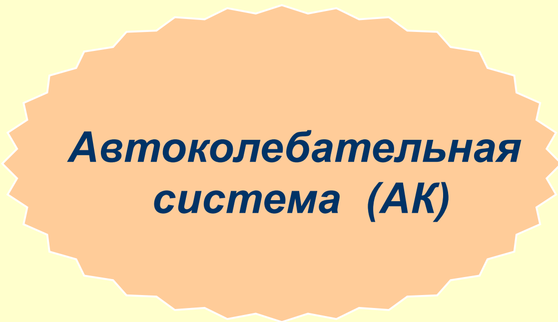
Синхронизация

Часть 1.

Синхронизация периодических автоколебаний.

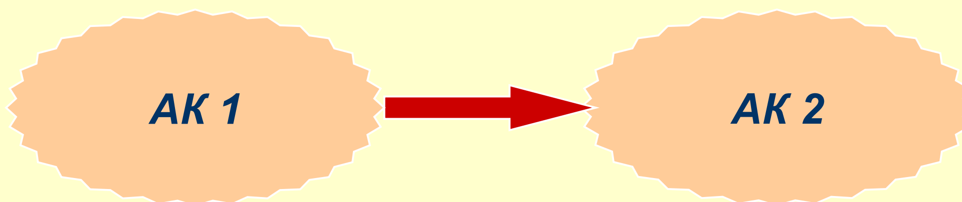
Эффективная синхронизация в присутствии шума

Синхронизация автоколебаний – одно из фундаментальных явлений природы

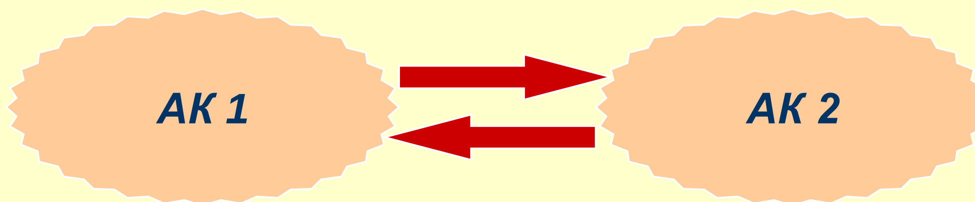


- период T (для периодических АК);
- основная частота автоколебаний ω_0 (для периодических АК $\omega_0 = 2\pi / T$);
- фаза колебаний Φ (для гармонических автоколебаний $\Phi = \omega_0 t + \varphi_0$).

Вынужденная синхронизация



Взаимная синхронизация

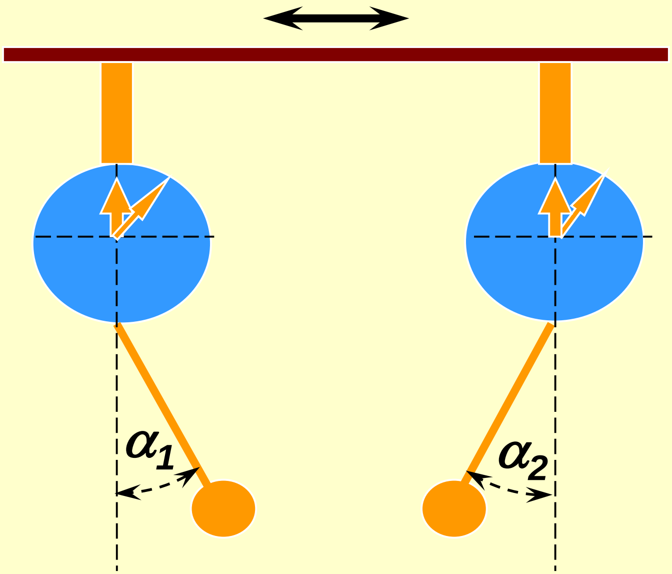


В результате взаимодействия происходит согласование периодов, захват частот и фаз автоколебаний.

Из истории вопроса

1665 г., Х. Гюйгенс – эффект взаимной синхронизации маятниковых часов.

Христиан Гюйгенс
1629 -- 1695



Маятники двух часов, подвешенных к одной и той же деревянной балке двигались всегда в противоположные стороны, а периоды колебаний точно совпадали. Если такой порядок искусственно нарушался, то он сам восстанавливался в короткое время. Т.е. часы синхронизовались в противофазе за счет связи через балку.

Середина XIX в., лорд Дж. Рэлей – синхронизация в акустических системах.

Рэлей наблюдал взаимную синхронизацию двух органных труб. Различные, но схожие по параметрам, трубы, расположенные близко друг от друга, начинали звучать в унисон. Был также установлен эффект гашения колебаний, когда взаимодействие приводило к уменьшению колебаний.

Первая половина XX в. – исследование и применение синхронизации в радиотехнике.

1920 г., В. Экклес, Дж. Винсент – экспериментально установлен и исследована взаимна синхронизация двух триодных автогенераторов.

1927 г., Э. Эпплтон, Б. Ван дер Поль – основы теории эффекта синхронизации триодного автогенератора внешним гармоническим сигналом.

Балтазар Вар дер Поль
1889 -- 1959

1930 г., А. А. Андронов, А. А, Витт --
создана законченная теория синхронизации автогенератора внешним гармоническим сигналом, обоснованная с точки зрения теории нелинейных колебаний.

Александр Александрович Андронов
1901 -- 1952

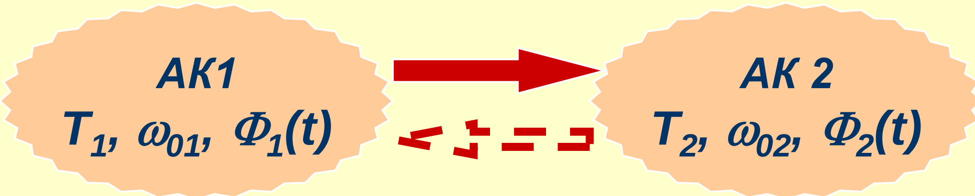
Синхронизация в живых системах

Все биологические системы имеют внутренние биологические часы. Эти часы могут подстраивать свои ритмы ко внешним сигналам.

1727 г. Синхронизация свечения роя светлячков (Э. Кэмпфер).

1729 г. Листья фасоли поднимаются и опускаются в соответствии со сменой дня и ночи (Ж. Ж. Дорту де Меран).

