

## **Лекция 4**

# **АТТРАКТОРЫ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Отличительным свойством диссипативных ДС, описываемых системой обыкновенных дифференциальных уравнений  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mu)$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^N$ , является сжатие во времени элемента объема фазового пространства:

$$V(t) = V(t_0) \exp[t(\overline{\operatorname{div} \mathbf{F}})], \quad \operatorname{div} \mathbf{F} = \sum_{i=1}^N \frac{d\dot{x}_i}{dx_i} < 0.$$

В силу сжатия фазового объема предельное множество фазовых траекторий всегда будет иметь нулевой объем.

# 1. Что такое аттрактор?

Изменение во времени состояния автономной ДС с конечным числом степеней свободы описывается либо системой ОДУ, либо системой дискретных отображений:

$$\frac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_N, \mu_1, \dots, \mu_k)$$

или

$$x_{n+1}^i = f_i(x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^N, \mu_1, \dots, \mu_k),$$
$$i = 1, 2, \dots, N.$$

$x_i(t)$  (или  $x_n^i$ ) — переменные, однозначно описывающие состояние системы (ее фазовые координаты);

$\mu_l$  ( $l=1, 2, \dots, k$ ) — параметры системы;

$f_i(x, \mu)$  - в общем случае нелинейные функции.

Пусть имеется некоторая конечная (или бесконечная) область  $G_1$ , принадлежащая фазовому пространству системы  $\mathbf{R}^N$ , которая включает в себя подобласть  $G_0$ . Области  $G_1$  и  $G_0$  удовлетворяют следующим условиям:

1. Для любых начальных условий  $x_i(0)$  (или  $x_0^i$ ) из области  $G_1$  при  $t \rightarrow \infty$  (или  $n \rightarrow \infty$ ) все фазовые траектории рано или поздно достигают области  $G_0$ .
2. Область  $G_0$  представляет собой минимальное компактное подмножество в фазовом пространстве системы.
3. Если фазовая траектория принадлежит области  $G_0$  в момент времени  $t = t_1$  ( $n = n_1$ ), то она будет принадлежать  $G_0$  всегда, т.е. для любых  $t \geq t_1$  ( $n > n_1$ ) фазовая траектория будет находиться в области  $G_0$ .

Тогда область  $G_0$  – аттрактор динамической системы,

$G_1$  - область (бассейн) притяжения аттрактора  $G_0$ .

## 2. Регулярные аттракторы

Решение ДС	Аттрактор	Сигнатура ЛХП	Размерность
Состояние равновесия	Точка	«-», «-», ..., «-»	$D = 0$
Устойчивое периодическое решение	Предельный цикл	«0», «-», ..., «-»	$D = 1$
Устойчивое квазипериодическое решение	Предельный $n$ -мерный тор	$\underbrace{"0", \dots, "0"}_n, "-", \dots, "-"$	$D = n$

Ляпуновская размерность  
(формула Каплана-Йорка):

$$D = j + \frac{\sum_{i=1}^j \lambda_i}{|\lambda_{j+1}|}$$

$j$  – наибольшее целое число, для которого  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_j \geq 0$ .

Если решение ДС является асимптотически устойчивым, а размерность  $D$  дается целым числом и строго совпадает с метрической, то аттрактор называется регулярным.

Нарушение одного из сформулированных условий переводит аттрактор в класс нерегулярных или хаотических.

Странные (хаотические) аттракторы делятся на

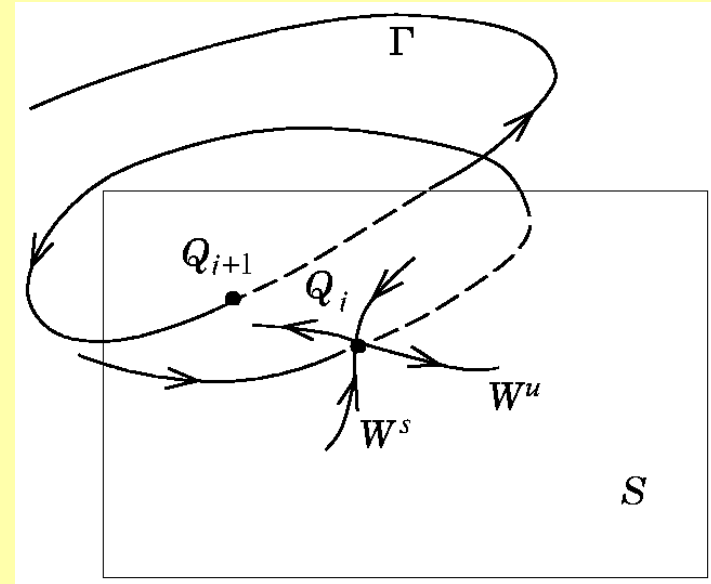
- *грубые гиперболические,*
- *квазигиперболические или аттракторы типа Лоренца,*
- *негиперболические.*

## 3. Странные (хаотические) аттракторы

### 3.1 Грубые гиперболические аттракторы

Система является *гиперболической*, если все фазовые траектории *седловые*. Точка как образ траектории в сечении Пуанкаре в гиперболической системе всегда является *седлом*.

*Грубость* означает, что при малом возмущении правых частей уравнений ДС и вариации управляющих параметров в конечной области их значений все траектории продолжают оставаться седловыми.

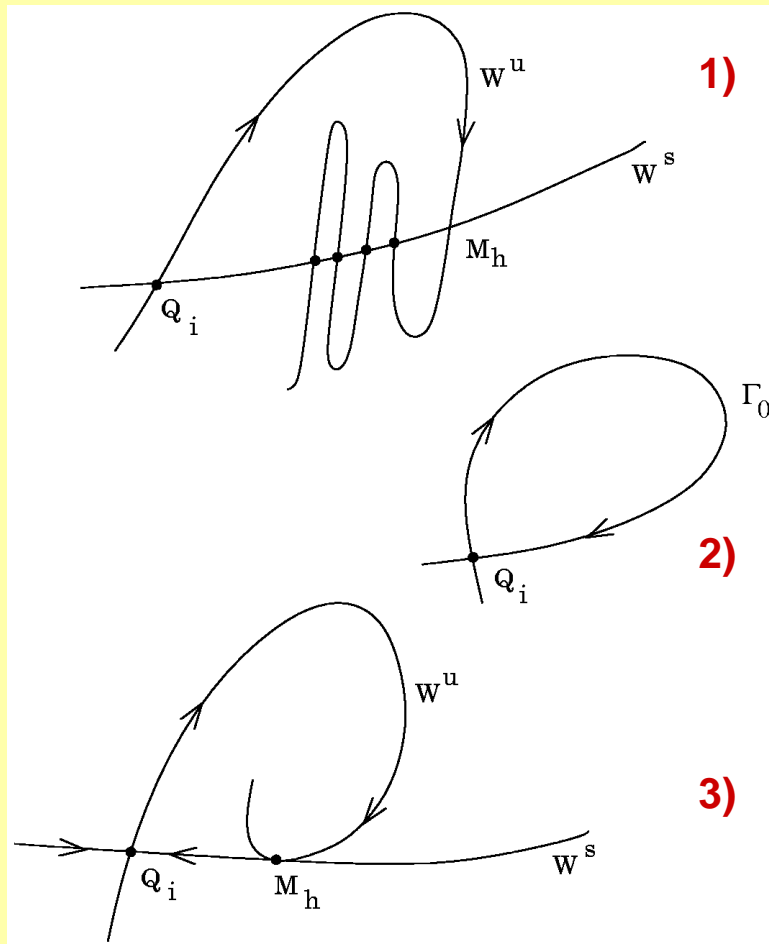


Гиперболические аттракторы должны удовлетворять следующим условиям:

1. Состоять из континуума «неустойчивых листов» или кривых, всюду плотных в аттракторе, вдоль которых близкие траектории экспоненциально расходятся;
2. В окрестности любой точки иметь геометрию произведения канторова множества на интервал;
3. Иметь окрестность в виде расщепленных устойчивых слоев, вдоль которых близкие траектории сходятся к аттрактору.

