

А.В.Хохлов

ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ В СВЯЗАННЫХ LCR -КОНТУРАХ

*Учебное пособие для спецпрактикума по курсу
"Теоретические основы радиоэлектроники"*

Ц е л ь р а б о т ы: исследование собственных и вынужденных колебаний, а также резонансных явлений в системе из двух LCR -контуров с емкостной связью.

Литература

1. Калинин В.И., Герштейн Г.М. Введение в радиофизику. М.: Гостехиздат, 1957
2. Хохлов А.В. Теоретические основы радиоэлектроники. Саратов. Изд-во Сарат. ун-та, 2005.
3. Харкевич А.А. Основы радиотехники. М.: Связьиздат, 1963
4. Стрелков С.П. Введение в теорию колебаний. М.: Наука, 1954.
5. Зернов Н.В., Карпов В.Г. Теория радиотехнических цепей. Л.: Энергия, 1972

Контрольные вопросы:

1. Что понимают под парциальными и нормальными частотами связанных контуров? Какими соотношениями связаны между собой нормальные и парциальные частоты в консервативной системе связанных контуров?
2. Какими формулами описываются коэффициент и фактор связи емкостно-связанных параллельных контуров? Каков физический смысл этих соотношений?
3. Как свести систему связанных контуров к эквивалентному контуру? Каковы соотношения для комплексной проводимости эквивалентного контура? В чем заключается физический смысл внесенных активной и реактивной проводимостей?
4. Каковы условия резонанса в связанных колебательных контурах? Каков вид АЧХ связанных контуров при индивидуальном, полном и сложных резонансах?
5. Какой вид резонанса имеет место, если фактор связи равен 0.9; 1.0; 1.6; 2.41; 3.4?

Задания для самостоятельной работы

1. Вывести уравнения (1), (2), (7), (15).
2. Построить графики Вина (зависимости приведенных нормальных частот от расстройки и коэффициента связи) для $k = 0.05, 0.1, 0.175$ и ζ от 0 до 1.5.
3. Вывести формулы для расчета резистивных сопротивлений катушек индуктивности.
4. Вывести формулы для резонансных резистивных проводимостей параллельных контуров.
5. Вывести уравнения АЧХ емкостно-связанных параллельных контуров.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Колебательные контуры называются *связанными*, если физические процессы, протекающие в одном из них, влияют на ход процессов в других контурах. Связанные *колебательные контуры* благодаря своим *частотным свойствам* являются основными элементами при построении полосовых фильтров, формирующих частотные характеристики радиовещательных и телевизионных каналов.

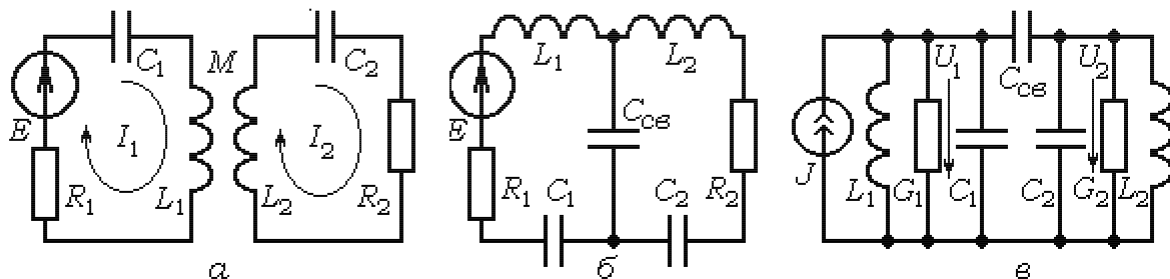


Рис. 1. Индуктивно- (а) и емкостно-связанные последовательные (б) и параллельные (в) контуры

В радиоэлектронике чаще других используются двухконтурные системы с индуктивной (рис. 1, а) и емкостной (рис. 1, б и 1, в) связью. В лабораторной работе будут исследоваться система двух параллельных колебательных контуров с емкостной связью (рис. 1, в).

Дифференциальные уравнения связанных параллельных контуров

Представим рассматриваемую двухконтурную систему (рис. 1, в) в виде совокупности двух *парциальных одноконтурных подсистем*, каждая из которых полностью описывается одной переменной. Выберем в качестве независимых переменных напряжения на контурах U_1 и U_2 и запишем интегро-дифференциальные уравнения в виде:

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dU_1}{dt} + G_1 U_1 + \frac{1}{L_1} \int U_1 dt + C_{св} \frac{d(U_1 - U_2)}{dt} &= J, \\ C_2 \frac{dU_2}{dt} + G_2 U_2 + \frac{1}{L_2} \int U_2 dt + C_{св} \frac{d(U_2 - U_1)}{dt} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{dU_1}{dt} + 2\alpha_1 U_1 + \omega_{01}^2 \int U_1 dt - k_1^C \frac{dU_2}{dt} &= \frac{J}{C_{1\Sigma}}, \\ \frac{dU_2}{dt} + 2\alpha_2 U_2 + \omega_{02}^2 \int U_2 dt - k_2^C \frac{dU_1}{dt} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $C_{1\Sigma} = C_1 + C_{\text{св}}$ и $C_{2\Sigma} = C_2 + C_{\text{св}}$ - полные емкости парциальных подсистем, $\alpha_1 = G_1/2C_{1\Sigma}$ и $\alpha_2 = G_2/2C_{2\Sigma}$ - показатели затухания контуров, $\omega_{01} = 1/\sqrt{L_1C_{1\Sigma}}$ и $\omega_{02} = 1/\sqrt{L_2C_{2\Sigma}}$ - их парциальные частоты, $k_1^C = \frac{C_{\text{св}}}{C_{1\Sigma}}$ и $k_2^C = \frac{C_{\text{св}}}{C_{2\Sigma}}$ - коэффициенты связи второго контура с первым и первого со вторым. Дифференцируя (2) по времени, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d^2U_1}{dt^2} + 2\alpha_1 \frac{dU_1}{dt} + \omega_{01}^2 U_1 - k_1^C \frac{d^2U_2}{dt^2} &= \frac{1}{C_{1\Sigma}} \frac{dJ}{dt}, \\ \frac{d^2U_2}{dt^2} + 2\alpha_2 \frac{dU_2}{dt} + \omega_{02}^2 U_2 - k_2^C \frac{d^2U_1}{dt^2} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Если правые части уравнений равны нулю (однородные уравнения), то (3) описывают собственные колебания в связанных контурах. Получившие название *связанных колебаний*. Когда хотя бы одно уравнение содержит в правой части функцию времени (чаще всего, периодическую), дифференциальное уравнение (3) становится неоднородным и описывает *вынужденные колебания*.

Собственные колебания в системе параллельных контуров

Будем рассматривать связанные колебания в предположении отсутствия потерь Будем рассматривать связанные колебания в предположении отсутствия потерь ($G_1 = G_2 = 0$). ($G_1 = G_2 = 0$).

