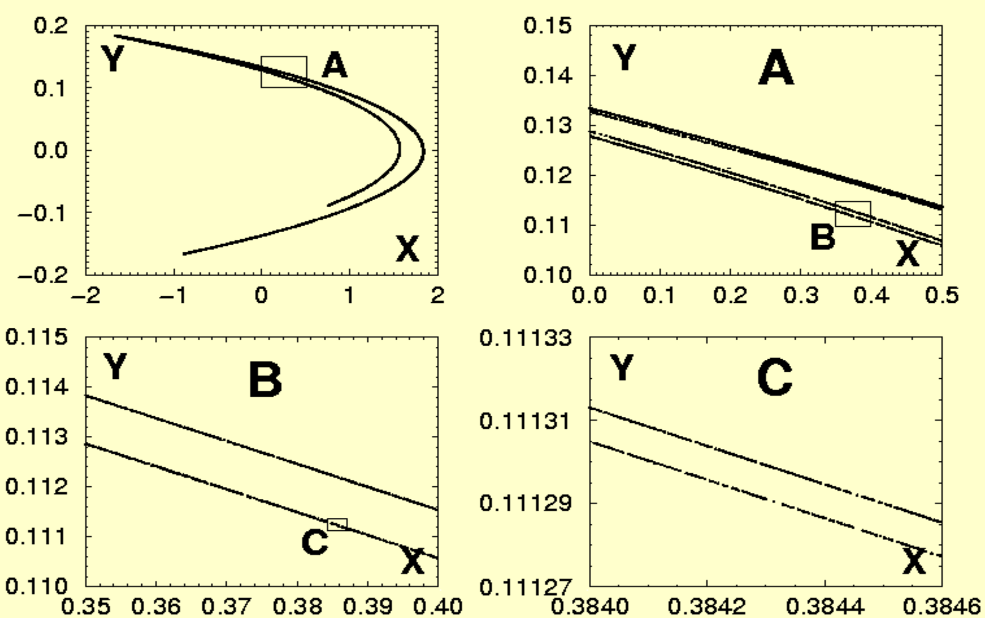
Лекция № 13

Фрактальная структура странных аттракторов

Исследование странных аттракторов и квазиаттракторов потребовало разработки новых математических представлений. Была развита теория фракальных множеств и предожены различные определения фрактальной размерности.

Рассмотрим сечение Пуанкаре некоторого странного аттрактора в R^3 или СА двумерного отображения. Мы увидим, что одна и та же структура повторяется во все более мелком масштабе. Это свойство называется масштабной инвариантностью или скейлингом.



Скейлинг аттрактора в отображении Хенона

$$x_{n+1} = 1 + y_n - a x_n^2,$$

$$y_{n+1} = b x_n$$

***при** $a = 1.71$, $b = 0.1$.*

Что такое фрактал?

Термин фрактал был введен Бенуа Мандельбротом более 30 лет назад. Фрактал можно определить как множество, обладающее свойством скейлинга. Т.е. один и тот же фрагмент множества повторяется при каждом уменьшении масштаба.
Однако это определение не подходит для многих естественных фрактлов.

Другое определение фрактала: фрактал – это объект, фрактальная размерность которого больше топологической. Она чаще всего оказывается дробной ("fractional" – дробный).

Свойстава фрактала

- *имеет тонкую структуру, то есть содержит произвольно малые масштабы;*
- *имеет некоторую форму самоподобия (это достаточный признак, но не необходимый);*
- *не является многообразием и слишком сложен, чтобы быть описанным на традиционном геометрическом языке;*
- *обычно фрактальная размерность множества больше, чем его топологическая размерность.*

Что такое топологическая размерность?

Топологическая размерность геометрического объекта означает количество независимых направлений, по которым может двигаться точка внутри множества, не выходя за его пределы. Топологическая размерность всегда выражается целым неотрицательным числом.

Определения фрактальной размерности рассмотрим чуть позже.

Что такое многообразие?

Многообразие – это обобщение таких понятий, как точка, линия, поверхность и т.д. Каждая точка многообразия имеет окрестность. топологически эквивалентную шару в R^n. Величина n есть **топологическая размерность многообразия** , т.е. число координат, определяющих положение точки на многообразии

Предположим хаотический аттрактор располагается в R^3. Траектории на аттракторе расходятся. Но траектории не могут расходится на двумерном многообразии (поверхности) не пересекаясь. Значит хаотический аттрактор не может быть многообразием и, таким образом, должен представлять собой динамический фрактал.

