Лабораторный практикум "Информационные технологии в обработке сигналов и анализе радиосистем"

А.В. Шабунин, А.В. Слепнев, В.В. Семенов

Пособие содержит описания работ лабораторного практикума Информационные технологии в обработке сигналов и анализе радиосистем, созданного на кафедре радиофизики и нелинейной динамики физического факультета Саратовского государственного университета при финансовой помощи Благотворительного фонда Владимира Потанина. Он содержит девять работ по теме использования информационных технологий в экспериментальных исследованиях по радиофизике, радиоэлектронике и инфокоммуникационным технологиям и охватывает такие вопросы, как: 1) получение и оцифровывание экспериментальных данных; 2) цифровая обработка сигналов; 3) автоматизация эксперимента; 4) анализ сложных колебательных систем, хаотических и стохастических колебаний; 5) выделение и различение сигналов на фоне шума; 6) современные методы модуляции и мультиплексирования радиосигналов; 7) адаптивная фильтрация при помощи искусственных нейронных сетей. В предлагаемых лабораторных работах сочетаются методы натурного и компьютерного экспериментов. Аппаратные работы выполнены в виде отдельных радиоэлектронных установок, совмещенных с компьютером через плату АЦП. Снятие и обработка экспериментальных данных происходит посредством программы, созданной при помощи пакета LabView. Компьютерные работы выполнены в виде математических моделей, расчет которых, а также пользовательский интерфейс осуществляются при помощи средств пакета LabView.

Практикум предназначен для студентов и аспирантов радиофизических специальностей вузов.

Оглавление

1 Радиофизические модели динамических систем

1.1 Генерация хаотических колебаний

Цель работы: Исследовать переход к хаотическим колебаниям через каскад бифуркаций удвоения периода в радиоэлектронной схеме генератора с инерционной нелинейностью

1.1.1 Краткая теория

Хаотическими колебаниями называется неограниченный во времени сигнал, который не может быть воспроизведен по своему конечному фрагменту. Такой сигнал аналогичен шуму. Однако, в отличие от шума, источником которого являются случайные процессы, хаотический сигнал генерируется детерминированной автоколебательной системой, временная эволюция которой полностью определяется начальными условиями. Такая система должна обладать *чувствительной зависимостью к начальным условиям*, означающая, что первоначально сколь угодно близкие начальные значения приводят к совершенно разным эволюционным процессам, стартующим из них.

Автоколебательные системы принято описывать системами обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, ..., x_N, a, b, c, ...),\ \ i = 1, 2, ..., N$$

где x_i – динамические переменные, $a, b, c, ...$ – управляющие параметры, точка означает дифференцирование по времени. При изменении управляющих параметров автоколебательная система демонстрирует качественные изменения в своей эволюции, которые принято называть бифуркациями. Одним из примеров бифуркаций является бифуркация рождения предельного цикла из состояния равновесия, соответствующая мягкому возбуждению периодических колебаний в генераторе. Другой бифуркацией является *бифуркация удвоения периода колебаний*, исследуемая в настоящей работе.

Бифуркация удвоения периода заключается в том, что при изменении управляющего параметра происходит изменение формы периодических колебаний,

