БИФУРКАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, КАТАСТРОФЫ

1. Бифуркации состояний равновесия.
2. Бифуркации предельных циклов.
3. Бифуркации квазипериодических и странных аттракторов.
4. Нелокальные бифуркации. Гомоклинические траектории и структуры.

При математическом моделировании большинства практических задач нелинейной динамики чаще всего используются дифференциальные уравнения, зависящие от ряда параметров. Изменение того иного параметра системы может вызвать качественное изменение фазового портрета системы, называемое ***бифуркацией***.

Под качественным изменением фазового портрета понимают такую его структурную перестройку, которая нарушает ***топологическую эквивалентность*** фазового портрета.

Значение параметра, при котором происходит бифуркация, называется ***бифуркационным значением*** или ***точкой бифуркации***.

Условия, характеризующие бифуркацию, накладывают определенные требования на параметры системы. Количество таких условий называется ***коразмерностью бифуркации***.

Например, коразмерность 1 означает, что имеется только одно бифуркационное условие, следовательно, в пространстве параметров бифуркации коразмерности 1 соответствует множество точек, размерность которого всего на единицу меньше размерности пространства параметров (на плоскости – линия, в трехмерном пространстве – плоскость).

Различают ***локальные*** и ***нелокальные бифуркации*** ДС.

Локальные бифуркации связаны с локальной окрестностью траекторий на предельном множестве. Они отражают изменение устойчивости отдельных траекторий и всего предельного множества в целом или исчезновение предельного множества в результате слияния с другим предельным множеством.

Нелокальные бифуркации связаны с поведением многообразий седловых предельных множеств: образование сепаратрисных петель, гомоклинических и гетероклинических кривых, касание аттрактором сепаратрисных кривых или поверхностей и т.д.

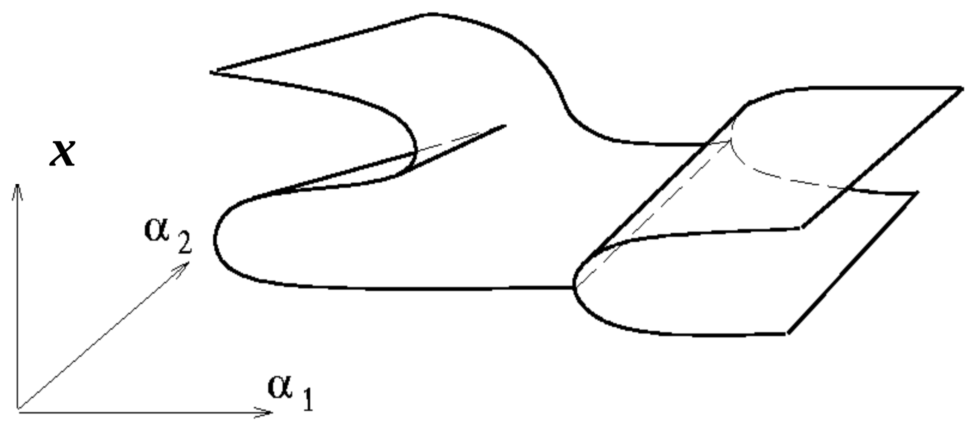
С представлением о бифуркациях тесно связано понятие ***грубости (структурной устойчивости)*** ДС. Понятие грубости системы было впервые введено А.А. Андроновым и Л.С. Понтрягиным для двумерных систем.

Грубыми (или ***структурно устойчивыми***) называются такие ДС, для которых малые гладкие возмущения оператора эволюции приводят к топологически эквивалентным решениям.

Анализ бифуркаций ДС при вариации ее параметров позволяет построить ***бифуркационную диаграмму*** системы.

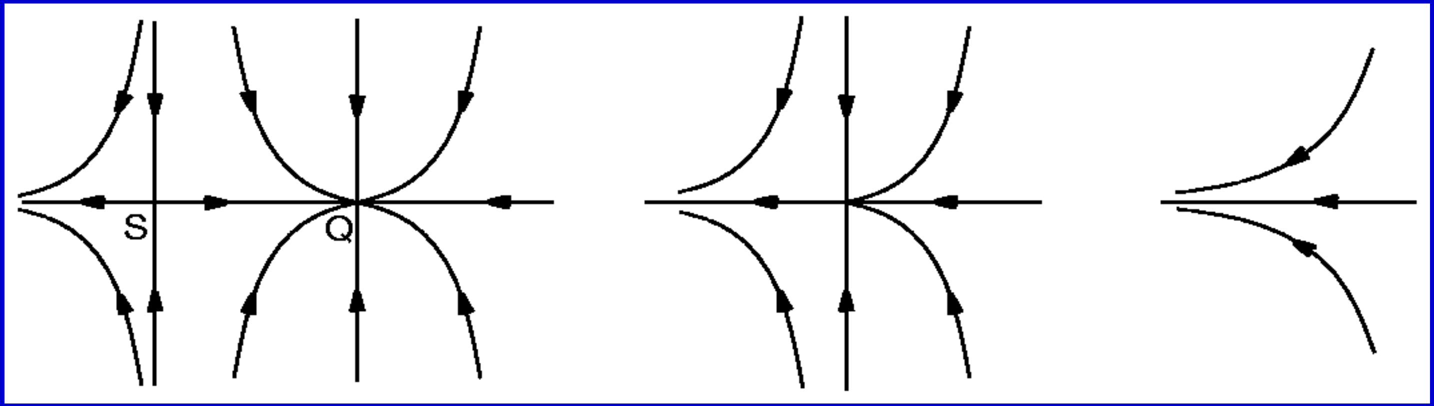
Бифуркационная диаграмма – это множество точек, линий, поверхностей в пространстве параметров, соответствующих тем или иным бифуркациям предельных множеств системы.

Для наглядности представления часто используют ***фазопараметрические диаграммы.*** В этом случае по одним координатным осям откладывают значения параметров, в по другим – динамические переменные или связанные с ними величины. Получают некоторую поверхность, точки которой соответствуют определенным режимам ДС, меняющимся с изменением параметров.



1. Бифуркации состояний равновесия

Седло-узловая бифуркация коразмерности 1.



Пусть в системе при $\alpha < \alpha^*$ существуют два состояния равновесия: устойчивый узел Q и седло S.

При $\alpha = \alpha^*$ происходит бифуркация слияния узла и седла с образованием негрубого состояния равновесия, называемого *седло-узлом*.

При $\alpha > \alpha^*$ положение равновесия исчезает.

Данная бифуркация является кризисом.