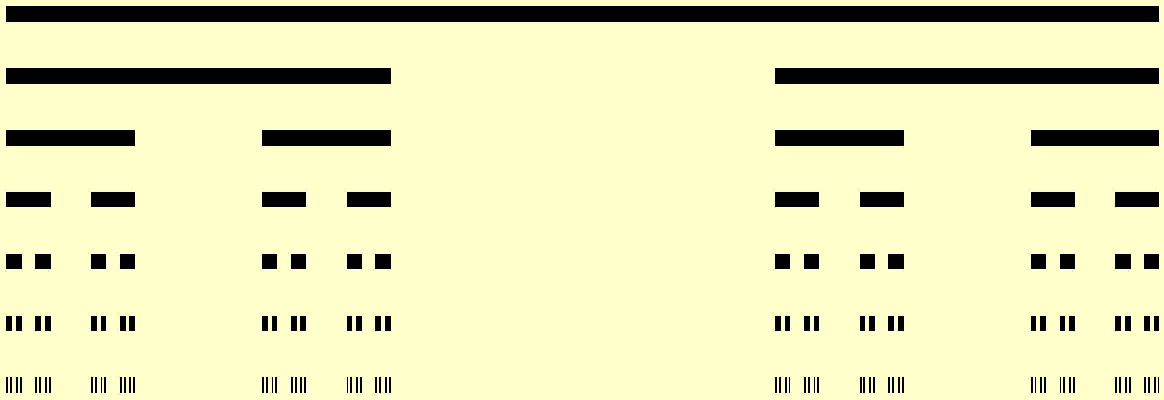
Регулярные (простые) аттракторы являются гладкими подмногообразиями фазового пространства, а нерегулярные (странные в обобщенном смысле) аттракторы -- фракталами.

Классические примеры фрактальных множеств

Различают конструктивные (искусственно построенные), динамические (порождаемые динамическими системами) и естественные (существующие в природе) фракталы. Теория фракталов была создана в конце XX века в связи с развитием нелинейной динамики и компьютерной техники, однако примеры конструктивных фракталов были придуманы математиками гораздо раньше.

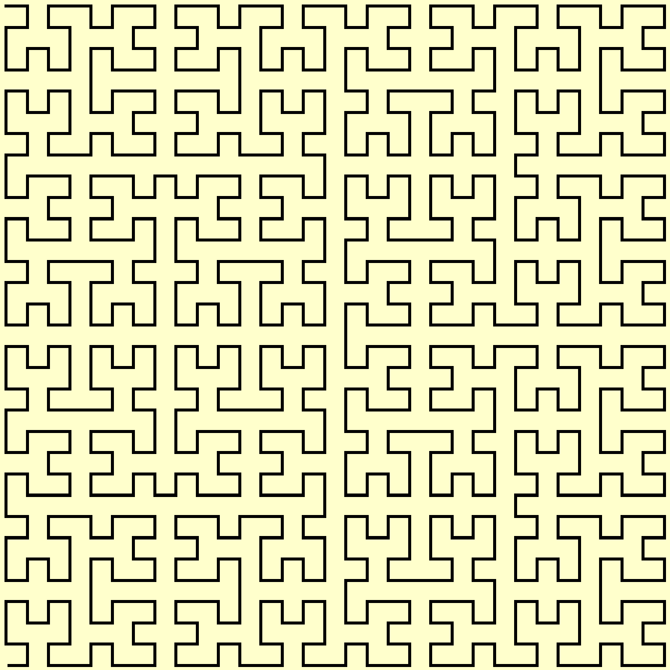
1. **Канторово множество** ***(Георг Кантор, 1883г.)***

Из единичного интервала вынимается средняя треть, затем процедура повторяется с каждым оставшимся отрезком и так до бесконечности. В пределе получается множество с мощностью континуума и топологической размерностью = 0.



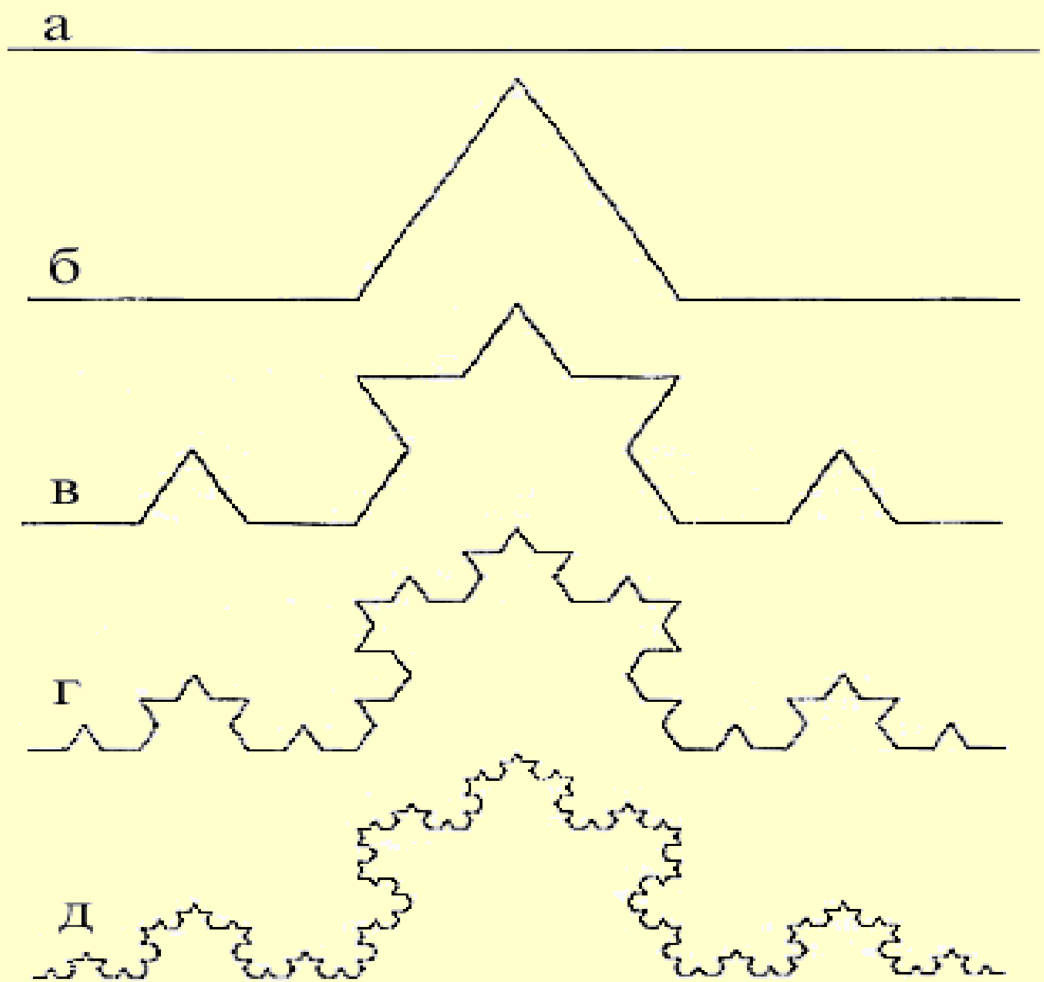
2. Кривая Пеано *(Джузеппе Пеано 1890 г.)*