Грубость означает, что свойства 1-3 сохраняются при возмущениях.

## Случаи пересечения устойчивого и неустойчивого многообразий



Грубая гомоклиническая структура (трансверсальное пересечение многообразий, не меняется качественно при возмущениях).

Негрубые случаи:

Явление замыкания многообразий с образованием петли.

Явление касания устойчивого и неустойчивого многообразий.

Случаи 2) и 3) приводят к появлению негиперболических аттракторов (квазиаттракторов).



## 3.2 Квазигиперболические аттракторы. Аттракторы типа Лоренца

Почти гиперболические аттракторы являются хаотическими, не включают устойчивых регулярных аттракторов и сохраняют эти свойства при возмущениях.

С математической точки зрения, для таких систем нарушается, по крайней мере, одно из трех условий гиперболичности.

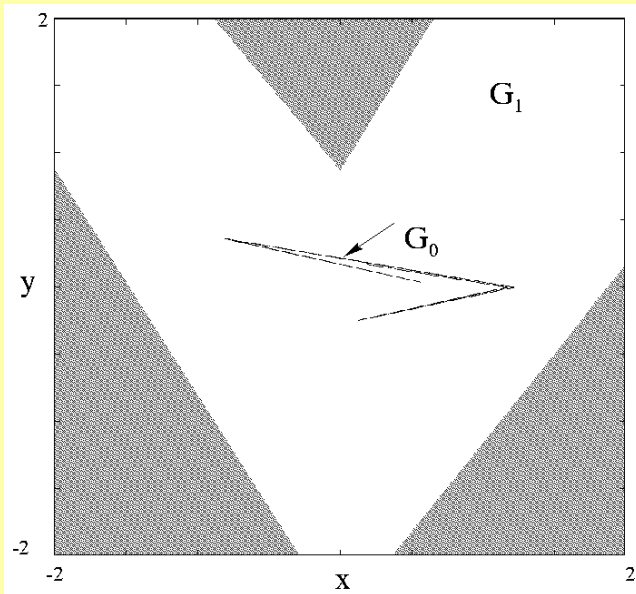
### Примеры квазигиперболических аттракторов:

- аттрактор Лози,
- аттрактор Белыха,
- аттракторы типа Лоренца.

Обоснование существования квазигиперболического аттрактора в ДС требует доказательства двух положений:

- 1) в аттракторе все фазовые траектории являются неустойчивыми;
- 2) при вариации параметров системы устойчивых траекторий не возникает.

## Квазигиперболический аттрактор в системе Лози



$$x_{n+1} = 1 - a/x_n + y_n,$$

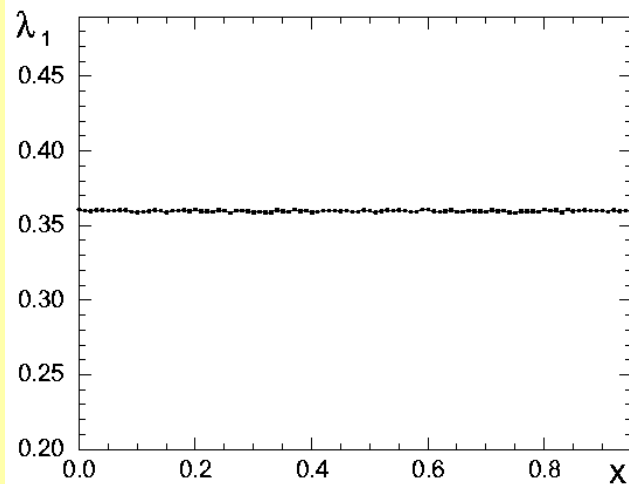
$$y_{n+1} = bx_n.$$

Система Лози – нелинейное взаимно однозначное диссипативное (для  $b < 1$ ) отображение.

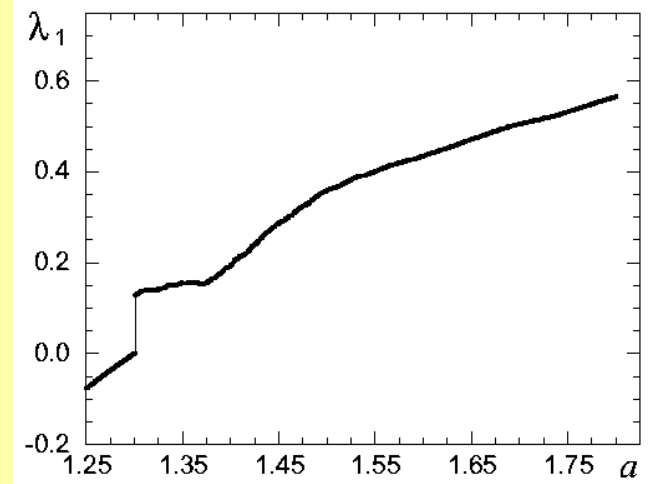
Аттрактор Лози – единственное притягивающее множество в интервале  $1.3 < a < 1.8$  при  $b = 0.3$  с однородным бассейном притяжения.

## Зависимость старшего ляпуновского показателя

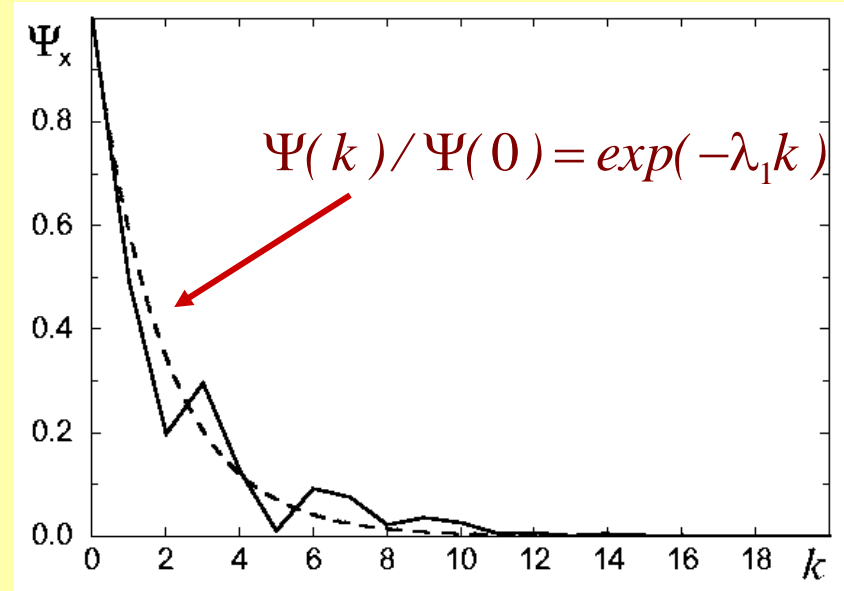
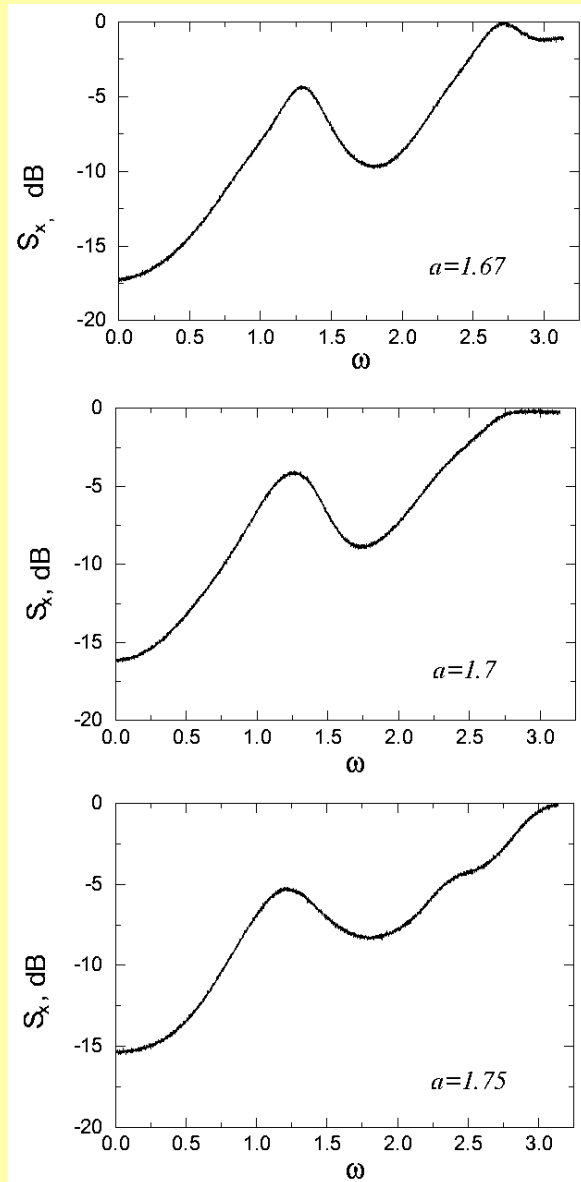
от начальных условий

