А.В.Хохлов

ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ И СИСТЕМ ОПЕРАТОРНЫМ МЕТОДОМ

(Прямоугольный импульс)

Учебное пособие для спецпрактикума по курсу «Радиоэлектроника»

Ц е л ь р а б о т ы: экспериментальное исследование и расчет операторным методом преобразований периодической последовательности прямоугольных импульсов в линейных LCR-цепях.

Литература

1. Хохлов А.В. Теоретические основы радиоэлектроники. Саратов. Изд-во Сарат. ун-та, 2005.

2. Нефедов В.И. Основы радиоэлектроники и связи. М.: Высш.шк.,2002.

3. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Высш.шк., 1983.

Контрольные вопросы

1. При каких условиях электрическая LCR-цепь является линейной, при каких условиях - нелинейной?

2. Какова методика применения операторного метода к анализу прохождения сигналов через линейные цепи?

3. При каких соотношениях постоянной времени цепи и длительности импульса возможно дифференцирование (интегрирование) сигнала?

4. Каковы формы выходных сигналов, снимаемых с резистора, конденсатора и катушки индуктивности в RC- и RL-цепях при различных соотношениях длительности прямоугольного импульса и постоянной времени цепи?

Задания для самостоятельной работы

1. Вывести формулы (11)-(15), (17)-(19), (29)-(31).

2. Вывести формулы для K_R и K_C в RC-цепи, для K_L и K_R в RL - цепи в операторной форме.

3. Для указанных преподавателем типа и параметров цепи рассчитать операторным методом изображение выходного сигнала и сигнал $U_{\text{вых}}(t)$.

ТЕОРИТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1. Линейные цепи и системы

Цепь или система называется *линейной*, если протекающие в ней процессы описываются линейными дифференциальными или алгебраическими уравнениями и удовлетворяют *принципу суперпозиции*, согласно которому отклик системы на сумму воздействий равняется сумме откликов на отдельные воздействия:

$$\mathbf{T}\ \sum_{k}^{N} \alpha_k x_k(t) = \sum_{k}^{N} \alpha_k \mathbf{T}\ x_k(t), \tag{1}$$

где $\mathbf{T}$ – системный оператор системы.

В литературе встречается более узкое определение линейной системы как составленной из элементов, параметры которых *не зависят от величин воздействий*, т.е. от величин напряжений или токов. Это определение удобно использовать, если внутренняя структура системы известна и ее можно представить в виде соединения конкретных элементов, что и предполагается в данной лабораторной работе.

Строго говоря, все физические системы нелинейны. Но в определенных границах изменения переменных, характеризующих физический процесс, реальную систему можно *линеаризовать*, т.е. представить линейной моделью. Простейшей и в то же время достаточно универсальной моделью линейной системы является четырехполюсник, в котором связь входных и выходных сигналов задана системным оператором $\mathbf{T}$:

$$x_{\text{вых}}(t) = \mathbf{T}\, x_{\text{вх}}(t), \tag{2}$$

где $x_{\text{вх}}(t)$ – сигнал на входе четрехполюсника (воздействие), $x_{\text{вых}}(t)$ – сигнал на его выходе (отклик или реакция системы).

Для описания линейных систем кроме операторов $\mathbf{T}$ часто используются переходные и импульсные характеристики, представляющие временное описание. Если на входе четырехполюсника, лишенного начальных запасов энергии, задан сигнал в виде функции Хевисайда $x(t) = \sigma(t)$, то его реакция $x(t)$ удовлетворяет равенству

$$x_{\text{вых}}(t) = \mathbf{T}\, \sigma(t) = g(t). \tag{3}$$

Отклик $g(t)$ линейной системы на элементарное воздействие в виде функции Хевисайда $\sigma(t)$ будем называть *переходной характеристикой* системы. Для определения $g(t)$ не нужно знать внутреннюю структуру системы. Если же ее структура известна, то $g(t)$ можно рассчитать аналитически. Переходные характеристики линейных систем легко измерить осциллографическим методом.

Если на входе четырехполюсника, задан сигнал в виде дельта-функции Дирака $\delta(t)$, то его реакция $x_{\text{вых}}(t)$ удовлетворяет равенству

$$h(t) = \mathbf{T}\,\delta(t). \qquad (4)$$

Отклик $h(t)$ линейной системы на элементарное воздействие в виде дельта-функции Дирака $\delta(t)$ будем называть *импульсной характеристикой* системы. Анализ характеристик линейных цепей и систем в конечном счете сводится к исследованию временных изменений откликов на импульсные или непрерывные воздействия в течение определенного времени (теоретически от нуля до ∞). Пассивную линейную систему для низких частот [1, с.115 -116] можно представить простой LCR, CR или LR-цепью, составленной из элементов с сосредоточенными параметрами (рис. 1).

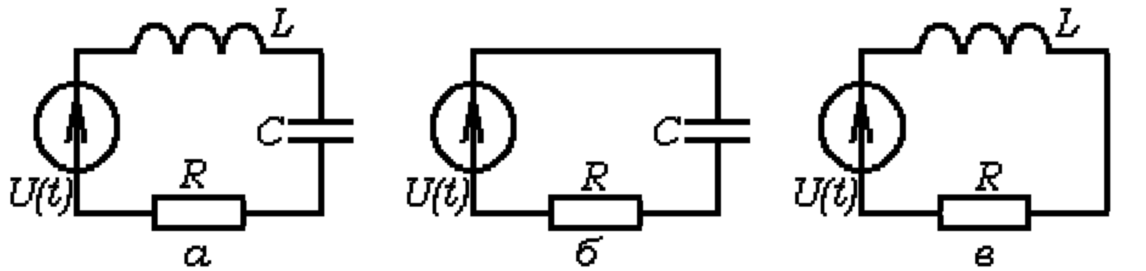

Рис. 1.

