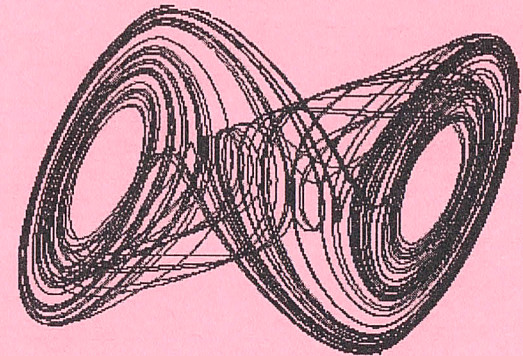


А.Н. Павлов

**ИССЛЕДОВАНИЕ
РЕЖИМОВ ДИНАМИКИ
ГЕНЕРАТОРА ЧУА**



Саратовский государственный университет им. Н.Г.Чернышевского

А.Н. Павлов

ИССЛЕДОВАНИЕ
РЕЖИМОВ ДИНАМИКИ
ГЕНЕРАТОРА ЧУА

*Учебное пособие
для студентов физического факультета
и факультета нелинейных процессов*

ИЗДАТЕЛЬСТВО САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

2005

УДК 621.37
ББК 32.84
П12

Павлов А.Н.

П12 Исследование режимов динамики генератора Чуа: Учеб. пособие для студ. физ. фак. и фак. нелинейных процессов. – Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2005. – 24 с.: ил.
ISBN 5-292-03483-5

В учебном пособии рассматривается динамика генератора Чуа и анализируется сценарий перехода к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода. Обсуждаются методы исследования сложных режимов колебаний.

Для студентов, обучающихся по физическим специальностям.

Рекомендуют к печати:

Кафедра радиофизики и нелинейной динамики физического факультета
Саратовского государственного университета
Заслуженный деятель науки РФ, доктор технических наук, профессор *В.П. Мещанов*
(Центральный НИИ измерительной аппаратуры)

УДК 621.37
ББК 32.84

Работа издана в авторской редакции

ISBN 5-292-03483-5

© Павлов А.Н., 2005

ВВЕДЕНИЕ

За последние десятилетия значительный прогресс был достигнут в понимании такого явления, как *детерминированный хаос*. Сложные режимы колебаний в нелинейных диссипативных системах, называемые *хаотическими*, на первый взгляд имеют вид случайных процессов, однако они подчиняются определенным закономерностям. Само явление детерминированного хаоса к настоящему времени обнаружено в самых различных областях современного естествознания: в физике, радиотехнике, химии, биологии, механике и т.д. Генератор (или цепь) Чуа является примером радиотехнической системы со сложной динамикой, способной демонстрировать хаотические режимы колебаний. Исследование динамики данного генератора методами радиофизического и численного экспериментов и является целью настоящей работы. Прежде чем приступить непосредственно к рассмотрению генератора Чуа, введем необходимые определения, которые нам потребуются в дальнейшем.

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ

1. Предварительные замечания и основные определения

Предметом изучения теории нелинейных колебаний являются *динамические системы*. Под динамической системой понимают любой объект, для которого можно ввести *состояние* (как совокупность некоторых переменных, однозначно характеризующих систему в данный момент времени) и указать закон, описывающий изменение начального состояния с течением времени (*оператор эволюции*). В частности, для радиотехнической цепи состояние определяется значениями токов, протекающих в цепи, и падениями напряжения на ее элементах. Оператор эволюции, позволяющий определять будущее состояние цепи по ее начальному состоянию, записывается на основе законов Кирхгофа.

В рамках теории нелинейных колебаний исследование режимов функционирования динамических систем сводится к изучению поведения траекторий в фазовом пространстве. Это означает, что переменные, определяющие состояние системы в произвольный момент времени (например, токи и напряжения), рассматриваются в качестве координат точки в пространстве. Изменению состояния во времени соответствует движение изображающей точки вдоль некоторой линии (фазовой траектории). Переход в фазовое пространство осуществляется, как правило, для безразмерных переменных, поэтому вначале переменные состояния преобразуются к безразмерному виду. Закон эволюции часто имеет вид системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_j}{dt} = F_j(x_1, \dots, x_n, \mu_1, \dots, \mu_m), \quad j = 1, \dots, n, \quad (1)$$

где x_j – набор безразмерных переменных, F_j – некоторые функции (для существования колебаний хотя бы одна из них должна быть нелинейной), n – число переменных, μ_1, \dots, μ_m – набор параметров, определяющих динамику системы (1).

Анализ математической модели (1) обычно начинают с поиска состояний равновесия и исследования их устойчивости. Состояния равновесия представляют собой точки в фазовом пространстве, соответствующие нулевой скорости движения:

$$\frac{dx_j}{dt} = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Характер движения фазовых траекторий в малой окрестности состояний равновесия определяется тем, являются ли они устойчивыми или неустойчивыми. Анализ на устойчивость проводится путем исследования реакции системы (1) на малое возмущение (отклонение от состояния равновесия). Обозначим через x_j^0 координаты анализируемой особой точки, а через \bar{x}_j – малые добавки (отклонения по различным направлениям). Подставив в уравнения (1) вместо $x_j \rightarrow x_j^0 + \bar{x}_j$ и ограничившись первым приближением для малых величин, получим систему уравнений следующего вида:

$$\frac{d\bar{x}_j}{dt} = \left(\frac{\partial F_j}{\partial x_1} \right) \bar{x}_1 + \left(\frac{\partial F_j}{\partial x_2} \right) \bar{x}_2 + \dots + \left(\frac{\partial F_j}{\partial x_n} \right) \bar{x}_n, \quad (3)$$

