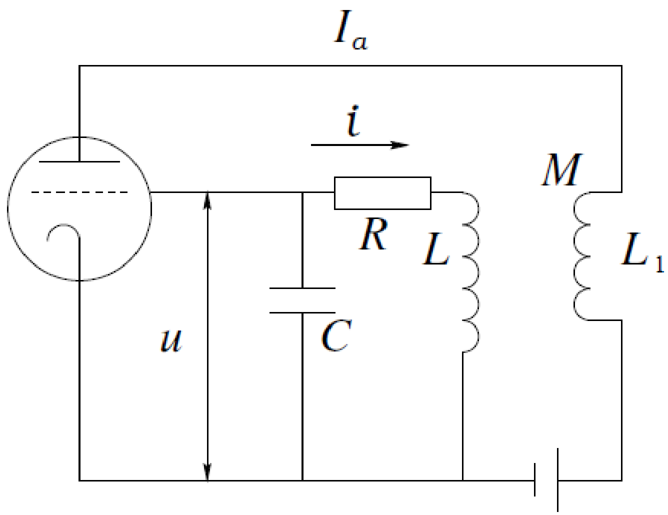
Генератор Ван дер Поля



Упрощенная схема радиотехнического генератора с колебательным контуром в цепи сетки и индуктивной обратной связью

Используя законы Кирхгофа, можно записать дифференциальные уравнения для колебательного контура относительно напряжения u на конденсаторе C:

$$LC\frac{d^2u}{dt^2}+RC\frac{du}{dt}+u = M\frac{dI_a}{dt}, \qquad (1)$$

где L, R, C - индуктивность, сопротивление и емкость колебательного контура, M – коэффициент взаимной индукции, I_a - анодный ток лампы.

Предположим, что анодный ток зависит лишь от напряжения на сетке лампы, и анодно-сеточную характеристику можно аппроксимировать в окрестности рабочей точки полиномом

$$I_a = I_0 + S_0u - S_2u^3. \qquad (2)$$

Тогда уравнение (1) можно записать в виде

$$\frac{d^2u}{dt^2} - \left[\frac{MS_0 - RC}{LC} - \frac{3MS_2}{LC}u^2\right]\frac{du}{dt} + \frac{1}{LC}u = 0. \tag{3}$$

Это уравнение можно представить следующим образом

$$\frac{d^2u}{dt^2} - \alpha\left(1 - \beta u^2\right)\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0, \tag{4}$$

где

$$\alpha = \frac{MS_0 - RC}{LC}, \quad \beta = \frac{3MS_2}{MS_0 - RC}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

Введем безразмерное время $\tau = \omega_0 t$. Тогда уравнение (4) примет вид

$$\frac{d^2u}{d\tau^2} - \frac{\alpha}{\omega_0}\left(1 - \beta u^2\right)\frac{du}{d\tau} + u = 0. \tag{5}$$

Сделав замену переменных и параметров $x = \sqrt{\beta}u$ и $\varepsilon = \alpha/\omega_0$, получим уравнение Ван дер Поля

$$\ddot{x} - \varepsilon\left(1 - x^2\right)\dot{x} + x = 0, \tag{6}$$

где $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$. Во многих случаях его удобно представлять в виде

$$\ddot{y} - \left(\varepsilon - y^2\right)\dot{y} + y = 0, \tag{7}$$

которое получается из уравнения (6) при замене $y = \sqrt{\varepsilon}x$.

Анализ уравнения Ван дер Поля. Возникновение автоколебаний

При определении условий возникновения автоколебаний важно знать, какие состояния равновесия существуют в системе и как меняется характер их устойчивости в зависимости от управляющих параметров. Определим точки равновесия и характер их устойчивости в осцилляторе Ван дер Поля, взяв за основу уравнение (7)

$$\ddot{x} - \left(\varepsilon - x^2\right)\dot{x} + x = 0. \tag{7}$$

Перепишем его в виде системы уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(x, y, \varepsilon), \\ \dot{y} &= f_2(x, y, \varepsilon), \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned} f_1(x, y, \varepsilon) &= y, \\ f_2(x, y, \varepsilon) &= \left(\varepsilon - x^2\right) y - x. \end{aligned}$$

Запишем уравнения для состояний равновесия, приравняв нулю функции f_1 и f_2:

$$\begin{aligned} &y = 0, \\ &\left(\varepsilon - x^2\right) y - x = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Видно, что существует единственная особая точка, расположенная на фазовой плосокости в начале координат: $x^0 = 0, \quad y^0 = 0.$

Для определения устойчивости состояния равновесия следует линеаризовать систему в окрестности неподвижной точки, построить матрицу линеаризации. Для системы (8) получим следующую матрицу:

$$\hat{A}\left(x^0, y^0\right) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1\left(x^0, y^0\right)}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1\left(x^0, y^0\right)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2\left(x^0, y^0\right)}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2\left(x^0, y^0\right)}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \varepsilon \end{bmatrix}. \qquad (10)$$

Собственные значения матрицы (10) определяют устойчивость состояния равновесия осциллятора Ван дер Поля. Их легко получить из характеристического уравнения

$$Det\left[\hat{A} - sE\right] = 0, \qquad Det\begin{bmatrix} 0-s & 1 \\ -1 & \varepsilon - s \end{bmatrix} = 0 \qquad (11)$$

или

$$s^2 - \varepsilon s + 1 = 0. \qquad (12)$$

В результате имеем два собственных значения

$$s_{1,2} = \frac{\varepsilon}{2} \pm \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4} - 1.} \qquad (13)$$

Проследим за устойчивостью состояния равновесия $(x^0 = 0, y^0 = 0)$ осциллятора Ван дер Поля в зависимости от управляющего параметра ε.