Кривая Пеано заполняет единичный квадрат, т.е. попадает в сколь угодно малую окрестность любой точки квадрата, однако ее топологическая размерность равна 1, а не 2.

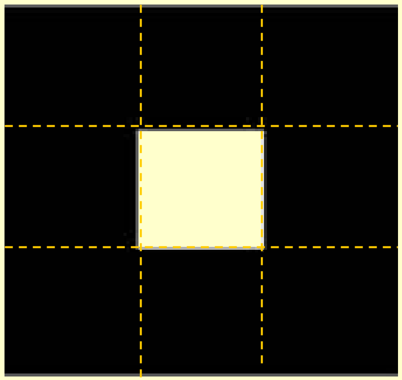


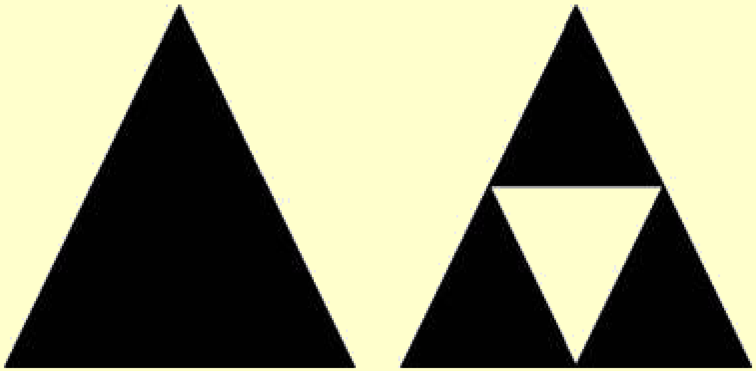
3. Кривая Кох *(Хельга фон Кох, 1904 г.)*