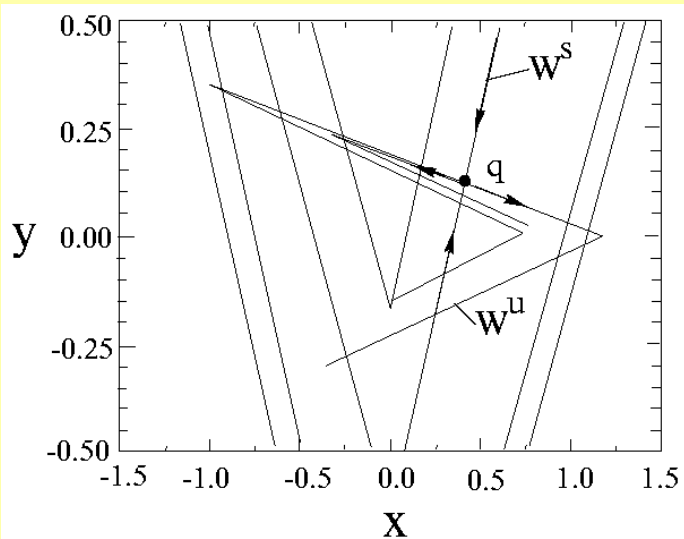


от параметра a



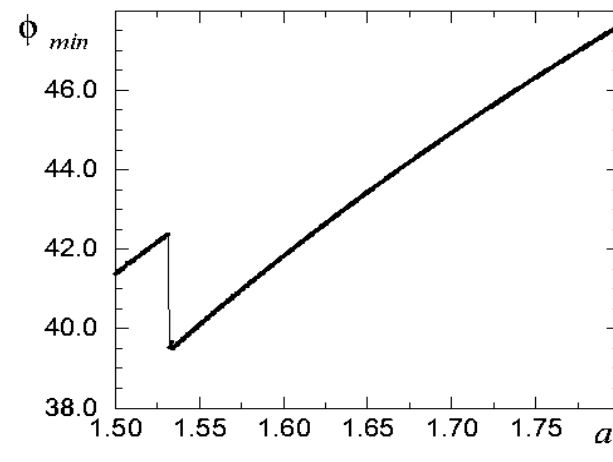
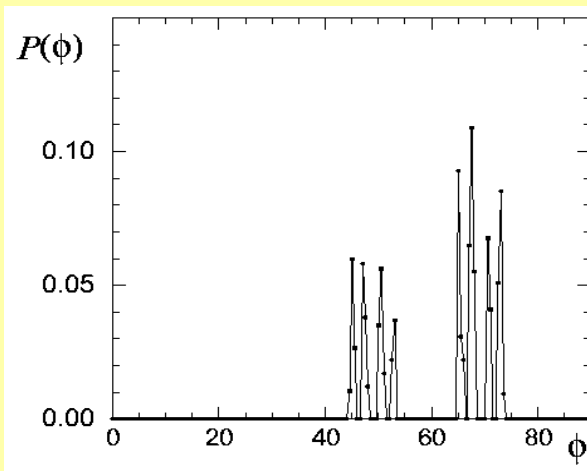
# Спектр мощности и автокорреляционная функция отображения Лози





Поведение устойчивого и неустойчивого многообразий седлового состояния равновесия  $q$  отображения Лози

1)



2)

- 1) Распределение вероятностей угла  $\phi$  между направлениями устойчивого и неустойчивого многообразий хаотической траектории на аттракторе Лози ( $a=1.7$ ,  $b=0.3$ );
- 2) Зависимость минимального угла от параметра системы  $a$ .

## Влияние слабых шумовых воздействий на аттрактор Лози

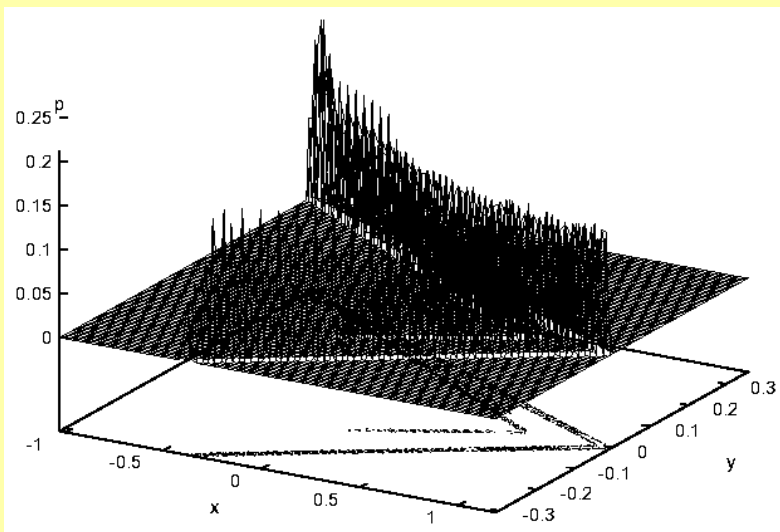
$$x_{n+1} = 1 - a/x_n + y_n + \xi_1(n),$$

$$y_{n+1} = bx_n + \xi_2(n),$$

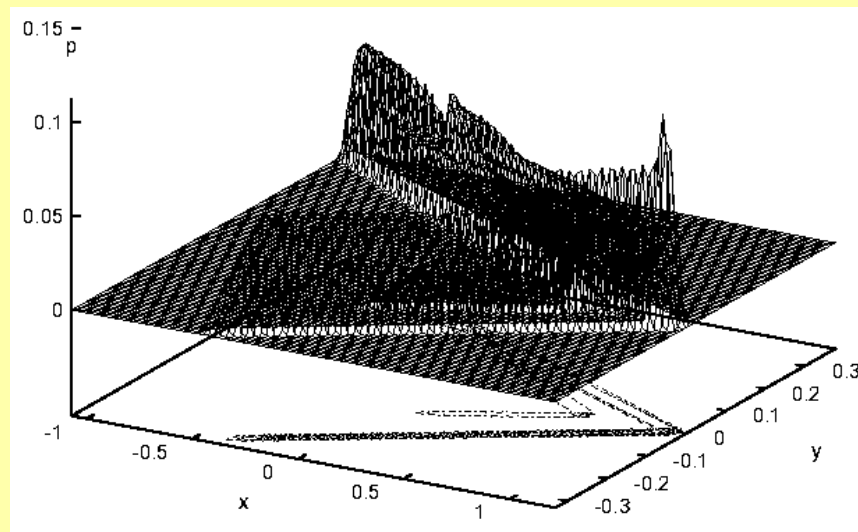
$$\langle \xi \rangle = 0, \quad \xi(n)\xi(n+k) = D\delta(k), \quad \langle \xi_1\xi_2 \rangle = 0.$$