Простейшей модельной системой, описывающей данную бифуркацию, служит уравнение первого порядка:

$$\dot{x} = \alpha - x^2.$$

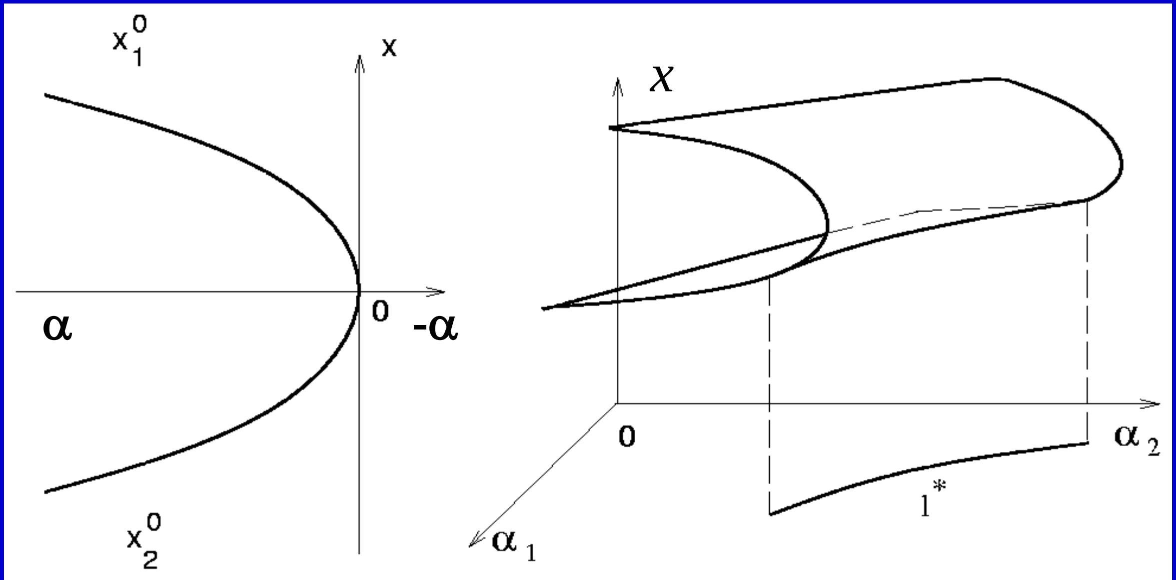
$x^0_{1,2} = \pm\sqrt{\alpha}$ - координаты состояний равновесия

$\rho_{1,2} = \pm 2\sqrt{\alpha}$ - собственные значения оператора линеаризации в соответствующих точках, т.е. $x^0{}_1$ – устойчивое состояние равновесия, $x^0{}_2$ – неустойчивое.

При $\alpha = 0$, $x^0{}_1 = x^0{}_2 = 0$ и собственное значение в этой точке равно нулю.

Бифуркация имеет коразмерность 1, так как выделяется одним условием

$$\rho\,(\alpha) = 0.$$

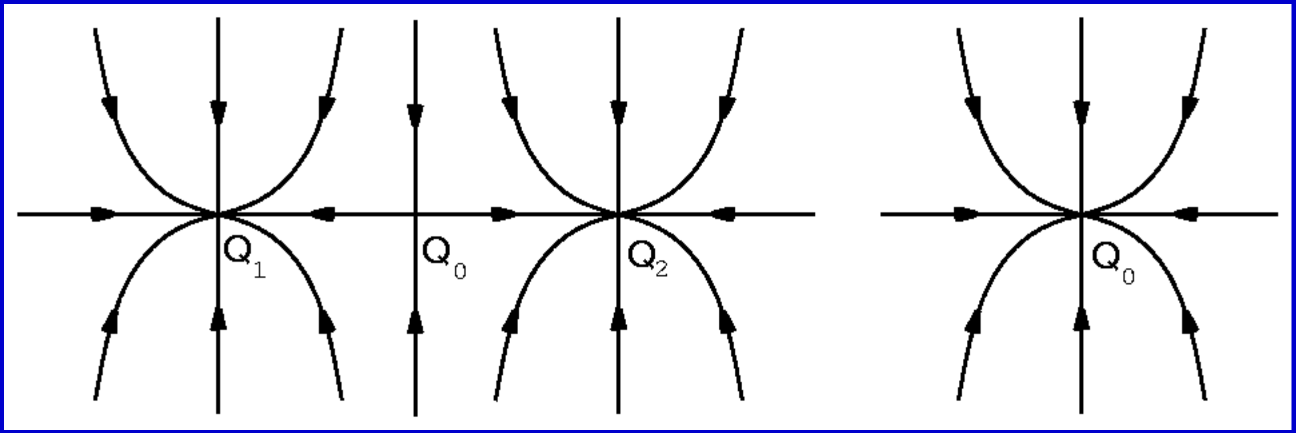


Фазопараметрическая диаграмма седло-узловой бифуркации *с одним управляющим параметром* (слева) *и с двумя управляющими параметрами* (справа)

Если седло-узловая бифуркация происходит в двупараметрической системе, то в фазопараметрическом пространстве ей соответствует поверхность, имеющая особенность типа ***складки*** вдоль линии l^* на плоскости параметров.

Бифуркация «трехкратное равновесие».

Эта бифуркация состоит в слиянии трех состояний равновесия: узлов Q_1, Q_2 и седла Q_0 между ними – и образовании устойчивого узла в точке Q_0.



Бифуркация имеет коразмерность 2, следовательно, ее описание требует, как минимум, двух управляющих параметров.

Модельная система для данной бифуркации:

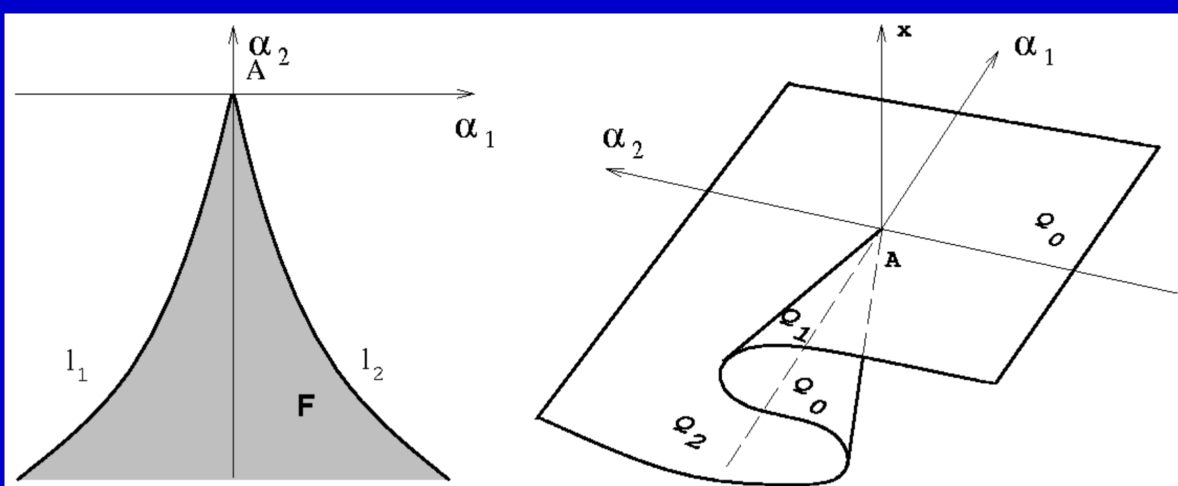
$$\dot{x} = \alpha_1 + \alpha_2 x + x^3.$$

При $\alpha_2 > 0$ и любом α_1 система имеет единственное состояние равновесия Q_0 с собственным значением $\rho_0 < 0$.