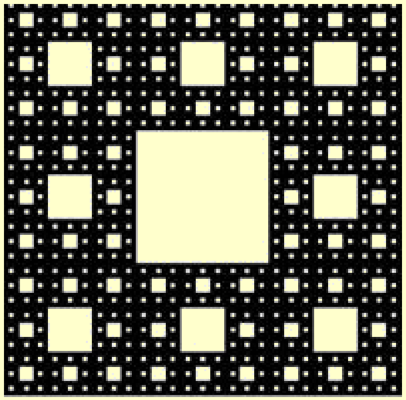
Принцип построения виден из рисунка

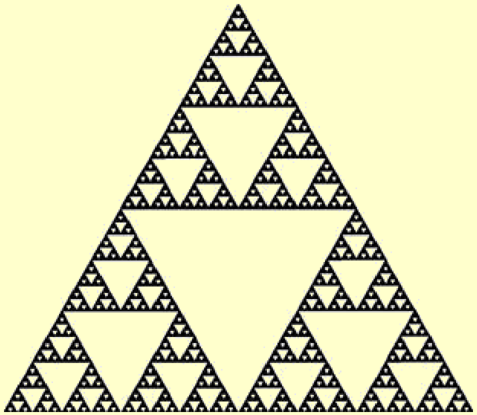


3. Ковры Серпинского

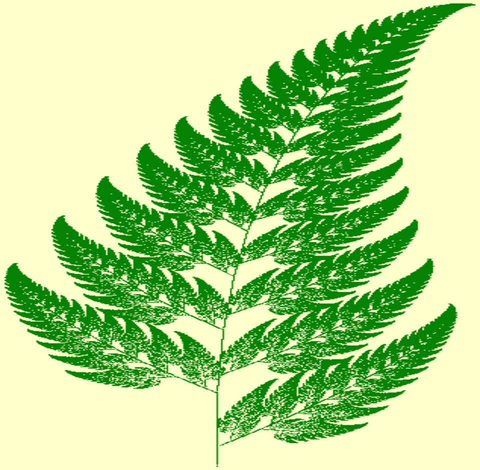
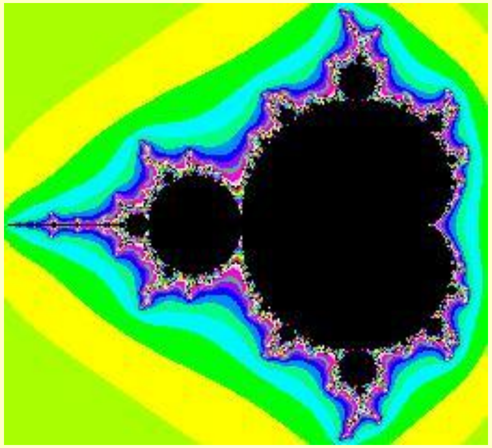
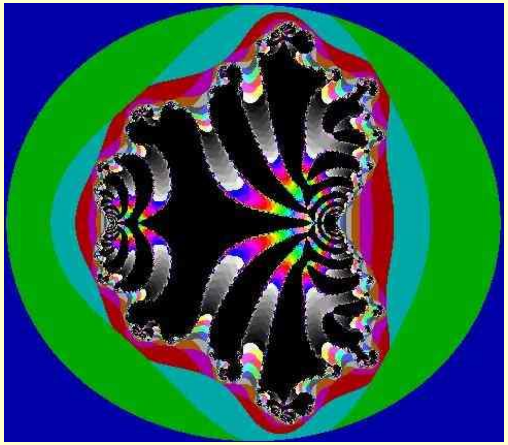
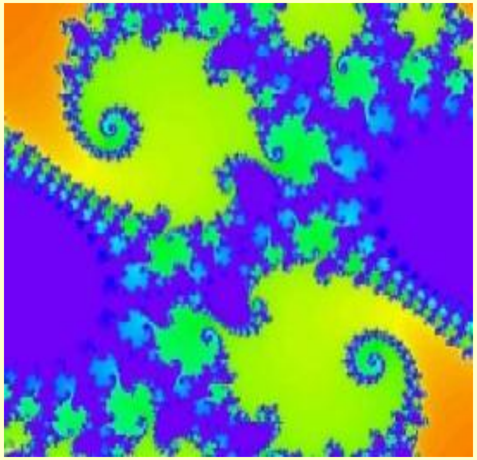
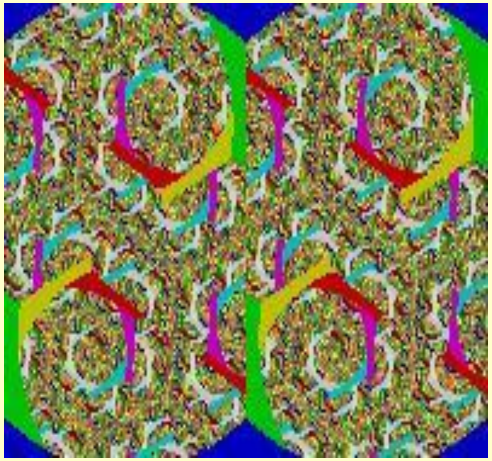
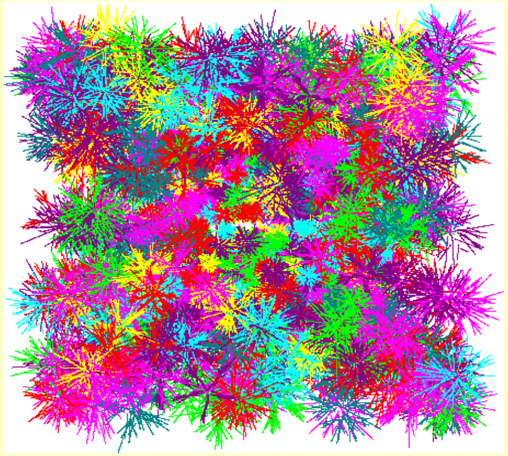








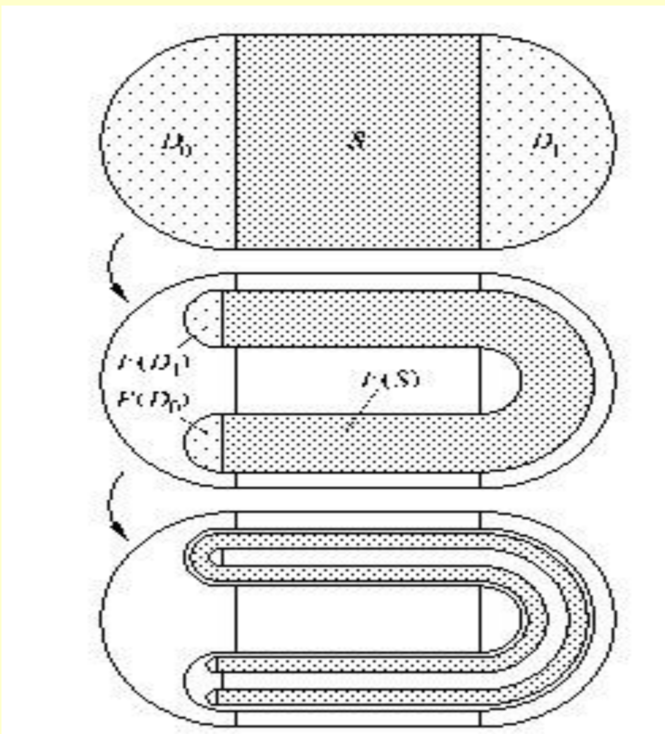
Еще некоторые примеры конструктивных фракталов