Плотность распределения вероятностей  $p(x_n, y_n)$  на аттракторе Лози

$D = 0$



$D = 5 \cdot 10^{-5}$



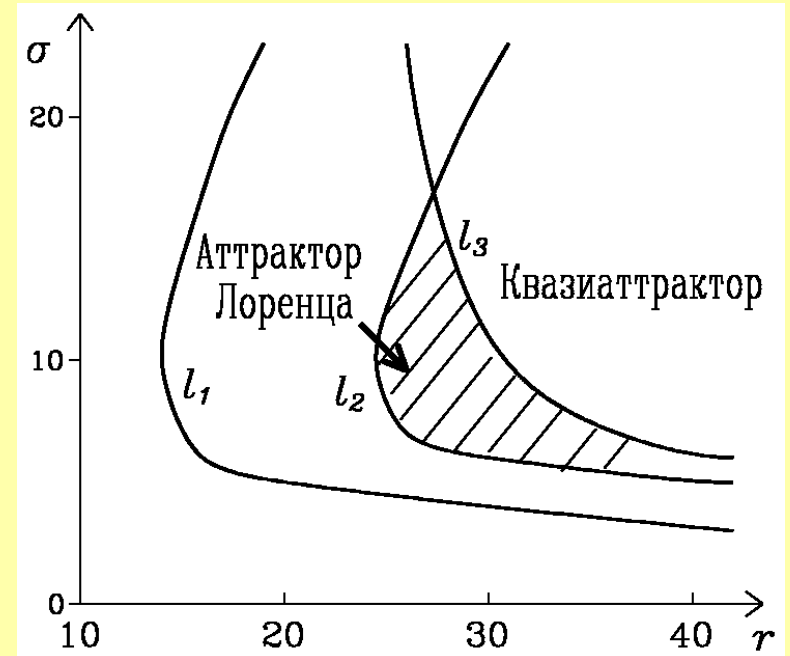
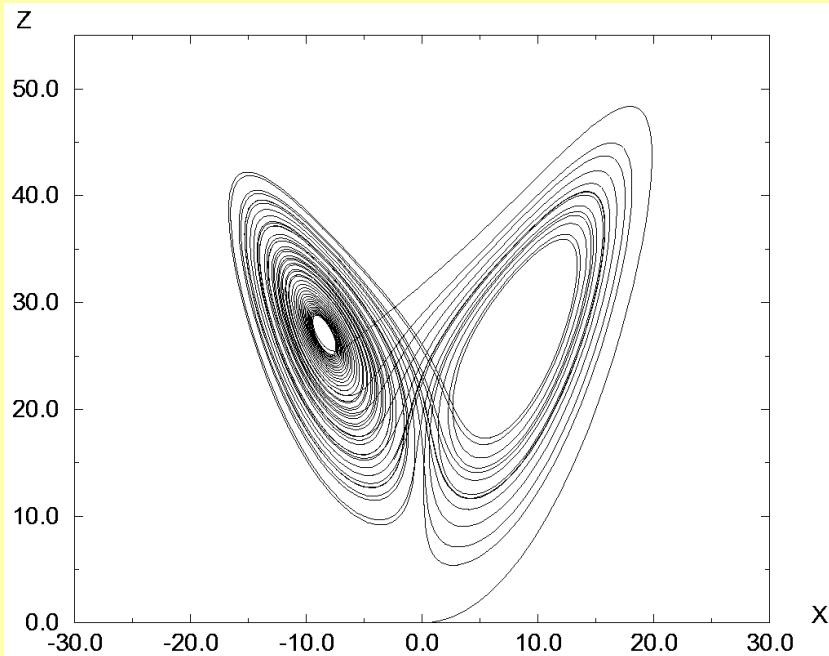
## Аттрактор Лоренца

Уравнения Лоренца были получены из уравнений Навье-Стокса в задаче о тепловой конвекции и имеют вид

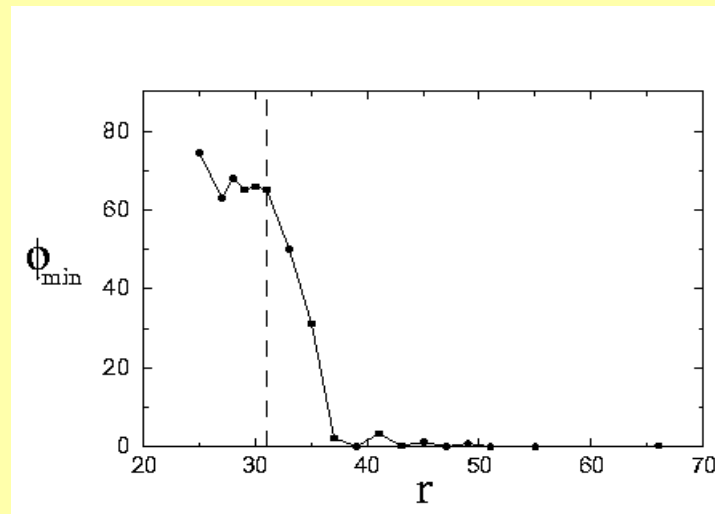
$$\dot{x} = -\sigma(x - y),$$

$$\dot{y} = rx - y - xz,$$

$$\dot{z} = xy - bz.$$



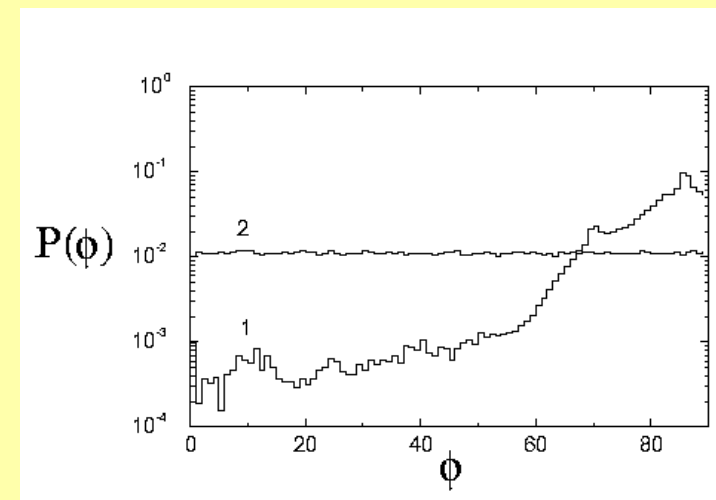
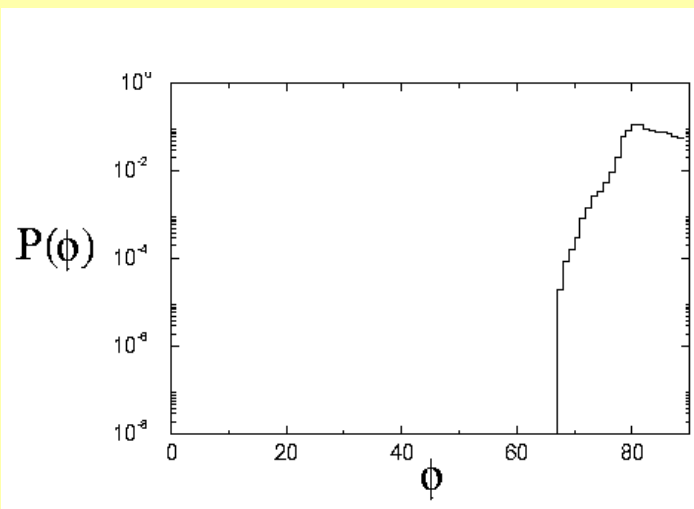
## Зависимость минимального угла между направлениями устойчивого и неустойчивого многообразий хаотической траектории для системы Лоренца



