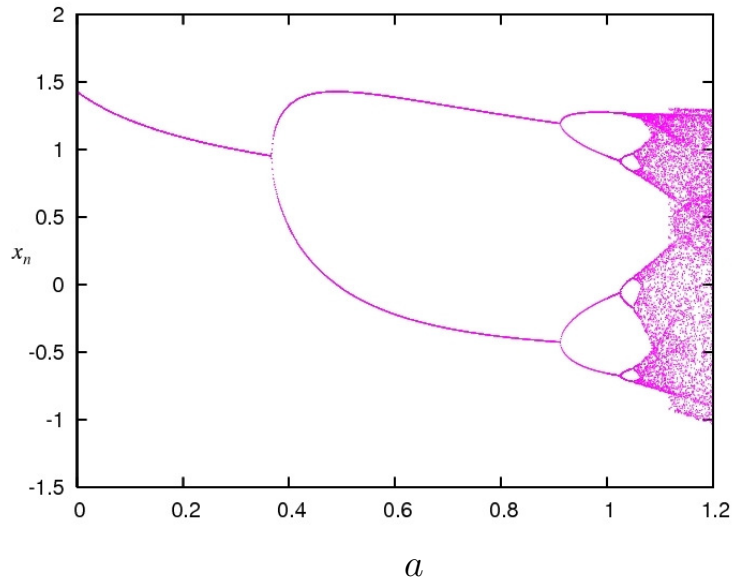


Рис. 5: Бифуркационная диаграмма для отображения Эно (9) при $b = 0.3$

В отображении Эно, как и в логистическом отображении, реализуется сценарий перехода к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода цикла (сценарий Фейгенбаума). Скорость сходимости бифуркационных значений параметра a определяется универсальной константой Фейгенбаума $\delta = 4.669201 \dots$. На рис. 5 приведена бифуркационная диаграмма для отображения (9) при $b = 0.3$, которая демонстрирует весь каскад бифуркаций удвоения периода, хаос и окна периодичности в хаосе.

По своим свойствам динамические системы делятся на *диссипативные* и *консервативные*. Если малый элемент фазового пространства (обычно его называют *фазовым объемом*) уменьшается при итерациях отображения, т.е. происходит сжатие элемента в фазовом пространстве, то динамические системы, обладающие подобным свойством, называются диссипативными. В таких системах возможно существование притягивающих объектов — *аттракторов*, соответствующих установившемуся динамическому режиму системы. Если в динамических системах фазовый объем не изменяется во времени, то они относятся к классу консервативных систем. С физической точки зрения, в консервативных системах энергия сохраняется, а в диссипативных — рассеивается.

При определенных фиксированных значениях параметров a и b отображение (9) демонстрирует свойство *мультистабильности* — одновременное сосуществование двух и более притягивающих подмножеств на фазовой плоскости. На рис. 6,а показаны фазовые портреты двух притягивающих подмножеств и их бассейны притяжения при фиксированных $a = 1.078$ и $b = 0.3$. Область белого цвета соответствует бассейну притяжения хаотического аттрактора в виде 4-х частей или лент; область серого цвета является бассейном притяжения 6-ленточного хаотического аттрактора. Из рисунка видно, что области притяжения двух сосуществующих хаотических множеств и их границы довольно сложные и, следовательно, реализация в системе того или иного режима будет строго зависеть от точности задания начальных условий.

Бассейн притяжения хаотического аттрактора при $a = 1.32$ (рис. 6,б) выглядит однородным, что свидетельствует о наличии лишь одного аттрактора в системе (9). Однако известно, что в системе сосуществуют устойчивые циклы больших периодов с очень узкими бассейнами притяжения, которые в численном счете не регистрируются.