При $\alpha_2 < 0$ существует область значений α_1 (область F), где система имеет три состояния равновесия - Q_0, Q_1, Q_2, причем $\rho_0 > 0$ (Q_0 – неустойчиво) и $\rho_{1,2} << 0$ (Q_1, Q_2 – устойчивы) .

Линии l_1 и l_2 - границы области бистабильности F и соответствуют седло-узловым бифуркациям узлов $Q_{1,2}$ с седлом Q_0 .

Линии l_1 и l_2 сходятся в точке A, где одновременно выполняются два условия: $\rho_1(\alpha_1, \alpha_2) = 0$ и $\rho_2(\alpha_1, \alpha_2) = 0$, поэтому бифуркация в этой точке, называемая *трехкратным равновесием*, имеет коразмерность 2.



В фазопараметрическом пространстве имеет место структура, называемая *сборкой* (область F).

Бифуркация Андронова – Хопфа.

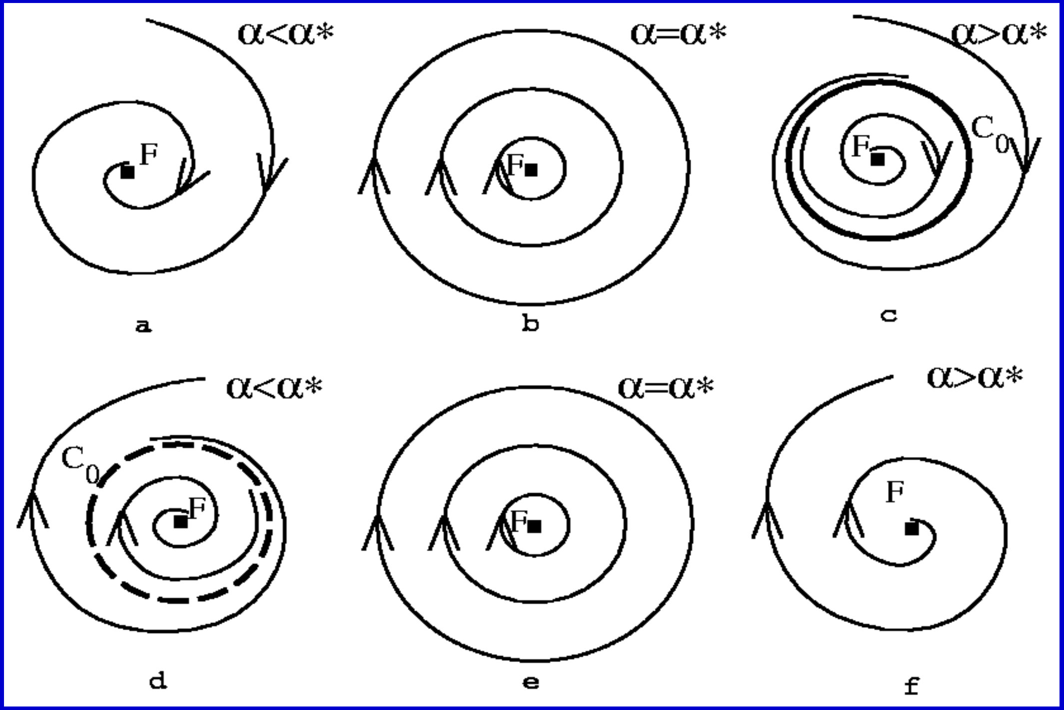
В ДС с размерностью $N \geq 2$ возможна ситуация, когда пара комплексно сопряженных собственных значений состояния равновесия типа «устойчивый фокус» пересекает мнимую ось. Выполняется бифуркационное условие $\mathrm{Re}\,\rho_{1,2} = 0$. Причем $\mathrm{Im}\,\rho_{1,2} \neq 0$. Этот случай отвечает *бифуркации Андронова – Хопфа* или *бифуркации рождения (исчезновения) предельного цикла*.

Существуют два вида бифуркации Андронова – Хопфа:

- *суперкритическая,* или *мягкая* бифуркация,
- *субкритическая,* или *жесткая* бифуркация.

Бифуркация Андронова – Хопфа определяется единственным бифуркационным условием и, следовательно, имеет коразмерность 1. Таким образом, для анализа бифуркации достаточно одного управляющего параметра α.

Суперкритическая бифуркация Андронова – Хопфа. Устойчивый при $\alpha < \alpha^*$ фокус F в точке бифуркации $\alpha = \alpha^*$ имеет пару чисто мнимых собственных значений $\rho_{1,2} = j\omega_0$, а при $\alpha > \alpha^*$ фокус F становится неустойчивым ($\mathrm{Re}\ \rho_{1,2} > 0$) , но в его близкой окрестности рождается устойчивый предельный цикл C_0 (a-c). Именно с такой бифуркацией связано возникновение автоколебаний в осцилляторе Ван дер Поля.



При *субкритической бифуркации* устойчивый для $\alpha < \alpha^*$ фокус F теряет устойчивость в результате «влипания» в него неустойчивого (в общем случае – седлового) предельного цикла C_0 при $\alpha = \alpha^*$, после чего цикл больше не существует, а фокус становится неустойчивым (d - f).

Модельная система для бифуркации Андронова – Хопфа:

$$\dot{a} = (\alpha + j\omega_0)a + L_1 a|a|^2, \quad \omega_0 \neq 0, \quad L_1 \neq 0.$$

a – мгновенная комплексная амплитуда.

L_1 – *первая ляпуновская величина* состояния равновесия.

Если $L_1 < 0$, то бифуркация – суперкритическая.

Если $L_1 > 0$, то бифуркация – субкритическая.