Пусть предварительно заряженная до напряжения U_0 емкость C_1 включена в первый парциальный контур. Тогда в системе возникнут незатухающие колебания, описываемые системой однородных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d^2U_1}{dt^2} + \omega_{01}^2 U_1 - k_1^C \frac{d^2U_2}{dt^2} &= 0, \\ \frac{d^2U_2}{dt^2} + \omega_{02}^2 U_2 - k_2^C \frac{d^2U_1}{dt^2} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Будем искать решение уравнений (4) в виде

$$U_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi), \quad U_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi). \quad (5)$$

Подставляя (5) в (4), получим систему алгебраических уравнений относительно A_1 и A_2 :

$$\begin{aligned} (\omega_{01}^2 - \omega^2)A_1 + \omega^2 k_1^C A_2 &= 0, \\ \omega^2 k_2^C A_1 + (\omega_{02}^2 - \omega^2)A_2 &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Нетривиальное решение этой системы уравнений существует только при обращении в нуль ее детерминанта:

$$(\omega_{01}^2 - \omega^2)(\omega_{02}^2 - \omega^2) - k^2 \omega^4 = (1 - k^2)\omega^4 - (\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2)\omega^2 + \omega_{01}^2 \omega_{02}^2 = 0,$$

где $k = \sqrt{k_1^C k_2^C} = C_{\text{св}}/\sqrt{C_{1\Sigma}C_{2\Sigma}}$ - коэффициент связи. Решения этого биквадратного уравнения (отрицательные значения ω отброшены как не имеющие физического смысла)

$$\begin{aligned} \omega_{1,2}^2 &= \frac{\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 \pm \sqrt{(\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2)^2 - 4(1 - k^2)\omega_{01}^2 \omega_{02}^2}}{2(1 - k^2)} = \\ &= \frac{\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 \pm \sqrt{(\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2)^2 + 4k^2 \omega_{01}^2 \omega_{02}^2}}{2(1 - k^2)} \end{aligned} \quad (7)$$

представляет две возможные частоты связанных колебаний ω_1 и ω_2 , называемые *собственными* или *нормальными* частотами связанной системы.

Будем обозначать меньшую нормальную частоту через ω_1 , а бóльшую - через ω_2 . Общее решение уравнений (4) удовлетворяет равенствам:

$$\begin{aligned} U_1(t) &= A_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{12} \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \\ U_2(t) &= A_{21} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{22} \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \end{aligned} \quad (8)$$

т.е. в каждой парциальной системе одновременно существуют колебания с нормальными частотами ω_1 и ω_2 , называемые *нормальными* или *собственными модами* связанной колебательной системы.

- Нормальные моды связанной колебательной системы являются гармоническими функциями и *взаимно ортогональны*, т.е. возбуждение одной собственной моды не вызывает возбуждения остальных [2, с. 211]. Отсюда термин "нормальные колебания".
- Каждое нормальное колебание существует одновременно во всех парциальных системах, а результирующие колебания парциальных контуров полигармонические.

Зависимость нормальных частот частот от расстройки контуров. Связанность

Если ввести в рассмотрение безразмерные нормальные частоты $\Omega_{1,2} = \omega_{1,2}/\omega_{01}$ и расстройку парциальных контуров $\zeta = \omega_{02}/\omega_{01}$, то согласно (7) получим (значения $\Omega_{1,2} < 0$ отброшены):

$$\Omega_{1,2} = \sqrt{\frac{1 + \zeta^2 \pm \sqrt{(1 - \zeta^2)^2 + 4k^2\zeta^2}}{2(1 - k^2)}} \quad (9)$$

Зависимости $\Omega_1(\zeta)$ и $\Omega_2(\zeta)$ при трех фиксированных значениях k представлены на рис. 2. Это графики Вина.

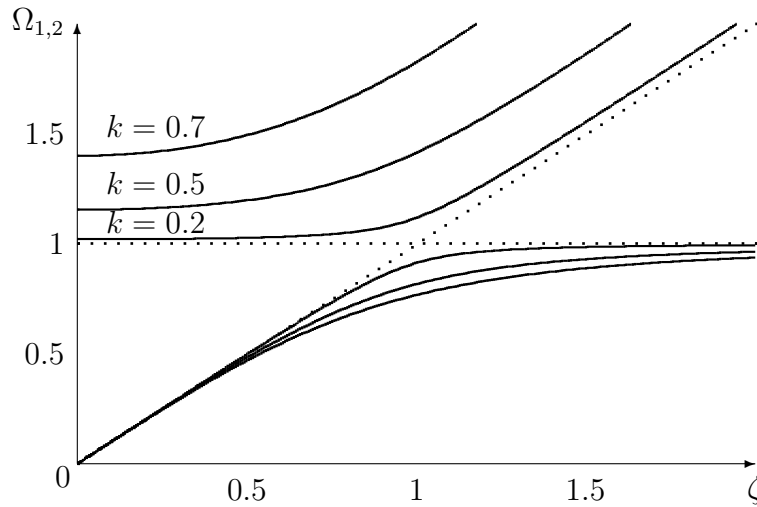


Рис. 2. Зависимости нормированных собственных частот Ω_1 и Ω_2 от расстройки контуров ζ при трех значениях связи. Пунктирными линиями изображен ход нормальных частот при нулевой связи

Как следует из (9) и рис. 2, собственная частота ω_2 при всех значениях k превышает бóльшую парциальную частоту, а ω_1 оказывается меньше меньшей парциальной частоты, т.е. всегда выполняется неравенство

$$\omega_1 \leq \omega_{01}, \omega_{02} \leq \omega_2.$$

При $\zeta = 0$ имеем $\Omega_1 = 0$, а $\Omega_2 = 1/\sqrt{1-k^2}$. При $\zeta \neq 0$ и малой связи ($k \rightarrow 0$)

$$\Omega_{1,2} = \sqrt{\frac{1 + \zeta^2 \pm (1 - \zeta^2)}{2}}$$

. Отсюда при $\omega_{01} > \omega_{02} (\zeta < 1)$ имеем $\Omega_1 = \zeta$, $\Omega_2 = 1$, а при $\omega_{01} < \omega_{02} (\zeta > 1)$ – $\Omega_1 = 1$, $\Omega_2 = \zeta$ (пунктирные линии на рис. 2).

Степень взаимосвязи между парциальными системами наиболее полно описывается специальным коэффициентом, введенным академиком Л.И.Мандельштамом [2, с.219] и получившим название *связанности*:

$$\sigma = \frac{2k\omega_{01}\omega_{02}}{|\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2|} = \frac{2k\zeta}{|1 - \zeta^2|}. \quad (10)$$

Связанность двухконтурной системы зависит и от величины коэффициента связи, и от соотношения собственных частот парциальных систем. Если частоты парциальных контуров близки, то даже при малых коэффициентах связи физические процессы в контурах существенно влияют друг на друга. И наоборот, при большой расстройке связанность контуров остается слабой. Отметим, что потери в контурах значительно ослабляют их связанность.

Связанные колебания при совпадении парциальных частот

Пусть контуры имеют одинаковые парциальные частоты $\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_0$ (индуктивности контуров могут отличаться и $k_1 \neq k_2$).