За критической точкой перехода к хаосу (приблизительно $a = 1.059$ при

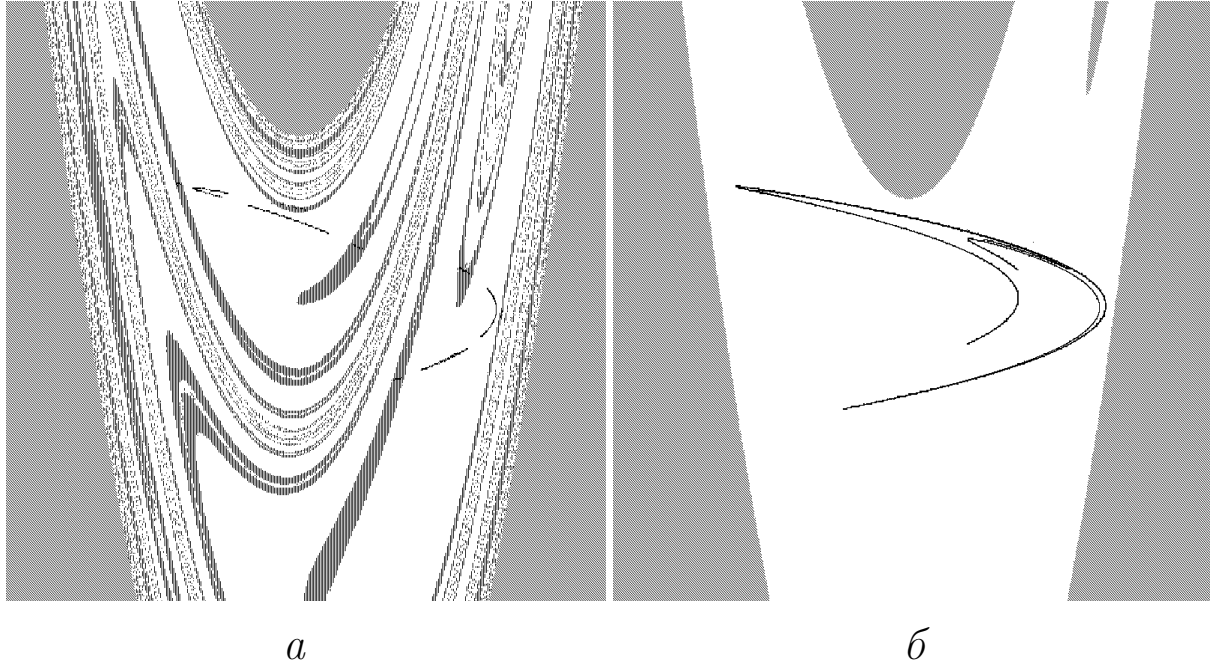


Рис. 6: Аттракторы, реализующиеся в системе Эно, и структура бассейнов их притяжения на фазовой плоскости (x_n, y_n) при $b = 0.3$ для $a = 1.078$ (*a*) и для $a = 1.32$ (*б*)

$b = 0.3$) в системе Эно наблюдается каскад бифуркаций связанности. Бифуркация *связанности* представляет собой объединение частей (лент) хаотического аттрактора, посещаемых изображающей точкой в определенном порядке. Для двумерного отображения бифуркация связанности выглядит как объединение соседних интервалов (отрезков), заполненных точками хаотической последовательности. На рис. 7 показаны фазовые портреты хаотических аттракторов в отображении Эно при последовательных бифуркациях связанности. При $a = 1.06$ в отображении (9) наблюдается 8-ленточный хаотический аттрактор (или восьмисвязанный хаотический аттрактор) (см. рис. 7, *a*). В результате бифуркации связанности, которая происходит при $a = 1.069$, соседние отрезки восьмисвязанного хаотического аттрактора сливаются и образуют четырехсвязанный аттрактор (рис. 7, *б*). При последующем увеличении параметра a реализуются еще 2 бифуркации связанности, в результате которых четырехсвязанный хаотический аттрактор преобразуется в двухсвязанный (рис. 7, *в*), который в свою очередь переходит в объединенный развитой хаотический аттрактор Эно (рис. 7, *г*).