Для действительной мгновенной амплитуды и фазы колебаний получаем

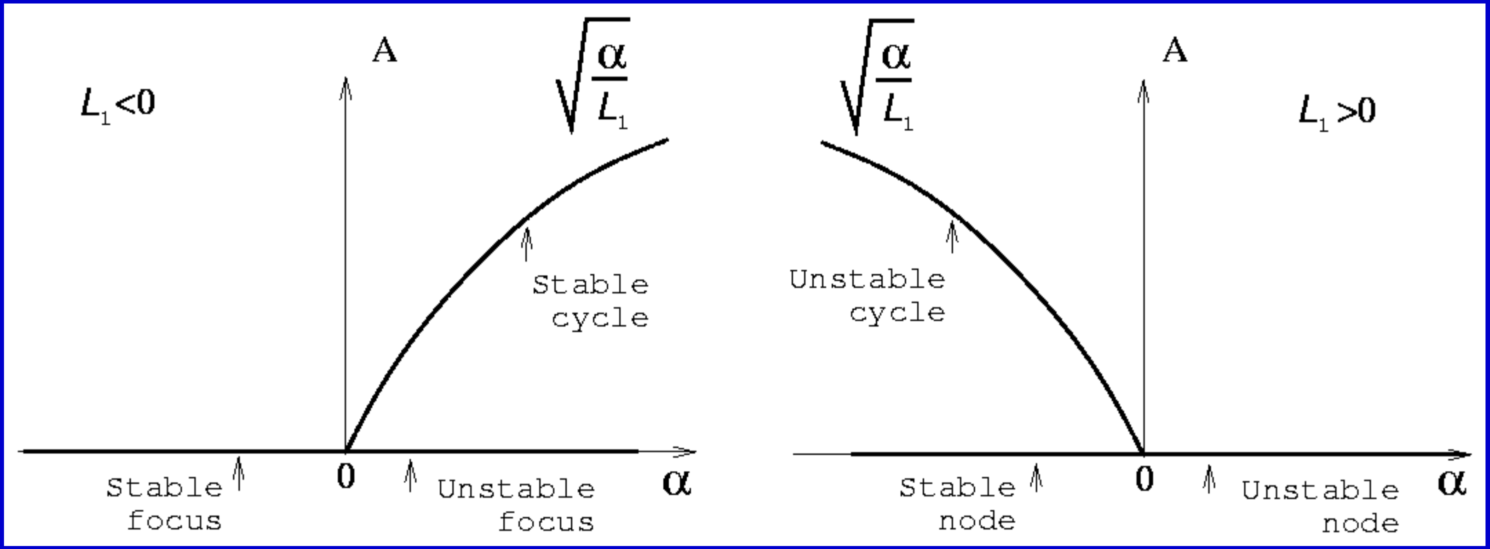
$$\dot{A} = \alpha A + L_1 A^3, \quad \dot{\Phi} = \omega_0,$$

где $A = |a|$, $\Phi = \mathrm{Arg}\,(a)$. Из уравнения стационарных амплитуд $\alpha A + L_1 A^3 = 0$ получаем значения, соответствующие фокусу ($A_F = 0$) и предельному циклу ($A_0 = \sqrt{-\alpha/L_1}$). Предельный цикл существует при условии $-\alpha/L_1 > 0$; период цикла – $T = 2\pi/\omega_0$.

Собственные значения для решений $A = A_F$ и $A = A_0$: $\rho_{F,0} = \alpha + 3L_1 A^2{}_{F,0}$.

В случае $L_1 < 0$ цикл существует и устойчив при $\alpha > 0$, а фокус устойчив при $\alpha < 0$ и неустойчив при $\alpha > 0$.

В случае $L_1 > 0$ при $\alpha < 0$ существует неустойчивый цикл и устойчивый фокус, а при $\alpha > 0$ – только неустойчивый фокус.



2. Бифуркации предельных циклов

Рассмотрим локальные бифуркации коразмерности 1, возможные для периодических аттракторов. Поскольку коразмерность 1 означает наличие только одного бифуркационного условия, а смена устойчивости цикла определяется равенством $|\mu_1| = 0$, возможны всего три случая, соответствующих различным локальным бифуркациям предельного цикла при бифуркационном значении управляющего параметра $\alpha = \alpha^*$:

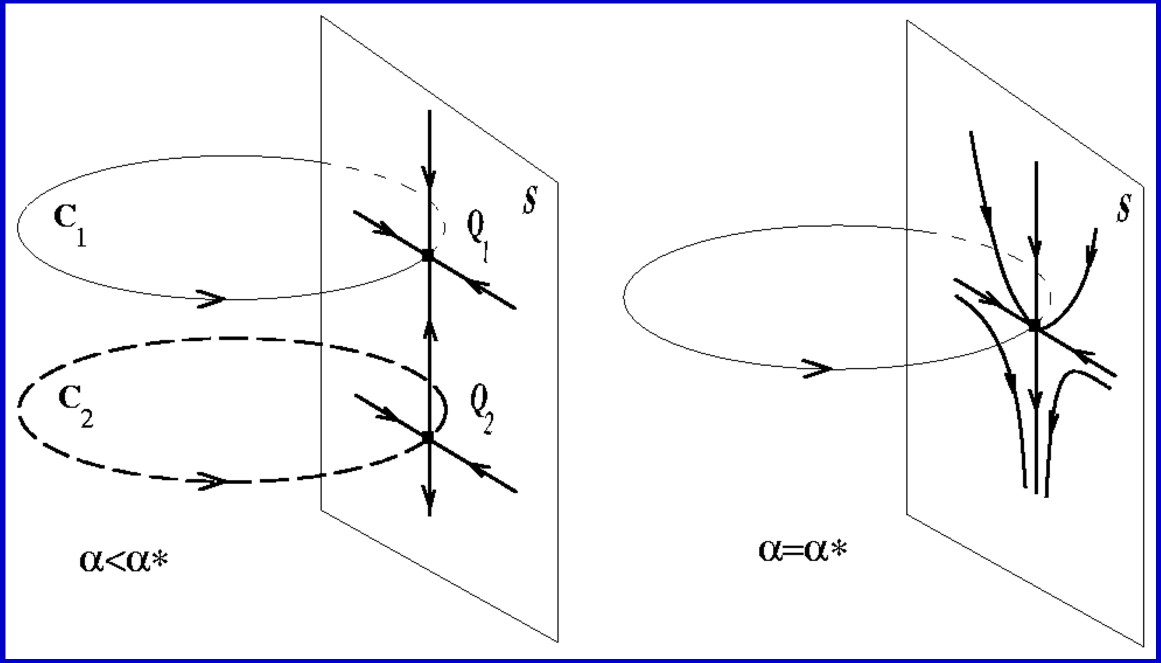
$$\mu_1 = +1, \qquad \mu_1 = -1, \qquad \mu_{1,2} = \exp(\pm j\varphi).$$

При анализе бифуркаций предельных циклов удобно рассматривать отображение Пуанкаре. Неподвижные точки отображения характеризуются теми же мультипликаторами, в переход к сечению делает анализ бифуркаций более наглядным.

Седло-узловая бифуркация предельного цикла.

При $\alpha = \alpha^*$ мультипликатор μ_1 устойчивого цикла C_1 обращается в + 1.