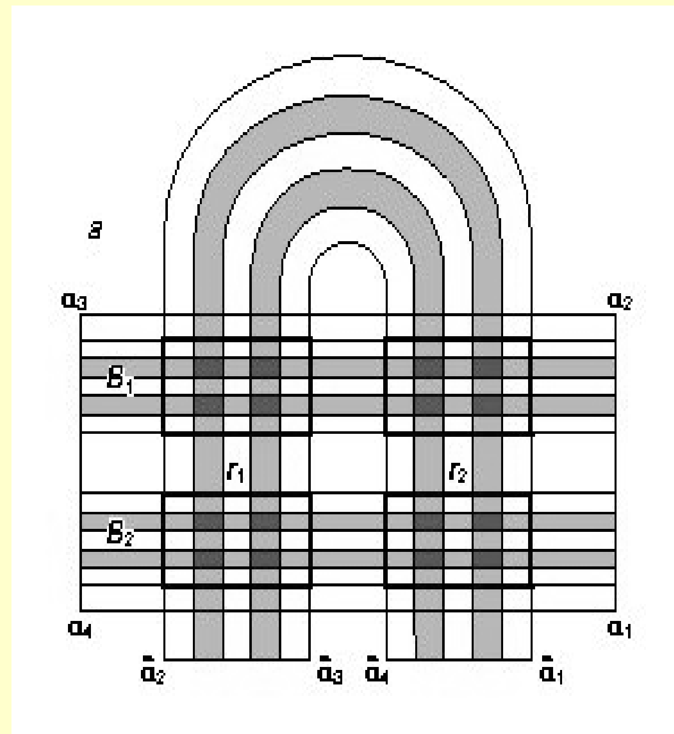
Классический пример динамического фрактала –

подкова Смейла

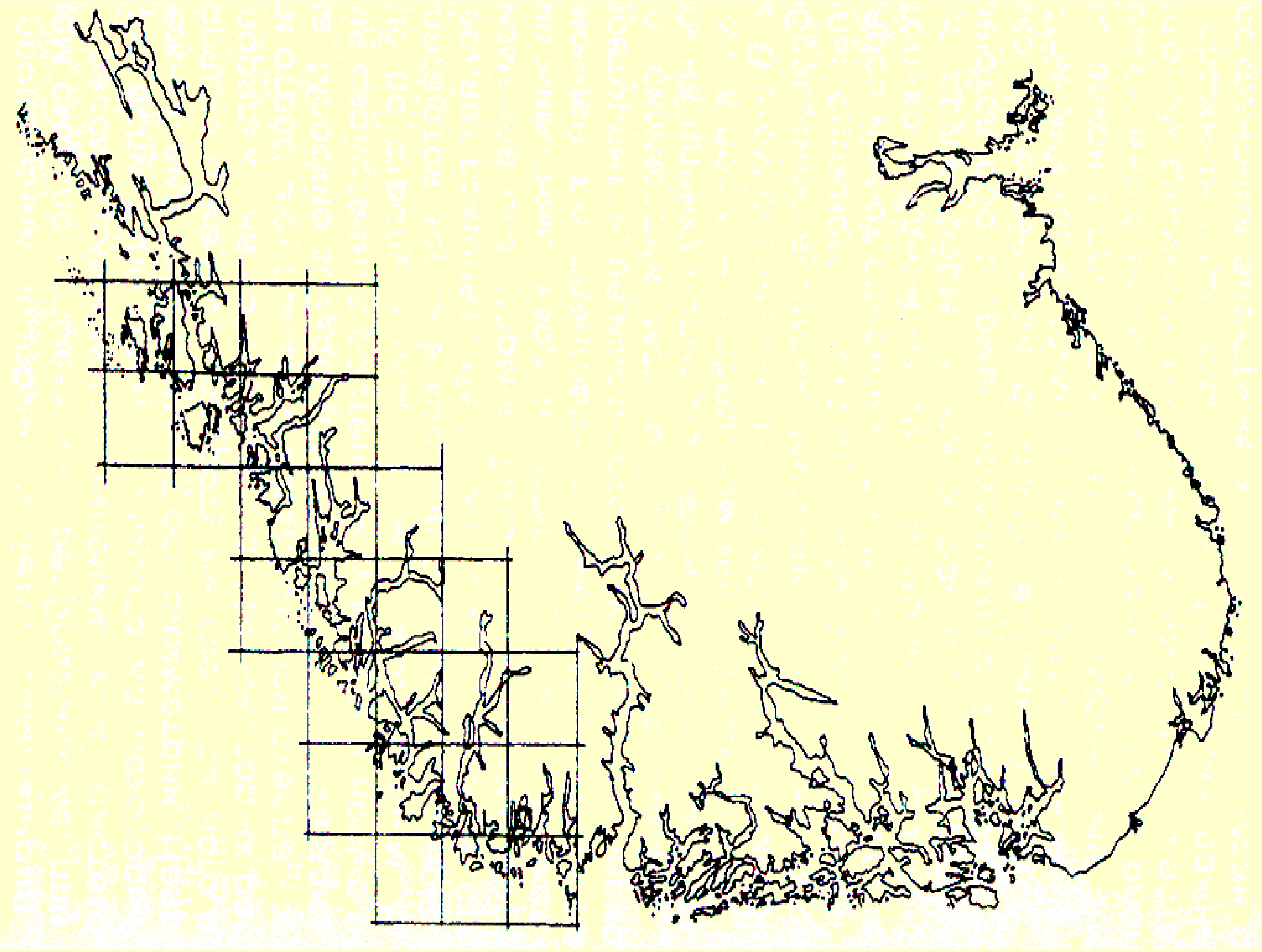
Вар.1. (без поворота)