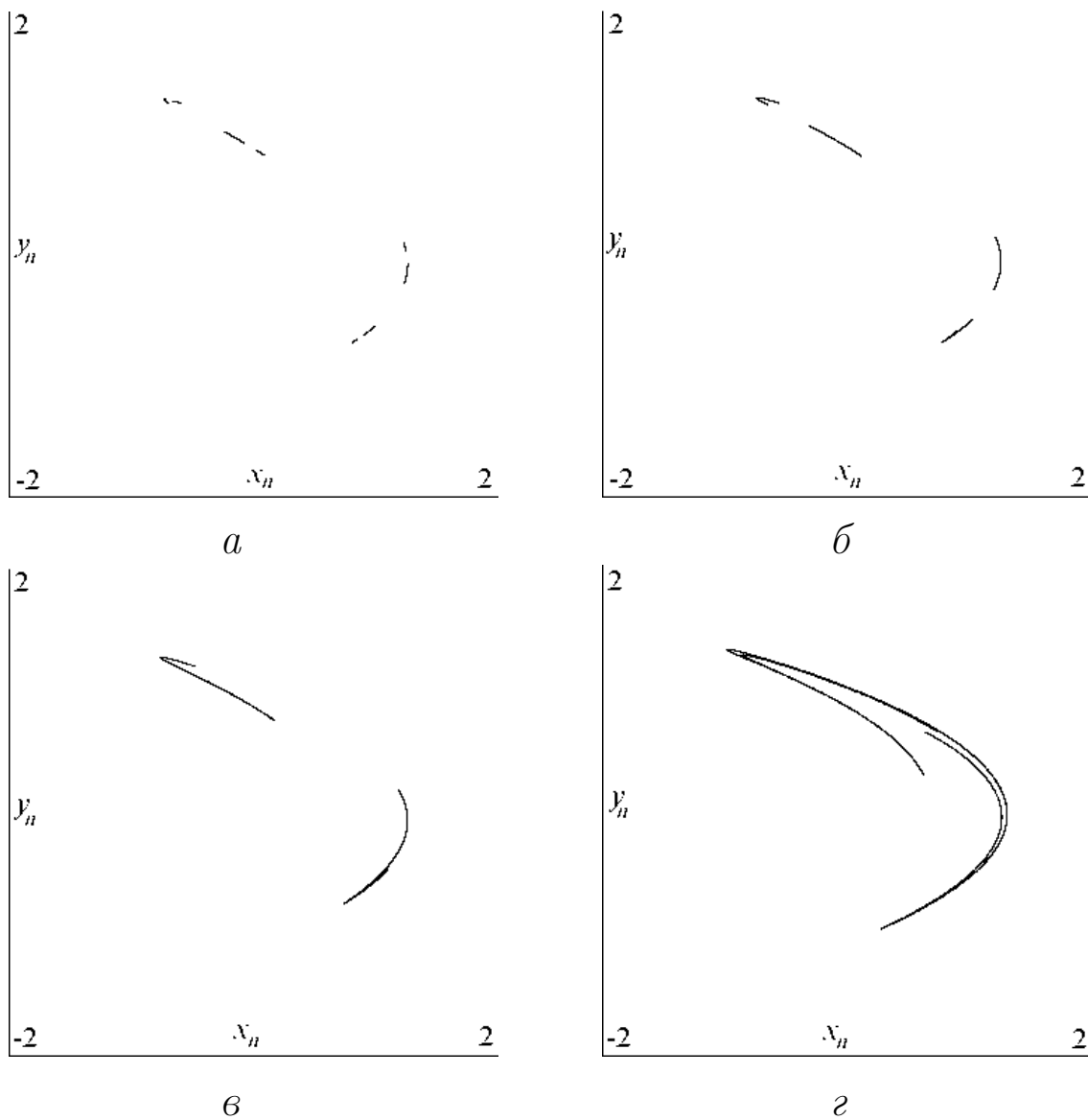


Рис. 7: Фазовые портреты хаотических аттракторов в системе Эно при последовательных бифуркациях связанности при $b = 0.3$ для $a = 1.06$ (*a*), $a = 1.07$ (*б*), $a = 1.086$ (*в*), $a = 1.16$ (*г*)

2. Экспериментальная часть

Лабораторная работа представляет собой программу, разработанную в среде LabView. Рабочее окно программы представлено на рис. 8.