Нормальные частоты такой связанной системы удовлетворяют равенствам

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+k}}, \quad \omega_2 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-k}}. \quad (11)$$

При $k \rightarrow 1$ собственные частоты "расходятся": $\omega_1 \rightarrow \omega_0/\sqrt{2}$, $\omega_2 \rightarrow \infty$.

Кроме нормальных частот в общее решение (8) входят четыре неизвестные амплитуды $A_{11} \div A_{22}$ и две начальные фазы φ_1 и φ_2 . Для определения последних используем начальные условия задачи. Пусть при $t = 0$ имеем $U_1(0) = U_0$, $U_2(0) = 0$, $dU_1/dt(0) = dU_2/dt(0) = 0$. Тогда

$$U_1(0) = A_{11} \cos \varphi_1 + A_{12} \cos \varphi_2 = U_0, \quad U_2(0) = A_{21} \cos \varphi_1 + A_{22} \cos \varphi_2 = 0,$$

а в результате дифференцирования (8), имеем

$$\frac{dU_1}{dt}(0) = -A_{11}\omega_1 \sin \varphi_1 - A_{12}\omega_2 \sin \varphi_2 = 0,$$

$$\frac{dU_2}{dt}(0) = -A_{21}\omega_1 \sin \varphi_1 - A_{22}\omega_2 \sin \varphi_2 = 0,$$

Эти соотношения выполняются только при $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. Тогда

$$U_1(t) = A_{11} \cos \omega_1 t + A_{12} \cos \omega_2 t,$$

$$U_2(t) = A_{21} \cos \omega_1 t + A_{22} \cos \omega_2 t.$$

Для определения величин амплитуд $A_{11} \div A_{22}$ подставим (8) в одно из уравнений (4), например в первое, и получим

$$(\omega_0^2 - \omega_1^2)A_{11} + k_1^C \omega_1^2 A_{21}] \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + [(\omega_0^2 - \omega_2^2)A_{12} + k_1^C \omega_2^2 A_{22}] \cos(\omega_2 t + \varphi_2) = 0,$$

С учетом (11) имеем

$$A_{21} = -\frac{\omega_0^2 - \omega_1^2}{k_1^C \omega_1^2} A_{11} = -\frac{\omega_0^2 - \omega_0^2 / (1+k)}{k_1^C \omega_0^2 / (1+k)} A_{11} = -\frac{k}{k_1^C} A_{11} = -\sqrt{\frac{C_{1\Sigma}}{C_{2\Sigma}}} A_{11},$$

$$A_{22} = -\frac{\omega_0^2 - \omega_2^2}{k_1^C \omega_2^2} A_{12} = -\frac{\omega_0^2 - \omega_0^2 / (1-k)}{k_1^C \omega_0^2 / (1-k)} A_{12} = \frac{k}{k_1^C} A_{12} = \sqrt{\frac{C_{1\Sigma}}{C_{2\Sigma}}} A_{12}.$$

Согласно начальным условиям

$$U_1(0) = A_{11} + A_{12} = U_0, \quad U_2(0) = \sqrt{C_{1\Sigma} C_{2\Sigma}} (A_{11} - A_{12}) = 0, \quad \text{а } A_{11} = A_{12} = U_0/2.$$

Отсюда

$$U_1(t) = \frac{U_0}{2} (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) = U_0 \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t, \quad (12)$$

$$U_2(t) = \frac{U_0}{2} \sqrt{\frac{C_{1\Sigma}}{C_{2\Sigma}}} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) = U_0 \sqrt{\frac{C_{1\Sigma}}{C_{2\Sigma}}} \sin \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t. \quad (13)$$

Итак, связанные колебания в парциальных контурах являются бигармоническими (суммы нормальных мод), причем в первом контуре колебания первой и второй мод происходят в фазе, а во втором – в противофазе.

При больших значениях k связанные колебания $I_1(t)$ и $I_2(t)$ имеют сложную форму (рис. 3, а и 3, б). При малых значениях k разность нормальных частот удовлетворяет приближенному равенству

$$\omega_2 - \omega_1 = \omega_0 / \sqrt{1-k} - \omega_0 / \sqrt{1+k} \cong \omega_0 (1 + k/2) - \omega_0 (1 - k/2) = \omega_0 k,$$

и связанные колебания в контурах приобретают форму *биений*¹ (рис. 3, в и 3, г). При этом $I_0 \cos(\omega_2 - \omega_1)t/2$ и $I_0 \sqrt{L_1/L_2} \sin(\omega_2 - \omega_1)t/2$ можно трактовать как медленно меняющиеся амплитуды колебаний в первом и втором контурах с частотой $(\omega_1 + \omega_2)/2$ (см. [1, с. 100-104, 2, с. 221]).

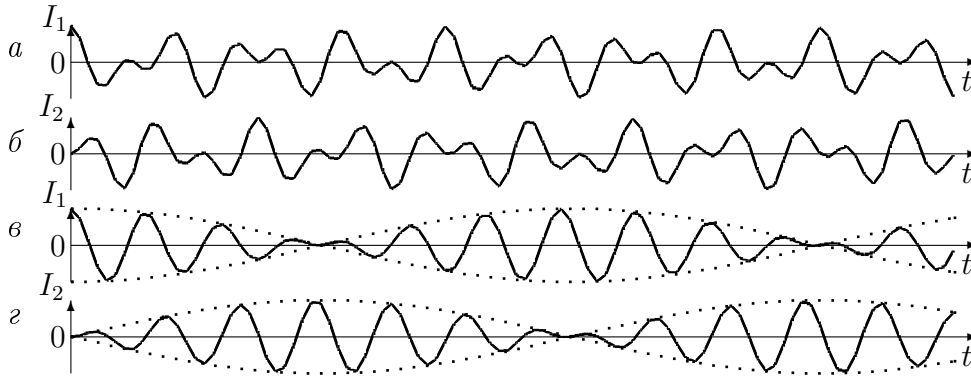


Рис. 3. Связанные колебания в первом (а, в) и втором (б, г) контурах двухконтурной системы для $k = 0.5$ (а, б) и $k = 0.15$ (в, г)

Как следует из (12) и (13), не только огибающие, но и сами колебания в контурах сдвинуты по фазе на 90° , т.е. максимальная величина тока в

¹Биения - колебания с периодически изменяющейся амплитудой, возникающие при наложении двух гармонических колебаний с близкими частотами

одном контуре достигается тогда, когда ток в другом контуре отсутствует. Огибающие сдвинуты во времени на четверть периода разностной частоты, т.е. каждую четверть периода

$$\frac{T}{4} = \frac{\pi/2}{(\omega_2 - \omega_1)/2} = \frac{\pi}{\omega_0 k}$$

происходит перекачка энергии из одного контура в другой.

До сих пор рассматривались собственные колебания в связанных системах контуров без потерь. При наличии потерь связанные колебания в парциальных контурах затухают и форма колебаний изменяется. Так, например, при малых значениях k по-прежнему имеют место биения собственных мод, но амплитуда огибающей уменьшается с течением времени по экспоненциальному закону (см [1, с.101, рис.5.3,б]).

Вынужденные колебания

Вынужденные колебания в связанных системах возникают под воздействием внешних источников (для упрощения анализа гармонических) и обычно рассматриваются в диссипативных системах, т.е. при наличии конечных потерь.