где частные производные вычисляются в точке x_j^0 , $j = 1, \dots, n$. Данная система позволяет анализировать эволюцию во времени малых отклонений \bar{x}_j . Если они будут со временем уменьшаться, можно говорить об устойчивости состояния равновесия к малым возмущениям. Соответственно рост во времени малых отклонений свидетельствует о неустойчивости особой точки. Чтобы выяснить вопрос об устойчивости, в системе (3) проводится экспоненциальная подстановка $e^{s\tau}$ для переменных \bar{x}_j . Данная подстановка позволяет свести дифференциальные уравнения к алгебраическим (поскольку в этом случае $d\bar{x}_j/dt = s\bar{x}_j$), после чего можно записать характеристическое уравнение следующего вида:

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} - s & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_j}{\partial x_1} & \frac{\partial F_j}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_j}{\partial x_n} - s \end{bmatrix} = 0 \quad (4)$$

и найти его корни s_i , $i = 1, \dots, n$, которые называются собственными числами (или собственными значениями) состояния равновесия и в общем случае являются комплексными $s_i = \sigma_i + j\omega_i$. Они определяют возрастание или затухание начального возмущения. (Возмущение возрастает, если

$Re s_i = \sigma_i > 0$, и затухает в противоположном случае. $Im s_i = \omega_i \neq 0$ характеризует вращательное движение вокруг особой точки.)

Важным понятием в теории динамических систем является понятие *аттрактора*. Под аттрактором понимается притягивающее предельное множество фазовых траекторий. Данное определение подразумевает наличие некоторой области (*бассейна притяжения*), «стартуя» из которой, фазовые траектории попадают на аттрактор. В нелинейных системах могут одновременно сосуществовать несколько аттракторов, «попадание» на тот или иной притягивающий режим определяется выбором начального состояния. В этом случае говорят о явлении *мультистабильности*. Устойчивые состояния равновесия и устойчивые периодические движения (предельные циклы в случае периодических колебаний или многомерные торы в случае квазигармонических колебаний с несколькими независимыми частотами) относятся к регулярным аттракторам. К числу притягивающих предельных множеств относятся также нерегулярные (странные или хаотические) аттракторы, которые могут наблюдаться в системах с размерностью фазового пространства $n \geq 3$. Для регулярных аттракторов (состояние равновесия, устойчивый предельный цикл или тор) малые отклонения от решения с течением времени затухают. Этот критерий позволяет судить об устойчивости данных решений. Иная ситуация наблюдается в случае хаотической динамики. Хаотические колебания представляют собой режим динамики, которому в фазовом пространстве соответствуют геометрически сложные множества, называемые *странными аттракторами*. Фазовые траектории на странном аттракторе напоминают запутанный клубок ниток, они не пересекаются и не замыкаются. Эти траектории являются неустойчивыми, по Ляпунову (малые возмущения в их окрестности со временем нарастают), но устойчивыми, по Пуассону (траектория при $t \rightarrow \infty$ не покидает ограниченной области фазового пространства). В этом состоит одно из отличий странных аттракторов от регулярных. Регулярные аттракторы являются устойчивыми и по Ляпунову и по Пуассону. Устойчивость, по Пуассону, означает, что находясь бесконечно долго в ограниченной области фазового пространства, траектории неизбежно возвращаются в сколь угодно малую окрестность начальной точки. Времена возврата соответствуют периоду колебаний при периодическом движении и представляют собой случайную последовательность для режима динамического хаоса.

Существование хаотических колебаний в *нелинейных диссипативных* системах возможно только при наличии внешнего возбуждения (например, осциллятор Дуффинга) или при существовании отрицательного сопротивления (в этом случае мы имеем дело с генератором). Для генерации колебаний необходимо наличие постоянного источника энергии, диссипативной колебательной системы, нелинейного элемента и обратной связи.

2. Уравнения генератора

Рассмотрим схему цепи Чуа, приведенную на рис.1,а без учета резистивных потерь катушки индуктивности и на рис.1,б с учетом этих потерь (R_0).

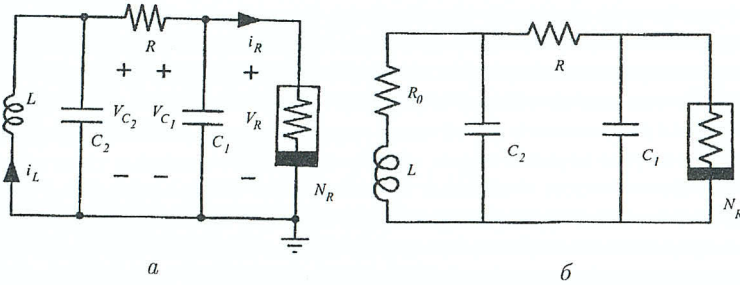


Рис. 1. Схема генератора Чуа без учета (а) и с учетом (б) резистивных потерь катушки индуктивности

Наряду с катушкой индуктивности L , двумя конденсаторами C_1 и C_2 , резистором R , она включает нелинейный элемент N_R . Без учета R_0 процессы, протекающие в цепи Чуа, описываются следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dV_{C_1}}{dt} &= \frac{1}{R}(V_{C_2} - V_{C_1}) - f(V_{C_1}), \\ C_2 \frac{dV_{C_2}}{dt} &= \frac{1}{R}(V_{C_1} - V_{C_2}) + i_L, \\ L \frac{di_L}{dt} &= -V_{C_2}, \end{aligned} \quad (5)$$

записанной на основе законов Кирхгофа, где функция $f(V_{C_1})$ представляет собой аппроксимацию вольт-амперной характеристики нелинейного элемента. В качестве $f(V_{C_1})$ можно рассматривать гладкую функцию (например, полином 3-й степени) (рис. 2,а). Гладкая функциональная зависимость в большей степени соответствует истинному виду вольт-амперной характеристики элемента N_R . С целью упрощения анализа математической модели цепи можно выбрать кусочно-линейную аппроксимацию (например, 5-сегментную) (рис. 2,б). Для практических целей может использоваться любая из этих аппроксимаций. Каждая из них позволяет описать большинство интересных явлений, наблюдаемых в реальной цепи. Кусочно-линейная форма вольт-амперной характеристики нелинейного элемента N_R имеет ряд преимуществ по сравнению с полиномиальной зависимостью,

поскольку дает возможность проводить аналитическое исследование модели (для каждого сегмента записывается линейная система уравнений, которую можно решать без помощи компьютера). В то же время кусочно-линейная функция может не «ухватить» некоторые особенности реальной цепи Чуа, например возникновение колебаний с малой амплитудой при бифуркации Андронова-Хопфа. Для исследования большинства явлений в динамике реальной цепи Чуа очень часто ограничиваются более простой аппроксимацией нелинейного элемента – 3-сегментной кусочно-линейной характеристикой (рис. 2,в).