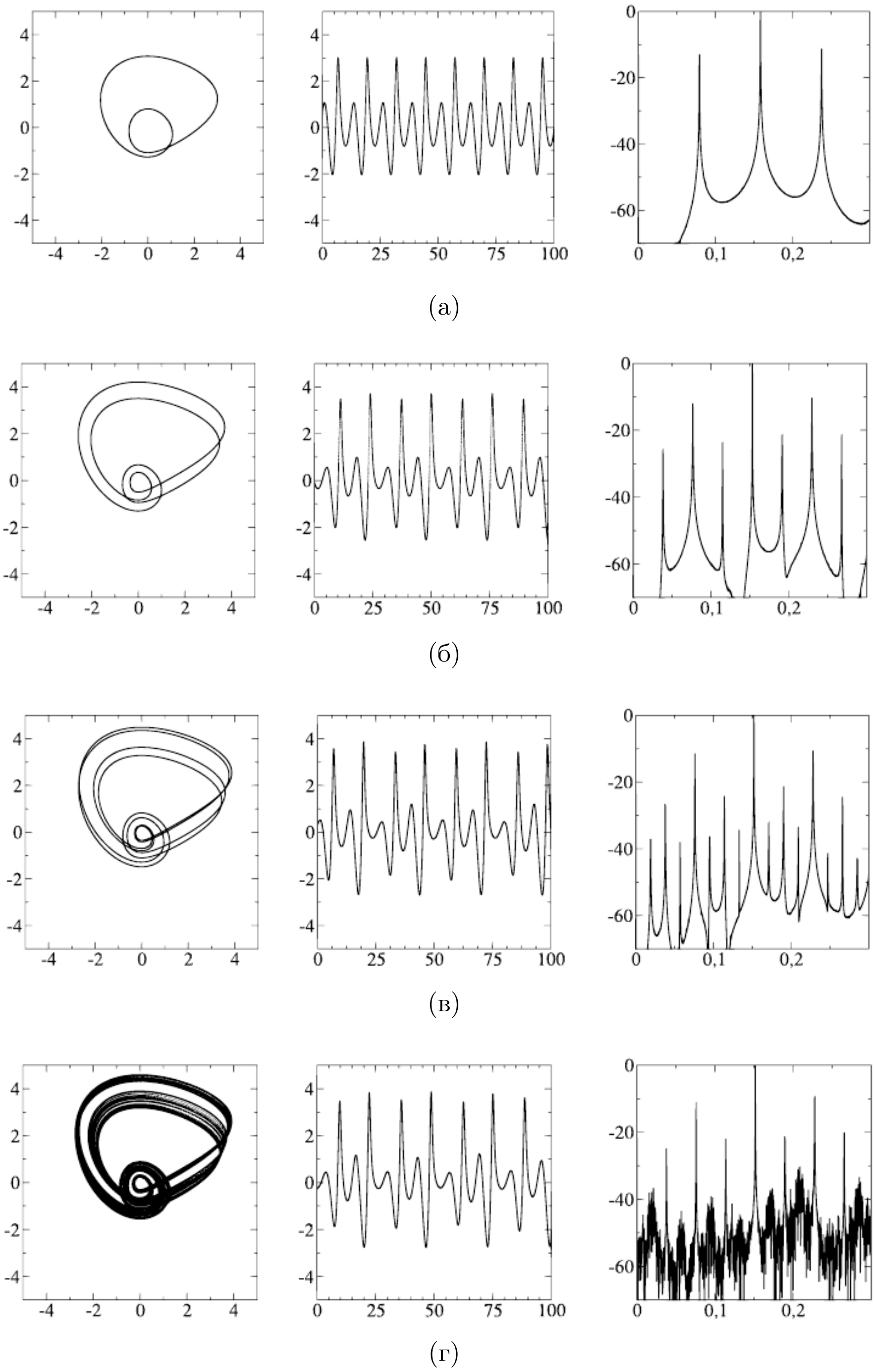


Рисунок 1.1.1: Бифуркации удвоения периода: фазовый портрет (слева), временная реализация (в центре) и спектр колебаний (справа)