Характер процессов в диссипативных связанных системах определяется связанными колебаниями с нормальными частотами ω_1, ω_2 и вынужденными колебаниями с частотой внешнего воздействия ω . Поскольку собственные колебания с течением времени полностью затухают, установившиеся гармонические колебания всех координат имеют частоту ω .

Основные задачи анализа вынужденных колебаний в связанных системах заключаются в определении резонансных частот и построении амплитудно-частотных характеристик (АЧХ). С этой целью можно составить и решить неоднородные дифференциальные уравнения или (что оказывается быстрее и проще) использовать *метод замещения связанных контуров эквивалентным одиночным контуром*.

Замещение связанных контуров эквивалентным контуром

Сущность предлагаемой процедуры заключается во введении такого одиночного контура, у которого входные токи и напряжения совпадают с входными токами и напряжениями замещаемой связанной системы. Это условие будет выполнено при равенстве комплексных входных сопротивлений или проводимостей замещаемых систем.

Пусть в первичном контуре двухконтурной системы (рис. 1,в) действует гармонический ток

$$\dot{J}(t) = \dot{J}_m e^{j\omega t}.$$

Тогда для парциальных контуров получим следующие алгебраические уравнения

$$\begin{aligned} (G_1 + jB_{1\Sigma})\dot{U}_{1m} - jB_{св}\dot{U}_{2m} &= \dot{Y}_1\dot{U}_{1m} - jB_{св}\dot{U}_{2m} = \dot{J}_m, \\ -jB_{св}\dot{U}_{1m} + (G_2 + jB_{2\Sigma})\dot{U}_{2m} &= -jB_{св}\dot{U}_{1m} + \dot{Y}_2\dot{U}_{2m} = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

где \dot{J}_m , \dot{U}_{1m} и \dot{U}_{2m} – комплексные амплитуды тока, напряжений на первичном и на вторичном контурах; $\dot{Y}_1 = G_1 + jB_{1\Sigma}$, $\dot{Y}_2 = G_2 + jB_{2\Sigma}$ – комплексные проводимости первичного и вторичного контуров (G_1 и G_2 – их резистивные, а $B_{1\Sigma} = \omega C_{1\Sigma} - 1/\omega L_1$ и $B_{2\Sigma} = \omega C_{2\Sigma} - 1/\omega L_2$ – реактивные составляющие); $B_{св} = \omega C_{св}$ – реактивная проводимость элемента связи.

Разрешая уравнения (14) относительно \dot{U}_{1m} и \dot{U}_{2m} [2, с. 225], получим

$$\dot{U}_{1m} = \frac{\dot{Y}_2}{\dot{Y}_1\dot{Y}_2 + B_{\text{CB}}^2} \dot{J}_m, \quad \dot{U}_{2m} = \frac{jB_{\text{CB}}}{\dot{Y}_1\dot{Y}_2 + B_{\text{CB}}^2} \dot{J}_m, \quad (15)$$

и эквивалентную проводимость системы (рис. 4, а)

$$\begin{aligned} \dot{Y}_{\text{BX}} &= \frac{\dot{J}_m}{\dot{U}_{1m}} = G_{\text{BX}} + jB_{\text{BX}} = \\ &= \dot{Y}_1 + \frac{B_{\text{CB}}^2}{\dot{Y}_2} = G_1 + jB_{1\Sigma} + \frac{B_{\text{CB}}^2}{G_2^2 + B_{2\Sigma}^2} (G_2 - jB_{2\Sigma}). \end{aligned} \quad (16)$$

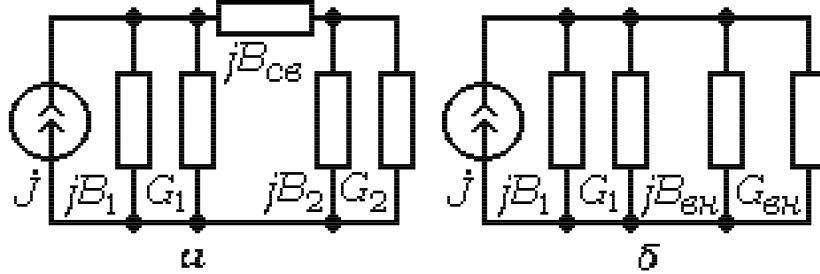


Рис. 4. Эквивалентные схемы: связанных контуров (а), контура замещения (б)

Комплексная проводимость контура замещения включает вносимые проводимости $G_{\text{вн}} = B_{\text{CB}}^2 G_2 / (G_2^2 + B_{2\Sigma}^2)$ и $B_{\text{вн}} = -B_{\text{CB}}^2 B_{2\Sigma} / (G_2^2 + B_{2\Sigma}^2)$.

Введение одноконтурных схем замещения является решающим фактором при изучении резонансных явлений, так как позволяет использовать развитую для одиночных контуров методологию.

Условия резонанса и резонансные частоты

Введем относительные (ν_1, ν_2) и обобщенные (ξ_1, ξ_2) расстройки контуров и новый параметр – *фактор связи* A . Тогда

$$\dot{Y}_1 = G_1 + j\omega_{01} C_{1\Sigma} (\omega/\omega_{01} - \omega_{01}/\omega) = G_1 (1 + j\omega_{01} C_{1\Sigma} \nu_{01} / G_1) = G_1 (1 + j\xi_{01}),$$

$$\dot{Y}_2 = G_2 + j\omega_{02} C_{2\Sigma} \omega/\omega_{02} - \omega_{02}/\omega = G_2 (1 + j\omega_{02} C_{2\Sigma} \nu_{02} / G_2) = G_2 (1 + j\xi_{02}),$$

где ν_{01}, ν_{02} – относительные, $\xi_{01} = \nu_{01} Q_1$, $\xi_{02} = \nu_{02} Q_2$ – обобщенные расстройки первого и второго контуров; Q_1 и Q_2 – их добротности, а

$$\dot{U}_{1m} = \frac{G_2 (1 + j\xi_2) \dot{J}_m}{G_1 G_2 (1 + j\xi_1) (1 + j\xi_2) + B_{\text{CB}}^2} = \frac{(1 + j\xi_2) \dot{J}_m / G_1}{(1 + j\xi_1) (1 + j\xi_2) + A^2}, \quad (17)$$

$$\dot{U}_{2m} = \frac{jB_{\text{CB}} \dot{J}_m}{G_1 G_2 (1 + j\xi_1) (1 + j\xi_2) + B_{\text{CB}}^2} = \frac{jA \dot{J}_m / \sqrt{G_1 G_2}}{(1 + j\xi_1) (1 + j\xi_2) + A^2}, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \dot{Y}_{\text{BX}} &= G_1 (1 + j\xi_{01}) + \frac{B_{\text{CB}}^2}{G_2 (1 + j\xi_{02})} = G_1 \left(1 + j\xi_{01} + \frac{B_{\text{CB}}^2 (1 - j\xi_{02})}{G_1 G_2 (1 + \xi_{02}^2)} \right) = \\ &= G_1 \left[1 + \frac{A^2}{1 + \xi_{02}^2} + j \left(\xi_{01} - \frac{A^2}{1 + \xi_{02}^2} \xi_{02} \right) \right], \end{aligned} \quad (19)$$

где $A = B_{\text{CB}} / \sqrt{G_1 G_2}$ – фактор связи контуров.