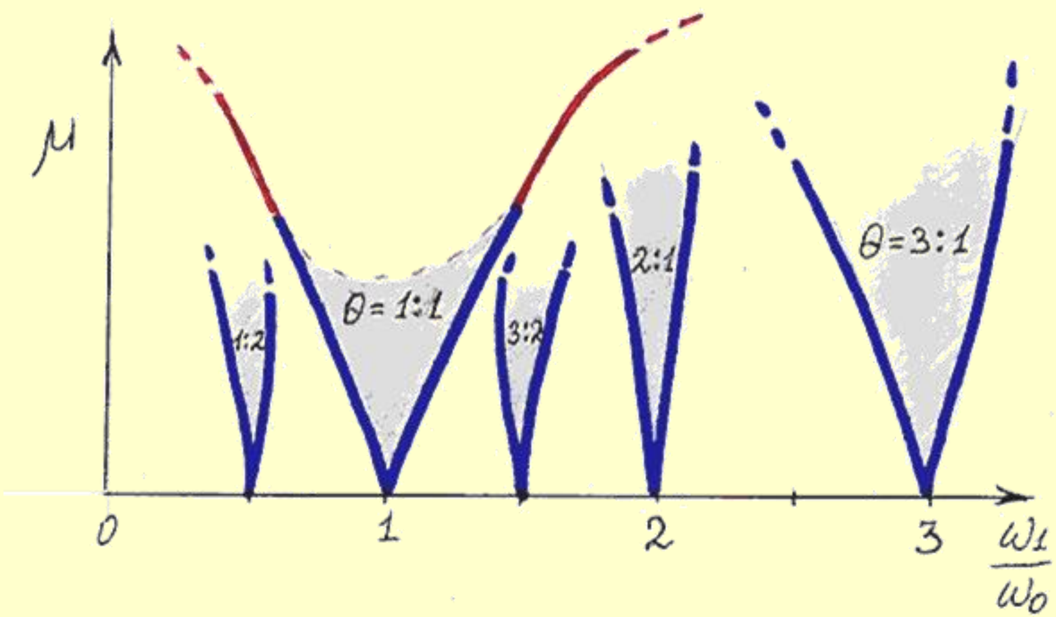
Синхронизация квазигармонических автоколебаний



- $nT_1 = mT_2$,
- $n\omega_{01} = m\omega_{02}$,
- $n\Phi_1(t)$ -- $m\Phi_2(t) = const$,

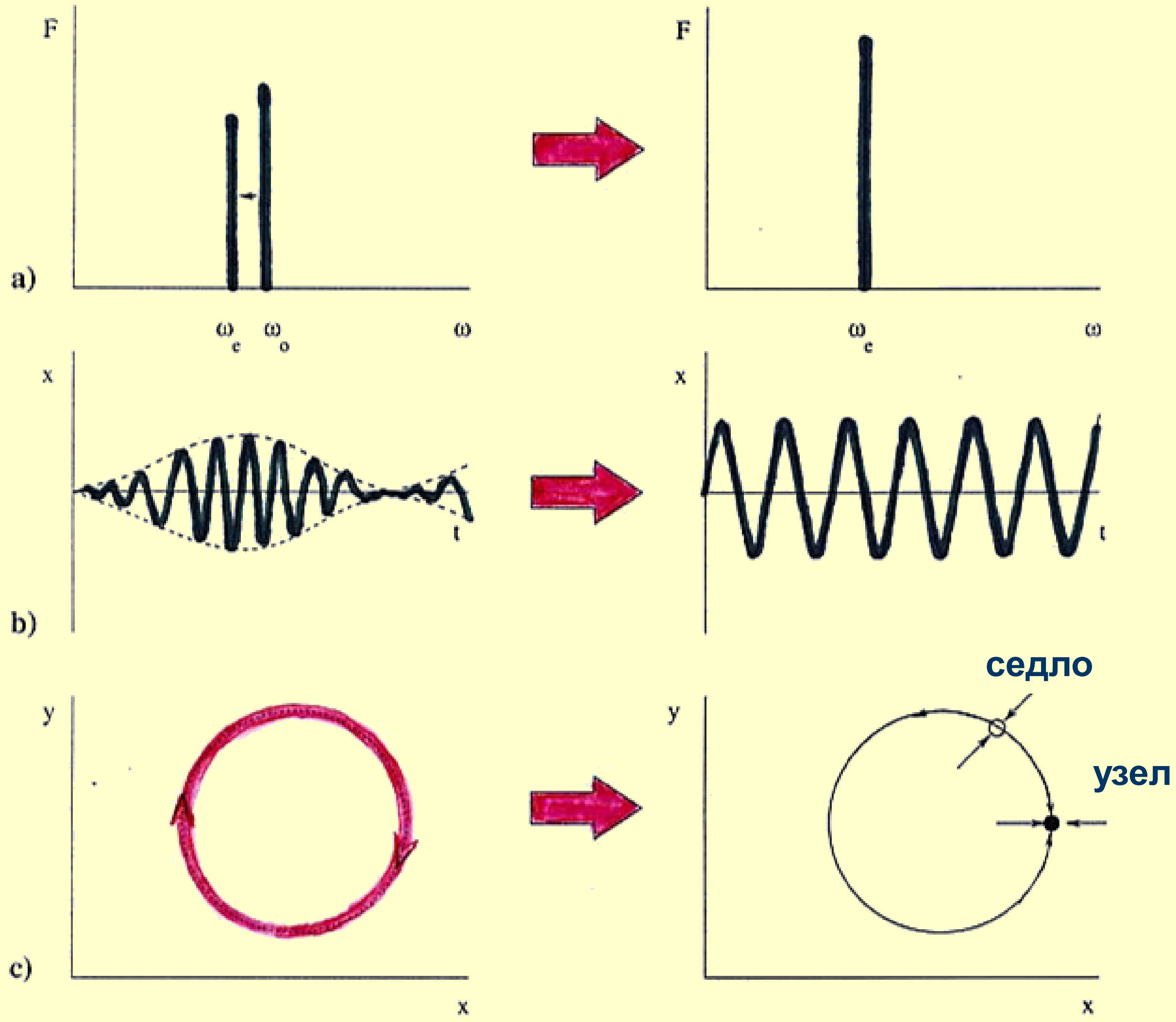
  где *n* и *m* – целые числа.