При $\alpha < \alpha^*$ в фазовом пространстве $N = 3$ существуют два цикла: C_1 – устойчивый и C_2 - седловой. В сечении Пуанкаре плоскостью S им соответствуют устойчивая (Q_1) и седловая (Q_2) неподвижные точки отображения секущей плоскости в себя. В точке бифуркации циклы C_1 и C_2 (и соответственно неподвижные точки Q_1 и Q_2) сливаются, образуя негрубую замкнутую траекторию C седло-узлового типа. При $\alpha > \alpha^*$ оба цикла (обе неподвижные точки отображения) исчезают. При обратном изменении управляющего параметра наблюдается рождение пары циклов C_1 и C_2.

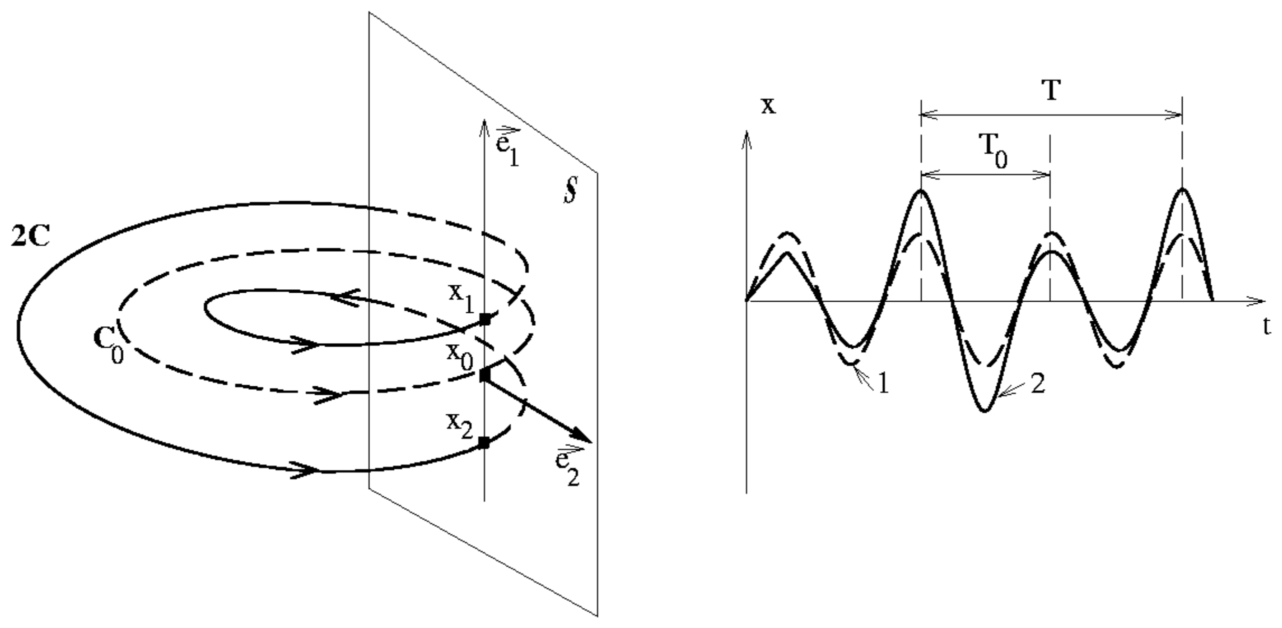


Данную бифуркацию часто называют *касательной бифуркацией* предельных циклов.

Бифуркация удвоения периода цикла.

В критической точке $\alpha = \alpha^*$ имеем $\mu_1(\alpha^*) = -1$, причем $d\mu / d\alpha|_{\alpha^*} \neq 0$.

При *суперкритической* (мягкой) бифуркации устойчивый при $\alpha < \alpha^*$ предельный цикл C_0 с периодом T_0 при $\alpha > \alpha^*$ становится седловым, а в его окрестности рождается устойчивый предельный цикл C с периодом T, близким к удвоенному T_0 ($T \approx 2T_0$).



При *субкритической* бифуркации устойчивый цикл C_0 и седловой цикл C удвоенного периода, существующие при $\alpha < \alpha^*$, в бифуркационной точке сливаются, а затем остается только цикл C_0, ставший седловым.

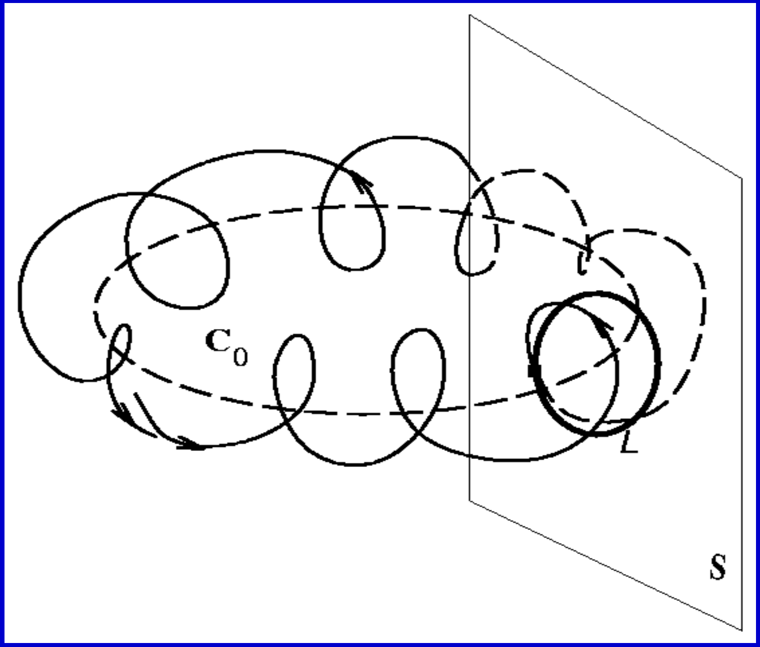
Бифуркация рождения (гибели) двумерного тора.

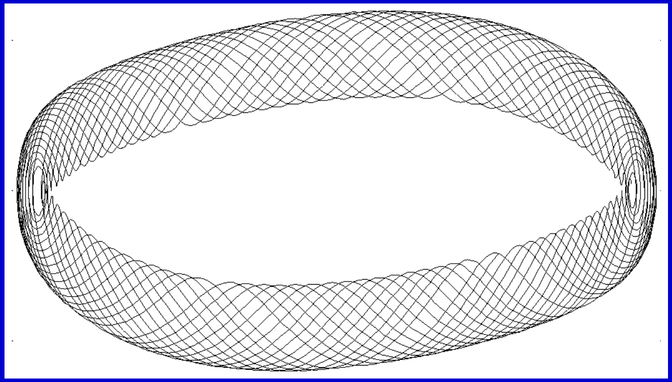
Условием этой бифуркации является выход на единичную окружность пары комплексно сопряженных мультипликаторов предельного цикла. То есть в точке бифуркации $\alpha = \alpha^*$ имеет место соотношение $\mu_{1,2}(\alpha^*) = \exp(\pm j\varphi)$, где $\varphi \in [0, 2\pi]$, причем $\varphi(\alpha^*) \neq 0, 2\pi, 2\pi/3$ (так называемые *сильные резонансы)*.