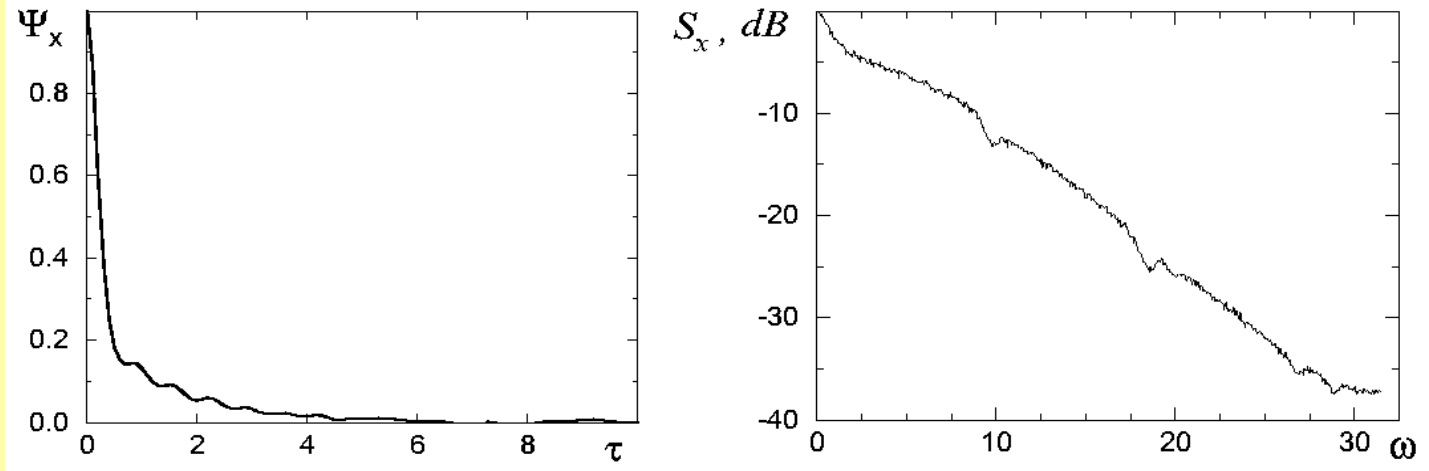
## Распределение вероятностей угла $\phi$ многообразиями хаотической траектории

на аттракторе Лоренца

на негиперболическом аттракторе в системе Лоренца

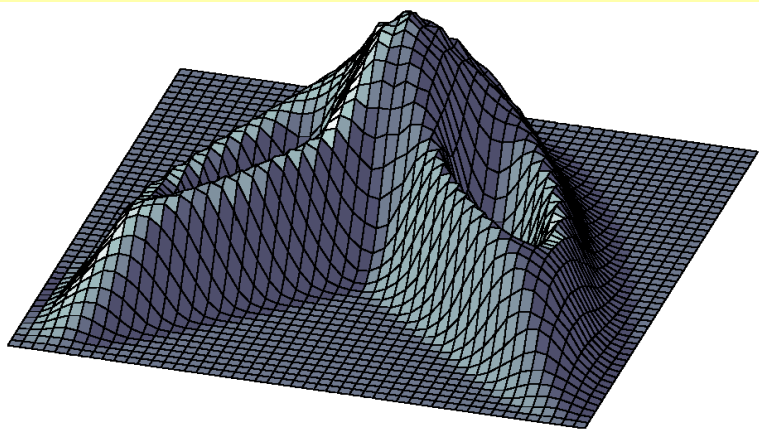


## Спектр мощности и АКФ аттрактора Лоренца

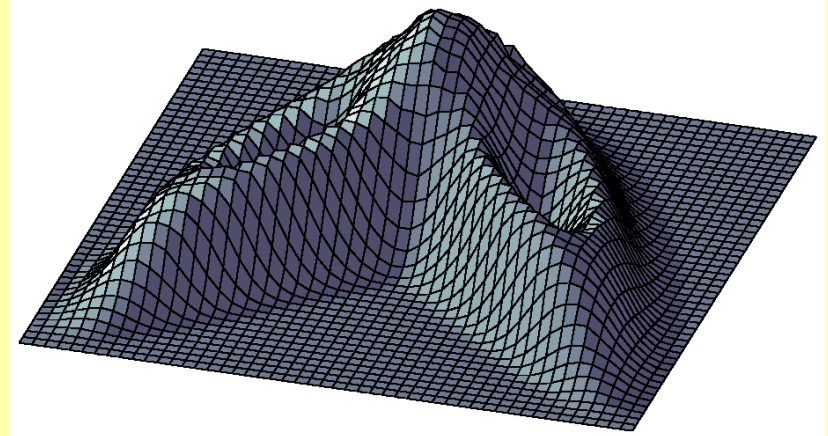


## Плотность распределения вероятностей аттрактора Лоренца

$D = 0$



$D = 0.8$

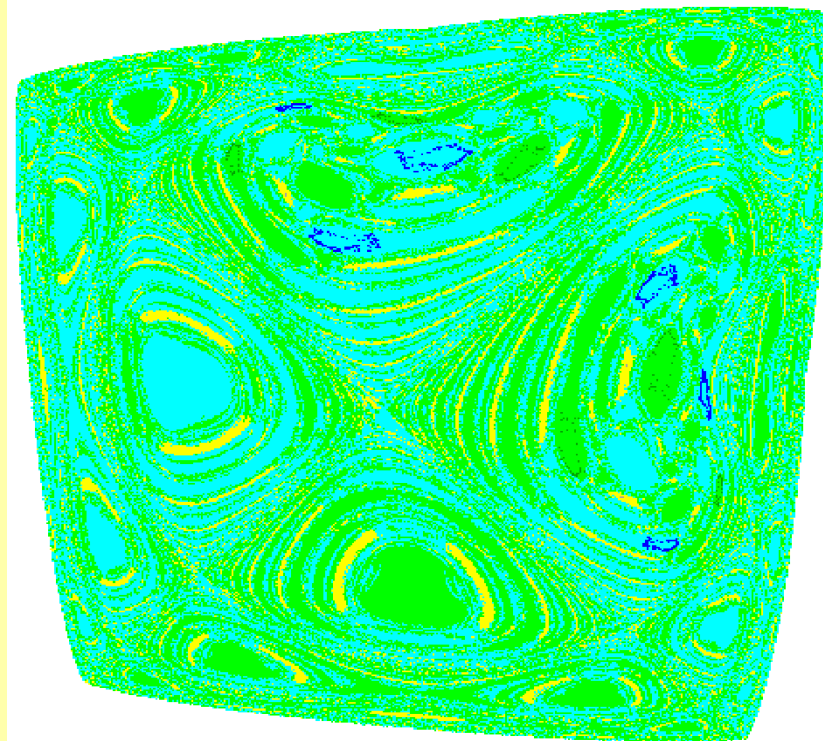




### 3.3 Негиперболические аттракторы (квазиаттракторы) и их свойства

Отличительной чертой квазиаттракторов является одновременное сосуществование счетного множества различных хаотических и регулярных притягивающих подмножеств в ограниченном элементе объема фазового пространства системы при фиксированных значениях ее параметров.

Эта совокупность всех сосуществующих предельных множеств траекторий в ограниченной области  $G_0$  фазового пространства, куда стремятся все или почти все траектории из области  $G_1$ , включающей  $G_0$ , и называется квазиаттрактором.