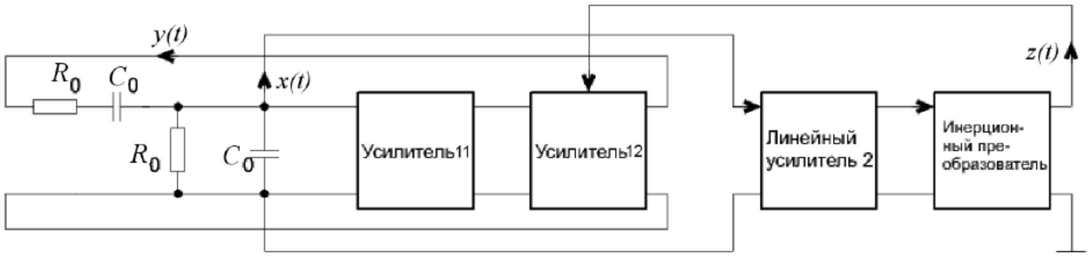


Рисунок 1.1.2: Генератор с инерционной нелинейностью

так что период колебаний удваивается. Примерный вид колебаний после бифуркации приведен на рис. 1.1.1a, где построен фазовый портрет (левый рисунок), временная реализация (центральный рисунок) и спектр (правый рисунок). При дальнейшем изменении управляющего параметра после первой бифуркации, происходит вторая, третья и т.д. — *каскад бифуркаций удвоения периода.* После каждой из бифуркаций каскада период удваивается, так как это показано на рис. 1.1.1b,c и завершается переходом к хаотическим колебаниям (см. рис. 1.1.1d).

В данной работе рассматривается переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода в генераторе с инерционной нелинейностью, представляющий собой линейный многокаскадный усилитель, выход которого через нелинейный инерционный четырехполюсник и селективный четырехполюсник обратной связи (мост Вина), подключен обратно ко входу, так как это показано на рис. 1.1.2 Генератор описывается системой дифференциальных уравнений:

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= mx + y - xz \\
\dot{y} &= -x \\
\dot{z} &= g(F(x) - z)
\end{aligned}
$$

где x, y и z — динамические переменные (токи и напряжения схемы), m и g — управляющие параметры, $F(x)$ – нелинейная функция, описывающая инерционный преобразователь. Подробно вывод уравнений генератора и его работа описаны в книге [1] и статьях [3, 4].

1.1.2 Экспериментальная установка

Установка спроектирована на базе операционных усилителей TL072CP и аналоговых умножителей AD633JN. Принципиальная схема представлена на рис. 1.1.3, а её работа описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} R_0 C\dot{x} &= mx + y - xz + \xi(t), \\ R_0 C\dot{y} &= -x, \\ R_0 C\dot{z} &= g(F(x) - z), \end{cases} \qquad (1.1.1)$$

где $F(x) = x(x+|x|)/2$, $R_0 = 10$ кОм, $C = 10$ нФ, а $\xi(t)$ — аддитивное внешнее воздействие. Для подключения внешнего воздействия необходимо подключить источник воздействия в нужный разъем на задней панели и включить соответствующий переключатель.