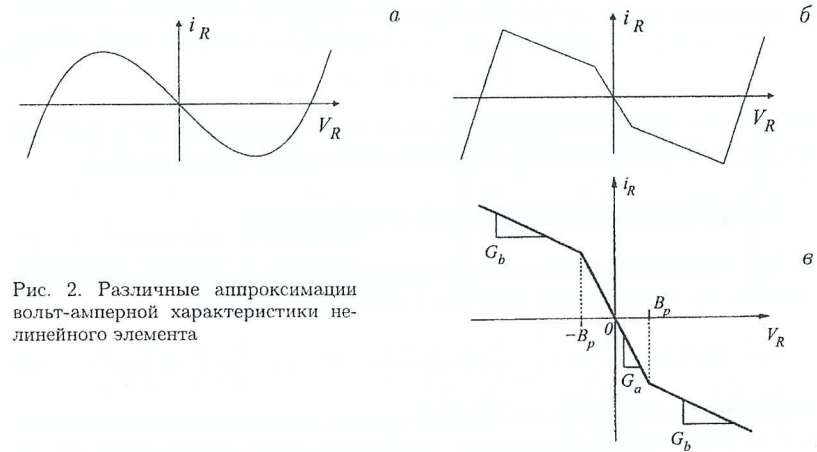


Рис. 2. Различные аппроксимации вольт-амперной характеристики нелинейного элемента

Рассмотрим последний случай более подробно. Функция $f(V_{C_1})$ имеет вид

$$f(V_{C_1}) = \begin{cases} G_b V_{C_1} + (G_a - G_b) B_p, & V_{C_1} \geq B_p \\ G_a V_{C_1}, & |V_{C_1}| \leq B_p \\ G_b V_{C_1} - (G_a - G_b) B_p, & V_{C_1} \leq -B_p. \end{cases} \quad (6)$$

Переход к безразмерным уравнениям осуществляется путем замен переменных:

$$\begin{aligned} x &= \frac{V_{C_1}}{B_p} & y &= \frac{V_{C_2}}{B_p} & z &= \frac{i_L}{B_p} R \\ \tau &= \frac{t}{RC_2} & a &= RG_a & b &= RG_b \\ \alpha &= \frac{C_2}{C_1} & \beta &= \frac{R^2 C_2}{L}. \end{aligned} \quad (7)$$

В результате получим традиционную форму записи уравнений генератора Чуа:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \alpha(y - x - f(x)), \\ \frac{dy}{d\tau} &= x - y + z, \\ \frac{dz}{d\tau} &= -\beta y, \end{aligned} \quad (8)$$

$$f(x) = \begin{cases} bx + a - b & x \geq 1 \\ ax & |x| \leq 1 \\ bx - a + b & x \leq -1, \end{cases} \quad (9)$$

где x, y, z – фазовые переменные, α, β, a, b – параметры ($\alpha > 0, \beta > 0, a < 0, b < 0$). Выбор другой аппроксимации меняет функцию $f(x)$.

3. Состояния равновесия и их устойчивость

Для нахождения состояний равновесия приравняем нулю правые части системы (8). В результате получим 3 различных решения:

$$O = (0, 0, 0), \quad P^+ = \left(\frac{b-a}{b+1}, 0, -\frac{b-a}{b+1}\right), \quad P^- = \left(-\frac{b-a}{b+1}, 0, \frac{b-a}{b+1}\right). \quad (10)$$

Чтобы проанализировать их на устойчивость, введем малые отклонения $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ по различным направлениям от анализируемой особой точки (O, P^+ или P^-). Система уравнений для малых возмущений примет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{d\tau} &= \alpha(\bar{y} - (1+c)\bar{x}), \\ \frac{d\bar{y}}{d\tau} &= \bar{x} - \bar{y} + \bar{z}, \\ \frac{d\bar{z}}{d\tau} &= -\beta\bar{y}, \end{aligned} \quad (11)$$

где $c = a$ для точки O , $c = b$ для точек P^+ и P^- . Характеристическое уравнение будет выглядеть следующим образом:

$$\det \begin{bmatrix} -\alpha(1+c) - s & \alpha & 0 \\ 1 & -1-s & 1 \\ 0 & -\beta & -s \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow s^3 + s^2(\alpha c + \alpha + 1) + s(\alpha c + \beta) + \beta\alpha(1+c) = 0. \quad (12)$$

Решение данного уравнения в общем случае позволяет найти 3 различных

корня s_i для каждого состояния равновесия ($i = 1, 2, 3$). Все состояния равновесия O, P^+ и P^- в режиме генерации колебаний представляют собой седло-фокусы. Последнее означает, что у каждой из этих точек существует хотя бы одно собственное значение с положительной действительной частью $\sigma_i > 0$ и существует хотя бы одно собственное значение с отрицательной действительной частью $\sigma_i < 0$. Кроме того, два из трех корней характеристического уравнения являются комплексно-сопряженными, а у третьего корня мнимая часть равна нулю. Поведение фазовой траектории в окрестности состояний равновесия O, P^+ и P^- , а также их собственные значения схематично представлены на рис.3 в случае, когда параметры цепи Чуа были выбраны следующими: $\alpha = 9, \beta = 14\frac{2}{7}, a = -\frac{8}{7}, b = -\frac{5}{7}$.