При конечной вариации параметров системы реализуются каскады различных бифуркаций как регулярных, так и хаотических аттракторов, приводящие к бифуркационной перестройке их бассейнов притяжения.

Для квазиаттракторов нарушается условие трансверсальности многообразий. Для них характерны эффекты гомоклинического касания устойчивых и неустойчивых многообразий седловых траекторий или возникновение петли сепаратрисы седло-фокуса.

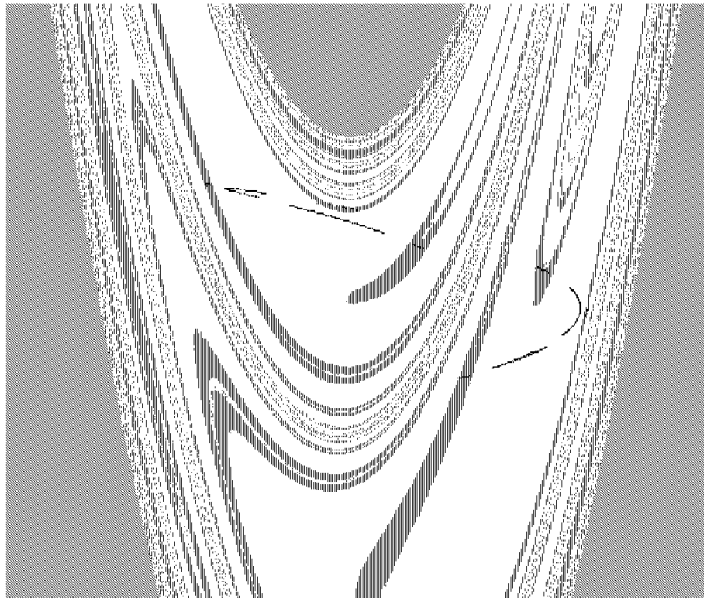
## Квазиаттрактор в отображении Хенона

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + y_n,$$

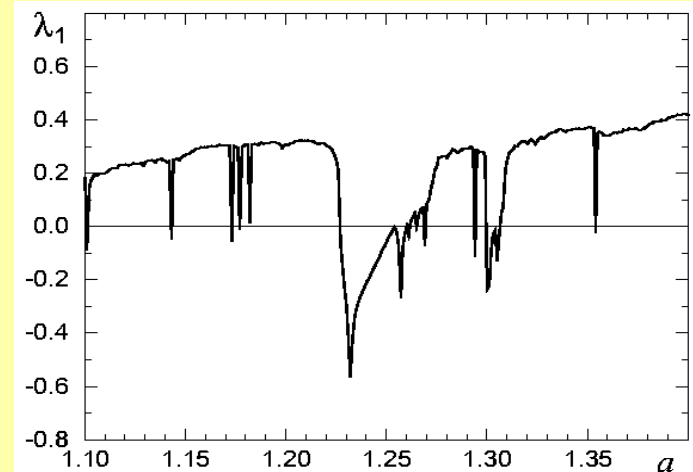
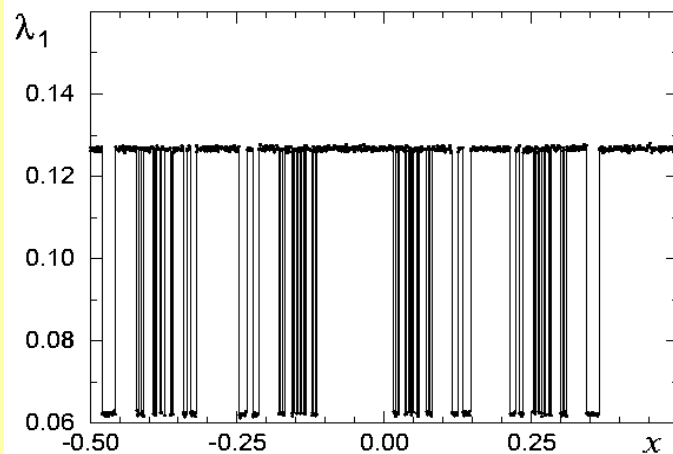
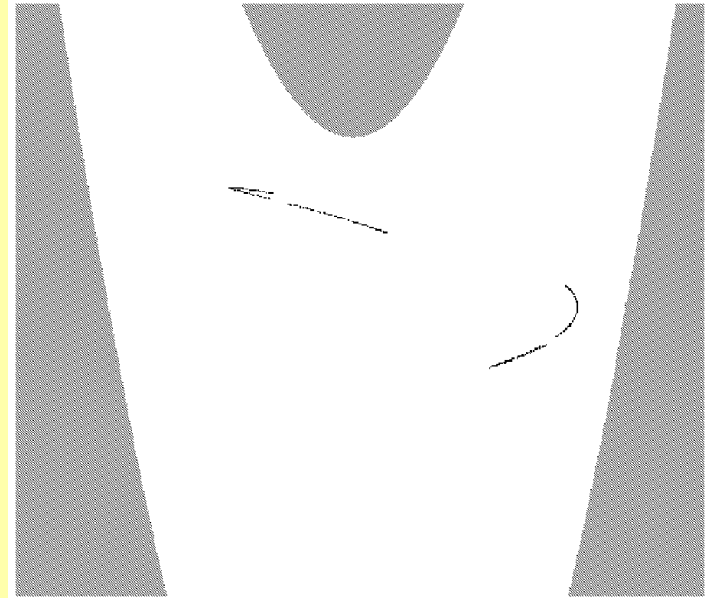
$$y_{n+1} = bx_n.$$

При  $0 < b < 1$  отображение является диссипативным и характеризуется наличием квазиаттрактора.