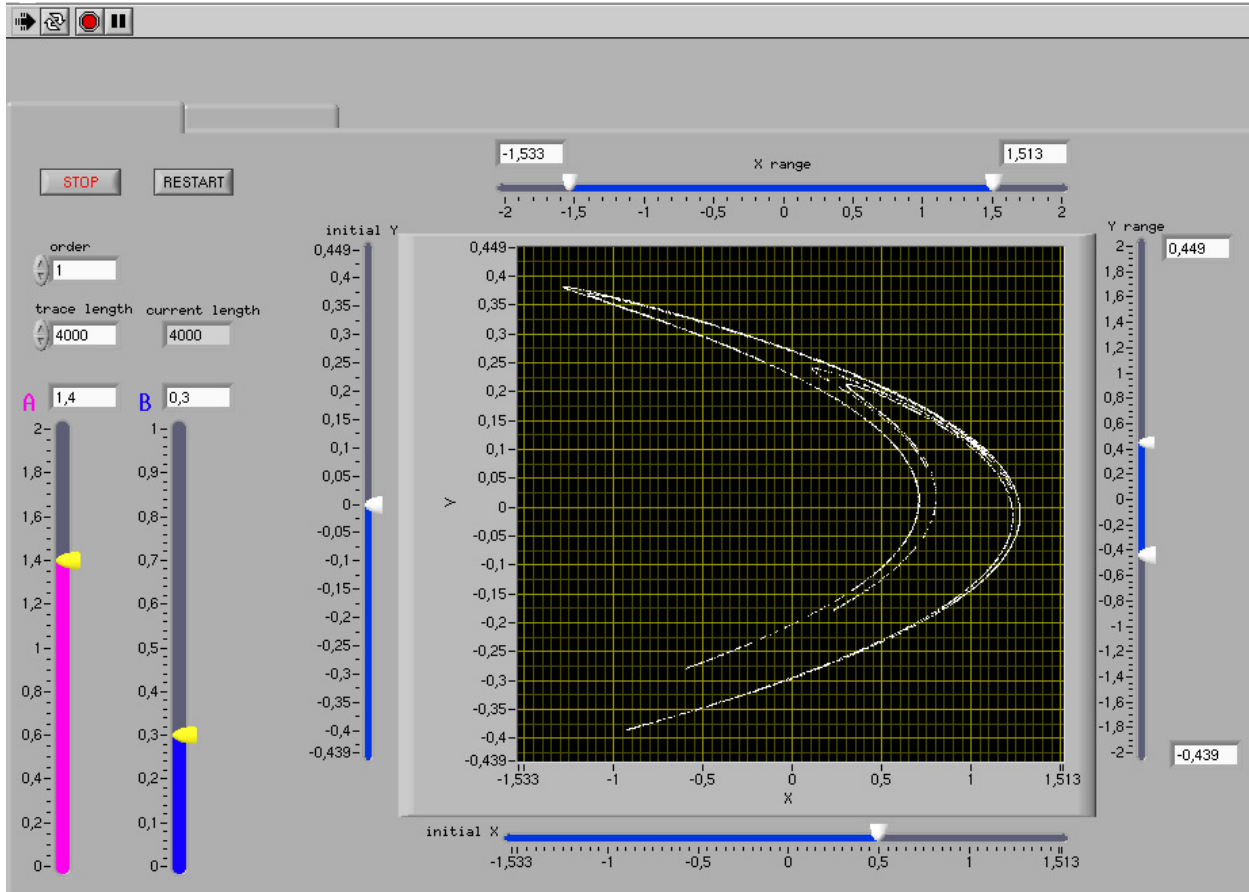


Рис. 8: Диалоговое окно программы для исследования динамики двумерного отображения Эно

Кнопками в верхней левой части рабочего окна производится соответственно запуск и остановка процесса итерирования.

Длина реализации задается величиной «*trace length*»; количество точек, выводимых на фазовую плоскость переменных (x, y) , задается величиной «*current length*», которая автоматически определяется величиной «*trace length*». При наблюдении периодических режимов эти величины можно задавать порядка 1000 итераций, для построения хаотических аттракторов — порядка 4000 итераций. Параметры отображения a и b изменяются с помощью соответствующих шкал (в данной работе параметр b фиксируется $b = 0.3$) или задаются вручную в соответствующих окошках. На правом

графике строится фазовый портрет отображения на плоскости переменных (x, y) . Масштаб по осям можно изменять с помощью верхней шкалы « x range» и правой шкалы « y range». Начальные условия изменяются с помощью нижней шкалы « $initial\ x$ » и левой шкалы « $initial\ y$ ». Изменения производятся в процессе счета и после внесенных изменений процесс вычислений возобновляется нажатием кнопки «RESTART».