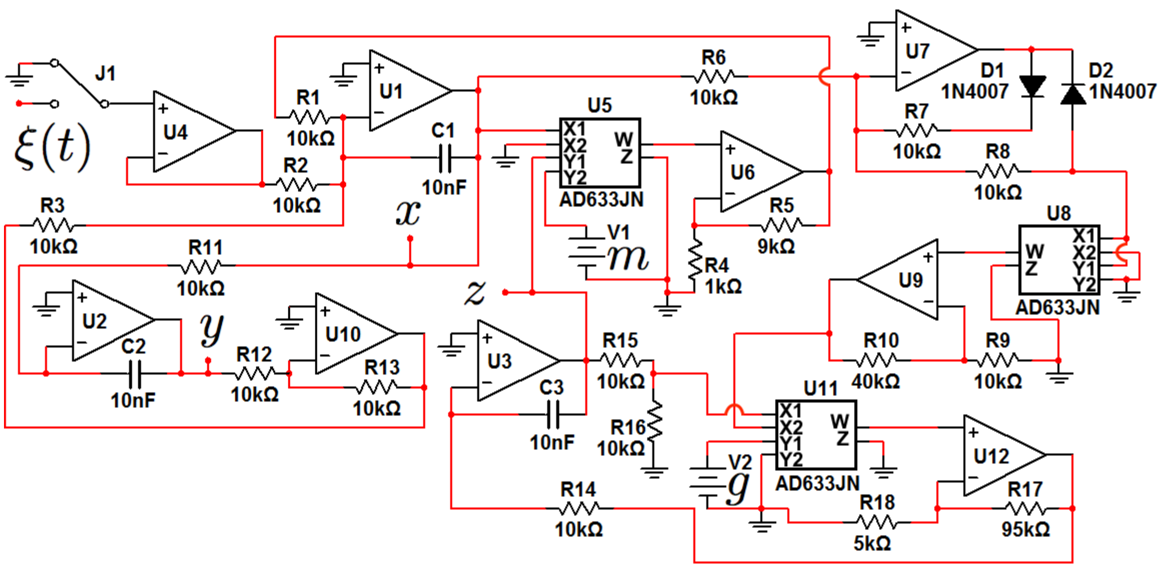


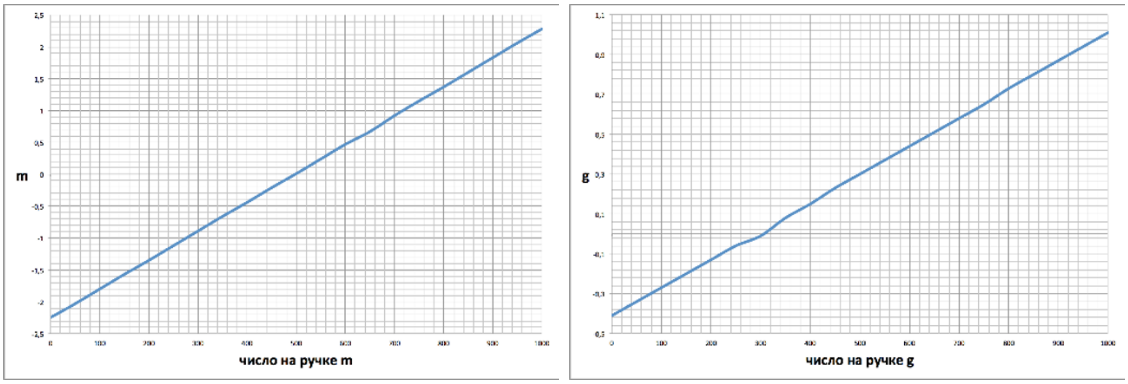
Рисунок 1.1.3: Принципиальная схема экспериментальной установки.

На рис. 1.1.4а и рис. 1.1.4б представлен внешний вид передней и задней панели соответственно.

Установка спроектирована таким образом, что управляющие параметры m и g задаются напряжениями, подаваемыми на соответствующие входы. К экспериментальной установке прилагается дополнительный блок управления, который позволяет задавать необходимые значения параметров m и g поворотом соответствующих ручек. Значения параметров m и g можно определить по положению ручки с помощью графиков на рис. 1.1.5а и рис. 1.1.5б. Перед началом работы необходимо подключить источник питания (+15V, 0, -15V) к установке и блоку управления, подключить выходы x, y, z к входам АЦП или осциллографа.

(а) (б)

Рисунок 1.1.4: Вид экспериментальной установки (а) передняя панель; (б) задняя панель



(а) (б)

Рисунок 1.1.5: Зависимость значений управляющих параметров от положения ручек переключения: (a) — m, (b) — g

1.1.3 Порядок выполнения работы

1. Исследовать экспериментально и численно закономерности перехода к режиму хаотических колебаний в генераторе с инерционной нелинейностью через каскад бифуркаций удвоения периода.

   a) Изучить экспериментально последовательность бифуркаций удвоения периода при вариации параметра m для фиксированных значений параметра g.

   b) Рассчитать численно значения параметра m_k в точках бифуркаций удвоения периода для циклов периода 1, 2, 4, 8 и 16. Значения параметра, близкие к бифуркационным, следует искать с помощью программы LabVIEW по фазовым портретам, более точные бифуркационные значения далее определяются по выходным данных программы численного интегрирования.

c) Оценить значение постоянной Фейгенбаума $\delta = \dfrac{m_{k+1} - m_k}{m_{k+2} - m_{k+1}}$ для значений $k = 4$ и 8 в натурном и численном экспериментах. Сравнить полученные результаты с теоретическим значением $\delta = 4.6692$.