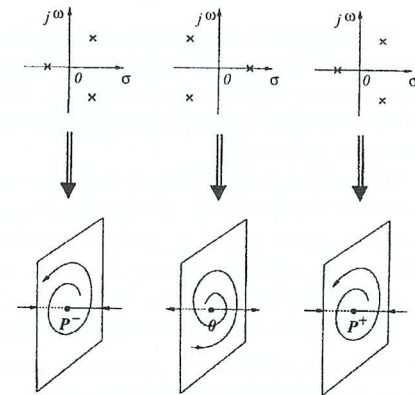


Рис. 3. Схематичное изображение собственных значений и движения фазовой траектории вблизи особых точек

У состояния равновесия в начале координат (O) один корень является действительным и положительным, характеризующим направление, в котором начальное возмущение будет возрастать. Пара комплексно-сопряженных корней с отрицательной действительной частью определяет наличие вращательного движения и скручивание траектории к особой точке в плоскости вращения. У каждого из двух других состояний равновесия P^+ и P^- , напротив, движение является неустойчивым в плоскости вращения (действительные части пары комплексно-сопряженных корней больше нуля), в то же время существует направление, в котором фазовая траектория приближается к особой точке.

Поскольку собственные числа корней характеристического уравнения (12) зависят от параметров системы α, β, a, b , изменение параметров может приводить к смене типа устойчивости – в этом случае говорят о бифуркациях особых точек.

4. Режимы динамики генератора Чуа

Все решения математической модели генератора Чуа можно разделить на устойчивые и неустойчивые. Устойчивые режимы можно наблюдать как в физическом эксперименте (реальной радиотехнической цепи), так и численно (анализируя математическую модель). Неустойчивые режимы динамики в физическом эксперименте не наблюдаются и их можно обнаружить только путем анализа уравнений цепи. Рассмотрим подробнее динамику генератора.

4.1. Предельные циклы

Простейшими режимами колебаний являются периодические решения, которым в фазовом пространстве соответствуют предельные циклы – изолированные замкнутые траектории. (Изолированность периодического решения означает существование окрестности, не содержащей других периодических решений.)

Предельный цикл может быть аттрактором, т.е. притягивающим предельным множеством, в окрестности которого любые малые отклонения будут затухать (рис.4,а), репеллером (отталкивающим предельным множеством – рис.4,б) или седлом, т.е. быть устойчивым по одним направлениям и неустойчивым по другим. Предельные циклы, являющиеся аттракторами и репеллерами (рис.4), меняются ролями при инверсии времени ($t \rightarrow -t$).

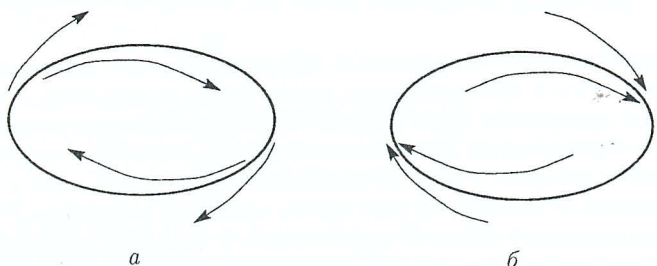


Рис. 4. Устойчивый (а) и неустойчивый (б) предельные циклы

Как уже отмечалось, в физическом эксперименте мы можем наблюдать только устойчивые режимы колебаний. Амплитуда и форма колебаний зависят от управляющих параметров системы (α, β) и претерпевают изменения при их вариации. Смена параметров может приводить к бифуркациям предельных циклов – качественной перестройке фазового портрета. Среди

множества возможных бифуркаций мы пока отметим бифуркацию удвоения периода, играющую ключевую роль в одном из «сценариев» возникновения динамического хаоса. Визуально мы фиксируем данную бифуркацию, если при изменении управляющего параметра период колебаний устойчивого предельного цикла становится вдвое больше по сравнению с периодом колебаний T_0 до точки бифуркации – возникает режим колебаний удвоенного периода $2T_0$ (рис. 5).

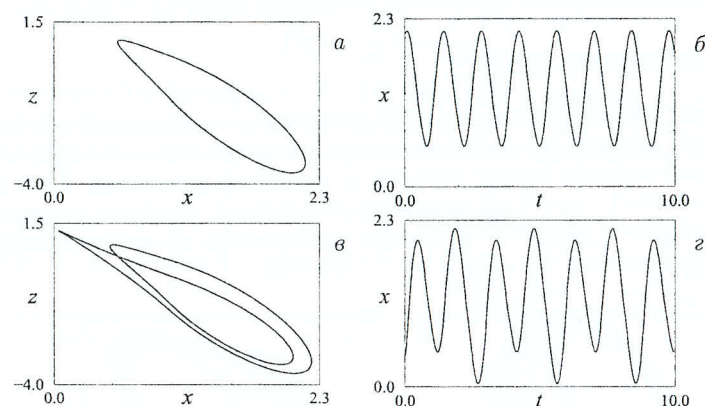


Рис. 5. Периодические колебания с периодом T_0 (а,б) и периодом $2T_0$ (в,г)

Если и дальше продолжать менять параметр, то бифуркацию удвоения будет претерпевать режим $2T_0$, в результате чего наблюдаются колебания с периодом $4T_0$. Дальнейший рост параметра приводит к появлению режимов $8T_0, 16T_0, \dots$. Происходит каскад бифуркаций удвоения периода, приводящий к хаотическому режиму колебаний. Данный «сценарий» возникновения хаоса является универсальным для систем, демонстрирующих бифуркации удвоения, и наблюдается во многих математических моделях. Универсальность его состоит в общих закономерностях и в возможности прогнозировать бифуркационные значения параметров. Если обозначить через α_k значение управляющего параметра, соответствующее k -й бифуркации удвоения, то для всех динамических систем, демонстрирующих данный «сценарий» перехода к хаосу, существует сходимость к некоторому конечному пределу:

$$\delta = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{k+1} - \alpha_k}{\alpha_{k+2} - \alpha_{k+1}} = 4.669201\dots$$

Более строгий анализ бифуркаций предельных циклов требует введения понятия мультипликаторов периодического решения p_i . Они характеризуют изменение первоначального возмущения периодического движения по

различным направлениям через период колебаний T_0 . Величина возмущения через период определяется как произведение первоначального возмущения и соответствующего мультипликатора p_i . Для затухания возмущения необходимо $|p_i| < 1$. Бифуркация удвоения периода соответствует обращению одного из мультипликаторов p_1 в -1 . Это означает, что малое возмущение ϵ в соответствующем направлении через период T_0 меняет направление на противоположное $\epsilon_T = \epsilon p_1 = -\epsilon$. Через два оборота ($2T_0$) траектория замыкается, вернувшись в исходную точку $\epsilon_{2T} = \epsilon p_1 p_1 = \epsilon$.