Области синхронизации на плоскости параметров, характеризующих частотную расстройку и степень взаимодействия систем (качественный рисунок)



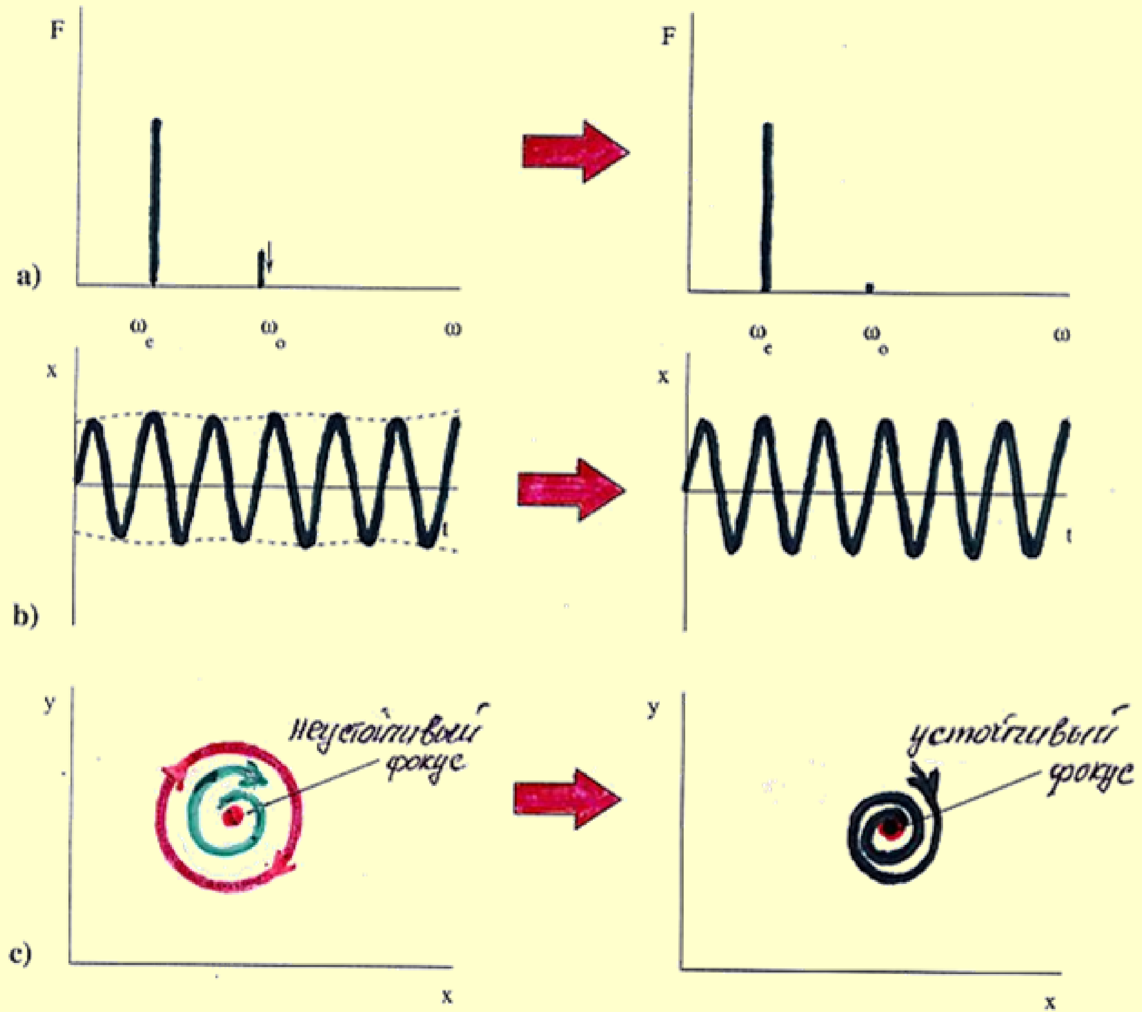
Синие линии – синхронизация через захват фазы автоколебаний;
красные линии синхронизация через подавление автоколебаний.
θ -- отношение частот парциальных систем в области синхронизации

Синхронизация автоколебаний через захват фазы



Изменения в спектрах (a), временных реализациях (b) и в структуре фазового пространства, взятого в стробоскопическом сечении (c), происходящие в результате синхронизации при захвате частоты.

Синхронизация автоколебаний через подавление



Изменения в спектрах (a), временных реализациях (b) и в структуре фазового пространства, взятого в стробоскопическом сечении (c), происходящие в результате синхронизации при подавлении собственной частоты.

Вынужденная синхронизация автогенератора. Классическая теория

Модель -- генератор Ван дер Поля с внешним гармоническим воздействием:

$$\boxed{\ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + \omega_0 x = a\cos(\omega_1 t + \varphi_0),} \qquad (1)$$

a и ω_1 – амплитуда и частота внешней силы, φ_0 – начальная фаза внешней силы (положим, для простоты, $\varphi_0 = 0$) .

Рассмотрим синхронизацию на основном тоне.
Считаем малыми

- расстройку частот $\Delta = \omega_0 - \omega_1$,
- нелинейность ε .

Решение ищется на частоте воздействия.

Замена переменных:

$$x(t) = A(t)\cos(\omega_1 t + \varphi(t)), \quad \dot{x}(t) = -\omega_1 A(t)\sin(\omega_1 t + \varphi(t)), \tag{2}$$

где $A(t)$ и $\varphi(t)$ – медленно меняющиеся функции по сравнению с $\sin(\omega_1 t)$, $\cos(\omega_1 t)$. Подставляя эти выражения в исходное уравнение и усредняя за период воздействия, получаем **укороченные уравнения** для амплитуды $A(t)$ и фазы $\varphi(t)$.

$$\dot{A} = \frac{\varepsilon A}{2}\left(1 - \frac{A^2}{A_0^2}\right) - \mu\sin\varphi, \qquad \dot{\varphi} = \Delta - \frac{\mu}{A}\cos\varphi, \tag{3}$$

где $\mu = a/2\omega_1$, $\Delta = \omega_0 - \omega_1$ – расстройка частот, A_0 – невозмущенная амплитуда.

Состояния равновесия системы (3) соответствуют периодическим решениям системы (1). Существует область значений μ и Δ, для которых система (3) имеет устойчивое состояние равновесия.