Когда все элементы цепи резистивные, она описывается линейным алгебраическим уравнением. Цепи, содержащие резистор R и один реактивный элемент, т.е. инерционные цепи с одной индуктивностью L или емкостью C описываются дифференциальными уравнениями первого порядка. Длительность запаздывания отдельных составляющих отклика относительно воздействия оказывается различной, что приводит к изменению формы сигнала. В RC- и RL-цепях может происходить дифференцирование или интегрирование сигналов.

Системы с двумя энергоемкими элементами разного вида (L и C) обладают резонансными свойствами и описываются дифференциальными уравнениями второго порядка. Когда $1/\sqrt{LC} > R/2L$ возникает *колебательный режим*, в противном случае – *апериодический режим*.

Электрическая цепь называется *дифференцирующей*, если мгновенные значения напряжения на выходе цепи пропорциональны производной по времени от мгновенных значений напряжения на входе цепи, т.е.

$$U_{\text{вых}} = M_1 \frac{dU_{\text{вх}}}{dt},$$

и *интегрирующей*, если мгновенные значения напряжения на выходе цепи пропорциональны интегралу от мгновенных значений напряжения на входе цепи, т.е.

$$U_{\text{вых}} = M_2 \int_0^t dU_{\text{вх}}\, dt,$$

где M_1 и M_2 – некоторые коэффициенты пропорциональности, зависящие от постоянной времени цепи.

Постоянной времени цепи называется промежуток времени τ, в течение которого параметр, характеризующий переходный процесс, изменяется в **e** раз.

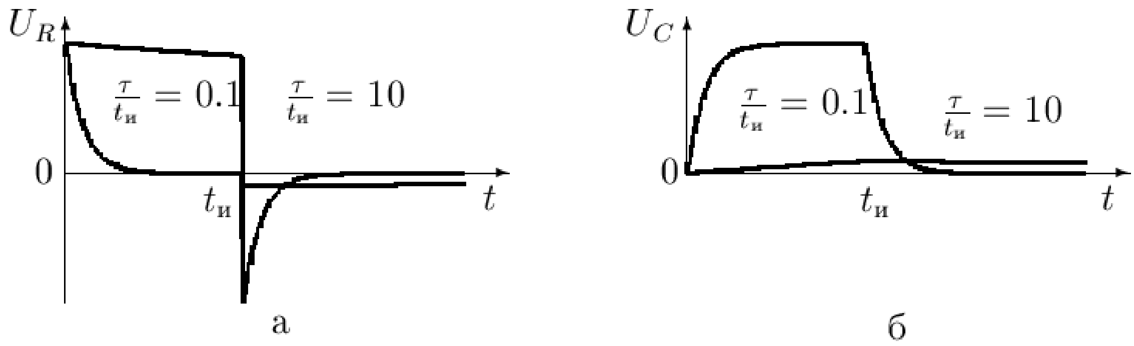

Рис. 2.

Идеальное дифференцирование и интегрирование в RC- или RL-цепях невозможно, но при малых значениях постоянной времени цепи τ выходное напряжение на R в RC-цепи или на L в RL-цепи представляет совокупность двух остроконечных импульсов, разделенных временем $t_и$ и напоминающих по форме дельта-функции Дирака, которые должны были появится в указанные моменты времени при строгом дифференцировании прямоугольного импульса. Остроконечные импульсы можно считать удовлетворительными моделями дельта-функций, а цепь *квазидифференцирующей* или «частично дифференцирующей», если

$$\frac{\tau}{t_и} < \frac{1}{10} \tag{5}$$

Те же цепи при больших значениях постояных времени цепи

$$\frac{\tau}{t_и} > 10 \tag{6}$$

могут выполнять функции интегрирующих устройств. При этом выходные напряжения в пределах длительности импульса изменяется почти линейно (почти идеальное интегрирование), а с окончанием импульса убывает по экспоненциальному закону.

Для экспериментального определения характеристик линейной цепи достаточно последовательно соединить источник сигналов с пассивными элементами цепи и поочередно измерить возникающие на них отклики. Основная задача состоит в правильном выборе сигнала воздействия.

Прежде всего, сигнал должен описываться простыми математическими соотношениями. Этому требованию удовлетворяет периодические последовательности импульсов прямоугольной формы. Нельзя не учитывать и того, что последовательность прямоугольных импульсов легко практически реализовать в лабораторной работе с помощью простейшего автогенератора – мультивибратора, а исследование характеристик линейных цепей при таком воздействии имеет большой практический смысл, так как прямоугольные импульсы наиболее часто встречаются в радиосистемах различного назначения (в радиолокации, в телевизионной и измерительной технике), а в цифровых устройствах и ЭВМ являются основным видом сигналов. При импульсных воздействиях наиболее эффективный анализ характеристик удается выполнить методом преобразования Лапласа.

2. Прямое и обратное преобразования Лапласа

Пусть $f(t)$ существует при $t \geqslant 0$ и не удовлетворяет условию абсолютной интегрируемости. Введем вспомогательную функцию $f_1(t) = f(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}$ и выберем параметр σ так, чтобы $f_1(t)$ была абсолютно интегрируемой[1]. Минимальное значение σ, при котором вспомогательная функция абсолютно интегрируема, называется *абсциссой сходимости*.

Абсолютно интегрируемую функцию $f_1(t)$ можно разложить на спектральные составляющие с помощью преобразования Фурье. Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-(\sigma+j\omega)t}dt = F(\sigma + j\omega). \tag{7}$$

Вводя комплексную лапласовскую переменную $s = \sigma + j\omega$ и учитывая,что $f(t)$ и $f_1(t)$ отличны от нуля при $t \geqslant 0$, получим:

$$\mathbf{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}dt. \tag{8}$$

[1]Построить абсолютно интегрируемую вспомогательную функцию не всегда возможно. Если $x(t)$ растет быстрее, чем любая экспонента, например $x(t) = \mathrm{e}^{t^2}$, то области сходимости не существует.