Зависимости $G_{\text{вн}}(\xi)$ и $B_{\text{вн}}(\xi)$ связанных контуров при $\zeta = 1$ ($\xi_{01} = \xi_{02} = \xi$) и одинаковых добротностях $Q_1 \cong Q_2$ для трех значений A представлены

на рис. 5. Они показывают, что резистивная часть входной проводимости (рис. 5,а) увеличивается с ростом A и достигает наибольшего значения при совпадении собственных частот парциальных контуров с частотой воздействия.

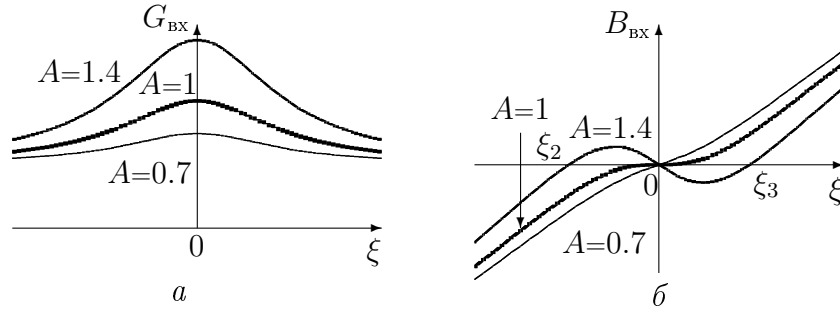


Рис. 5. Зависимости резистивной (а) и реактивной (б) составляющих входной проводимости связанных контуров от ξ при трех значениях фактора связи A

Реактивная часть входной проводимости (рис. 5,б) для малых A изменяется почти линейно и обращается в нуль при $\xi = 0$. Для $A = 1$ можно указать интервал частот в окрестности $\xi = 0$, в котором $B_{вх}(\xi) \cong 0$.

Обращение в нуль реактивной составляющей входной проводимости

$$\xi \left(1 - \frac{A^2}{1 + \xi^2} \right) = 0 \quad (20)$$

можно рассматривать [2, с. 197-198] в качестве *условий резонанса в двухконтурных системах* параллельных контуров. Таким образом, при $A < 1$ связанная система имеет единственную резонансную частоту $\omega = \omega_0$.

При $A > 1$ появляются еще два значения ξ_2 и ξ_3 (рис. 5,б), для которых $B_{вх}(\xi) = 0$, т.е. реактивная составляющая входной проводимости эквивалентного контура при $A > 1$ обращается в нуль на трех различных частотах внешнего воздействия (см. рис. 5,б). Можно показать [2, с. 227], что $|\dot{U}_{2m}|$ достигает максимальных значений при ξ_2 и ξ_3 (резонанс), а при $\xi_1 = 0$ напряжение на вторичном контуре оказывается меньше резонансных значений.

Точные значения резонансных частот [2, с. 228] удовлетворяют соотношениям

$$\omega_1 = \omega_0, \quad \omega_2 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + \sqrt{k^2 - d^2}}}, \quad \omega_3 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \sqrt{k^2 - d^2}}}, \quad (21)$$

где $d^2 = G_2^2 / \omega^2 C_{2\Sigma}^2$.

Уравнения амплитудно-частотных характеристик

Пусть $\omega_{01} = \omega_{02}$ Тогда из (17) и (18) имеем

$$|\dot{U}_{1m}(A, \xi)| = \frac{\sqrt{1 + \xi^2} |j_m| / G_1}{\sqrt{(1 + A^2 - \xi^2)^2 + 4\xi^2}}, \quad |\dot{U}_{2m}(A, \xi)| = \frac{A |j_m| / \sqrt{G_1 G_2}}{\sqrt{(1 + A^2 - \xi^2)^2 + 4\xi^2}}.$$

Графики нормированных АЧХ для различных значений A представлены на рис. 6.

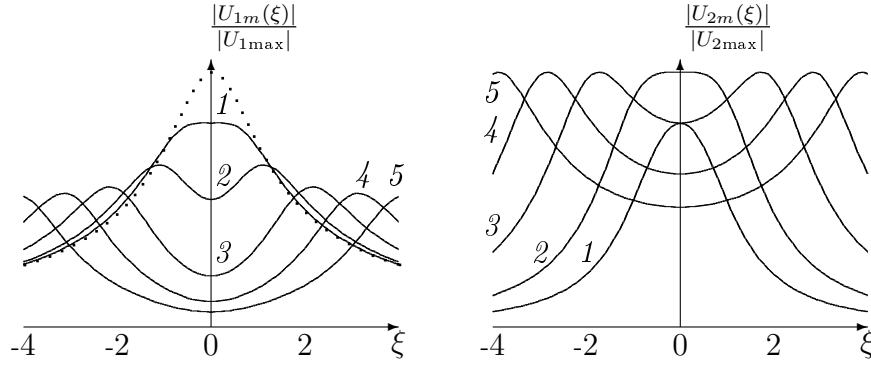


Рис. 6. Нормированные АЧХ первичного (а) и вторичного (б) контуров: 1 - $A=0.5$; 2 - $A=1$; 3 - $A=2$; 4 - $A=3$; 5 - $A=4$. Пунктир - АЧХ первичного контура при $A=0$

Как показывает анализ [2, с.231-233], АЧХ при малых значениях параметра A имеют вид одnogорбых резонансных кривых. При $A > 0.5$ АЧХ первичного тока и при $A > 1$ (после достижения критической связи) АЧХ вторичного тока становятся двугорбыми. С ростом связи резонансные частоты удаляются от ω_0 , а минимум на частоте ω_0 углубляется. При этом резонансные амплитуды $|\dot{U}_{1m}|/|U_{1\max}|$ уменьшаются, а $|U_{2m}|$ сохраняют то же значение, которого оно достигает при критической связи ($|U_{2m}(A=1, \xi=0)| = |U_{2\max}| = |\dot{J}_m|/2\sqrt{G_1G_2}$). Покажем это.

Когда функция принимает экстремальные значения, ее производная по ξ обращается в нуль. Приравнивая эту производную нулю, получим

$$\xi^3 - (A^2 - 1)\xi = 0 \quad \text{или} \quad \xi_1 = 0, \quad \xi_{2,3} = \pm\sqrt{A^2 - 1},$$

где $\xi_{2,3}$ соответствуют максимальным значениям $|\dot{U}_{2m}|$:

$$|\dot{U}_{2m}(A > 0, \xi = \pm\sqrt{A^2 - 1})|/|U_{2\max}| = 1.$$

Это замечательный результат!

- При закритической связи с ростом A полоса пропускания связанной системы увеличивается, а максимальные значения выходного (вторичного) тока не изменяются.