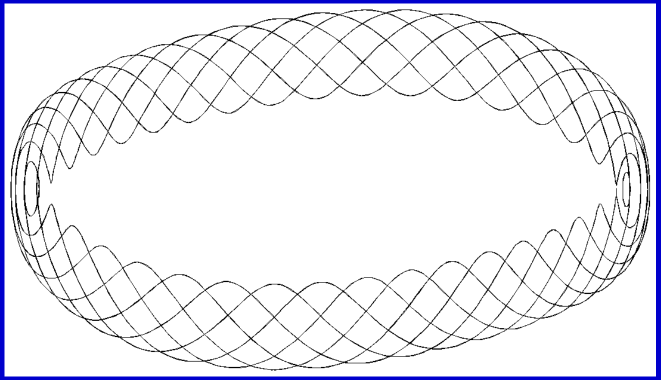
При *суперкритической* бифуркации из устойчивого предельного цикла C_0 рождается устойчивый двумерный тор T^2 , а сам цикл становится неустойчивым. При *субкритической* бифуркации в устойчивый цикл C_0 «влипает» неустойчивый (седловой) тор T^2, в результате чего цикл теряет устойчивость.

Изображающая точка в сечении движется по окружности L, называемой *инвариантной окружностью отображения.*

$\theta(\alpha) = \varphi/2\pi$ - *число вращения* на торе T^2.







Если число вращения $\theta(\alpha^*)$ иррационально, то любая траектория C на торе не замыкается и родившийся тор является ***эргодическим***.

Если $\theta(\alpha^*) = p/q$, где p и q – любые целые неотрицательные числа, то имеет место резонанс на торе порядка p/q.

Бифуркация рождения тора, представленная в отображении Пуанкаре, аналогична бифуркации Андронова – Хопфа для состояния равновесия потоковой системы, поэтому ее часто называют *бифуркацией Андронова – Хопфа в отображении*.

Радиус инвариантной окружности, как и радиус предельного цикла в случае бифуркации Андронова – Хопфа, зависит от бифуркационного параметра α в соответствии с законом: $r = \sqrt{\alpha - \alpha^*}$.

Бифуркации потери симметрии.

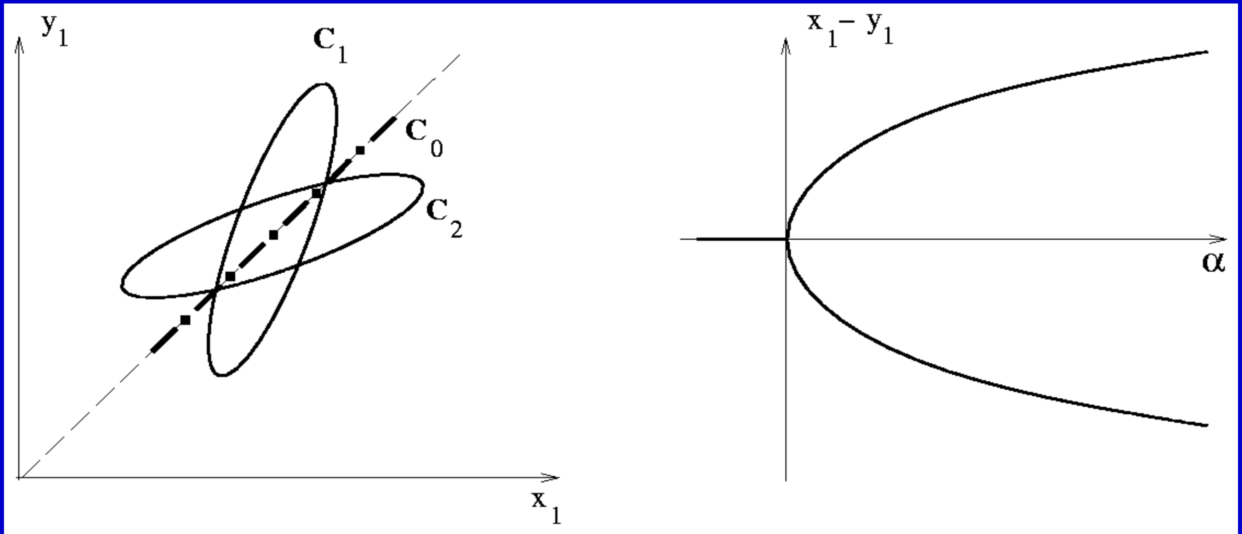
Бифуркации предельных циклов, определяемые условиями $\mu_1(\alpha^*) = \pm 1$ или $\mu_{1,2}(\alpha^*) = \exp\,(\pm\, j\varphi)$, могут приводить к потере свойства симметрии предельного цикла. Свойство симметрии предельного множества связано с существованием в фазовом пространстве системы инвариантного симметричного многообразия *U*, которому принадлежит предельное множество.

Рассмотрим две связанные идентичные подсистемы

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \alpha) + \gamma \mathbf{g}(\mathbf{y}, \mathbf{x}),$$
$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{F}(\mathbf{y}, \alpha) + \gamma \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^N$ - векторы состояний подсистем, α - вектор параметров, функция $\mathbf{g}$ характеризует связь подсистем, причем $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$. В этом случае $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ – инвариантное симметричное многообразие. Если бифуркационными оказываются мультипликаторы принадлежащих *U* циклов, связанные с собственными векторами, не лежащими в *U*, то в результате бифуркации симметричного аттрактора рождается аттрактор, не обладающий свойством симметрии. Говорят, что в результате бифуркации произошла потеря симметрии аттрактора.

Особый характер носит бифуркация, определяемая условием $\mu_1(\alpha^*) = +1$. В результате бифуркации симметричный цикл $C_0 \in U$ не исчезает, а становится седловым. Из него рождается пара циклов того же периода, не лежащих в U, но обладающих некоторым свойством взаимной симметрии. Бифуркация называется *вилообразной (pitchfork* – бифуркация).



Проекции циклов после бифуркации: исходного симметричного цикла C_0, ставшего седловым, и двух родившихся из него циклов – C_1 и C_2.