Преобразование $\mathbf{L}[f(t)]$ называется *преобразованием Лапласа.* Функция $F(s)$, зависящая от комплексной переменной $s=\sigma+j\omega$, называется *лапласовским, операторным* или *L-изображением* функции $x(t)$.

Для практического использования $\mathbf{L}$-преобразования необходимо правило восстановления $x(t)$ по заданной функции комплексной частоты $F(\sigma + j\omega)$ или обращения уже описанного процесса.

Поскольку спектральная плотность вспомогательной абсолютно интегрируемой функции $f_1(t)$ известна $(F(\sigma+j\omega))$, ее можно восстановить, используя обратное преобразование Фурье:

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\sigma + j\omega)\mathrm{e}^{j\omega t} d\omega. \tag{9}$$

Чтобы перейти от $f_1(t)$ к искомой функции $f(t)$, достаточно умножить обе части равенства (9) на $\mathrm{e}^{\sigma t}$, внести эту экспоненту под знак интеграла и заменить интегрирование по ω интегрированием по комплексной переменной $s = \sigma + j\omega \quad (d\omega = ds/j)$. Тогда получим

$$f(t) = \mathbf{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int\limits_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)\mathrm{e}^{st} ds. \tag{10}$$

Это интегральное соотношение называется *обратным* $\mathbf{L}$*-преобразованием.* Оно восстанавливает оригинал в виде функции вещественной переменной, чаще всего времени $(f(t))$, по ее лапласовскому изображению $F(s)$.

Построенная пара преобразований Лапласа

$$F(s) = \mathbf{L}[f(t)], \qquad f(t) = \mathbf{L}^{-1}[F(s)]$$

аналогична паре преобразований Фурье. Но преобразование Фурье представляет сигнал бесконечным числом гармонических составляющих, а преобразование Лапласа – бесконечным числом элементарных экспоненциально затухающих синусоидальных функций различных частот. Поэтому лапласовскую переменную $s = \sigma + j\omega$ часто называют *комплексной частотой*, а интегральное преобразование Фурье рассматривают как частный случай двустороннего преобразования Лапласа при $s = j\omega$.

Если в преобразованиях Фурье интегрирование ведется по оси $j\omega$, то в преобразованиях Лапласа – на комплексной плоскости вдоль прямой, параллельной мнимой оси $j\omega$.

Рассмотрим $\mathbf{L}$-изображения широко распространенных функций:

а) изображение $F(s)$ функции Хевисайда $\sigma(t)$ имеет вид

$$F(s) = \mathbf{L}[\sigma(t)] = \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-st} dt = -\frac{\mathrm{e}^{-st}}{s}\bigg|_0^\infty = \frac{1}{s}, \tag{11}$$

$$\textbf{б)} \quad F(s) = \mathbf{L}[\mathrm{e}^{-\alpha t}\sigma(t)] = \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-(\alpha+s)t} dt = -\frac{\mathrm{e}^{-(\alpha+s)t}}{s+\alpha}\bigg|_0^\infty = \frac{1}{s+\alpha}, \tag{12}$$

$$\textbf{в)} \quad F(s) = \mathbf{L}[\mathrm{e}^{\pm j\omega t}\sigma(t)] = \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-(s\mp j\omega)t} dt = -\frac{\mathrm{e}^{-(s\mp j\omega)t}}{s\mp j\omega}\bigg|_0^\infty = \frac{1}{s\mp j\omega}, \tag{13}$$

$$\begin{gathered}\textbf{г)} \quad F(s) = \mathbf{L}[\cos\omega t\cdot\sigma(t)] = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty (\mathrm{e}^{j\omega t} + \mathrm{e}^{-j\omega t})\mathrm{e}^{-st} dt = \\ = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{s+j\omega}\right) = \frac{s}{s^2+\omega^2},\end{gathered} \tag{14}$$

$$\begin{gathered}\textbf{д)} \quad F(s) = \mathbf{L}[\sin\omega t\cdot\sigma(t)] = \frac{1}{2j}\int\limits_0^\infty (\mathrm{e}^{j\omega t} - \mathrm{e}^{-j\omega t})\mathrm{e}^{-st} dt = \\ = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega}\right) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}.\end{gathered} \tag{15}$$

В двух последних случаях использована теорема линейности $\mathbf{L}$-преобразований.

3. Основные свойства преобразований Лапласа

Будем формулировать основные свойства $\mathbf{L}$-преобразований в виде теорем.

1. Теорема линейности. Если $F_i(s) = \mathbf{L}[f_i(t)]$, то изображение алгебраической суммы сигналов равно алгебраической сумме их изображений:

$$F(s) = \mathbf{L}[\sum_{i=1}^N \alpha_i f_i(t)] = [\sum_{i=1}^N \alpha_i F_i(s)]. \tag{16}$$

2. Теорема об изображении запаздывающего сигнала:

$$\mathbf{L}[f(t-\tau)] = \mathrm{e}^{-s\tau}\mathbf{L}[f(t)]. \tag{17}$$

3. Теорема о смещении изображения является, по существу, обратной для теоремы об изображении запаздывающего сигнала, т.е.

$$\mathbf{L}[\mathrm{e}^{-\alpha t} f(t)] = F(s+\alpha). \tag{18}$$

Итак, при умножении оригинала на экспоненциальный множитель $\mathrm{e}^{-\alpha t}$ изображение смещается в области комплексных частот на величину α, а при умножении изображения сигнала на экспоненциальный множитель $\mathrm{e}^{-s\tau}$ оригинал смещается во времени на величину τ. Из этих теорем следуют два частных случая: изображения синусоиды и косинусоиды с экспоненциально затухающими амплитудами с учетом формул (14), (15) и (18) имеют вид

$$\mathbf{L}[\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos\omega t] = \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}, \qquad \mathbf{L}[\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin\omega t] = \frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}. \tag{19}$$