4.2. Хаотические колебания

В цепи Чуа наблюдается большое разнообразие хаотических режимов колебаний: аттракторы спирального типа (движение в фазовом пространстве осуществляется вокруг каждого из состояний равновесия P^+ и P^- по-отдельности) – рис. 6, а, б, аттрактор, называемый «двойным завитком» («double scroll» – движение охватывает одновременно все особые точки), – рис. 6, в и другие.

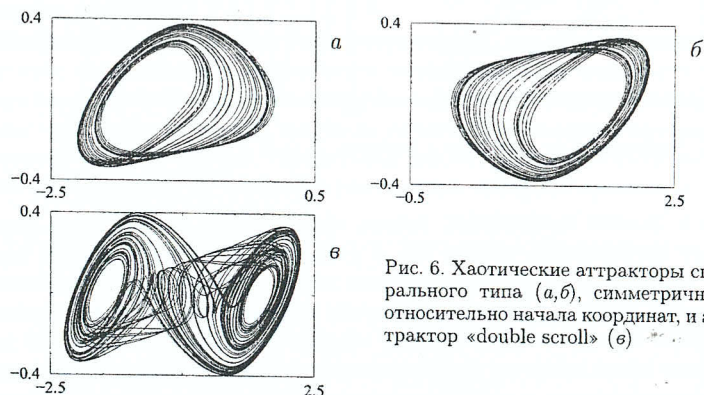


Рис. 6. Хаотические аттракторы спирального типа (а, б), симметричные относительно начала координат, и аттрактор «double scroll» (в)

Исследуемая цепь обладает симметрией относительно начала координат: уравнения математической модели инвариантны к замене переменных $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z)$. В силу этого симметрией будут обладать аттракторы, реализующиеся в цепи Чуа. Проводя анализ режимов функционирования системы, мы будем сталкиваться с явлением мультистабильности: «попадание» на тот или иной аттрактор будет определяться выбором начальных условий.

5. Бифуркационный анализ

С целью ознакомления с основными бифуркациями, которые демонстрирует цепь Чуа, проведем вначале однопараметрический бифуркационный анализ математической модели с гладкой нелинейной характеристикой. Рассмотрим систему (8), в которой

$$f(x) = \frac{1}{16}x^3 - \frac{7}{6}x, \quad (13)$$

а параметр β зафиксирован ($\beta = 14$). Вариация α приводит к изменениям режима функционирования исследуемой динамической системы. Схематически, различные бифуркации при увеличении α представлены на рис. 7.

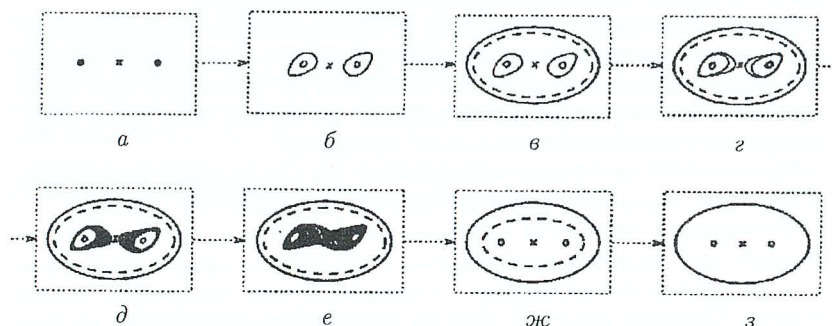


Рис. 7. Схематичное представление различных бифуркаций в генераторе Чуа с гладкой нелинейной характеристикой. Параметр $\beta = 14$, параметр α варьируется от 6 до 14

Проанализируем вначале, что будет происходить с состояниями равновесия P^+ и P^- при увеличении параметра α . Пока $\alpha < 6.578$, эти особые точки являются устойчивыми (они схематично изображены черными кружочками на рис. 7, а). Собственные значения каждого состояния равновесия (P^+ и P^-) следующие: $Re s_1 < 0, Im s_1 = 0, Re s_{2,3} < 0, Im s_{2,3} \neq 0$.

При $\alpha = 6.578$ происходит бифуркация Андронова-Хопфа (бифуркация рождения предельного цикла): возникают периодические колебания с очень малой амплитудой. В зависимости от выбора начальных условий фазовая траектория будет вращаться вокруг той или иной особой точки по замкнутой траектории (рис. 7, б: белые кружочки – состояния равновесия, а траектории вокруг них – возникающие в ходе бифуркаций предельные циклы). В силу симметрии анализ можно проводить для одного из состояний равновесия P^+ или P^- – для другого будет полная аналогия. Размах колебаний (соответственно размер цикла) будет плавно увеличиваться

с дальнейшим ростом параметра, что характерно для мягкой бифуркации Андронова-Хопфа. Момент бифуркации характеризуется тем, что действительные части пары комплексно-сопряженных собственных чисел состояния равновесия P^+ (как и P^-) становятся равными нулю ($Re s_{2,3} = 0$, $Im s_{2,3} \neq 0$). Сразу после бифуркации $Re s_{2,3} > 0$, $Im s_{2,3} \neq 0$ – движение становится неустойчивым в плоскости вращения, и траектории, «раскручиваясь», из окрестности состояния равновесия попадают на предельный цикл.