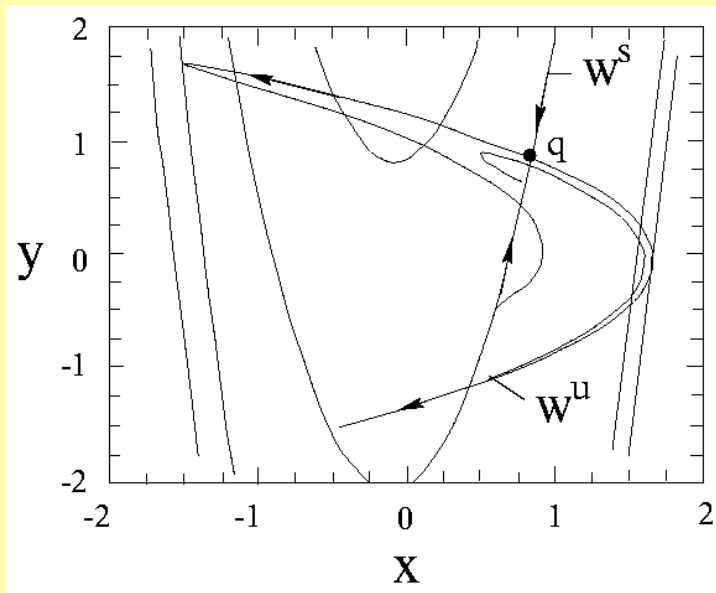
$a=1.078,$   
 $b=0.3$



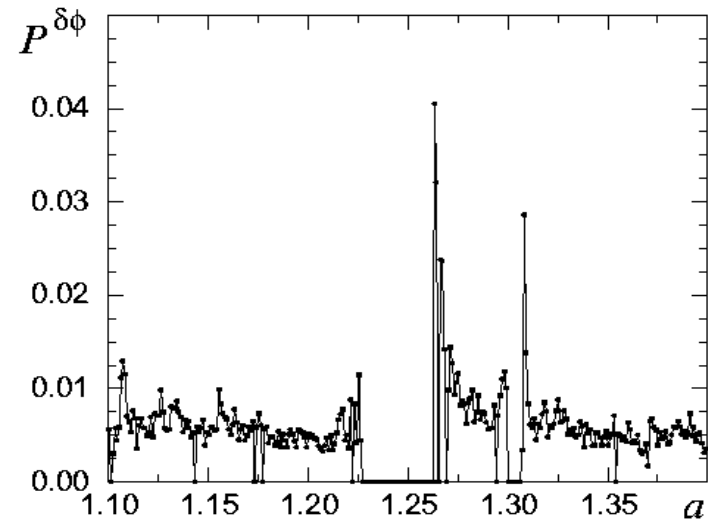
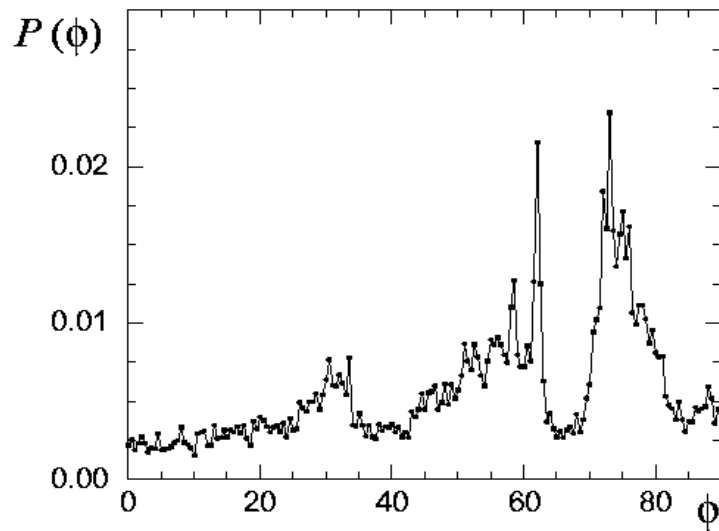
$a=1.32,$   
 $b=0.3$



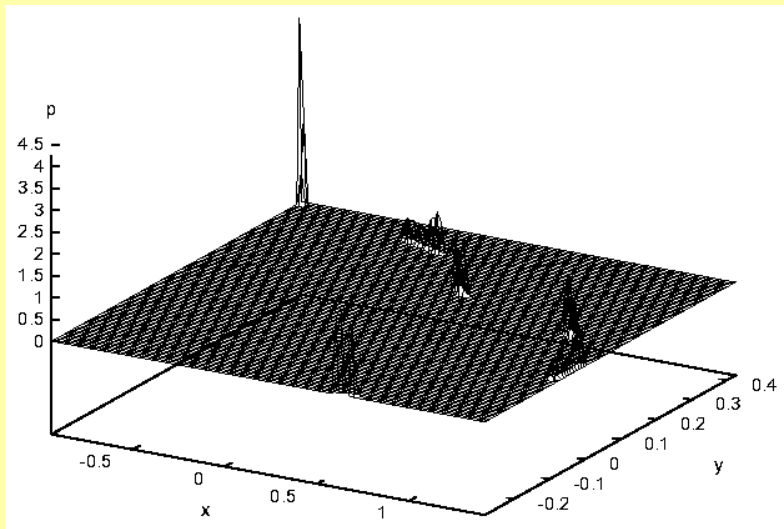
# Поведение устойчивого и неустойчивого многообразий седловой точки отображения Хенона



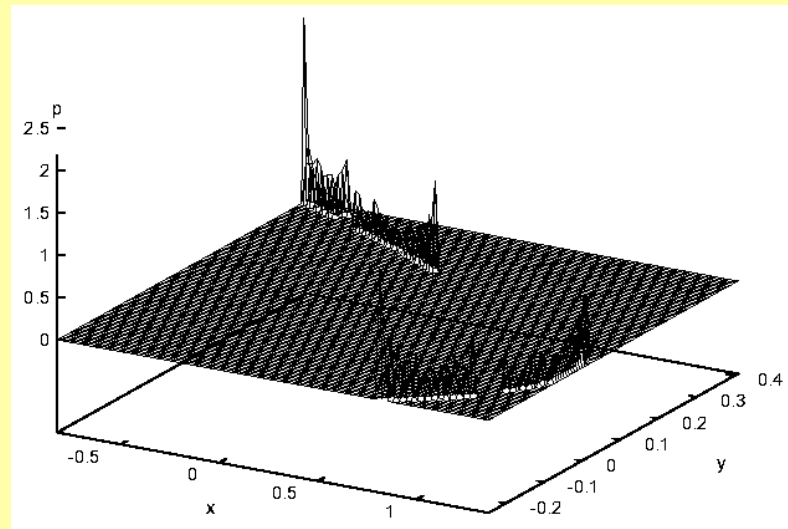
В аттракторе Хенона нарушается условие трансверсальности пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий седловых циклов. В некоторых точках сепаратрисы касаются друг друга, угол между ними равен нулю.



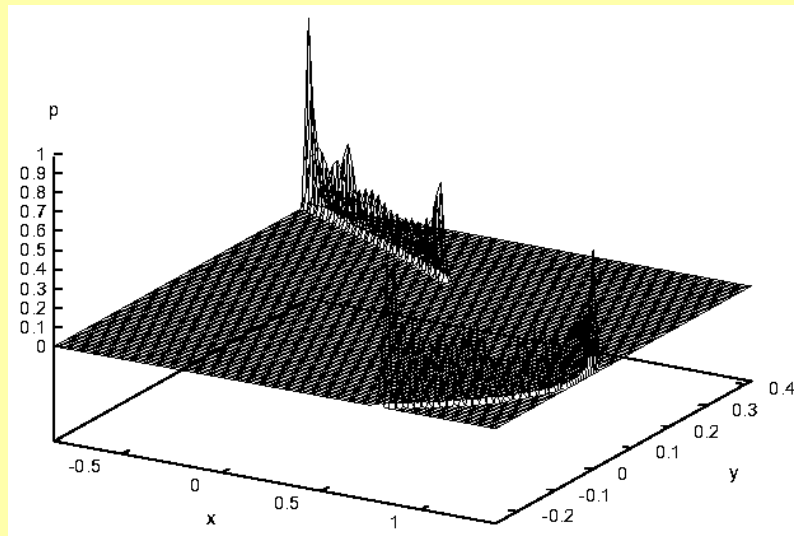
# Влияние слабых шумовых воздействий на режимы в отображении Хенона



$D = 0$



$D = 0$



$D = 5 \cdot 10^{-6}$

Квазиаттрактор в модифицированном генераторе с инерционной нелинейностью (генератор Анищенко-Астахова)