4. Лапласовское изображение производной от сигнала соответствует аналогичной теореме для спектров, но спектральная теорема справедлива только при нулевых начальных условиях. Рассмотрим общий случай. Пусть $\mathbf{L}[f(t)] = F(s)$. Изображение $F_1(s)$ производной от сигнала имеет вид

$$F_1(s) = \int\limits_0^\infty \frac{df}{dt}\mathrm{e}^{-st}dt.$$

Интегрируя это выражение по частям, получим:

$$F_1(s) = f(t)\mathrm{e}^{-st}\Big|_0^\infty + s\int\limits_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-st}dt = -f(0) + sF(s).$$

Таким образом, справедливо равенство

$$\mathbf{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = -f(0) + s\mathbf{L}[f(t)] \tag{20}$$

а изображение временной производной сигнала содержит значение функции при $t = 0$, т.е. начальное условие задачи. Если многократно использовать формулу (20), то теорему об изображении производной можно обобщить на производные более высоких порядков:

$$\mathbf{L}\left[\frac{d^n f}{dt^n}\right] = s^n\mathbf{L}[f(t)] - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}\left.\frac{df}{dt}\right|_{t=0} - \ldots - s\left.\frac{d^{n-2}f}{dt^{n-2}}\right|_{t=0} - \left.\frac{d^{n-1}f}{dt^{n-1}}\right|_{t=0}.$$

Изображение временной производной n-го порядка теперь содержит кроме начального значения функции еще и начальные значения ее производных до $n-1$-го порядка включительно.

5. Изображение интеграла не зависит от начальных условий. Пусть дана функция $\phi(t) = \int\limits_0^t f(w)dw$, а ее изображение $\mathbf{L}[\phi(t)] = F(s)$. Производная функции $\phi(t)$ удовлетворяет соотношению $d\phi(t)/dt = f(t)$.

Пусть $\mathbf{L}[f(t)] = F_1(s)$. Согласно теореме о производной сигнала для $F_1(s)$ получаем выражение $F_1(s) = sF(s) - \phi(0)$. Поскольку $\phi(0) = 0$ (верхний предел интеграла равен нижнему), изображение интеграла принимает вид

$$\mathbf{L}\left[\int\limits_0^t f(w)dw\right] = \frac{1}{s}\mathbf{L}[f(t)]. \tag{21}$$

6. Теорема о производной изображения: если

$$\mathbf{L}[f(t)] = F(s), \quad \text{то} \quad -\frac{dF(s)}{ds} = \mathbf{L}[tf(t)]. \tag{22}$$

Эту теорему нетрудно доказать, если продифференцировать соотношение (8) по комплексной переменной s. Теорему о производной порядка n от изображения функции можно получить, если многократно использовать формулу (22):

$$\mathbf{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}.$$

Теорема о производной изображения имеет важные следствия:

6(а) если $f(t) = \sigma(t)$, то

$$\mathbf{L}[t\sigma(t)] = \frac{1}{s^2}, \qquad \mathbf{L}[t^n\sigma(t)] = \frac{n!}{s^{n+1}}; \tag{23}$$

6(б) если $f(t) = \mathrm{e}^{-\alpha t}$, то

$$\mathbf{L}[t\mathrm{e}^{-\alpha t}] = \frac{1}{(s+\alpha)^2}, \qquad \mathbf{L}[t^n\mathrm{e}^{-\alpha t}] = \frac{n!}{(s+\alpha)^{n+1}}. \tag{24}$$

Отношение комплексной амплитуды отклика линейной системы на гармоническое воздействие к комплексной амплитуде воздействия называется *комплексной функцией передачи* цепи $\dot{H}(j\omega)$, а отношение изображений отклика и воздействия – *операторной передаточной* или *системной функцией* $H(s)$. Это частотные характеристики линейной цепи или системы.

Комплексная функция передачи $\dot{H}(j\omega)$ представляет прямое преобразование Фурье импульсной характеристики $h(t)$ линейной цепи. Справедливо и обратное преобразование Фурье. Поэтому

$$\dot{H}(j\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}dt, \qquad h(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dot{H}(j\omega)\mathrm{e}^{j\omega t}d\omega. \tag{25}$$

Системная функция $H(s)$ представляет **L**-изображение импульсной характеристики $h(t)$. Поэтому

$$H(s) = \int\limits_0^{\infty} h(t)\mathrm{e}^{-st}dt, \qquad h(t) = \frac{1}{2\pi j}\int\limits_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} H(s)\mathrm{e}^{st}ds. \tag{26}$$

Итак, формулы (25) и (26) устанавливают взаимно-однозначные соответствия временных и частотных описаний. Частотное описание цепей и систем тоже позволяет находить отклики на произвольные (неэлементарные) воздействия [1,с. 153-154]. Методика экспериментального исследования и расчета преобразований сигналов с помощью частотных описаний исследуются в лаборатроной работе.