Вар.2. (с поворотом)



Пример естественного фрактала – береговая линия



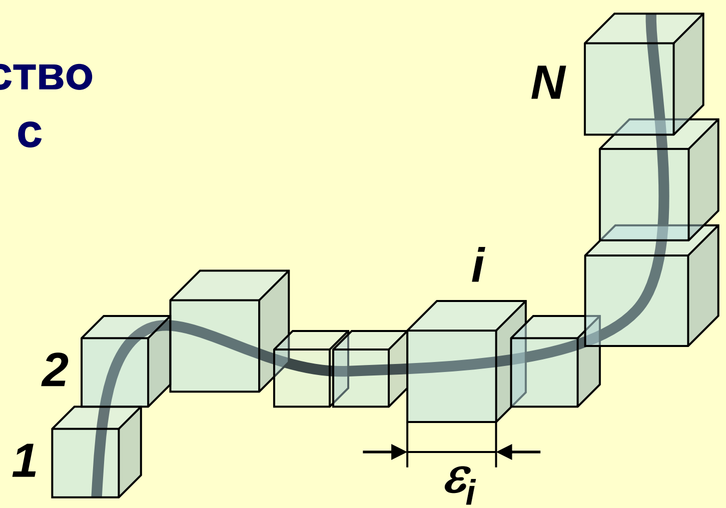
Фрактальные размерности множеств

Дробная (фрактальная) размерность может быть введена по-разному. Существуют несколько различных определений фрактальной размерности. Обычно они основаны на метрических свойствах множеств, но для фрактальных множеств, порождаемых ДС (динамических фракталов), вводятся и такие размерности, которые учитывают вероятностную меру (т.е. частоту, с которой фазовая траектория посещает различные части множества). Таким образом, все фрактальные размерности делятся на две подгруппы: а) чисто метрические и б) вероятностно-метрические.

Рассмотрим наиболее часто применяемые виды фрактальных размерностей.

1. Размерность Хаусдорфа D_H

Пусть в пространстве R^n имеется множество точек. Покроем это множество (все его точки) n - мерными кубиками с ребрами $\varepsilon_i \le \varepsilon$. Введем величину



$$l_D = \lim_{\varepsilon \to 0} \inf \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i^D .$$

Хаусдорф показал, что существует критическое значение $D = D_H$, такое, что

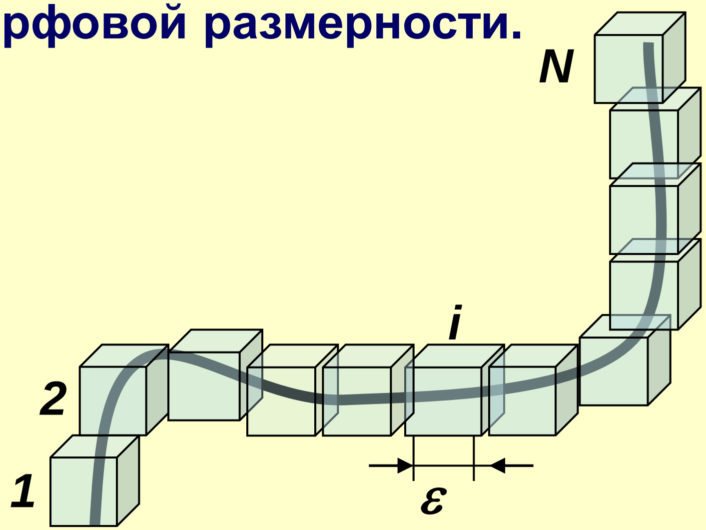
$$l_D = 0 \text{ при } D > D_H,$$
$$l_D = \infty \text{ при } D < D_H.$$

Величина D_H называется размерностью Хаусдорфа. Для многообразий D_H принимает целые значения равные топологической размерности, для фракталов значения D_H - дробные.

2. Емкость множества D_C

Емкость – это упрощение понятия хасдорфовой размерности.

Покроем множество точек в R^n одинаковыми n - мерными кубиками с ребром ε. Для точки достаточно одного кубика, для линии необходимо $N \sim 1/\varepsilon$ кубиков, для поверхности -- $N \sim 1/\varepsilon^2$ и т. д. . Если имеется фрактальное множество, тогда по аналогии имеем: $N \sim 1/\varepsilon^{D_C}$, где D_C – дробная величина.



Пусть $N \approx a/\varepsilon^{D_C}$, $a = const.$ Взяв логарифм и перейдя к пределу $\varepsilon \to 0$, получаем выражение для D_C , которое можно считать определением **емкости множества**:

$$D_C = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \varepsilon^{-1}}.$$

Для многообразий и, во многих случаях, для фракталов $D_C = D_H$. В общем случае имеет место неравенство $D_C \geq D_H$. Т.е. емкость – это оценка хаусдорфовой размерности сверху.

Для приведенных ранее простых примеров фрактальных множеств емкость совпадает с хаусдорфовой размерностью и может быть найдена аналитически.

1. Множество Кантора.