1. При $\varepsilon < -2$ собственные значения s_1 и s_2 – действительные и отрицательные числа. В этом случае состояние равновесия представляет собой устойчивый узел
2. При $-2 < \varepsilon < 0$ собственные значения s_1 и s_2 – комплексно-сопряженные числа и $\mathrm{Re}\,[s_{1,2}] < 0$. Состояние равновесия – устойчивый фокус.
3. При $0 < \varepsilon < 2$ собственные значения s_1 и s_2 – комплексно-сопряженные числа и $\mathrm{Re}\,[s_{1,2}] > 0$. Состояние равновесия является неустойчивым фокусом.
4. При $\varepsilon > 2$ собственные значения s_1 и s_2 являются действительными положительными числами. Состояние равновесия представляет собой неустойчивый узел.

   Значение управляющего параметра $\varepsilon = 0$ является бифуркационным, поскольку комплексно-сопряженные собственные значения матрицы линеаризации в состоянии равновесия становятся чисто мнимыми. Как уже говорилось такая ситуация соответствует бифуркации Андронова–Хопфа. Чтобы определить, является ли бифуркация суперкритической или субкритической, и выяснить, как ведет себя рождающийся из точки равновесия предельный цикл, перейдем к приближенному квазигармоническому описанию автогенератора в терминах мгновенной амплитуды и фазы.

Уравнения для амплитуды и фазы генератора

Известны несколько классических методов получения квазигармонического приближенного решения уравнения Ван дер Поля. Мы рассмотрим метод усреднения Ван дер Поля применительно к уравнению генератора в следующей форме:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \left(\varepsilon - x^2\right)\frac{dx}{dt} + x = 0.$$

Будем считать, что при малых положительных значениях ε решение уравнения близко к гармоническим колебаниям. Запишем его в виде гармонической функции с медленно меняющимися параметрами:

$$x(t) = \mathrm{Re}\left[a(t)\exp(jt)\right] = \frac{1}{2}\left[a\exp(jt) + a^*\exp(-jt)\right], \tag{14}$$

где $a(t)$ – комплексная амплитуда, $\mathrm{Re}\,[...]$ – действительная часть комплексной величины, a^* – комплексно-сопряженная величина. Поскольку вместо действительной функции $x(t)$ мы ввели новую комплексную функцию $a(t)$ и она недостаточно определена, введем дополнительное условие. Потребуем, чтобы функция $a(t)$ удовлетворяла условию

$$\frac{da}{dt}\exp(jt) + \frac{da^*}{dt}\exp(-jt) = 0. \tag{15}$$

Подставим решение (14) в уравнение Ван дер Поля, предварительно вычислив первую и вторую производные с учетом дополнительного условия (15) В результате получим следующее выражение

$$j\frac{da}{dt}\exp(jt) = \left[\varepsilon - \frac{a^2\exp(2jt) + 2|a|^2 + (a^*)^2\exp(-2jt)}{4}\right] \times$$
$$\times\ \frac{ja\exp(jt) - ja^*\exp(-jt)}{2}.$$

Раскроем скобки и разделим обе части уравнения на $j\exp(jt)$:

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{2}\varepsilon a - \frac{1}{8}|a|^2 a - \frac{1}{2}\varepsilon a^*\exp(-2jt) - \frac{1}{8}a^3\exp(2jt) +$$
$$+\ \frac{1}{4}|a|^2 a^*\exp(-2jt) - \frac{1}{8}|a|^2 a^*\exp(-2jt) + \frac{1}{8}\left(a^*\right)^3\exp(-4jt). \qquad (16)$$

Будем полагать, что $a(t)$ – медленно меняющаяся функция времени и ее изменением за один период колебаний системы можно пренебречь. Также считаем, что производная da/dt в течение одного периода практически постоянна. Умножая обе части уравнения (16) на $1/2\pi$ и интегрируя по времени от 0 до 2π, получим

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{2}\varepsilon a - \frac{1}{8}|a|^2 a. \qquad (17)$$

Уравнение (17) называется “укороченным” или “усредненным” уравнением Ван дер Поля для комплексной амплитуды. Запишем его в действительных переменных, представив комплексную величину в полярных координатах:

$$a(t) = \rho(t)\exp\left(j\varphi(t)\right),$$

где $\rho(t)$ – вещественная амплитуда, $\varphi(t)$ – вещественная фаза колебаний.

В результате из (17) получается системы укороченных уравнений для амплитуды и фазы:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\varepsilon}{2}\rho - \frac{1}{8}\rho^3,$$
$$\frac{d\varphi}{dt} = 0. \tag{18}$$

Из (18) легко определить стационарные состояния системы. Приравнивая производные нулю, находим два возможных состояния:

$$\rho^0(t) = 0,$$
$$\varphi^0(t) = \varphi_0, \tag{19}$$

и

$$\rho^0(t) = 2\sqrt{\varepsilon},$$
$$\varphi^0(t) = \varphi_0. \tag{20}$$

Первое из стационарных решений соответствует отсутствию колебаний, состоянию равновесия в осцилляторе Ван дер Поля. Второе соответствует квазигармоническим автоколебаниям автогенератора, которые представляются в виде

$$x(t) = 2\sqrt{\varepsilon}\cos\left(t + \varphi_0\right), \tag{21}$$

где φ_0 – начальная фаза колебаний (она может быть произвольной).