4. Принципы расчета и моделирования характеристик линейных систем

Расчет спектральным методом [1,с.153] отклика линейной цепи на периодическое воздействие $\dot{U}(t) = \dot{U}(t+T)$ является весьма сложным, так как период сигнала T прходится делить на N равных частей, а воздействие разлагать в ряд Фурье

$$\dot{U}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{C}_n \mathrm{e}^{jn\omega_I t},$$

где T – период сигнала, $\omega_I = 2\pi/T$ – круговая частота его первой гармоники. Далее для каждой гармоники воздействия $\dot{C}_n$ рассчитывается комплексный коэффициент передачи цепи $\dot{K}_U(jn\omega_I)$, вычисляются комплексные амплитуды гармоник в отклике цепи $\dot{C}_n = |\dot{C}_n||\dot{K}_U(n\omega_I)|\mathrm{e}^{j(\varphi_{Kn}+\varphi_n)}$ и суммируются при каждом значении $t_i = iT/N$ в виде

$$\dot{U}(t_i) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{C}_n \mathrm{e}^{jn\omega_I t_i} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\dot{C}_n||\dot{K}_U(n\omega_I)|\mathrm{e}^{j(n\omega_I t_i+\varphi_{Kn}+\varphi_n)}.$$

Более простыми оказываются вычисления временных реализаций выходных сигналов методом преобразований Лапласа, когда операторные изображения выходных сигналов сразу преобразуются в непрерывные временные функции. Начнем с операторных изображений прямоугольных импульсов и операторных системных функций LCR-цепей.

Операторное представление последовательности импульсов. Представим прямоугольный импульс с амплитудой U_0 и длительностью $t_\text{и}$ (рис. 3,а) наложением двух сдвинутых во времени функций Хевисайда (рис. 3,б):

$$U(t) = U_0\sigma(t) - U_0\sigma(t - t_и). \qquad (27)$$

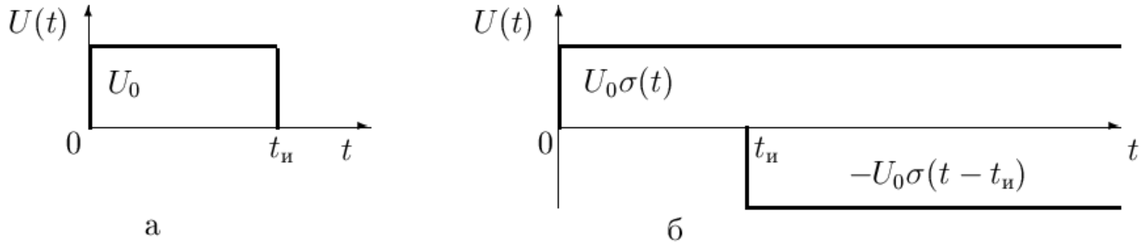

Рис. 3.

Используя изображение функции Хевисайда и теорему запаздывания (17), представим изображение $U(s)$ функции $U(t)$ в виде

$$U(s) = \frac{U_0}{s} - \frac{U_0}{s}\mathrm{e}^{-st_и} = \frac{U_0}{s}\left(1 - \mathrm{e}^{-st_и}\right). \qquad (28)$$

Периодическую последовательность импульсов (рис. 4) можно представить в виде суммы сдвинутых на kT изображений. Эти формулы предполагается вывести самостоятельно.

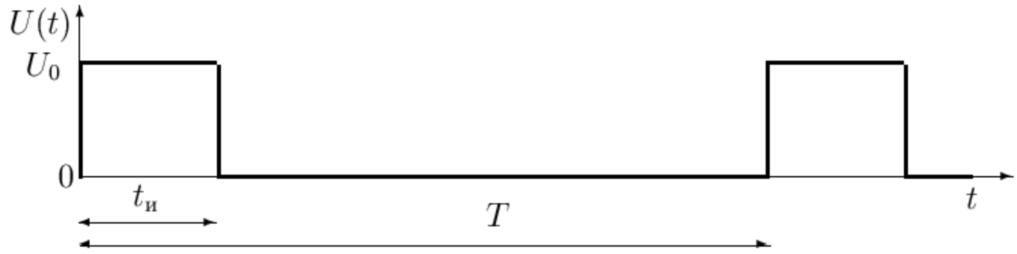

Рис. 4.

Комплексные и операторные коэффициенты передачи линейных цепей. В лаборатоной работе исследуются характеристики LCR, RC и RL-цепей (рис. 1). Две последние являются частными случаями LCR-цепи при $L=0$ и $1/C=0$.

Комплексная амплитуда тока, вызванного в LCR-цепи действием источника ЭДС $U(t) = U_0\mathrm{e}^{j\omega t}$, имеет вид

$$\dot{I}_m = \frac{U_0}{R + j\omega L + 1/j\omega C}.$$

Тогда для комплексных и операторных коэффициентов передачи имеем:

$$\dot{K}_R(\omega) = \frac{\dot{I}_m R}{U_0} = \frac{R}{R + j\omega L + 1/j\omega C}, \quad K_R(s) = \frac{R}{R + sL + 1/sC} = \frac{sR/L}{s^2 + sR/L + 1/LC}, \qquad (29)$$

$$\dot{K}_L(\omega)=\frac{j\omega L\dot{I}_m}{U_0}=\frac{j\omega L}{R+j\omega L+1/j\omega C},\quad K_L(s)=\frac{sL}{R+sL+1/sC}=\frac{s^2}{s^2+sR/L+1/LC}, \tag{30}$$

$$\dot{K}_C(\omega)=\frac{\dot{I}_m/j\omega C}{U_0}=\frac{1/j\omega C}{R+j\omega L+1/j\omega C},\quad K_C(s)=\frac{1/sC}{R+sL+1/sC}=\frac{1/LC}{s^2+sR/L+1/LC}. \tag{31}$$

Комплексные и операторные коэффициенты передачи RC- (рис. 1,б) и RL-цепи (рис. 1,в) предполагается вывести самостоятельно из (29)-(31) при $L = 0$ и $C \to \infty$ и показать, что они монотонно изменяются с частотой.