2. Исследовать экспериментально и численно особенности эволюции хаотических режимов в закритической области.

   a) Изучить экспериментально эволюцию вида хаотического аттрактора при вариации параметра m ($m \geq m^*$), где m^* — бифуркационная точка рождения хаоса при фиксированном значении параметра g.

   b) Сравнить полученные результаты с данными компьютерного моделирования в характерных точках m.

   c) Рассчитать численно эволюцию спектра ЛХП при вариации параметра m для фиксированных значений g и d. Построить зависимость старшего показателя λ^+ от параметра m и аппроксимировать её рост аналитически. Сравнить результат с теоретическим: $\lambda^+(m) = C(m - m^*)^\gamma$, где $\gamma = \dfrac{\ln 2}{\ln 8} \approx 0.45$.

   d) Оценить размерность хаотических аттракторов в характерных точках по параметру m, используя определение ляпуновской размерности: $D_L = 2 + \dfrac{\lambda^+(m)}{\lambda^-(m)}$.

1.2 Синхронизация хаоса

Цель работы: Исследовать явление хаотической синхронизации в осцилляторе Ресслера под внешним периодическим воздействием

1.2.1 Краткие теоретические сведения

В теории периодических колебаний хорошо известен эффект синхронизации, заключающийся в подстройке частоты генератора ω_o под частоту внешнего периодического сигнала[1] ω_s:

$$\lim_{t\to\infty} (\omega_o - \omega_s) = 0 \tag{1.2.1}$$

сопровождающийся захватом фазы колебаний $\Phi_o(t)$ фазой сигнала $\Phi_s(t)$:

$$\lim_{t\to\infty} (\Phi_o - \Phi_s) = Const \tag{1.2.2}$$

Для захвата частоты необходимо, чтобы частота внешнего воздействия была близка к собственной частоте автоколебаний. В этом случае, даже при ничтожно малой амплитуде воздействия наблюдается эффект подстройки частоты (1.2.1), который может быть диагностирован по спектру колебаний. Если частота внешнего генератора далека от собственной частоты автоколебаний, то можно наблюдать другой эффект, называемый *подавлением частоты* автоколебаний. Он имеет место при большой амплитуде воздействия. В этом случае колебания на собственной частоте генератора подавляются, и система демонстрирует вынужденные колебания на частоте внешней силы. Данное явление также иногда называют синхронизацией, уточняя, что речь идет о *синхронизации через подавление* собственных колебаний. Подробнее о синхронизаии периодических колебаний можно прочитать в [5].

Явление синхронизации наблюдается также и для хаотических колебаний. При этом рассматривают различные виды хаотической синхронизации: полную, частотно- фазовую, обобщенную и т.п. (см. [6]). Частотно-фазовая синхронизация хаоса является аналогом синхронизации периодических автоколебаний. Однако, она реализуется лишь в том случае, если хаотические колебания являются достаточно регулярными, т.е. близкими к периодическим. Такой вид колебаний получил название *когерентного хаоса.* Для когерентного хаоса характерно присутствие почти периодической состовляющей в сигнале, проявляющейся в наличии резкого пика в его спектре мощности, пример которого показан на рисунке 1.2.1. Частота этого пика называется *базовой частотой* хаотических колебаний, а обратная к ней величина — характерным

[1] Этот эффект называют обычно *захватом частоты*

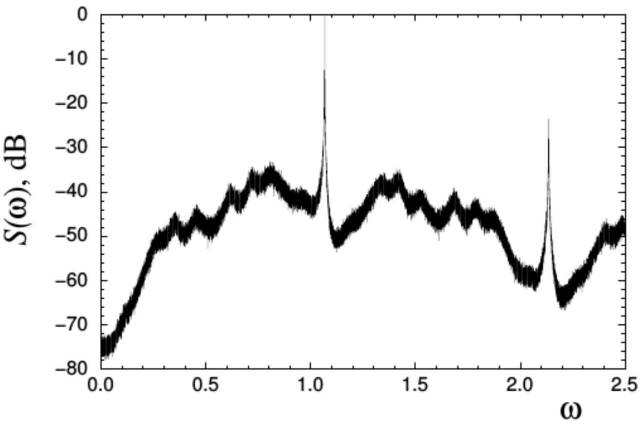


Рисунок 1.2.1: Спектр мощности когерентного хаоса

периодом колебаний. Наличие характерного периода позволяет осуществить захват фазы хаотического сигнала на базовой частоте и тем самым подстроить ее под частоту внешнего периодического сигнала, осуществив тем самым хаотическую синхронизацию.