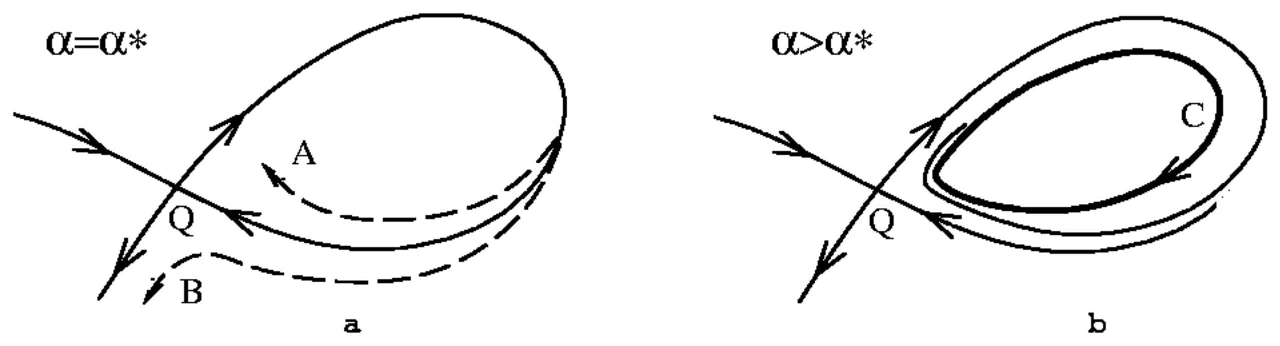
Фазопараметрическая диаграмма, где $(x_1 - y_1)$ – разность соответствующих координат в некотором сечении циклов.

3. Нелокальные бифуркации.

Гомоклинические траектории и структуры.

Петля сепаратрисы седлового состояния равновесия.

Пусть имеется седловое состояние равновесия *Q*, устойчивое (W^s_Q) и неустойчивое (W^u_Q) многообразия которого при увеличении параметра α сближаются, а при $\alpha = \alpha^*$ касаются друг друга. В момент касания происходит бифуркация и образуется особая двоякоасимптотическая фазовая траектория L_0, называемая *петлей сепаратрисы седла*.

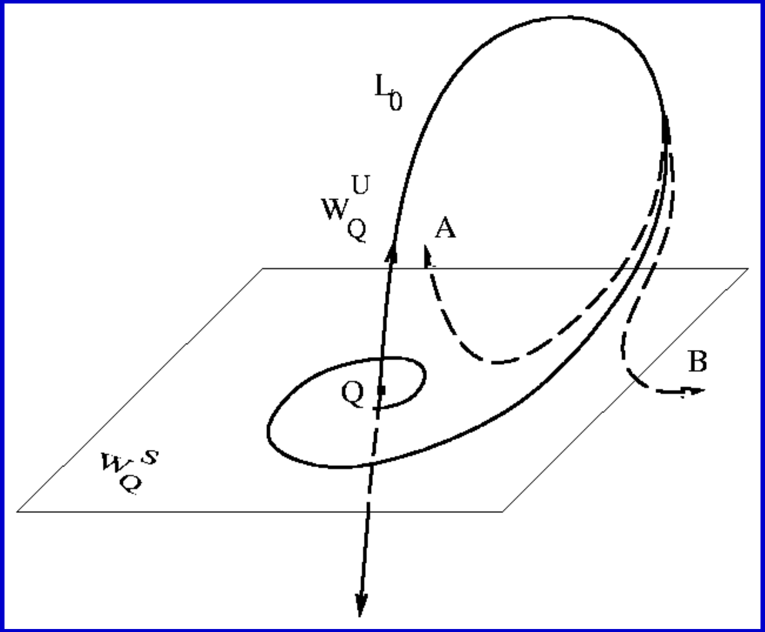


$\sigma_Q(\alpha) = \rho_1(\alpha) + \rho_2(\alpha)$ – *седловая величина* состояния равновесия в точке бифуркации.

Если $\sigma_Q(\alpha^*) < 0$, то при разрушении петли в сторону A из нее рождается устойчивый предельный цикл *C*.

Если $\sigma_Q(\alpha^*) > 0$, то петля L_0 называется *неустойчивой*, и при ее разрушении может родиться только неустойчивый цикл.

Рассмотрим данную нелокальную бифуркацию для $N = 3$.



Пусть Q – седло-фокус с одномерным неустойчивым и двумерным устойчивым многообразиями.

$\sigma_1(\alpha) = \mathrm{Re}\rho_{1,2}(\alpha) + \rho_3(\alpha)$ – *первая седловая величина.*

Пусть при $\alpha = \alpha^*$ образуется *петля сепаратрисы седло-фокуса* L_0, причем $\sigma_1(\alpha^*) \neq 0$.

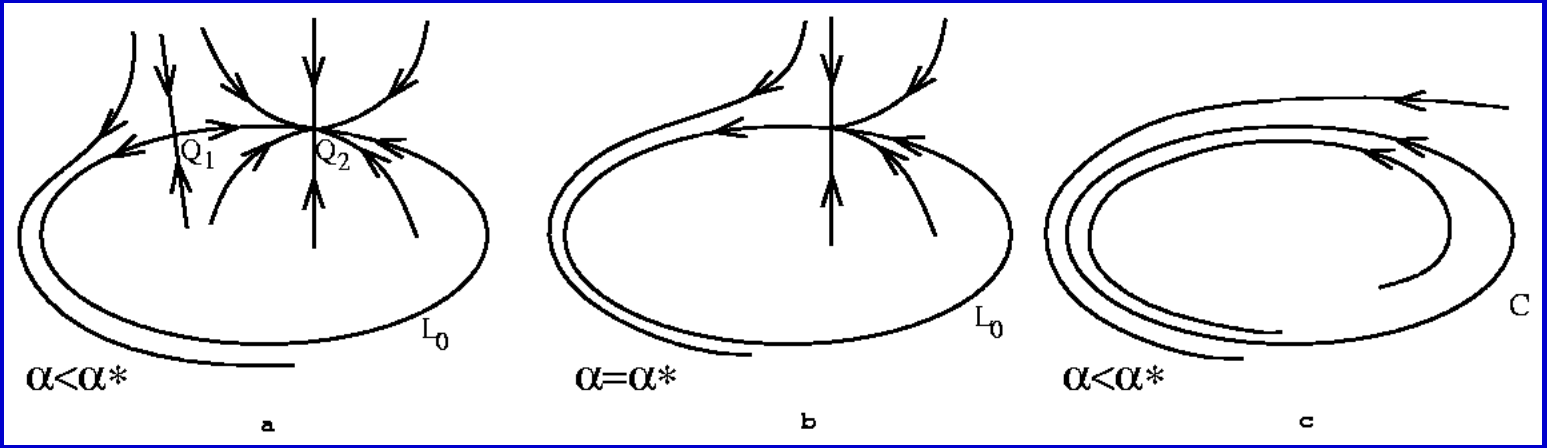
При сделанных предположениях справедлива теорема Л.П. Шильникова:

1. Если $\sigma_1(\alpha^*) < 0$ (случай *безопасной петли*), то при разрушении в сторону А из петли рождается устойчивый цикл C, а при разрушении в сторону В ничего не происходит.