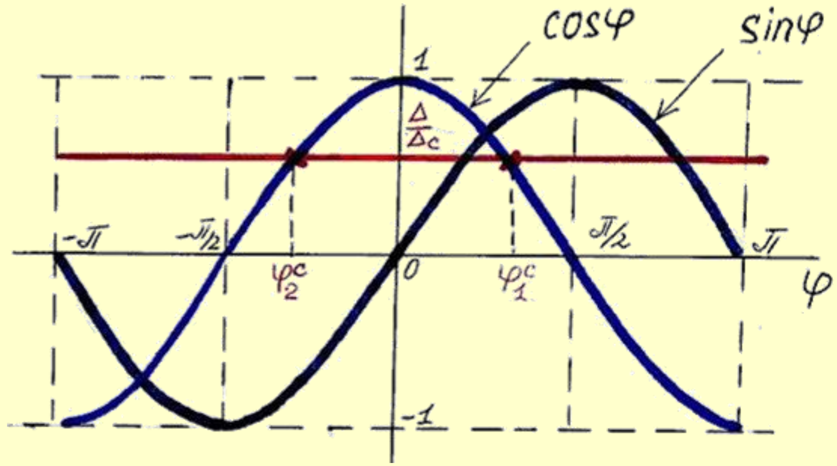
В системе (1), соответственно, наблюдаются устойчивые колебания на частоте воздействия. Эта область -- есть **область синхронизации**.

Фазовое приближение

Считаем, что амплитуда воздействия а мала. Тогда $A(t)\approx A_0$ и можно записать уравнение только для фазы φ:

$$\boxed{\dot{\varphi} = \Delta - \Delta_c \cos\varphi,} \qquad (4)$$

где $\Delta_c = \mu / A_0$.



Состояния равновесия (4):

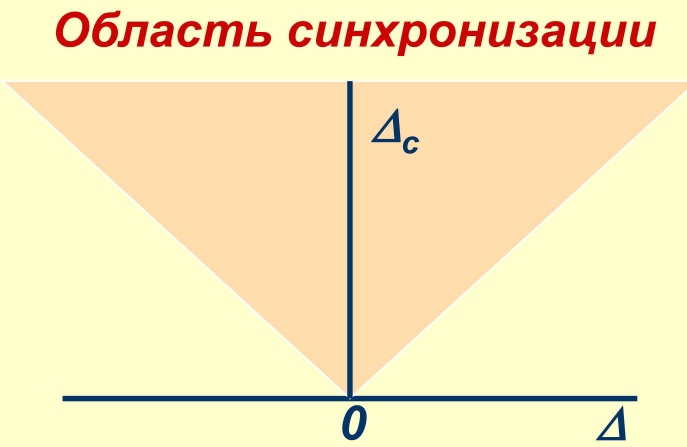
$$\varphi_{1,2}^{c} = \pm \arccos\left(\frac{\Delta}{\Delta_c}\right).$$

Уравнение для малого отклонения θ фазы φ от состояния равновесия.

$$\boxed{\dot{\theta} = (\Delta_c \sin\varphi_{1,2}^{c})\theta.}$$

Решение φ^{c}_{2} -- устойчиво, а φ^{c}_{1} – неустойчиво.

Область существования состояний равновесия уравнения (4) определяется условием $|\Delta| < \Delta_c$ (оно задает границы области синхронизации у её основания).



В этой области в системе (1) существуют устойчивые и неустойчивые периодические колебания на частоте воздействия. Разность фаз между колебаниями и воздействием постоянна.

На границе области синхронизации происходит слияние и исчезновение точек равновесия $\varphi^c{}_{12}$. Вне области синхронизации уравнение (4) имеет решение

$$\varphi(t) = 2arctg\left[\sqrt{\frac{\Delta - \Delta_c}{\Delta + \Delta_c}} tg\left(\frac{t}{2}\sqrt{\Delta^2 - \Delta_c^2}\right)\right].$$

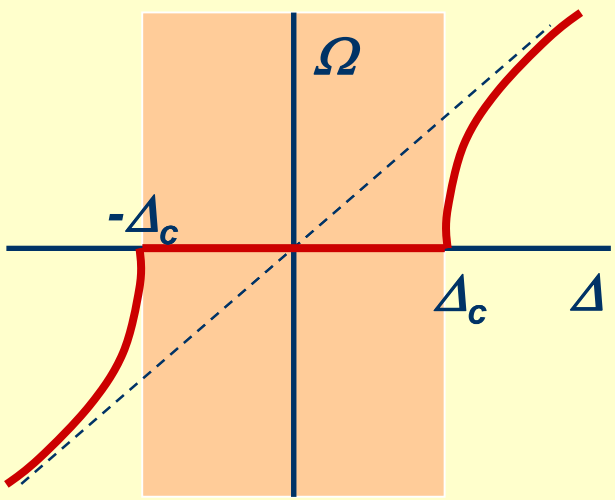
Мгновенная частота биений

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{\Delta^2 - \Delta_c^2}{\Delta + \Delta_c \cos\left(t\sqrt{\Delta^2 - \Delta_c^2}\right)}$$

есть периодическая функция с периодом $T_б = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\Delta^2 - \Delta_c^2}}$.

Средняя частота биений $\Omega = \dfrac{2\pi}{T_б} = \sqrt{\Delta^2 - \Delta_c^2}$

характеризует расстройку частоты автоколебаний и воздействия.



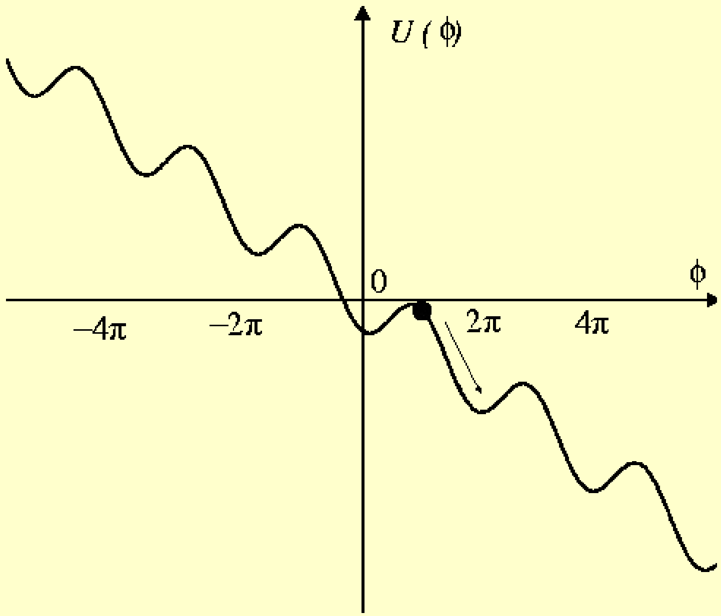
Зависимость средней частоты биений в модели (4) от расстройки

Модель (4) качественно описывает синхронизацию АК через захват фазы и частоты, но не описывает эффект подавления автоколебаний сигналом воздействия.