Итак, $|U_{2\max}| = |\dot{J}_m|/2\sqrt{G_1G_2}$ при любых $A \geq 1$. Это позволяет представить нормированную АЧХ связанной системы контуров в виде

$$\frac{|U_{2m}(A, \xi)|}{|U_{2\max}|} = \frac{2A}{\sqrt{(1 + A^2 - \xi^2)^2 + \xi^4}}. \quad (22)$$

Индивидуальный, полный и сложные резонансы

Пусть $\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_0$ и $Q_1 \cong Q_2$. Тогда возможны три разновидности резонансных явлений.

1. **Индивидуальный резонанс** ($A < 1$). Все реактивные проводимости связанной системы обращаются в нуль только на частоте ω_0 ($B_1 = B_2 = B_{\text{вн}} = B_{\text{вх}} = 0$). АЧХ имеет единственный максимум.

2. **Полный резонанс** ($A = 1$). Поскольку оба контура настроены на

одинаковую частоту и связь между контурами соответствует полной передаче тока из первичного контура во вторичный [2, с. 230], такой резонанс называется *полным*. Как было показано (рис. 5, б, жирная кривая), реактивная часть входной проводимости при $A=1$ обращается в нуль не только на частоте ω_0 , но и в ее окрестности. Вторичный ток в этой области частот достигает максимального значения, АЧХ (рис. 7, кривая 1) принимает П-образную форму, а полоса частот на уровне половинной мощности (-3 дБ) оказывается шире, чем у парциальных контуров. Рассчитаем эту полосу частот.

При $A=1$ имеем

$$\frac{|U_{2m}(1, \xi)|}{|U_{2\max}|} = \frac{2}{\sqrt{(2 - \xi^2)^2 + 4\xi^2}}.$$

На границах полосы пропускания, т.е. при $\xi = \pm \xi_{\text{гр}}$ (рис. 7)

$$\left(\frac{|U_{2m}(1, \xi_{\text{гр}})|}{|U_{2\max}|} \right)^2 = \frac{4}{(2 - \xi_{\text{гр}}^2)^2 + 4\xi_{\text{гр}}^2} = \frac{1}{2}.$$

Отсюда $\xi_{\text{гр}}^4 = 4$, а $\xi_{\text{гр}} = \pm \sqrt{2} \cong 1.41$. Поскольку $\xi_{\text{гр}} = Q\nu$, где Q – добротность контуров; ν – расстройка, для полосы частот получаем

$$2\Delta\omega = 2(\omega - \omega_0) = \sqrt{2}\omega_0/Q.$$

Отметим, что полный резонанс возможен и при $G_1 \neq G_2$, если

$$B_{\text{св}} = \sqrt{G_1 G_2}.$$

- При полном резонансе в двухконтурной системе ($\omega_{01} = \omega_{02}$, $A=1$) АЧХ системы имеет П-образную форму и принимает максимальное значение в окрестности $\omega = \omega_0$. Полоса частот на уровне -3 дБ в $\sqrt{2}$ раз шире, чем у парциальных контуров, образующих связанную систему.

3. Сложный резонанс ($\zeta=1, A>1$). Напомним, что при закритической связи ($A > 1$) АЧХ связанных контуров становятся двугорбыми. При этом выходное напряжение достигает в максимумах одинаковых значений, а на средней частоте ω_0 существует минимум.

Резонанс в связанных контурах при закритической связи называется *сложным*. Частотные характеристики связанных контуров для двух значений закритической связи изображены на рис. 7 (кривые 2 и 3).

С увеличением фактора связи $A = B_{\text{св}}/\sqrt{G_1 G_2}$ (а следовательно, и коэффициента связи $k = C_{\text{св}}/\sqrt{C_{1\Sigma} C_{2\Sigma}}$) резонансные частоты расходятся, ширина АЧХ увеличивается, причем амплитуды выходного напряжения в расходящихся максимумах (рис. 6, б) имеют величину, которая достигается при

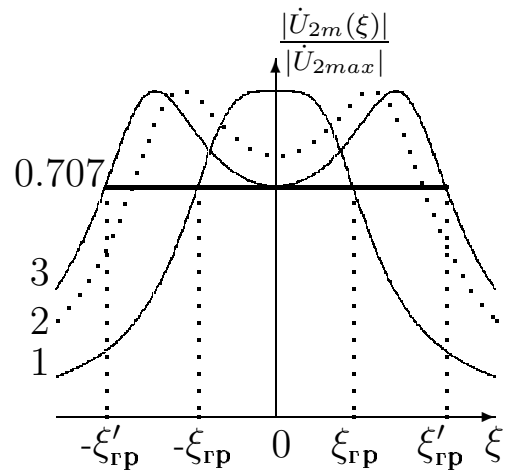


Рис. 7: АЧХ контуров: 1 – $A=1$; 2 – $A=2$; 3 – $A=2.41$

полном резонансе ($A=1$). Чем больше A , тем глубже провал на ω_0 . Наиболее интересен случай, когда провал между горбами опускается до уровня 0.707 (-3 дБ) и полоса частот системы (рис. 7) оказывается наибольшей (кривая 3).

Пусть при некотором значении фактора связи A и $\xi = 0$ выполняется соотношение $|UI_{2m}(A, 0)|/|U_{2\max}| = 1/\sqrt{2}$. Тогда $A^2 - 2\sqrt{2}A + 1 = 0$ и $A = \sqrt{2} \pm 1$. Так как $A > 1$, выбираем $A \cong 2.41$. С ростом расстройки $|U_{2m}(2.41, \xi)|/|U_{2\max}|$ сначала растет, достигая единичного значения, затем снова убывает. Значения $\xi = \pm\xi'_{\text{гр}}$, при которых $|U_{2m}(2.41, \xi)|/|U_{2\max}| = 1/\sqrt{2}$ (рис. 7), удовлетворяют равенству

$$\frac{4.82}{\sqrt{(1 + 2.42^2 - \xi'^2_{\text{гр}})^2 + 4\xi'^2_{\text{гр}}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отсюда $\xi'^4_{\text{гр}} - 9.616\xi'^2_{\text{гр}} - 0.114=0$, $\xi'^2_{\text{гр}}=4.808 \pm \sqrt{4.808^2 + 0.114} \cong 9.628$ (второе значение не имеет физического смысла), а $\xi'_{\text{гр}} = Q\nu \cong 3.103$.

- Двухконтурная связанная система при $\zeta = 1$ и закритической связи ($A > 1$) обладает двугорбой АЧХ, и полоса пропускаемых на уровне -3 дБ частот при $A \cong 2.41$ в 3.1 раза превышает полосы пропускания парциальных контуров.

Экспериментальная установка

Экспериментальная установка состоит из автономного блока (прибора) "СВЯЗАННЫЕ LCR-КОНТУРЫ", генератора сигналов GFG-8210, двухканального осциллографа GOS-6031 и электронного милливольтметра ВЗ-38, используемых в качестве измерительных приборов.