3. Практические задания

1. Используя лабораторную установку, пронаблюдать каскад бифуркаций удвоения периода, т.е. циклы отображения периода 1, 2, 4, 8, определить бифуркационные значения параметра a и проиллюстрировать соответствующими фазовыми портретами.
2. Определить значение параметра a , соответствующее переходу к хаотическому режиму.
3. Пронаблюдать бифуркации связанности, т.е. слияние лент хаотического аттрактора, определить соответствующие бифуркационные значения параметра a и проиллюстрировать соответствующими фазовыми портретами.
4. Зафиксировав $a = 1.065$, $b = 0.3$ и изменяя начальные условия (x_0, y_0) , проиллюстрировать эффект мультистабильности в отображении Эно. Определить характер наблюдаемых режимов.

Практическая работа N 3

“Исследование динамики двумерного кубического отображения или отображения Холмса”

1. Теоретические сведения

Наряду с двумерным обратимым отображением Эно, ставшим классическим в исследованиях задач нелинейной динамики, достаточно популярным и широко используемым является также двумерное отображение с кубической нелинейностью. Оно имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= (b-1)x_n - bx_n^3 + y_n, \\y_{n+1} &= cx_n, \quad b > 0, \quad c < 1.\end{aligned}\tag{14}$$

В пределе бесконечно большой диссипации ($c \rightarrow 0$) получаем одномерное кубическое отображение, которое имеет три неподвижные точки: $x_1^* = 0$ и две симметрично расположенные $x_{2,3}^* = \pm\sqrt{\frac{b-2}{b}}$, которые определяют структуру аттракторов системы. Симметричные неподвижные точки возникают в результате бифуркации «вилка» при $b = 2$.

Согласно определению, неподвижные точки отображения (14) находятся из следующего условия:

$$\begin{aligned}x^* &= (b-1)x^* - bx^{*3} + y^*, \\y^* &= cx^*.\end{aligned}\tag{15}$$

Решая данную систему уравнений, получаем координаты трех неподвижных точек:

$$\begin{aligned}P_1 : \quad x_1^* &= 0, \quad y_1^* = 0, \\P_2 : \quad x_2^* &= +\sqrt{\frac{b+c-2}{b}}, \quad y_2^* = cx_2^*, \\P_3 : \quad x_3^* &= -\sqrt{\frac{b+c-2}{b}}, \quad y_3^* = cx_3^*.\end{aligned}\tag{16}$$

В зависимости от значений параметров b и c отображение (14) может иметь либо одну тривиальную неподвижную точку P_1 , либо три — $P_{1,2,3}$. Из выражений (16) видно, что симметричные неподвижные точки $P_{2,3}$ существуют при выполнении условия: $b > 2 - c$. Таким образом, как и в

одномерном кубическом отображении, неподвижные точки $P_{2,3}$ отображения (14) возникают в результате бифуркации «вилка» при $b = 2 - c$, когда один из мультипликаторов неподвижной точки P_1 проходит через $+1$.

В отображении (14), как и в системе Эно, хаотический аттрактор возникает через каскад бифуркаций удвоения периода. Отличие состоит лишь в том, что возникают два симметричных хаотических аттрактора, разделенных на плоскости сложной сепаратрисой. Первая бифуркация неподвижных точек $P_{2,3}$ имеет место при $b_1 = 2.4$ (параметр c фиксируется на уровне $= 0.3$ во всех последующих расчетах), далее следуют бифуркационные точки $b_2 = 2.745$, $b_3 = 2.81$, $b_4 = 2.825$ и т.д. Критической точкой рождения хаоса является $b^* = 2.83$. На рис. 9,а представлены развитые симметричные хаотические аттракторы вместе с бассейнами их притяжения для $b = 3.0$. С ростом b имеет место *кризис объединения* симметричных аттракторов: аттракторы при $b = 3.073$ сливаются в один. Соответствующая картина представлена на рис. 9,б, иллюстрирующем объединенный хаотический аттрактор для значения $b = 3.1$.