Если входной сигнал (28) и операторный коэффициент передачи (29)-(31) представлены изображениями, то их произведение, например, $U_{R\text{вых}}(s)$, тоже будет функцией комплексной частоты s, т.е. является лапласовским изображением выходного сигнала:

$$\begin{aligned} U_{R\text{вых}}(s) = \frac{F_1(s)}{F_2(s)}(1-\mathrm{e}^{-st_\text{и}}) &= \frac{U_0}{s}\left(1-\mathrm{e}^{-st_\text{и}}\right)\frac{sR/L}{s^2+sR/L+1/LC} = \\ &= \frac{2\alpha U_0}{s^2+2\alpha s+\omega_0^2}(1-\mathrm{e}^{-st_\text{и}}), \end{aligned} \tag{32}$$

где $\alpha = R/2L, \quad \omega_0^2 = 1/LC$. Но задачу можно считать решенной лишь тогда, когда выходной сигнал является функцией времени.

Для перехода от изображения $F(s)$ к оригиналу $f(t)$ в общем случае используется формула Римана-Меллина, но большинство L-изображений радиоэлектронных сигналов представляют дробно-рациональные функции, т.е. отношения многочленов. Отношения называются *правильными*, когда степень многочлена в числителе меньше, чем степень знаменателя. L-изображения функций включения, экспоненциальных и экспоненциально затухающих или нарастающих синусоидальных или косинусоидальных сигналов представляют правильные дробно-рациональные функции.

Многочлен n-й степени с вещественными коэффициентами имеет n корней, вещественных или попарно-сопряженных. Корни многочлена-числителя $F(s)$ обращают дробно-рациональную функцию в нуль и называются *нулями*, а s, при которых многочлен-знаменатель обращается в нуль, а $F(s)\to\infty$, называются *полюсами* дробно-рациональной функции. Если полюсы (нули) функции различны, то они называются *простыми*. Если же среди них встречаются одинаковые значения, то полюсы (нули) называются *кратными*. Расположение нулей и полюсов L-изображения полностью определяет структуру сигнала-оригинала.

Рассмотрим методы восстановления аналитической формы сигналов по их изображениям. Основу методов составляет разложение правильных дробно-рациональных функций на элементарные дроби, для которых известны оригиналы.

Пусть изображение некоторой функции представляе правильное отношение, т.е. степень m многочлена $F_1(s)$ меньше степени n многочлена $F_2(s)$. Тогда

$$F(s) = \frac{F_1(s)}{F_2(s)}. \tag{33}$$

Задача заключается в том, чтобы представить $F(s)$ в виде суммы простых дробей, для которых известны оригиналы. С этой целью используем две известные из математики теоремы.

Теорема 1: действительный или комплексный многочлен $F(s)$ степени n относительно s может быть единственным способом представлен произведением n линейных множителей:

$$F_2(s)=a_0s^n+a_1s^{n-1}+\ldots+a_{n-1}s+a_n=a_0\prod_{i=1}^{n}(s-s_i),$$

где s_i – корни многочлена $F_2(s)$.

Теорема 2: отношение многочленов $F_1(s)$ степени m и $F_2(s)$ степени $n\,(n>m)$ может быть представлено в виде суммы *элементарных дробей*, соответствующих корням многочлена $F_2(s)$. В рассматриваемой лабораторной работе все корни простые. Поэтому

$$F(s) = \frac{F_1(s)}{F_2(s)} = \sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{s-s_i} = \frac{A_1}{s-s_1}+\frac{A_2}{s-s_2}+\cdots+\frac{A_n}{s-s_n}. \tag{34}$$

Коэффициенты A_i называются *вычетами*. Самый простой способ вычисления A_i таков. Если умножить обе части равенства (34) на $(s-s_k)$:

$$\frac{F_1(s)}{F_2(s)}(s-s_k) = A_k + (s-s_k)\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}\frac{A_i}{(s-s_i)},$$

о при $s \to s_k$ все слагаемые, кроме A_k, обращаются в нуль, а левая часть равенства превращается в неопределенность так как $F_2(s)$ содержит $(s-s_k)$ в качестве сомножителя. Раскрывая неопределенность по правилу Лопиталя, получим:

$$\lim_{s\to s_k}\frac{F_1(s)(s-s_k)}{F_2(s)}=\lim_{s\to s_k}\frac{F_1(s)+(s-s_k)F_1'(s)}{F_2'(s)}=\left.\frac{F_1(s)}{F_2'(s)}\right|_{s=s_k}=A_k, \qquad (35)$$

а окончательное выражение для оригинала принимает вид:

$$f(t)=\mathbf{L}^{-1}[F(s)]=\sum_{k=1}^{n}\frac{F_1(s_k)}{F_2'(s_k)}\mathrm{e}^{s_k t}\sigma(t). \qquad (36)$$

Описанная методика применима и в тех случаях, когда один из корней $F_2(s)$ равен нулю, т.е. $F_2(s)=s\Phi(s)=s\prod_{k=1}^{n}(s-s_k)$. Тогда

$$f(t)=\mathbf{L}^{-1}[F(s)]=\frac{F_1(0)}{\Phi(0)}\sigma(t)+\sum_{k=1}^{n}\frac{F_1(s_k)}{s_k\Phi'(s_k)}\mathrm{e}^{s_k t}\sigma(t). \qquad (37)$$

Это соотношение предполагается вывести самостоятельно.

Функция $f(t)$, соответствующая L-изображению, имеющему только простые полюсы, состоит из суммы экспоненциальных функций и постоянного сигнала. Если корни $F_2(s)$ комплексно-сопряженные, а их вещественные части отрицательны, то искомый сигнал состоит из затухающих с течением времени косинусоидальных или синусоидальных функций. Если же вещественные части корней положительны, то функции нарастают со временем.