Дальнейший рост параметра приводит к седло-узловой бифуркации ($\alpha = 7.302$), состоящей в рождении пары циклов, охватывающих все особые точки (рис.7, в), один из которых является устойчивым (обозначен сплошной линией), а другой – седловым (пунктир).

При $\alpha = 8.192$ периодические движения вокруг особых точек P^+ , P^- претерпевают бифуркации удвоения (рис.7, г). Это соответствует обращению в -1 одного из мультипликаторов предельного цикла.

Продолжая увеличивать параметр α , мы зафиксируем каскад бифуркаций удвоения периода, приводящий к возникновению хаотического режима динамики (аттрактора спирального типа (рис.7, д): траектория охватывает одно из состояний равновесия, «попадание» на тот или иной притягивающий режим определяется начальными условиями).

При $\alpha = 8.785$ происходит «склеивание» (или объединение) хаотических аттракторов: образуется «двойной завиток» («double scroll») (рис.7, е).

Последующее увеличение параметра приводит к тому, что седловой предельный цикл начинает приближаться к аттрактору «double scroll»; при $\alpha = 10.769$ они «сталкиваются», в результате чего хаотический режим исчезает. Седловой цикл при этом не претерпевает бифуркаций; но если ранее он разделял области притяжения различных аттракторов, то теперь этого уже не происходит: единственным аттрактором остается устойчивый предельный цикл.

При достижении значения $\alpha = 13.380$ седловой цикл исчезает в результате седло-узловой бифуркации (он «сливается» с устойчивым периодическим циклом, который не изображен на рис.7(в-з) в целях упрощения бифуркационного анализа).

Мы проанализировали кратко некоторые режимы функционирования, которые демонстрирует система (8) при значении параметра $\beta = 14$. Более строгий подход к изучению динамики системы требует проведения двухпараметрического бифуркационного анализа. В этом случае мы фиксируем уже не точки бифуркаций, а линии на плоскости двух управляющих параметров, при переходе через которые происходят качественные изменения режима функционирования. Построение множества бифуркационных линий дает наглядное представление о динамике системы, в то время как проведение однопараметрического анализа часто недостаточно для глубокого понимания ее поведения и возможностей управления им. В рамках на-

стоящей работы предлагается провести самостоятельно бифуркационный анализ системы (8) с 3-сегментной кусочно-линейной характеристикой.

6. Методы анализа сложных режимов колебаний

6.1. Отображение Пуанкаре

Визуальный анализ хаотической динамики в 3-х мерном фазовом пространстве является не очень наглядным: мы наблюдаем проекцию на плоскость сложного движения изображающей точки, в этом случае может быть проблематичным исследование геометрических особенностей предельного множества. Существует более удобный в ряде случаев метод анализа хаотических колебательных режимов – введение секущей Пуанкаре. Секущая представляет собой плоскость (или поверхность) в фазовом пространстве, выбранную таким образом, чтобы все траектории ее пересекали. Фиксируется множество точек, соответствующих последовательным пересечениям секущей Пуанкаре фазовой траекторией в одном направлении (рис. 8). Замкнутые траектории образуют конечные последовательности точек в секущей (одна точка – для предельного цикла с периодом T_0 , две – для цикла удвоенного периода $2T_0$ и т.д.), непериодическим колебательным режимам соответствуют бесконечные последовательности точек.

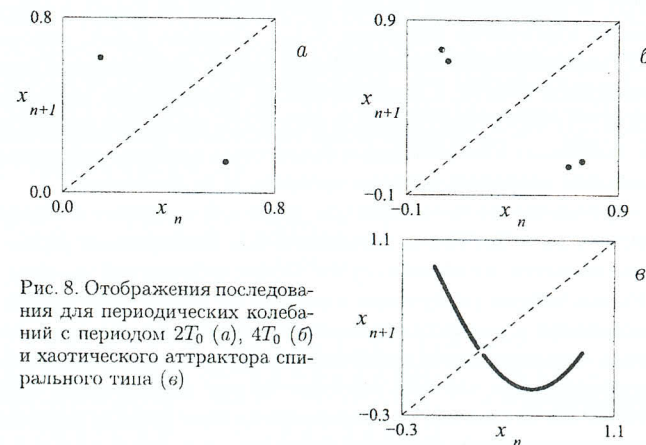


Рис. 8. Отображения последования для периодических колебаний с периодом $2T_0$ (а), $4T_0$ (б) и хаотического аттрактора спирального типа (в)

Если зафиксировать одну из координат последовательных пересечений секущей Пуанкаре: x_1, x_2, x_3, \dots , можно построить отображение Пуанкаре, которое называют отображением последования (зависимость x_{n+1} от x_n). Переход к отображению Пуанкаре понижает размерность рассматриваемого множества на единицу, что делает более наглядным анализ геометриче-

ских особенностей аттрактора (из 3-х мерного пространства мы переходим на плоскость). Отображения последования для некоторых режимов представлены на рис. 8, а, б, в.

6.2. Спектральный и корреляционный анализ

Наглядную информацию об изменениях режимов динамики при переходе к хаосу позволяет получить расчет спектра мощности одномерной реализации (например, $x(t)$). Как известно, если анализируется периодический сигнал, то его можно разложить в ряд Фурье (сходящийся при некоторых условиях). Детерминированный непериодический сигнал $x(t)$, удовлетворяющий условию абсолютной интегрируемости

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt < \infty, \quad (14)$$

может быть представлен интегралом Фурье:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_x(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (15)$$

$$F_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (16)$$

где $F_x(\omega)$ называют спектральной плотностью амплитуды, или спектром процесса $x(t)$. В радиопизике обычно анализируют не $F_x(\omega)$, а спектральную плотность или спектр мощности $S_x(\omega)$. Подобно $F_x(\omega)$, спектр мощности $S_x(\omega)$ характеризует гармонический состав исследуемого процесса, но не амплитудный спектр, а энергетический. Определение частотного состава сигнала $x(t)$ через спектральную плотность мощности является более физическим, поскольку измерительные аналоговые приборы работают на основе определения величины энергии процесса, а не амплитуды.