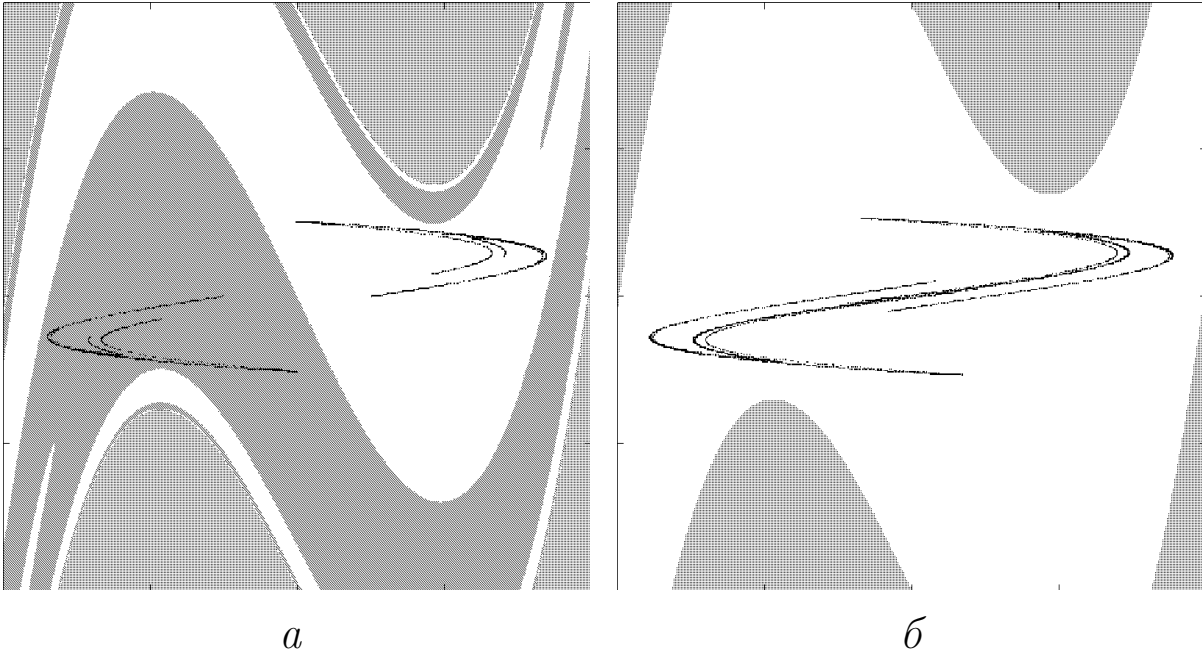


Рис. 9: Аттракторы, реализующиеся в двумерном кубическом отображении (14), и структура бассейнов их притяжения на фазовой плоскости (x_n, y_n) при $c = 0.3$ для $b = 3.0$ (а) и для $b = 3.1$ (б)

2. Экспериментальная часть

Целью практической работы является численное исследование динамики отображения Холмса (17) с использованием компьютерной программы, разработанной в среде LabView.

Двумерное отображение Холмса имеет кубическую нелинейность и записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= y_n, \\ y_{n+1} &= by_n - cx_n - y_n^3.\end{aligned}\tag{17}$$

Данная система имеет два положительных управляющих параметра $b > 0$, $c < 1$ и характеризуется тремя состояниями равновесия. Возникновение хаотического аттрактора происходит по тому же сценарию, что и в двумерном кубическом отображении (14).

Рабочее окно программы представлено на рис. 10.