Интерпретация захвата фазы

Модель (4) можно рассматривать, как уравнение движения передемпфированной частицы в заданном потенциале.

$$U(\varphi) = -\Delta \cdot \varphi + \Delta_c \sin \varphi.$$



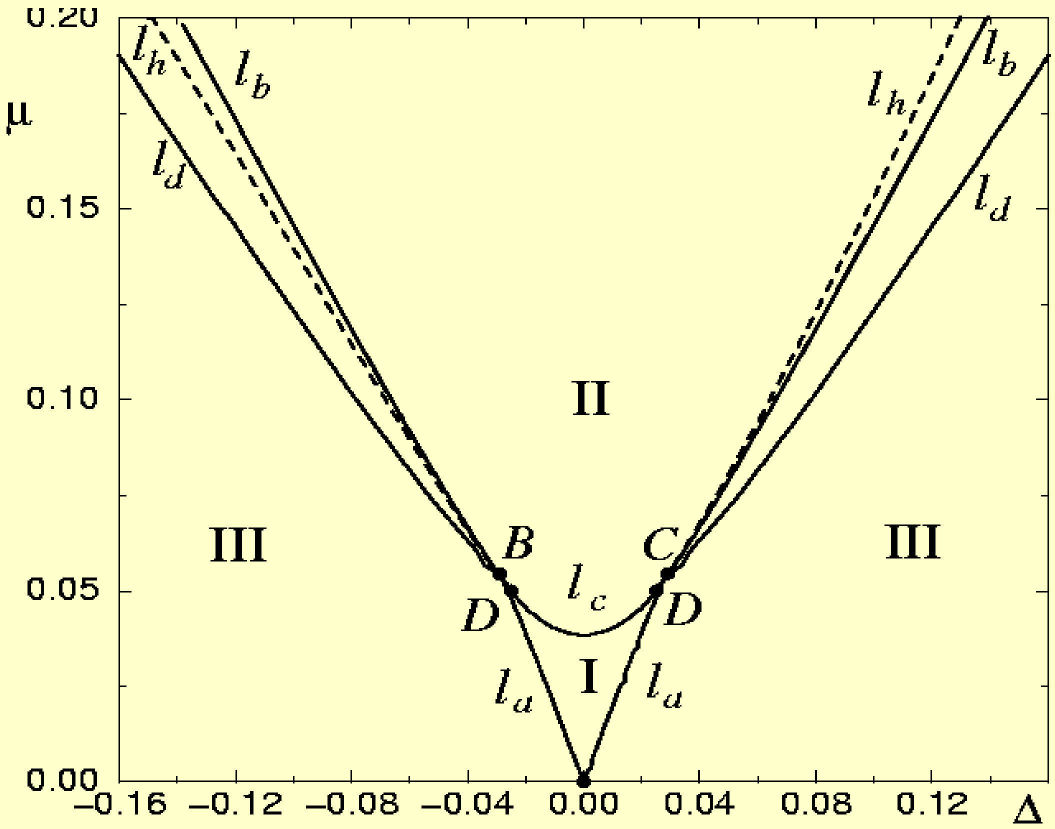
Профиль потенциала U(φ) в случае захвата фазы при $\Delta \neq 0$

Синхронизация соответствует наличию потенциальных ямок. В этом случае частица все время остается на дне ямки (разность фаз φ = *const*). В отсутствии синхронизации нет минимумов потенциала и частица скатывается вниз по потенциальному профилю.

Численное исследование модели (3)

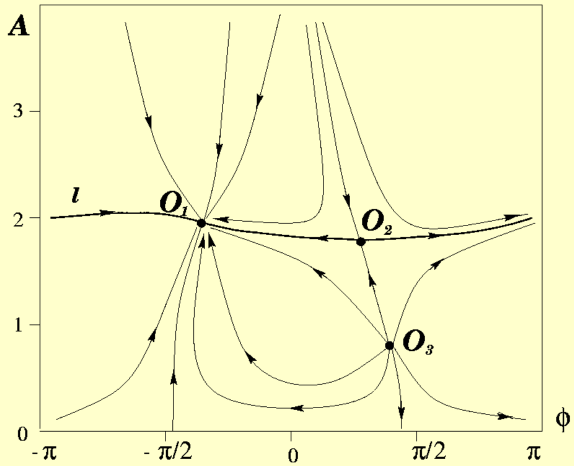
Фазовое пространство системы (3) – двумерный цилиндр. В системе (3) возможны три или одно состояния равновесия: O_1, O_2, O_3 (устойчивый узел, седло и репеллер).

Бифуркационная диаграмма системы (3).

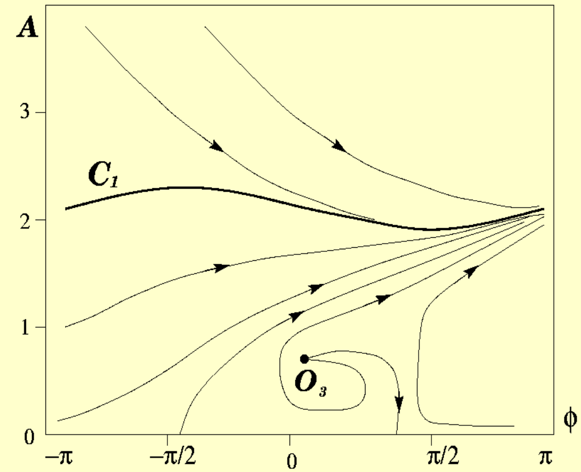


Линии l_a и l_c соответствуют седло—узловой бифуркации в (3);
l_b обозначает линию бифуркации Андронова – Хопфа;
l_d -- линия перестройки C_1 в C_2;
l_h --бифуркация рождения тора из резонансного цикла в исходной систем (1);
B и C -- точки сборки, куда входят линии l_a и l_c;
D – точки Богданова – Такенса, в которых сходятся линии l_a и l_b

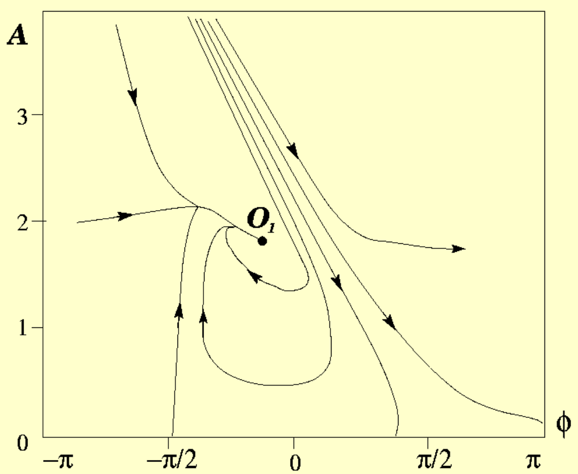
Структура фазового пространства системы (3) в различных областях бифуркационной диаграммы