Выбираем на каждом шаге величину ε (длину элемента покрытия) равной длине удаляемой части интервала. Тогда на *k*-том шаге: $\varepsilon = 1/3^k$. Получаем

$$D_C = D_H = \lim_{k\to\infty} \frac{\log 2^k}{\log 3^k} = \frac{\log 2}{\log 3} = 0.63092\ldots\ .$$

2. Кривая Кох.

Аналогично рассуждая, получаем:

$$D_C = D_H = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.26185\ldots\ .$$

3. Подкова Смейла.

Пусть коэффициент растяжения единичного квадрата по оси *x* равен *2*, а коэффициент сжатия по оси *y* равен 2ν, $\nu \ge 1$, тогда

$$D_C = D_H = 1 + \frac{\log 2}{\log 2\nu}\ .$$

Очевидно емкость является чисто метрической размерностью.

3. Информационная размерность D_I

Эта характеристика аналогична емкости, но учитывает вероятностную меру на исследуемом множестве.

Покрываем множество точек в R^n одинаковыми n - мерными кубиками с ребром ε и находим вероятность попадания точки в каждый кубик. Можно ввести энтропию распределения:

$$H(\varepsilon) = -\sum_{i=1}^{N} P_i \log P_i,$$

где P_i – вероятность попасть в i-ый кубик. Информационная размерность определяется как

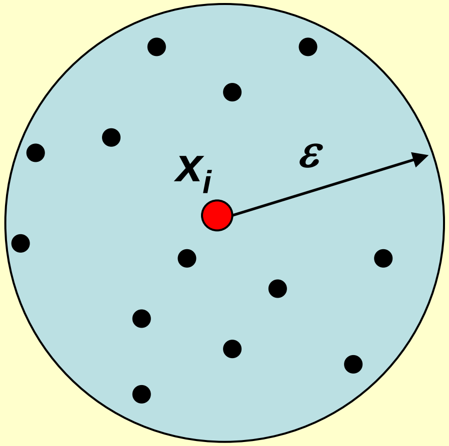
$$D_I = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{H(\varepsilon)}{\log \varepsilon^{-1}}.$$

Очевидно, что для равномерного распределения $P_i = 1/N$ имеет место равенство: $D_I = D_C$. При любом другом распределении энтропия будет меньше и, соответственно, $D_I < D_C$.

4. Корреляционная размерность D_{cr}

Этой характеристикой удобно пользоваться при анализе временных рядов (каких-либо экспериментальных данных). Пусть имеется последовательность из m точек, принадлежащих некоторому множеству в R^n: $x_1, x_2, \dots x_i, \dots x_m$. $\forall i \ x_i \in R^n$.

Обозначим за $m_\varepsilon(x_i)$ число точек последовательности, попадающих в сферу радиусом ε с центром в точке x_i, принадлежащей той же последовательности.



При $\varepsilon \to 0$ и $m \to \infty$ число $m_\varepsilon(x_i)$ будет вести себя как:

$\sim m\,\varepsilon^0$ – для счетного множества точек,

$\sim m\,\varepsilon^1$ – для линии,

$\sim m\,\varepsilon^2$ – для поверхности

$\sim m\,\varepsilon^3$ – для трехмерного многообразия, и т.д. .

В произвольном случае можно записать:

$m_\varepsilon(x_i) \approx a m\,\varepsilon^{D_i}$, где $a = const$.

Величина D_i в общем случае зависит от выбора точки x_i.

Рассмотрим среднее по всем точкам число m_ε:

$$m_\varepsilon = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} m_\varepsilon(x_i)$$

и представим его в виде

$$m_\varepsilon = am\varepsilon^{D_{cr}}, \ \varepsilon \to 0, m \to \infty.$$

где показатель D_{cr} может принимать дробные значения.

Тогда

$$\varepsilon^{D_{cr}} = \frac{1}{am^2}\sum_{i=1}^{m} m_\varepsilon(x_i), \ \textit{при}\ \varepsilon \to 0, \ m \to \infty.$$

Число точек, попадающих в сферу радиусом ε с центром в точке x_i, можно представить как

$$m_\varepsilon(x_i) = \sum_{j=1,\, j\neq i}^{m} \chi\left(\varepsilon - |\, x_i - x_j \,|\right),$$

где $\chi(\ )$ – функция Хевисайда.

В пределе $\varepsilon \to 0$, $m \to \infty$ получаем:

$$\varepsilon^{D_{cr}} = \frac{1}{a} C(\varepsilon),$$

где

$$C(\varepsilon) = \lim_{m \to \infty} \frac{1}{m^2} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1,\, j \neq i}^{m} \chi\left(\varepsilon - | x_i - x_j |\right).$$

Функцию *C(ε)* называют корреляционным интегралом.

Величина

$$D_{cr} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log C(\varepsilon)}{\log \varepsilon}.$$

называется корреляционной размерностью множества.

5. Обобщенная размерность D_q

Можно обобщить размерности D_C, D_I, D_{cr} и ввести размерность порядка q, пользуясь обобщенной энтропией порядка q (энтропией Реньи):

$$H_q(\varepsilon) = \frac{1}{1-q} \log \sum_{i=1}^{N} P_i^q,$$

где P_i – вероятность попасть в i-ый элемент покрытия. Тогда размерность, порядка q *есть*

$$D_q = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{H_q(\varepsilon)}{\log \varepsilon^{-1}}.$$

Можно показать, что $D_0 = D_C, \quad D_1 = D_I, \quad D_2 = D_{cr}.$

Замечание

Кроме рассмотренных размерностей существуют и другие, такие как поточечная размерность, хаусдорфова размерность ядра, емкость ядра и т.д.