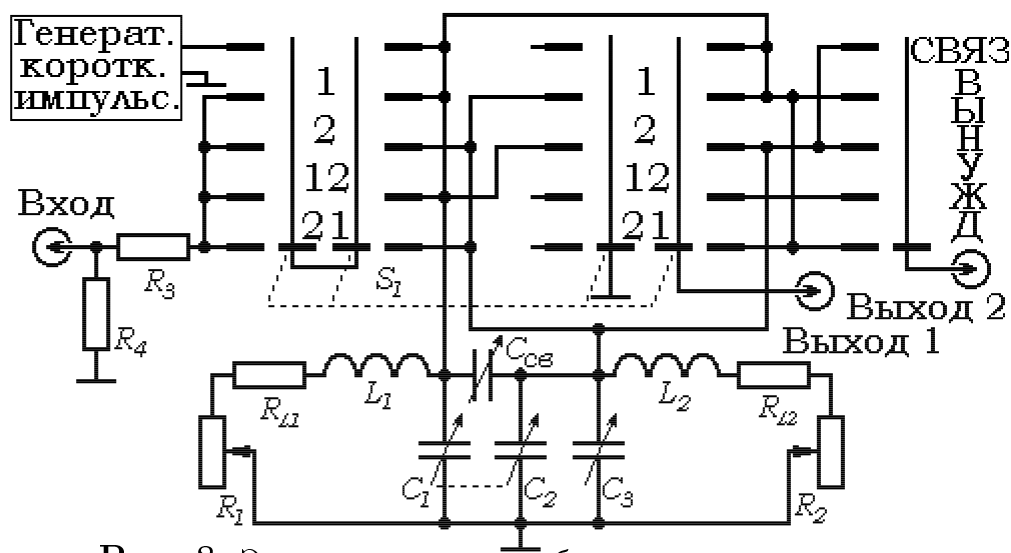


Рис. 8. Электрическая схема блока связанных контуров

Электрическая схема прибора "СВЯЗАННЫЕ LCR-КОНТУРЫ" представлена на рис. 8. Прибор содержит генератор коротких импульсов, два параллельных контура, связанных между собой переменным конденсатором с регулируемой емкостью $C_{\text{св}}$ от 5 до 40 пФ. Контуры имеют одинаковые катушки индуктивности $L_1 = L_2$ и реостаты R_1 и R_2 с регулируемым

сопротивлением от 0 до 1500 Ом. Оба контура одновременно перестраиваются с помощью сдвоенного конденсатора переменной емкости $C_1 = C_2$. Для взаимной расстройки контуров параллельно C_2 включен дополнительный переменный конденсатор C_3 .

Генератор сигналов GFG-8210 подключается к контурам через делитель из R_3 и R_4 , обеспечивающий неизменность потребляемого тока при любых сопротивлениях нагрузки (источник тока). Для ослабления шунтирующего действия входных емкостей осциллографа и милливольтметра контуры соединены с разъемами "Выход 1" и "Выход 2" через повторители напряжения (на схеме не показаны).

На передней панели прибора расположены ручки управления кнопка "СЕТЬ" для подключения прибора к сети переменного тока, "С_{1,2}, пФ" – настройка контуров (C_1, C_2)

"РАССТРОЙКА частота (-) (+)" – расстройка контуров (C_3),

"С_{св}, пФ" – величина связи,

"R₁, ом" – сопротивление 1 контура (R_1),

"R₂, ом" – сопротивление 2 контура (R_2),

"РЕЖИМ РАБОТЫ" – кнопочный переключатель режима работы (S_1) и три коаксиальных разъема:

"ВХОД" для подключения источника сигналов GFG-8210,

"ВЫХОД 1" для подключения 1-го канала осциллографа GOS-6031 "ВЫХОД 2" для подключения 2-го канала осциллографа GOS-6031 или электронного милливольтметра ВЗ-38.

Переключатель S_1 "РЕЖИМ РАБОТЫ" имеет пять положений.

В положении "СВЯЗ" исследуются связанные (собственные) колебания. Для этого к 1-му контуру подключается внутренний генератор коротких импульсов и 1-й канал осциллографа, а 2-й контур соединяется со 2-ым каналом осциллографа. Остальные 4 положения "ВЫНУЖД" предназначены для исследования вынужденных колебаний.

В положении "1" генератор сигналов GFG-8210, 1-й канал осциллографа и электронный милливольтметр подключаются к 1-му контуру, а 2-й контур закорачивается.

В положении "2" генератор сигналов GFG-8210, 1-й канал осциллографа и электронный милливольтметр подключаются к 2-му контуру, а 1-й контур закорачивается.

В положении "12" генератор сигналов подключаются к 1-ому контуру, а 1-й канал осциллографа и электронный милливольтметр – к 2-му контуру.

В положении "21" генератор сигналов подключаются к 2-му контуру, а 1-й канал осциллографа и электронный милливольтметр – к 1-му контуру. Во всех измерениях развертка осциллографа синхронизируются с генератором сигналов.

Порядок выполнения работы

Ознакомиться с электрической схемой экспериментальной установки и подключить контрольно-измерительные приборы в соответствии с обозначениями на передней панели. Подключить приборы к сети переменного тока, Установить генератор GFG-8210 в режим синусоидальных колебаний.

Катушки индуктивности L_1 и L_2 содержат ферритовые сердечники, и

величины индуктивностей зависят от частоты сигналов. Поэтому L_1 и L_2 при расчетах следует определять по таблице 1.

Таблица 1

Частотная зависимость индуктивностей контуров .

f,кГц	45.0	46.0	47.0	48.0	49.0	50.0	51.0	52.0	53.0	54.0	55.0
L,мГн	17.36	17.41	17.47	17.54	17.61	17.70	17.79	17.89	17.99	18.11	18.23
f,кГц	56.0	57.0	58.0	59.0	60.0	61.0	62.0	63.0	64.0	65.0	66.0
L,мГн	18.36	18.49	18.63	18.78	18.94	19.10	19.27	19.45	19.63	19.82	20.02
f,кГц	67.0	68.0	69.0	70.0	71.0	72.0	73.0	74.0	75.0	76.0	77.0
L,мГн	20.22	20.43	20.65	20.88	21.12	21.36	21.61	21.87	22.14	22.41	22.70
f,кГц	78.0	79.0	80.0	81.0	82.0	83.0	84.0	85.0			
L,мГн	22.99	23.30	23.61	23.94	24.28	24.62	24.98	25.35			

А. Исследование собственных колебаний

1. Исследование зависимостей собственных (нормальных) частот от расстройки и коэффициента связи

Экспериментальная установка позволяет задавать различные значения коэффициента связи k^C от 0.009 до 0.21. В работе предлагается снять и построить графики Вина – зависимости $\Omega_1 = \omega_1/\omega_{01}$ и $\Omega_2 = \omega_2/\omega_{01}$ от $\zeta = \omega_{02}/\omega_{01}$ для двух значений коэффициента емкостной связи между контурами $k^C = 0.05$ и $k^C = 0.175$.

Графики Вина представляют зависимости нормальных частот связанной системы от расстройки и коэффициента связи в режиме собственных колебаний. При небольших затуханиях резонансные частоты связанной системы не сильно отличаются от нормальных частот, и в качестве приближения для графиков Вина можно рассматривать зависимости резонансных частот связанной системы от расстройки и коэффициента связи в режиме вынужденных колебаний [4,с.288].