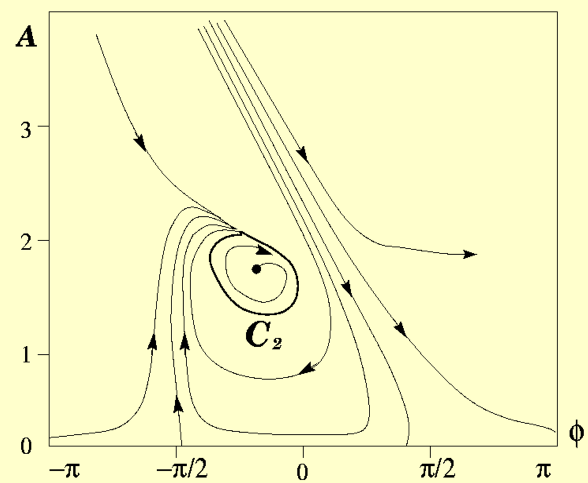
Область I



Область III (ниже l_d)



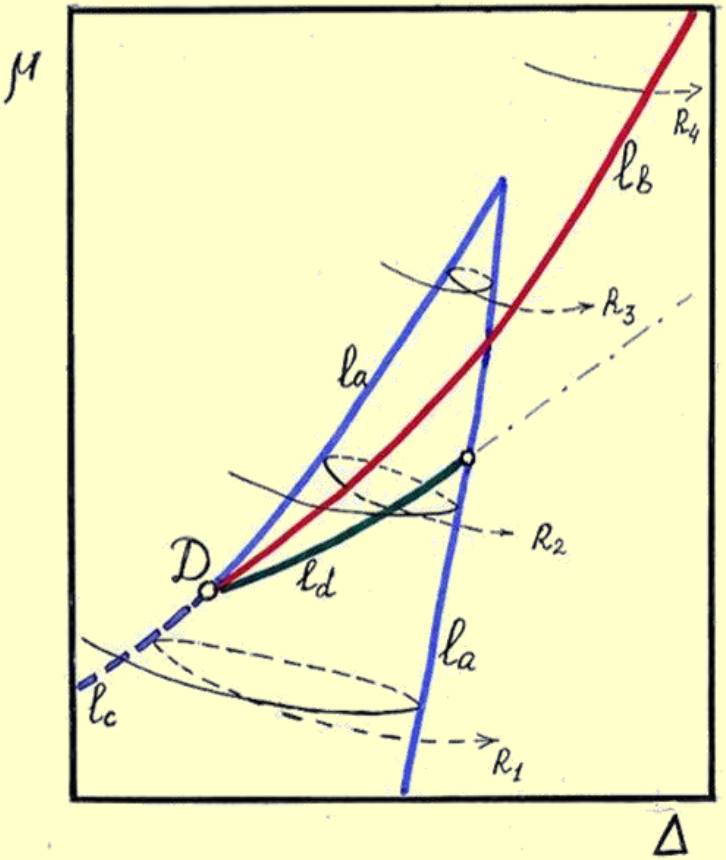
Область II



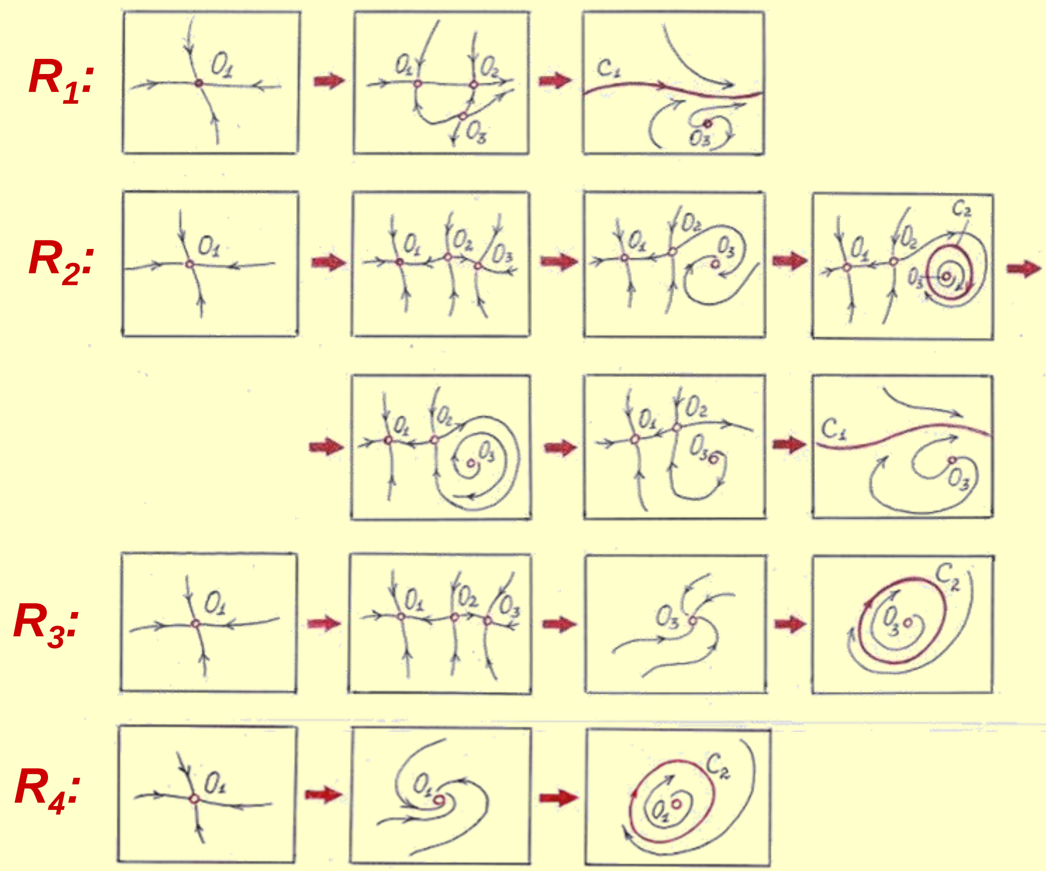
Область III (выше l_d)

Окрестность точки Богданова - Такенса

Фрагмент бифуркационной диаграммы (качественный вид)



Эволюция фазовых портретов при движении по различным направлениям



Линия l_d соответствует образованию петли сепаратрисы седла и кризису инвариантной кривой C_2 в области синхронизации. Вне области синхронизации на продолжении этой линии (штрих—пунктир) в полной системе (1) бифуркации не наблюдается. Тор C_2 эволюционирует в C_1.