6. Ляпуновская размерность D_L

Было сделано предположение, что размерность аттрактора ДС в фазовом пространстве R^n можно оценить с помощью спектра характеристических ляпуновских показателей (ЛХП).
Такая оценка называется ляпуновской размерностью D_L .
Выстроим спектр ЛХП в порядке убывания значений показателей:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \ldots \geq \lambda_i \geq \ldots \lambda_n$$

Ляпуновская размерность задается следующей фомулой Каплана—Йорка:

$$D_L = k + \frac{1}{|\lambda_{k+1}|} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i ,$$

где целое число *k* определяется из условий

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \geq 0 \wedge \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i < 0.$$

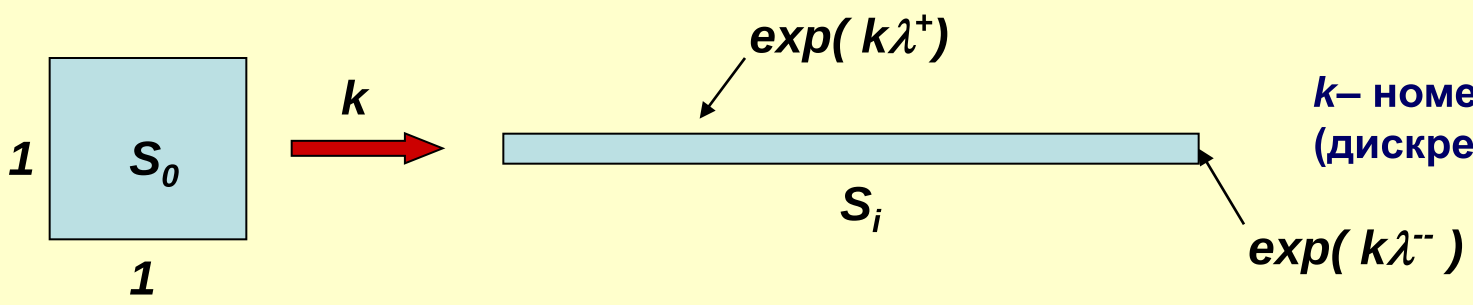
Т.е. *k* – это число первых показателей в спектре ЛХП, сумма которых еще не отрицательна.

Из формулы Каплана—Йорка для регулярных аттракторов получаем следующие значения ляпуновской размерности, совпадающие с топологической размерностью соответствующего множества:

1. **Состояние равновесия -- спектр ЛХП: (--, --, --, --, …),** $D_L = 0$;
2. **Предельный цикл -- спектр ЛХП: (0, --, --, --, …),** $D_L = 1$;
3. **Двумерный тор -- спектр ЛХП: (0, 0, --, --, …),** $D_L = 2$;
4. ***N*-мерный тор -- спектр ЛХП: (0, 0, …0, -- …),** $D_L = N$;

Для ДС с постоянным растяжением и сжатием имеет место равенство: $D_L = D_C$.

Например, рассмотрим двумерное отображение, характеризующееся постоянным растяжением в $exp(\lambda^+)$ **раз и сжатием в** $exp(|\lambda^{--}|)$, **где** λ^+ **и** λ^{--} **-- положительный и отрицательный показатели Ляпунова.**



***k*– номер итерации (дискретное время)**

Кроме растяжения и сжатия образовавшаяся ленточка будет изгибаться и складываться.

На k—ой итерации мы можем покрыть образовавшуюся ленточку, площадью S_k с помощью N квадратиков с ребром $\varepsilon = exp(\ k\lambda^{-})$, где

$$N(\varepsilon) = \exp\left\{k(\lambda^{+} + |\lambda^{-}|)\right\}.$$

При $k \to \infty$ получаем, что $\varepsilon \to 0$ и, соответственно, находим емкость предельного множества:

$$D_C = \lim_{i\to\infty} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)} = \frac{\lambda^{+} + |\lambda^{-}|}{|\lambda^{-}|} = 1 + \frac{\lambda^{+}}{|\lambda^{-}|}.$$

Она совпадает с ляпуновской размерностью D_L.

Для подковы Смейла с коэффициентом растяжения $\alpha = 2$ и коэффициентом сжатия $\beta = 2\nu$, $\nu \geq 1$, аналогично получаем

$$D_L = D_C = 1 + \frac{\log 2}{\log 2\nu}.$$

В общем случае, для систем с переменной дивергенцией, равенство $D_L = D_C$ может нарушаться.

Взаимосвязь между различными типами размерности

Грассбергер и Прокачча показали, что в общем случае имеет место соотношение:

$$D_{cr} \le D_I \le D_C.$$

Равенство $D_I = D_C$, как уже говорилось, имеет место в случае равномерного вероятностного распределения о всем элементам покрытия.

Коррелционная размерность D_{cr} учитывает совместную вероятность попадания пары точек в *i*-ый элемент разбиения и, соответственно, должна быть еще меньше, чем D_I.

Для ляпуновской размерности D_L обычно имеет место равенство: $D_L = D_I$, хотя известны и исключения. Для большинства хаотических аттракторов значения всех перечисленных размерностей очень близки.