2. Если $\sigma_1(\alpha^*) > 0$ (случай *опасной петли*), то в окрестности петли L_0 в момент ее существования, а также при разрушении в любую сторону существует сложная структура фазовых траекторий, состоящая из счетного множества периодических аттракторов, репеллеров и седел, а также *нетривиального гиперболического подмножества*.

Петля сепаратрисы седло-узла.

Пусть при $\alpha < \alpha^*$ существуют два состояния равновесия: седло Q_1 и устойчивый узел Q_2, причем неустойчивые сепаратрисы седла, замыкаясь на узел, образуют сепаратрисный контур.



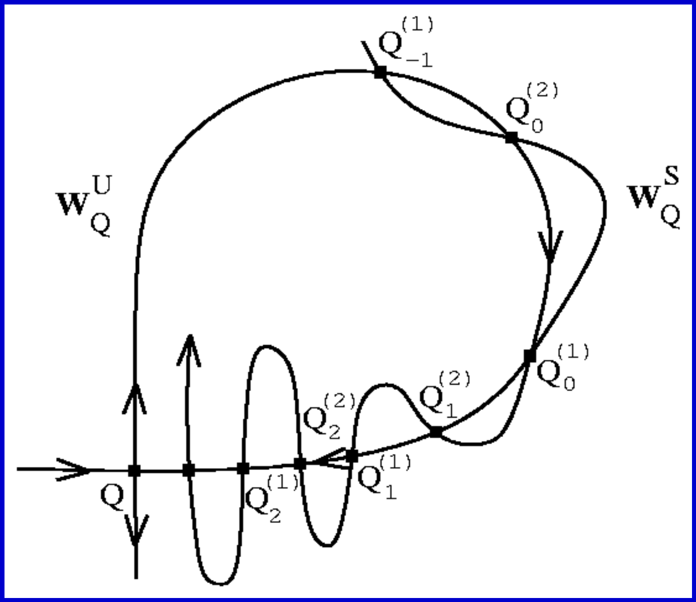
При $\alpha = \alpha^*$ происходит седло-узловая бифуркация состояний равновесия с образованием негрубого состояния равновесия типа «седло-узел». В данном случае седло-узел имеет двоякоасимптотическую гомоклиническую траекторию L_0, т.е. сепаратрисную петлю.

При $\alpha > \alpha^*$ седло-узел исчезает, а из петли рождается предельный цикл C.

Возникновение гомоклинической траектории седлового предельного цикла.

Данная бифуркация возможна только в пространстве $N = 3$. В этом случае существуют седловые предельные циклы с двумерными устойчивыми W^S и неустойчивыми W^U многообразиями. В секущей плоскости такому циклу соответствует седловая неподвижная точка, имеющая одномерные устойчивое и неустойчивое многообразия.

Пусть с ростом параметра α многообразия цикла сближаются и при $\alpha = \alpha^*$ происходит их касание – бифуркация образования негрубой двоякоасимптотической кривой Γ_0 , называемой *гомоклинической кривой Пуанкаре.*

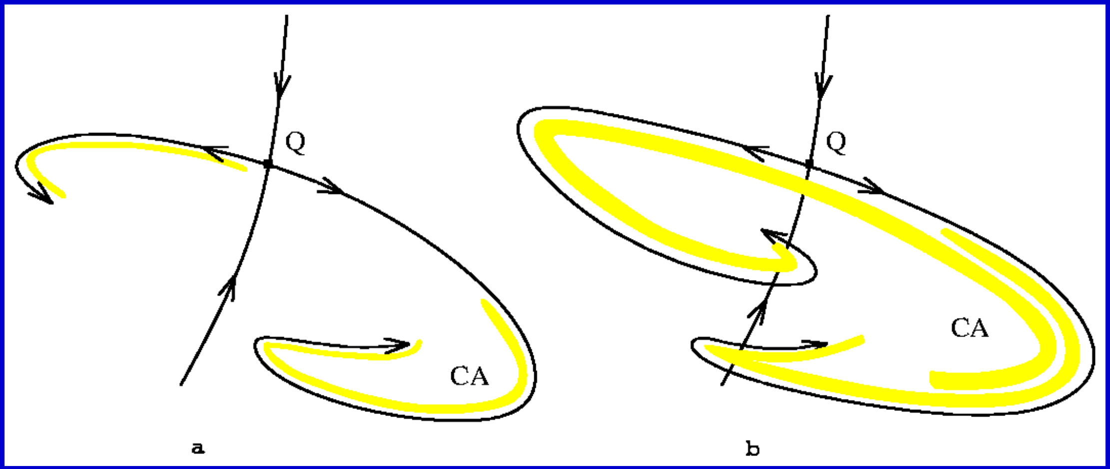


При $\alpha > \alpha^*$ многообразия W^S и W^U пересекаются, и образуются две грубые гомоклинические кривые - $\Gamma^0{}_1$ и $\Gamma^0{}_2$. В секущей плоскости каждой гомоклинической кривой соответствует бесконечная двоякоасимптотическая последовательность точек пересечения сепаратрис Q_n, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Приближаясь к седлу, точки Q_n уплотняются.

В окрестности гомоклинической траектории седлового цикла образуется сложное множество траекторий, называемое ***гомоклинической структурой***. В ее окрестности всюду плотны периодические орбиты, как устойчивые , так и неустойчивые и седловые. Кроме того, гомоклиническая структура включает подмножество хаотических траекторий, которое при определенных условиях может стать притягивающим.

Аналогичную структуру имеет окрестность *гетероклинической траектории*, возникающей при касании и пересечении неустойчивого многообразия одного седлового цикла с устойчивым многообразием другого седлового цикла.

Бифуркация связанности состоит в объединении частей странного аттрактора (СА), посещаемых типичной фазовой траекторией на нем с регулярной очередностью. Части СА разделены устойчивыми многообразиями седловых циклов. Если СА состоит из двух частей (т.е. является *двухсвязанным*), то его части разделены устойчивым многообразием цикла основного периода T_0. При гомоклиническом касании многообразий соответствующего цикла происходит образование гомоклинической кривой, сопровождающееся объединением частей СА.



Объединение СА.

Данная бифуркация состоит в объединении двух различных СА.

Границей бассейнов двух СА служат устойчивые сепаратрисы седлового предельного множества, в то время как его неустойчивые сепаратрисы стремятся к аттракторам. В точке бифуркации $\alpha = \alpha^*$ происходит гомоклиническое касание многообразий (сепаратрис) седла. После бифуркации при $\alpha > \alpha^*$ сепаратриса разрушается и возникает новый, «объединенный» аттрактор, бассейн притяжения которого включает бассейны двух предшествующих СА.