Пример 1. Пусть изображение сигнала отклика некоторой цепи на элементарное воздействие в виде функции Хевисайда $\sigma(t)$ имеет вид

$$F(s)=\frac{U_0}{s}\frac{s+3}{(s+2)(s^2+2s+2)}.$$

Нетрудно видеть, что L-изображение сигнала имеет нуль при $s=-3$ и четыре полюса. Прежде всего найдем корни третьего сомножителя $F_2(s)$: $s^2+2s+2=0\Longrightarrow s=-1\pm\sqrt{-1}=-1\pm j$. Теперь представим $F(s)$ в виде суммы четырех слагаемых

$$F(s)=U_0\left(\frac{A_0}{s}+\frac{A_1}{s+2}+\frac{A_2}{s-(-1+j)}+\frac{A_3}{s-(-1-j)}\right).$$

Для расчета A_0-A_3 по описанной выше методике потребуется аналитическое выражение производной $\Phi'(s)$. Дифференцируя
$\Phi(s)=(s+2)(s^2+2s+2)$, получим:

$$\Phi'(s)=(s^2+2s+2)+(s+2)(2s+2). \qquad (38)$$

Расчет A_0-A_3 по формуле (37) дает

$$A_0 = \frac{3}{4},\ A_1 = -\frac{1}{4},\ A_2 = \frac{2+j}{-1+j} = \frac{-1+2j}{4},\ A_3 = \frac{2-j}{-1-j} = \frac{-1-2j}{4}.$$

С учетом (12) и (13) искомое выражение для оригинала принимает вид

$$f(t) = U_0 \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2t} + \frac{-1+2j}{4}\mathrm{e}^{(-1+j)t} + \frac{-1-2j}{4}\mathrm{e}^{(-1-j)t} \right) \sigma(t)$$

или

$$f(t) = U_0 \left(0.75 - 0.25\ \mathrm{e}^{-2t} - 0.5\ \mathrm{e}^{-t}\cos t - \mathrm{e}^{-t}\sin t\right) \sigma(t).$$

Переменные слагаемые с течением времени затухают и $f(t) \to 3/4$.

Если входным сигналом является прямоугольный импульс с амплитудой U_0 и длительностью $t_{\text{и}}$, то выходной сигнала принимает вид:

$$f(t) = U_0 \left(0.75 - 0.25\ \mathrm{e}^{-2t} - 0.5\ \mathrm{e}^{-t}\cos t - \mathrm{e}^{-t}\sin t\right) \sigma(t) -$$
$$-U_0 \left(0.75 - 0.25\ \mathrm{e}^{-(2t-t_{\text{и}})} - 0.5\ \mathrm{e}^{-(t-t_{\text{и}})}\cos(t-t_{\text{и}}) - \mathrm{e}^{-(t-t_{\text{и}})}\sin(t-t_{\text{и}})\right) \sigma(t-t_{\text{и}}).$$

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

1. Экспериментальная установка

В лабораторной работе предполагается сопоставить напряжения, полученные на экспериментальной установке, с результатами расчета на микро-ЭВМ спектральным и операторным методами. В качестве измерительного прибора используется двухканальный осциллограф GOS-620.

Электрическая схема экспериментальной установки представлена на рис. 5. Она содержит катушку индуктивности ($L = 0.31$ Гн, $R_L = 30$ кОм), два конденсатора с емкостью $C_1 = 1180$ пф (RC- цепь) и $C_2 = 1290$ пф (RCL-цепь), три набора резисторов с сопротивлениями $R_1 = 5$ кОм, $R_2 = 100$ кОм, $R_3 = 300$ кОм и $R_4 = 2$ МОм для RC- цепи; $R_1 = 51$ Ом, $R_2 = 240$ Ом, $R_3 = 2.4$ кОм и $R_4 = 24$ кОм для RL- цепи; $R_1 = 1$ кОм и $R_2 = 15$ кОм для RCL-цепи и генератор импульсов прямоугольной формы – мультивибратор M.

Приведенный набор дискретных элементов позволяет задавать более 20 вариантов заданий и оценивать избирательные свойства линейных цепей, наблюдать отклики линейной цепи, возникающие при колебательных и апериодических процессах, проверять условия дифференцирования и интегрирования импульсных сигналов, выявлять оптимальные для конкретных задач параметры и режимы функционирования.

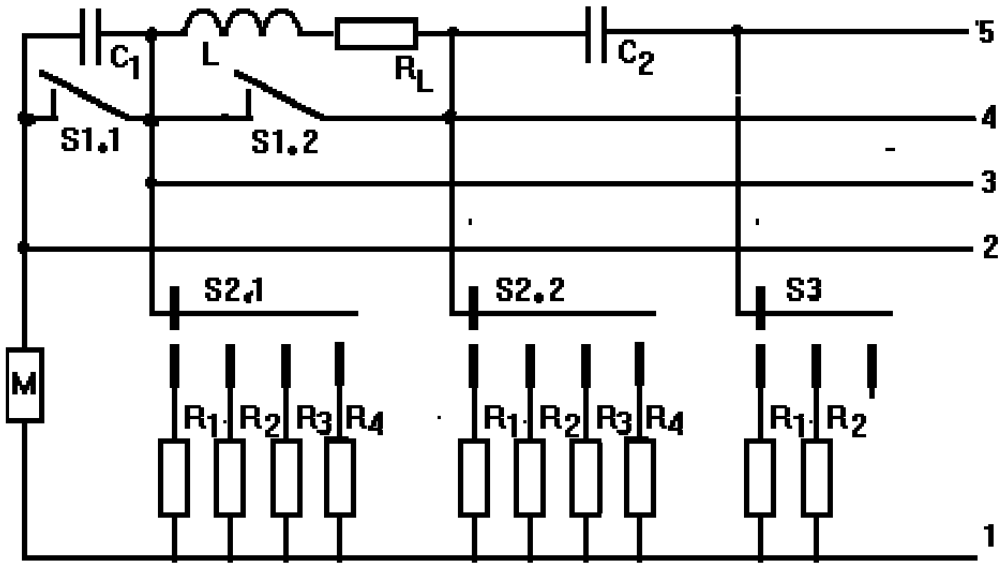

Рис. 5.