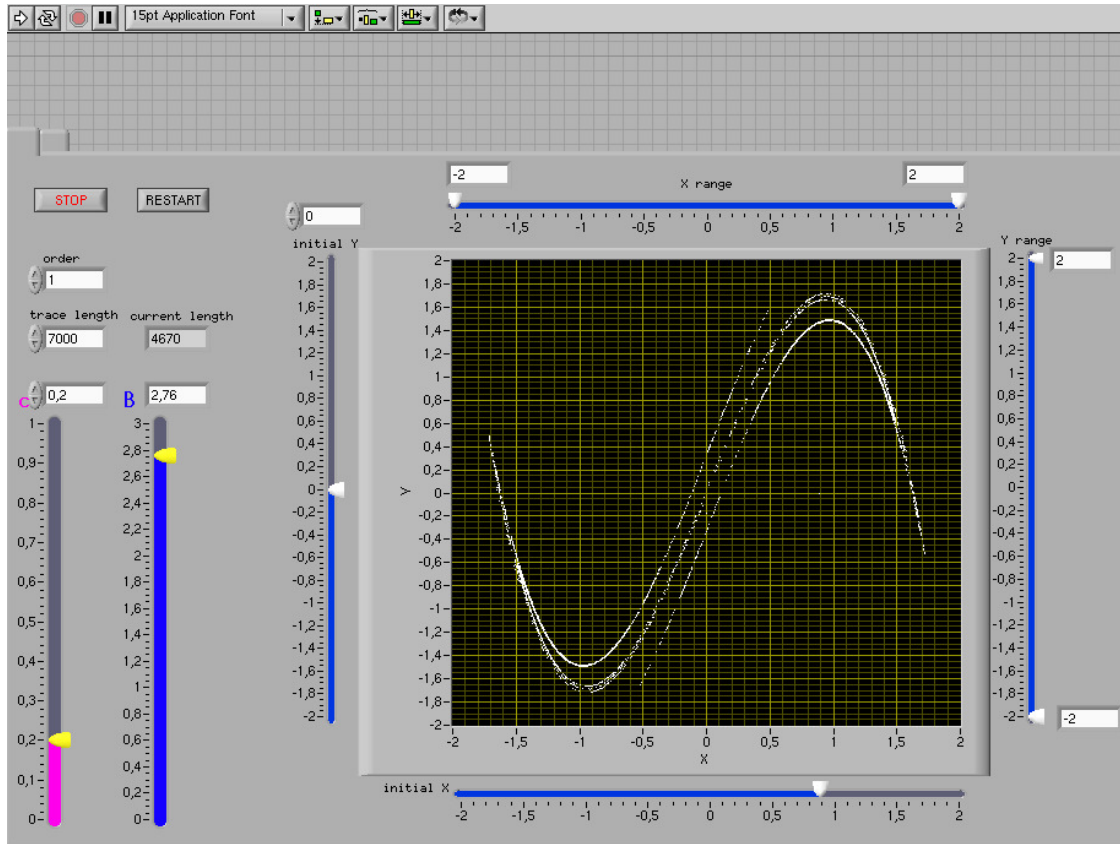


Рис. 10: Диалоговое окно программы для исследования динамики двумерного отображения Холмса

Кнопками в верхней левой части рабочего окна производится соответственно запуск и остановка процесса итерирования.

Длина реализации задается величиной «*trace length*»; количество точек, выводимых на фазовую плоскость переменных (x, y) , задается величиной «*current length*», которая автоматически определяется величиной «*trace length*». При наблюдении периодических режимов эти величины можно задавать порядка 1000 итераций, для построения хаотических аттракторов — порядка 4000 итераций. Параметры отображения b и c изменяются с помощью соответствующих шкал (в данной работе параметр c фиксируется $c = 0.2$) или задаются вручную в соответствующих окошках. На правом графике строится фазовый портрет отображения на плоскости переменных (x, y) . Масштаб по осям можно изменять с помощью верхней шкалы «*x range*» и правой шкалы «*y range*». Начальные условия изменяются с помощью нижней шкалы «*initial x*» и левой шкалы «*initial y*». Изменения производятся в процессе счета и после внесенных изменений процесс вычислений возобновляется нажатием кнопки «RESTART».

3. Практические задания

1. Найти аналитически координаты неподвижных точек периода 1 двумерного отображения Холмса (17) и определить область их существования.
2. Зафиксировать $c = 0.2$ для всех экспериментов. Найти значение параметра b , соответствующее бифуркации «вилка» и рождению 2-х симметричных неподвижных точек (циклов периода 1). Привести соответствующие фазовые портреты.
3. Выбрать начальные условия, при которых реализуется один из симметричных циклов периода 1, и проследить за последовательностью бифуркаций удвоения периода цикла и возникновением хаотического аттрактора. Записать соответствующие бифуркационные значения параметра b и проиллюстрировать соответствующими фазовыми портретами.
4. Изменив начальные условия, найти другой симметричный цикл периода 1 и проделать для него те же наблюдения и задания, как в п. 3.
5. Определить бифуркационное значение параметра b , при котором происходит кризис объединения симметричных хаотических аттракторов в один и привести соответствующий фазовый портрет.