Спектр периодических колебаний (см. рис.5, а, б) содержит основную или базовую частоту $\omega_0 = 2\pi/T_0$ и ее гармоники $k\omega_0$. Бифуркация удвоения периода сопровождается появлением субгармоник половинной частоты $n\omega_0/2$ (рис.9, а); их амплитуды растут при удалении от точки бифуркации и достигают насыщения к моменту следующей бифуркации удвоения. Учетверение периода сопровождается появлением спектральных компонент $n\omega_0/4$ (рис.9, б), и аналогичная картина повторяется при последующих бифуркациях. Хаотический аттрактор, возникающий на базе каскада удвоений, наследует характерные черты механизма перехода к хаосу.

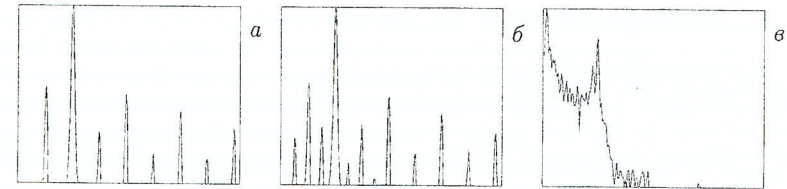


Рис. 9. Спектры мощности периодических колебаний: периода $2T_0$ (а) и периода $4T_0$ (б) и спектр мощности хаотических колебаний (аттрактор «double scroll») (в)

Наряду со спектральным анализом особенности режима динамики могут исследоваться с помощью автокорреляционной функции (АКФ) ψ_x , характеризующей степень линейной зависимости значений процесса $x(t)$ в различные моменты времени. Для стационарных процессов с нулевым средним значением АКФ представляет собой усредненное по времени произведение:

$$\psi_x(\tau) = \langle x(t)x(t+\tau) \rangle. \quad (17)$$

Для периодических процессов с периодом T_0 : $\psi_x(0) = \psi_x(\tau = T_0) = \dots = \psi_x(\tau = nT_0)$, т.е. АКФ будет также периодической функцией (рис.10, а). Аналогичная картина (наличие повторяемости в поведении АКФ) наблюдается при бифуркациях удвоения периода (рис.10, б) до перехода к хаосу. В хаотическом режиме огибающая автокорреляционной функции $\gamma_x(\tau)$ будет спадать до нуля (рис.10, в), причем скорость стремления ее к нулю служит важной количественной характеристикой: чем быстрее спадает $\gamma_x(\tau)$, тем более хаотичен режим. Обычно для того чтобы охарактеризовать скорость спада огибающей, используют время корреляции τ_k – время, за которое $|\gamma_x(\tau)|$ уменьшится в e раз:

$$\frac{|\gamma_x(\tau_k)|}{|\gamma_x(0)|} = \frac{1}{e}. \quad (18)$$

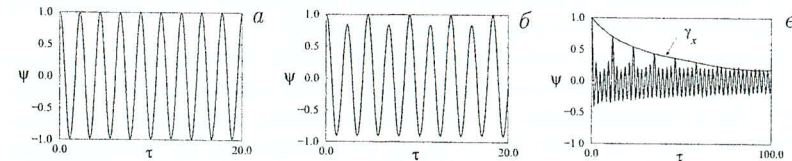


Рис. 10. Автокорреляционные функции периодических колебаний: периода T_0 (а) и периода $2T_0$ (б) и хаотических колебаний (в)

6.3. Показатель Ляпунова

Важной характеристикой степени хаотичности служит старший показатель Ляпунова λ , который представляет собой количественный критерий неустойчивости фазовой траектории, принадлежащий аттрактору. В случае странного аттрактора $\lambda > 0$, и малое отклонение от траектории $D(0)$ со временем (в среднем) увеличивается по экспоненциальному закону вида

$$D(t) = D(0)e^{\lambda t}. \quad (19)$$

Для предельного цикла любого периода $\lambda = 0$. Таким образом, появление положительного знака показателя Ляпунова характеризует наличие хаотической динамики. Величина λ может интерпретироваться как характеристика средней скорости «разбегания» траекторий на аттракторе, поскольку малое начальное возмущение $D(0)$ можно рассматривать как расхождение между соседними фазовыми траекториями.

Вычисление скорости экспоненциального «разбегания» изначально расположенных рядом точек в фазовом пространстве, а затем усреднение этой величины вдоль фазовой траектории позволяет определить искомое значение λ .

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА

Экспериментальная установка состоит из генератора хаотических колебаний, выполненного в виде автономного блока, магазина сопротивлений и персонального компьютера IBM-386 (для обработки результатов исследований).

Электрическая схема генератора хаотических колебаний изображена на рис. 11. Она представляет цепь Чуа и содержит катушку индуктивности ($L = 18$ мГн), постоянный конденсатор ($C_2 = 100$ нФ, электрически управляемую емкость ($C_1 = 8.5 \div 10$ нФ), магазин сопротивлений (R), позволяющий задавать сопротивление от 100 Ом до 10 кОм и нелинейный диод Чуа (N_R), выполненный в виде параллельного соединения двух конверторов отрицательных сопротивлений разной величины.

Функционирование электрически управляемой емкости можно объяснить из простых физических соображений. Если напряжение U_1 , снимаемое с R_8 , а следовательно, и с повторителя на A_4 , равно нулю, а напряжение на входе A_3 равно U , то заряд q конденсатора C_1 удовлетворяет равенству $q = C_1 U$. С увеличением R_8 напряжение $U_1 = kU$, где k определяется величинами R_7, R_8 и положением движка R_8 , возрастает, а напряжение на C_1 , равное $U - U_1 = U(1 - k)$, уменьшается, что в силу неизменности q вызывает увеличение эквивалентной емкости с величины C_1 до

$C = q/U(1 - k) = C_1/(1 - k)$. На передней панели установки расположен лимб потенциометра R_8 , проградуированный в соответствии с C , тумблер S , позволяющий отключать конденсатор C_2 три коаксиальных разъема для подключения внешнего источника («Вход») и задания сигналов, соответствующих переменным «X» и «Y», на входы компьютера. Для согласования выходных сопротивлений установки с входными сопротивлениями компьютера используются повторители напряжения на A_5 и A_6 с резисторами R_9 и R_{10} .