Выбор режимов работы линейных цепей осуществляются переключателями $S1 - S3$. При исследовании откликов RC-цепи переключатель $S1.1$ находится в разомкнутом состоянии, а переключатель $S1.2$ замкнут, при исследовании откликов RL-цепи состояние этих переключателей изменяется на противоположное. Переключателями $S2.1$ и $S2.2$ дискретно изменяются постоянные времени RC- и RL-цепи соответственно. При исследовании процессов в RCL-цепи выключателя $S1.1, S1.2, S2.1$ и $S2.2$ разомкнуты.

Переключатели $S1-S3$ и коммутатор выходов с клемм 1 - 5, позволяющий измерять напряжения на различных элементах, конструктивно объединены в установке в виде кнопочных переключателей Π_1 - Π_5.

Переключатель Π_1 подключает первый канал осциилографа к мультивибратору M или к элементам RC-, RL-, RCL-цепи с помощью коаксиального разъема «ОСЦ». Второй канал осциллографа постоянно контролирует форму сигнала, поступающего на вход исследуемой цепи, и подключается к экспериментальной установке с помощью коаксиального разъема «**П**».

Переключатель Π_2 объединяет $S2.1$ и $S2.2$, а переключатель Π_3 используется для подключения первого канала осциллографа к резистору или реактивному элементу при исследовании RC- и RL-цепи.

Переключатель Π_4 коммутирует выходые напряжения при исследовании RCL-цепи и устанавливается в положение «$d, \int$» при исследовании RC- или RL-цепи. Наконец, переключатель Π_5 используется совместно с переключателем Π_1 при переходе от измерений RC-цепи к RL-цепи, а также для перехода от апериодического режима к колебательному при исследовании RCL-цепи.

2. Порядок выполнения работы

1. Ознакомиться с экспериментальной установкой, включить ее в сеть и снять осциллограмму входного для исследуемых линейных цепей сигнала – выходного напряжения мультивибратора. Для этого подключить вход осциллографа к коаксиальному разъему установки, переключатель **СЕТЬ** установить в положение **ВКЛ**, переключатели Π_1 и Π_4 - в положение «**П**».

Синхронизироовать развертку осциллографа и, используя показания переключателя частоты развертки, измерить частоту повторения и скважность последовательности импульсов, вырабатываемых мультивибратором M. Рассчитать длительность импульсов $t_и$ и период последовательности T. Изобразить спектр входного сигнала.

2. Исследовать прохождение прямоугольных импульсов через RC-цепь. С этой целью установить переключатели Π_1 и Π_5 в положение **RC**, а Π_4 - в положение «$d, \int$». Изменяя переключателем Π_2 сопротивление RC-цепи, зарисовать осциллограммы напряжений на резисторе (переключатель Π_3 - в положении **R**) и на конденсаторе (переключатель Π_3 - в положении **C**). Используя второй канал осциллографа, сопоставить полученные осциллограммы со входным сигналом. Для каждого значения R вычислить отношение длительности импульсов $t_и$ к постоянной времени цепи τ и объяснить в отчете по работе причины деформации импульса в зависимости от постоянной времени цепи.

3. Исследовать прохождение прямоугольных импульсов через RL-цепь. С этой целью установить переключатели Π_1 и Π_5 в положение **RL**, а Π_4 - в положение «$d, \int$». Изменяя преключателем Π_2 сопротивление RL- цепи, зарисовать осциллограммы напряжений на резисторе (переключатель Π_3 - в положении **R**) и на катушке индуктивности (переключатель Π_3 - в положении **L**). Для каждого значения R вычислить отношение длительности импульсов $t_и$ к постоянной времени цепи τ и объяснить в отчете по работе причины деформации импульса в зависимости от постоянной времени цепи.

4. Исследовать прохождение прямоугольных импульсов через RCL- цепь. Для этого установить переключатель Π_1 в положение **RCL** и зарисовать осциллограммы напряжений на резисторе, конденсаторе и катушке индуктивности (переключатель Π_4 соответственно в положениях **R, C** или **L**) при двух положениях переключателя Π_5 - $R < 2\rho$ и $R > 2\rho$. Рассчитать $\rho = \sqrt{L/C}$ и объяснить полученные осциллограммы.

В положении **R** для сопоставления входного и выходного сигналов можно использовать второй канал осциллографа.

5. Для указанного преподавателем задания рассчитать операторным методами и построить на одном рисунке в одинаковом масштабе зависимости U_R, U_L или U_C от времени. На том же рисунке изобразить экспериментально полученную зависимость. Объяснить различие осциллограммы и результатов расчета операторным методом.

Задание 1: Рассчитать операторным методом временные изменения U_R и U_C в RC-цепи при $R = 5$ кОм

Задание 2: Рассчитать операторным методом временные изменения U_R и U_C в RC-цепи при $R = 2$ МОм

Задание 3: Рассчитать операторным методом временные изменения U_R и U_L в в RL-цепи при $R = 24$ кОм

Задание 4: Рассчитать операторным методом временные изменения U_R и U_L в RL-цепи при $R = 51$ Ом

Задание 5*: Рассчитать операторным методом временные изменения U_R в апериодическом и колебательном режимах RCL-цепи и объяснить изменения напряжения при переходе из апериодического режима в колебательный.

Задание 6*: Рассчитать операторным методом временные изменения U_C в апериодическом и колебательном режимах RCL-цепи и объяснить изменения напряжения при переходе из апериодического режима в колебательный.

Задание 7*: Рассчитать операторным методом временные изменения U_L в апериодическом и колебательном режимах RCL-цепи и объяснить изменения напряжения при переходе из апериодического режима в колебательный.