Синхронизация в присутствии шума

В реальных системах всегда присутствует шум (внутренний шум и случайные воздействия со стороны внешней среды). Каково влияние шума на эффект синхронизации?

Проблема синхронизации генератора типа Ван дер Поля в присутствии шума была решена в начале 60-х годов XX в. в работах Р.Л. Стратоновича и А. Н. Малахова. Рассматривалась задача при условии, что мощность шума гораздо меньше мощности гармонического воздействия и источник шума можно описать гауссовским δ-коррелированным процессом.

Руслан Леонтьевич Стратонович 1930 -- 1997

Вынужденная синхронизация автогенератора в присутствии шума. Классическая теория

Модель -- генератор Ван дер Поля с внешним гармоническим воздействием и источником шума:

$$\boxed{\ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + \omega_0 x = a\cos(\omega_1 t) + \sqrt{2D_0}\,\xi(t),} \qquad (5)$$

где $\xi(t)$ – гауссовский шум со средним $\langle \xi(t) \rangle \equiv 0$ и корреляционной функцией $\langle \xi(t)\,\xi(t+\tau) \rangle = \delta(\tau)$. Величина D_0 характеризует интенсивность шума.

Решение стохастического уравнения (5) есть **случайный процесс** $x(t)$. Считая $x(t)$ гармоническим (узкополосным) шумом ищем решение в виде (2), где $A(t)$ и $\varphi(t)$ – **случайные функции**, медленно меняющиеся по сравнению с $\sin(\omega_1 t)$, $\cos(\omega_1 t)$.

Стохастические укороченные уравнения для амплитуды *A(t)* и фазы *φ (t)* имеют вид:

$$\dot{A} = \frac{\varepsilon A}{2}\left(1-\frac{A^2}{A_0^2}\right) - \mu\sin\varphi + \frac{D}{A} + \sqrt{2D}\xi_1(t),$$
$$\dot{\varphi} = \Delta - \frac{\mu}{A}\cos\varphi + \frac{\sqrt{2D}}{A}\xi_2(t), \qquad (6)$$

где φ -- мгновенная разность фаз автоколебаний и внешней силы, $\mu = a/2\omega_1$, $\Delta = \omega_0 - \omega_1$, $D = D_0/2\omega_1^2$. Случайные воздействия $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ – независимые гауссовские источники белого шума: $\langle \xi_{1,2}(t)\rangle \equiv 0$, $\langle \xi_{1,2}(t)\,\xi_{1,2}(t+\tau)\rangle = \delta(\tau)$.

Если $a \ll \varepsilon$, $D \ll \varepsilon$, то возмущением амплитуды автоколебаний можно пренебречь и считать $A = A_0$. В этом случае поведение разности фаз можно приближенно описать следующим стохастическим уравнением

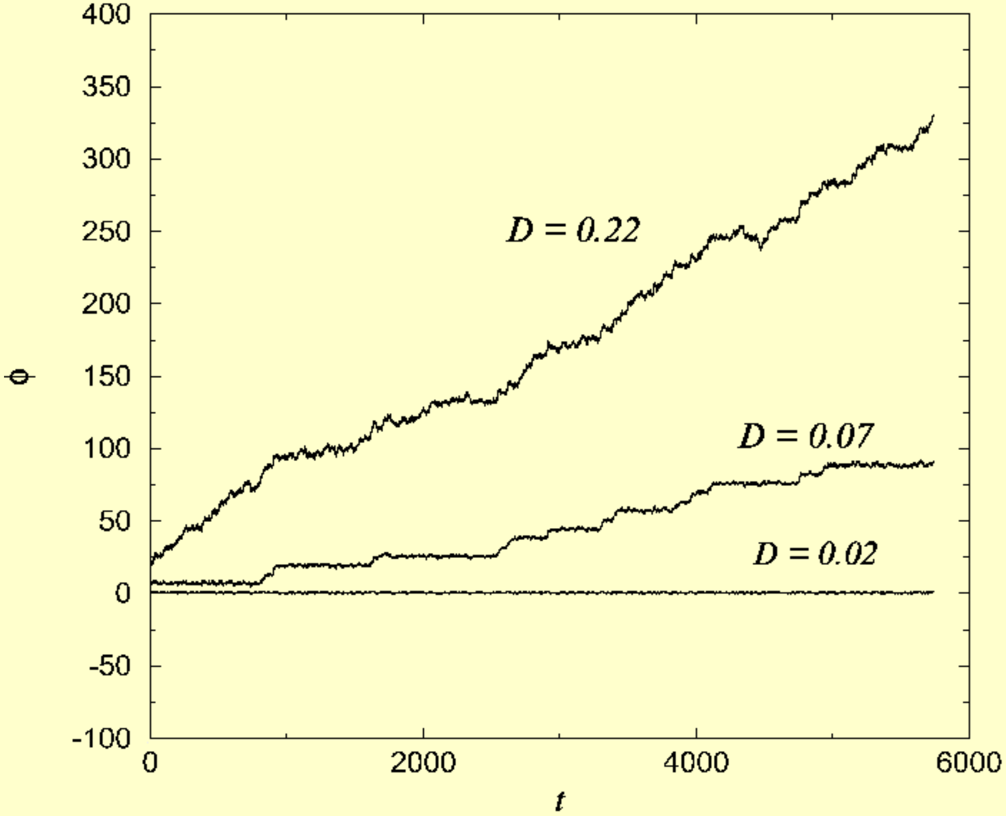
$$\dot{\varphi} = \Delta - \Delta_c\cos\varphi + \frac{\sqrt{2D}}{A_0}\xi_2(t), \qquad (7)$$

где $\Delta_c = \mu / A_0$.

Уравнение (7) описывает броуновское движение частицы с координатой φ в одномерном наклонном периодическом потенциале

$$U(\varphi) = -\Delta \cdot \varphi + \Delta_c \sin \varphi.$$

Наличие шума приводит к диффузии разности фаз φ: фаза φ флуктуирует вблизи минимумов потенциала и совершает случайные переходы из одной потенциальной ямы в другую, меняясь скачком на 2π.