Рекомендуется перед измерениями рассчитать по формуле (9) и построить графики Вина для $k^C = 0.05$ и $k^C = 0.175$ и ζ от 0.5 до 1.5 с интервалом 0.05.

Коэффициент связи = 0.05

1. Подключить 1-й канал осциллографа к выходу 1, установить частоту генератора 70 кГц, переключатель **РЕЖИМ РАБОТЫ** – в положение **1**, установить **R₁**, и **R₂**, в положения, соответствующие нулевому сопротивлению, и подбирая емкости C_1 и $C_{св}$ так, чтобы $k^C = 0.05$, настроить 1-й контур в резонанс. Найденные значения C_1 , $C_{св}$ и $k^C = C_{св}/C_1$ записать.

2. Не изменяя C_1 и $C_{св}$, установить переключатель **РЕЖИМ РАБОТЫ** в положение **2** и ручкой **РАССТРОЙКА частота** (-) (+) настроить в резонанс на той же частоте 70кГц 2-й контур.

3. Установить переключатель **РЕЖИМ РАБОТЫ** в положение **12** и, изменяя частоту генератора, измерить резонансные частоты для $\zeta = \omega_{02}/\omega_{01} = 1$. Рассчитать $\Omega_1 = \omega_1/\omega_{01}$ и $\Omega_2 = \omega_2/\omega_{01}$ и отметить полученные значения на теоретически рассчитанных графиках Вина.

4. Не изменяя C_1 и $C_{св}$, устанавливая переключатель **РЕЖИМ РАБОТЫ** в положение **2**, ручкой **РАССТРОЙКА частота** (-) (+) настраивать 2-ой контур последовательно на частоты от 50 до 80 кГц и, переводя

переключатель **РЕЖИМ РАБОТЫ** в положение **12**, измерять резонансные частоты для различных значений ζ . Рассчитать Ω_1 , Ω_2 для всех ζ и отметить полученные значения на теоретически рассчитанных графиках Вина.

Коэффициент связи = 0.175

5. Установить частоту генератора 80 кГц, переключатель **РЕЖИМ РАБОТЫ** в положение **1** и, подбирая емкости C_1 и $C_{св}$ так, чтобы $k^C = 0.175$, настроить 1-й контур в резонанс. Найденные значения C_1 , $C_{св}$ и k^C записать.

6. Используя методику, описанную в п.п. 2 – 4, снять и построить на графиках Вина результаты измерений для $k^C = 0.175$.

Полученные результаты объяснить.

2. Исследование формы связанных колебаний

1. Установить $C_{св} = 40$ пф, настроить поочередно, переключая **РЕЖИМ РАБОТЫ** из положения **1** в положение **2** и обратно, оба контура на частоту 70 кГц. Подключить 2-й канал осциллографа к выходу 2 и установить переключатель **РЕЖИМ РАБОТЫ** в положение **СВЯЗ**.

2. Для наблюдения формы колебаний установить чувствительность каналов 20 мВ/дел, коэффициент развертки - 0.1 мс/дел и развертку в положение СН1/АС. Установить удобное расположение осей сигналов и зарисовать полученные осциллограммы.

3. Определить число периодов колебаний, укладываемых на полупериоде огибающей и сопоставить с теоретическим значением, соответствующим выбранной связи. Изменяя $C_{св}$, зарисовать несколько осциллограмм и рассчитать для них числа периодов колебаний, укладываемых на полупериоде огибающей.

Б. Исследование вынужденных колебаний

1. Определение характеристик параллельных колебательных контуров

1. Установить $R_{1,}$ и R_2 , в положения, соответствующие нулевому сопротивлению, и $C_{св} = 10$ пФ. Переключая **РЕЖИМ РАБОТЫ** из положения **1** в положение **2** и обратно и перестраивая генератор сигналов, измерить резонансную частоту контура и его полосу пропускания на уровне половинной мощности сначала для 1-го, а затем для 2-го контура на частоте 70 кГц. Вычислить добротности контуров.

2. Определить величины индуктивностей контуров на этих частотах и рассчитать их сопротивления R_{L1} и R_{L2} . Используя методику, описанную в [2, с. 186] рассчитать резистивные проводимости эквивалентных параллельных контуров и сравнить их с проводимостью элемента связи на тех же частотах.

2. Исследование частного, полного и сложного резонансов

Исследование различных видов резонансных явлений в связанных контурах производится в два этапа. Сначала наблюдается АЧХ в режиме свипирования частоты. Затем частота сигналов изменяется вручную, а АЧХ строится при дискретных значениях частоты.

1. Установить $R_{1,}$ и R_2 , в положения, соответствующие нулевому сопротивлению, $C_{св} = 38$ пФ и поочередно настроить оба контура на частоту 70 кГц.

2. Установить генератор сигналов в режим свипирования частоты. Для этого вытянуть регулятор MUNU-SWEEP установить наружную ручку в крайнее правое положение, а внутреннюю – в крайнее левое положение. Обе ручки регулятора SWEEP-TIME установить в крайнее правое положение.

3. Установить переключатель **РЕЖИМ РАБОТЫ** в положение **12** или в положение **21**, подключить 1-й канал осциллографа к выходу 1, сместить линию развертки к нижнему краю экрана, установить чувствительность канала 50 мВ/дел, коэффициент развертки - 5 мс/дел и развертку в положение EXT/АС. При этом на экране осциллографа появляется двугорбая АЧХ (резонансная кривая). Регулируя время сканирования и полосу девиации, можно растягивать и сжимать АЧХ. Ее необходимо зарисовать и объяснить, почему при выбранных параметрах контуров она оказывается двугорбой.

3. Изменяя сопротивления R_1 , и R_2 , при неизменном $C_{св}$, деформировать резонансную кривую до П-образной формы.

4*. Выключить частотное сканирование. Не изменяя настроек контуров, снять АЧХ сначала 1-го, затем 2-го контура, переключая переключатель **РЕЖИМ РАБОТЫ** из положения **1** в положение **2** и обратно. Рассчитать добротности и полные сопротивления контуров по описанной выше методике, а затем найти резистивные проводимости эквивалентных параллельных контуров G_1 , G_2 , фактор связи A и проверить выполняется ли условие полного резонанса.

5*. Используя полученные параметры связанной системы, рассчитать по формуле (22) нормированную АЧХ связанной системы. Для этого представить A и ξ в виде:

$$\xi = \frac{\omega_0 C_{1\Sigma}}{\sqrt{G_1 G_2}} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = \frac{1}{\sqrt{G_1 G_{\text{@}}}} \left(\omega C_{1\sigma} - \frac{1}{\omega L_1} \right), \quad A = \frac{\omega C_{св}}{\sqrt{G_1 G_2}}. \quad (23)$$

Установить переключатель **РЕЖИМ РАБОТЫ** в положение **12** или в положение **21**, подключить 1-й канал осциллографа к выходу 1, а к выходу 2 – электронный милливольтметр. Перестраивая генератор сигналов в пределах полосы пропускания и поддерживая амплитуду входного сигнала постоянной, снять и построить АЧХ связанной системы для полного резонанса.

Сопоставить полученную АЧХ с рассчитанной теоретически, изображая их на одном рисунке и в одинаковом масштабе.