$$\dot{x} = mx + y - xz,$$

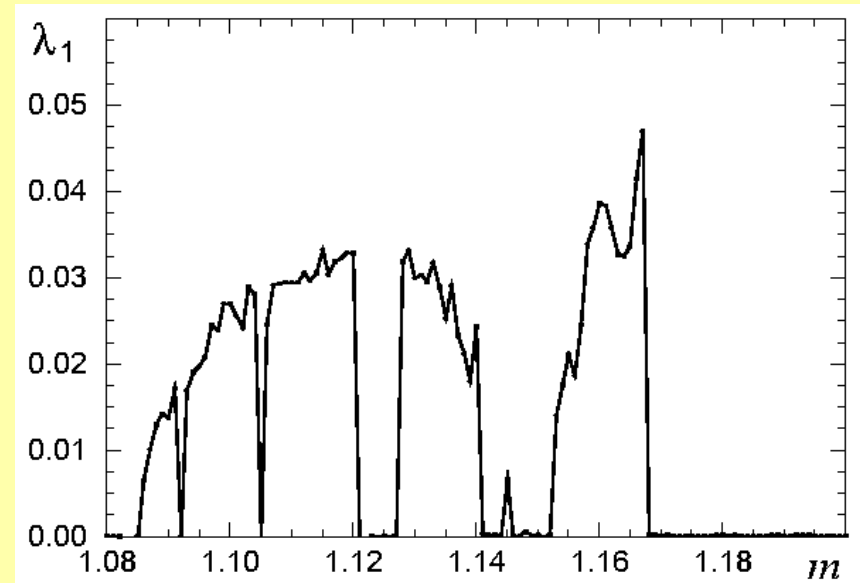
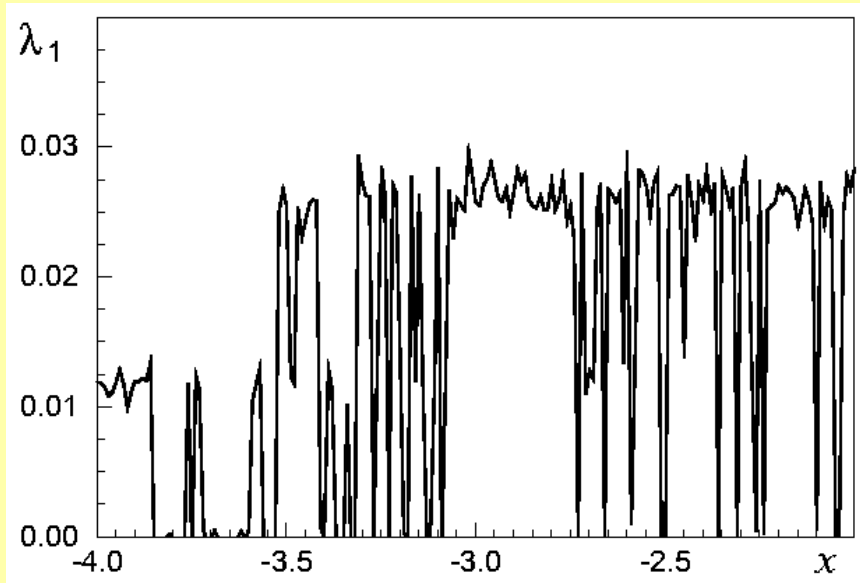
$$\dot{y} = -x,$$

$$\dot{z} = -gz + gI(x)x^2,$$

$$I(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}.$$



Зависимости старшего показателя Ляпунова от начальных значений  
координаты  $x$  и от параметра  $m$



## 4. Странные нехаотические и хаотические нестранные аттракторы

Существуют конкретные примеры диссипативных ДС, аттракторы которых характеризуются следующими свойствами:

- 1) при регулярной геометрической структуре с точки зрения целочисленной метрической размерности индивидуальные фазовые траектории в среднем экспоненциально неустойчивы. В этом случае имеем хаотический нестранный аттрактор (ХНА).
- 2) при сложной геометрической структуре траектории асимптотически устойчивы, перемешивание отсутствует. Имеем странный нехаотический аттрактор (СНА).



## 4.1 Хаотические нестранные аттракторы

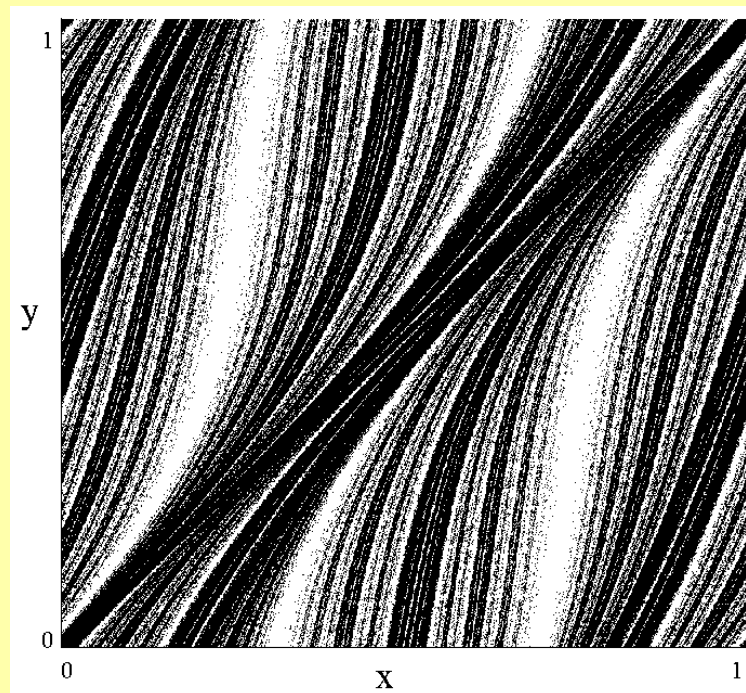
Примером ДС с ХНА является модифицированное отображение Арнольда или “cat map” с нелинейным периодическим слагаемым:

$$x_{n+1} = x_n + y_n + \delta \cos 2\pi y_n, \quad \text{mod } 1,$$

$$y_{n+1} = x_n + 2y_n, \quad \text{mod } 1.$$

При  $\delta < 1/2\pi$  отображение есть диффеоморфизм на торе, или оно взаимно однозначно (обратимо) и переводит единичный квадрат на плоскости в себя. Отображение является диссипативным, т.е. при каждой итерации элемент площади сжимается. Якобиан преобразования:

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 1 - 2\pi\delta \sin 2\pi y_n \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \delta < \frac{1}{2\pi}.$$



$$1 < D_I < 2, \quad D_C = 2.0$$



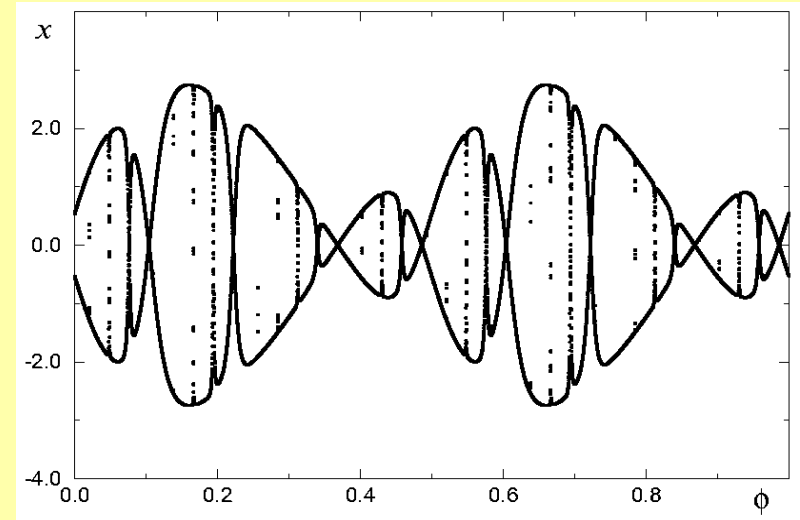
## 4.2 Странные нехаотические аттракторы

СНА типичны для систем с квазипериодическим воздействием. Впервые СНА был обнаружен и исследован в отображении:

$$x_{n+1} = \lambda \tan(x_n) \cos 2\pi\varphi_n,$$

$$\varphi_{n+1} = \omega + \varphi_n, \text{ mod } 1.$$

$$\omega = 0.5(\sqrt{5} - 1) - \text{золотое сечение}$$



1. СНА образуется кривой бесконечной длины, недифференцируемой на плотном множестве точек, демонстрирует самоподобие структуры и свойства скейлинга.
2. В спектре ЛХП отсутствует положительный показатель. Сигнатура спектра ЛХП на СНА не отличается от соответствующей сигнатуры спектра ЛХП квазипериодического движения. Однако, старший локальный показатель спектра ЛХП будет положительным.
3. Спектр мощности СНА является сингулярно-непрерывным. Он включает плотное множество  $\delta$ -пиков самоподобной структуры и обладает свойствами фракталов. АКФ спадает до некоторого предельного ненулевого уровня и будет демонстрировать масштабно-инвариантные свойства.