Зависимость мгновенной разности фаз φ от времени для нескольких значений интенсивности шума. Параметы: $\Delta = 0.06$, $\mu = 0.15$

Увеличение интенсивности шума приводит к уменьшению длительности пребывания φ одной потенциальной ямке. Частица быстрее скатывается по потенциальному профилю. Соответственно, при отличной от нуля расстройке значение $|\varphi|$ быстрее растет во времени и средняя частота биений $<\Omega(t)> = <\omega(t)> - \omega_1$ увеличивается.

Распределение разности фаз φ описывается уравнением Фоккера – Планка -- Колмогорова

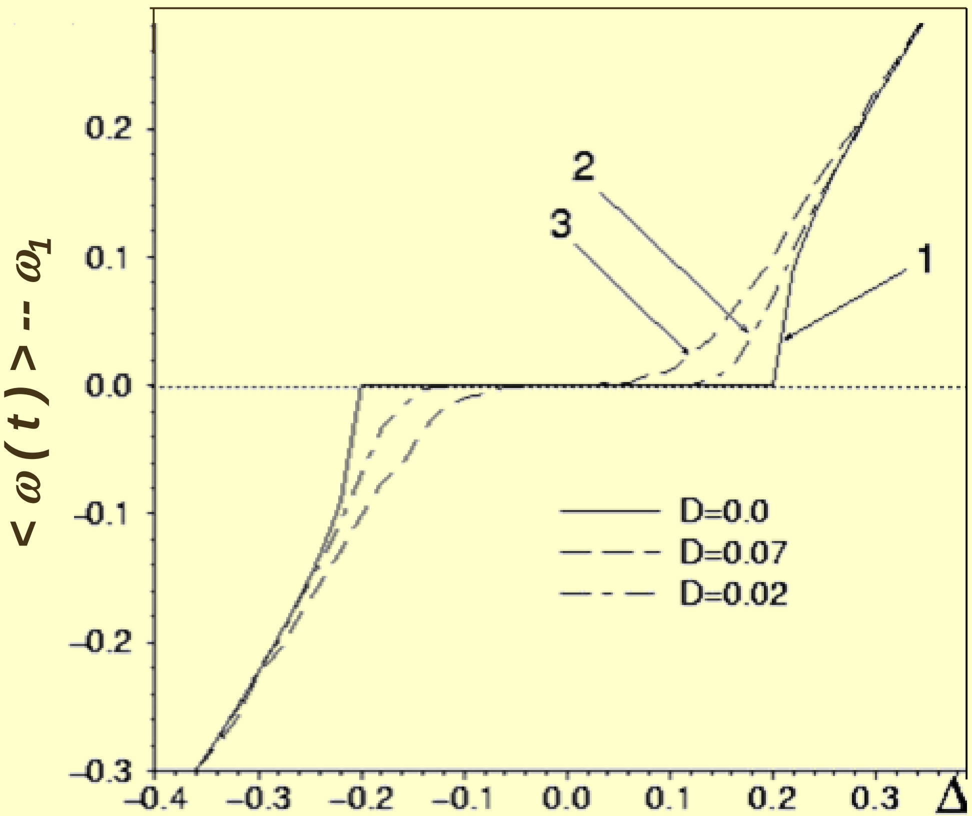
$$\frac{\partial p(\varphi,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \varphi}\left[(\Delta - \Delta_c \cos\varphi)\, p(\varphi,t) - Q\frac{\partial p(\varphi,t)}{\partial \varphi}\right], \qquad (8)$$

где $Q = D/A_0^2$. Если считать, что $\varphi \in [-\pi, \pi]$ и рассматривать уравнение (8) при периодических граничных условиях, то можно найти стационарное решение в виде:

$$p_{st}(\varphi) = C\exp\left(\frac{\varphi\Delta - \Delta_c \sin\varphi}{Q}\right)\int_{\varphi}^{\varphi+2\pi}\exp\left(-\frac{\psi\Delta - \Delta_c \sin\psi}{Q}\right)d\psi,$$

где C – нормировочная константа.

Зная стационарную плотность вероятности $p_{st}(\varphi)$ можно рассчитать среднюю частоту $<\Omega(t)> = <\omega(t)> - \omega_1$:



Зависимость разности средней частоты автоколебаний в системе (7) и частоты воздействия от параметра расстройки Δ при различный значениях интенсивности шума D.

Хотя распределение величины $\varphi(t)$ (если считать, что $\varphi \in [\,--\infty, \infty\,]$), задаваемой СДУ (7), не является гауссовским, и, соответственно, $\varphi(t)$ нельзя считать винеровским процессом, однако дисперсия $<\varphi^2(t)> -- <\varphi(t)>^2$ растет во времени по линейному закону. Соответствующий Угловой коэффициент называют коэффициентом эффективной диффузии разности фаз:

$$D_{eff} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(< \varphi^2(t) > - < \varphi(t) >^2 \right).$$

Величина D_{eff} характеризует среднее число сбоев разности фаз на 2π в единицу времени. Она возрастает с ростом интенсивности шума и частотной расстройки.

Таким образом, наличие случайных гауссовских возмущений приводит к тому, что синхронизация автоколебаний оказывается нестрогой. Разность частот $<\omega(t)> - \omega_1$ отлична от нуля при любой сколь угодно малой расстройке Δ. Однако, в случае слабого шума можно выделить область эффективной синхронизации, исходя из выполнения неравенства $|<\omega(t)> - \omega_1| \le \delta$ или $D_{eff} \le D_{eff}^{min}$, где δ и D_{eff}^{min} -- некоторые заданные значения.

Литература

1. И. И. Блехман, *Синхронизация в природе и технике* (Наука, Москва, 1981).

2. А. Пиковский, М. Розенблюм, Ю. Куртс, *Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление* (Техносфера, Москва, 2003).

3. П.С. Ланда, *Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы* (Наука, Москва, 1980).

4. Дж. Гукенхеймер, Ф. Холмс, *Нелинейные колеания, динамические системы и бифуркации векторных полей,* (Институт компьютерных исследований, Москва – Ижевск, 2002).

5. А. П. Кузнецов, С. П. Кузнецов, Н. М. Рыскин, *Нелинейные колебния* (Физматлит, Москва, 2002).

6. В. С. Анищенко и др., *Нелинейные эффекты в хаотически и стохастических системах* (Институт компьютерных исследований, Москва – Ижевск, 2003).

7. Р. Л. Стратонович, *Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике,* (Сов. Радио, Москва, 1961).

8. В. С. Анищенко, Т. Е. Вадивасова, Радиотехника и электроника, Т. 47, № 2, С.133 (2002).