Чтобы диагностировать частотно-фазовую синхронизацию хаоса, необходимо вначале определить понятие фазы для хаотических колебаний. Если спектр хаотических колебаний $x(t)$ концентрируется вокруг базовой частоты, то фазу можно определить как:

$$\Phi(t) = \arctan\left(\frac{\tilde{x}(t)}{x(t)}\right) \tag{1.2.3}$$

где $\tilde{x}(t)$ — сопряженный сигнал, полученный из исходного через *преобразование Гильберта*, согласно формуле:

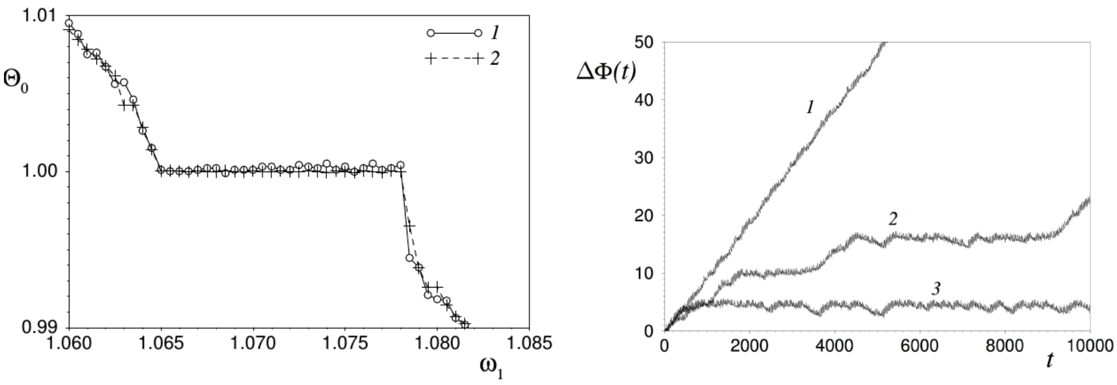
$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau} d\tau \tag{1.2.4}$$

Зная фазу, можно рассчитать мгновенную (т.е. зависящую от времени) частоту сигнала, как производную от фазы:

$$\omega(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt} \tag{1.2.5}$$

Используя формулы (1.2.3) и (1.2.5), можно диагностировать частотно-фазовую синхронизацию, либо по соотношению (1.2.1), либо (1.2.2). В последнем случае для хаотических колебаний используют более мягкое условие:

$$|\Phi_o(t) - \Phi_s(t)| < M$$



(а) (б)

Рисунок 1.2.2: Захват частот (а) и фаз (б) хаотических колебаний внешним периодическим сигналом

где M — некоторая константа. Данное условие означает, что разность между фазами колебаний и внешнего воздействия остается ограниченной.

Одной из базовых систем, демонстрирующих когерентный хаос, является *осциллятор Ресслера*, уравнения которого имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - z \\ \dot{y} &= x + ay \\ \dot{z} &= b + z\,(x - c) \end{aligned} \tag{1.2.6}$$

Здесь x, y и z - динамические переменные, a, b и c — управляющие параметры. Осциллятор Ресслера – автоколебательная система, демонстрирующая при изменении параметров (например, при увеличении c) каскад бифуркаций удвоения периода, который завершается образованием хаотического аттрактора. В закритической области наблюдаются бифуркации объединения лент многоленточных хаотических аттракторов, приводящие к появлению одноленточного аттрактора, соответствующего режиму когерентного хаоса. При больших значениях параметра c когерентный характер хаотического режима нарушается.