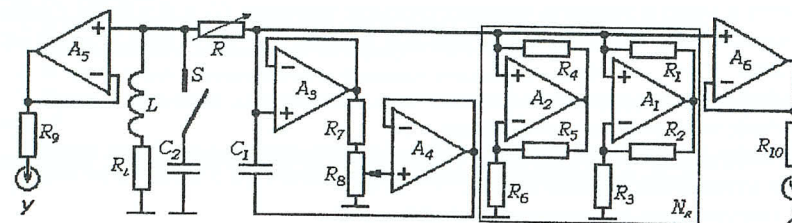


Рис.11. Электрическая схема генератора хаотических колебаний

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Для начала выполнения работы необходимо запустить программу «praktik.bat». Ряд необходимых комментариев (обозначения функциональных клавиш) приведен в меню. Чтобы выйти в меню из программы, нужно нажать клавишу «m». Задания, приведенные ниже, включают проведение аналитического исследования модели генератора, физический эксперимент и численный (компьютерный) эксперимент.

Задания

1. На основе законов Кирхгофа записать уравнения, описывающие динамику цепи Чуа с учетом резистивных потерь катушки индуктивности (см. схему на рис. 1,б). Преобразовать уравнения к следующему виду:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \alpha(y - x - f(x)), \\ \frac{dy}{d\tau} &= x - y + z, \\ \frac{dz}{d\tau} &= -\beta y - \gamma z, \end{aligned} \quad (20)$$

по аналогии с системой (5). Определить, чему соответствует параметр γ в системе уравнений (20).

2. Найти координаты состояния равновесия системы (8) для случая полиномиальной аппроксимации (13). Записать характеристическое уравнение для каждого из них. Определить собственные числа состояния равновесия в начале координат при значениях управляющих параметров $\alpha = 6$, $\beta = 14$.

3. Провести бифуркационный анализ системы (8) в физическом эксперименте (на лабораторной установке). Для нахождения точек бифуркаций рекомендуется фиксировать емкость (C_1) и менять сопротивление. Чтобы значения бифуркационных параметров были пересчитаны в α и β , можно зайти в меню и записать соответствующие значения C_1 и R в файл с помощью клавиши «f». Значения остальных параметров: $L=18$ мГн, $C_2=100$ нФ. Найти:

- а) бифуркацию рождения цикла;
- б) бифуркации удвоения периода;
- в) бифуркацию «склеивания» аттракторов спирального типа – образования аттрактора «double scroll»;
- г) бифуркацию исчезновения «double scroll».

Рекомендуется действовать в обратном порядке: перед включением установки выставить значения $C_1 = 9.5$, $R = 1800$ (при этом должен наблюдаться режим «double scroll»). Затем плавно увеличивая R , найти указанные бифуркации. Для удобства лучше включить режим автомасштабирования. Сопротивление рекомендуется менять только в одном направлении – увеличивать в указанных пределах.

4*. Исследовать сценарий перехода к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода. С этой целью:

- а) при указанных преподавателем значениях управляющих параметров проанализировать изменения в спектре мощности, АКФ, а также изменения реализаций и фазовых портретов. Зарисовать характерные зависимости;
- б)* провести расчеты старшего ляпуновского показателя при изменении управляющих параметров. Определить границу перехода к хаосу. (Учитывая, что для повышения скорости вычислений расчет старшего ляпуновского показателя проводится по относительно коротким участкам временной реализации, переход к хаосу фиксировать при превышении значения 10^{-2} .)

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Каким образом анализируется устойчивость состояний равновесия? Как определяются собственные значения особых точек?
2. Что такое аттрактор, репеллер? Каковы особенности регулярных и странных (хаотических) аттракторов?
3. В чем состоит критерий устойчивости Ляпунова? Что понимают под устойчивостью по Пуассону?
4. В чем состоит явление мультистабильности? Что такое мультипликатор?
5. Какие режимы динамики демонстрирует цепь Чуа?
6. В чем состоит универсальность сценария перехода к хаосу?
7. Какис бифуркации демонстрирует цепь Чуа при изменении управляющих параметров?
8. Какие изменения в спектре мощности вызывают бифуркации удвоения периода?
9. Как вычисляется и что характеризует старший показатель Ляпунова?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Мандельштам Л.И.* Лекции по теории колебаний. - М.: Наука, 1972.
- Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн: Учебное пособие. - М.: Наука, 1984.
- Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В.* Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. - Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1999.
- Постнов Д.Э.* Бифуркации регулярных аттракторов. - Саратов. Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1996.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
КРАТКАЯ ТЕОРИЯ	3
1. Предварительные замечания и основные определения	3
2. Уравнения генератора	6
3. Состояния равновесия и их устойчивость	8
4. Режимы динамики генератора Чуа	10
4.1. Предельные циклы	10
4.2. Хаотические колебания	12
5. Бифуркационный анализ	13
6. Методы анализа сложных режимов колебаний	15
6.1. Отображение Пуанкаре	15
6.2. Спектральный и корреляционный анализ	16
6.3. Показатель Ляпунова	18
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА	18
ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ	19
Контрольные вопросы	21
Список литературы	21

Учебное издание

Павлов Алексей Николаевич

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЖИМОВ ДИНАМИКИ ГЕНЕРАТОРА ЧУА

Учебное пособие

*для студентов физического факультета
и факультета нелинейных процессов*

Технический редактор *Л.В. Агальцова*
Корректор *Е.Б. Крылова*

Подписано в печать 20.12.2005. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Гарнитура Times. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 1,39(1,5). Уч.-изд. л. 1,1. Тираж 75. Заказ 499

Издательство Саратовского университета.
410012, Саратов, Астраханская, 83.
Типография Издательства Саратовского университета.
410012, Саратов, Астраханская, 83.