1.2.2 Экспериментальная установка

Экспериментальная установка представляет собой электронную аналоговую модель системы Ресслера. Установка спроектирована на базе операционных усилителей TL072CP и аналоговых умножителей AD633JN. Принципиальная схема, а также внешний вид экспериментальной установки представлены на рис. 1.2.4, а ее работа описывается следующей системой уравнений:

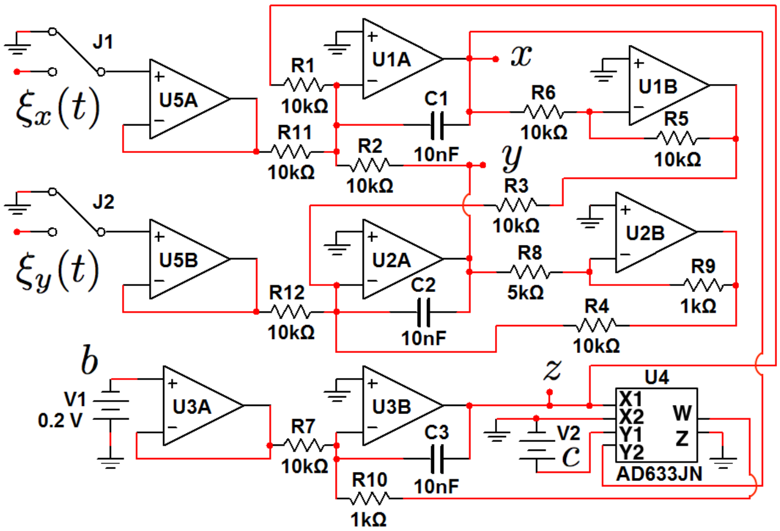


Рисунок 1.2.3: Принципиальная схема экспериментальной установки

$$\begin{cases} R_0C_0\dot{x} = -y - z - \xi_x(t), \\ R_0C_0\dot{y} = x + ay - \xi_y(t), \\ R_0C_0\dot{z} = b + z(x - c), \end{cases} \tag{1.2.7}$$

где $R_0 = 10k\Omega$, $C_0 = 10nF$, $\xi_{x,y}(t)$ - аддитивное внешнее воздействие. Для использования внешнего воздействия, напряжения от внешнего генератора необходимо подключить к входу на задней панели установки и переключить соответствующий тумблер на передней панели. Значения параметров a и b фиксированы: $a = R9/R8 = 0.2$, $b = V1 = 0.2$ (постоянное напряжение V1=0.2В подается с выхода делителя напряжения). Значение параметра c управляется напряжением V2 (c =V2), которое поступает с выхода делителя напряжения (потенциометр с ручкой c на передней панели установки). Значение параметра c определяется по формуле $c = -7.5 + 0.015k$, где k - число на лимбе потенциометра (см. переднюю панель). Экспериментальная установка требует подключения к двухполярному источнику питания +/-15 Вольт. Источник питания подключается к входам "-15 V" , "+15V" и "GND" (земля) на задней панели экспериментальной установки. При выполнении лабораторной работы к экспериментальной установке подключается внешнее воздействие, представляющее собой выходной сигнал внешнего генератора периодических колебаний. Визуализация и обработка экспериментальных данных осуществляется с помощью программы, созданной на базе программного комплекса LabView. Интерфейс программы позволяет наблюдать в реальном времени колебания динамических переменных экспериментальной установки $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, проекцию фазового портрета системы в плоскости (x, y), а также спектр мощности колебаний $x(t)$.

Рисунок 1.2.4: Внешний вид экспериментальной установки

1.2.3 Порядок выполнения лабораторной работы

1. Провести наблюдения динамики системы при увеличении параметра c. Построить фазовые портреты и спектры мощности, соответствующие каждому из наблюдаемых режимов. Определить:
   a) Какому механизму перехода к хаотической динамике соответствуют наблюдаемые бифуркационные изменения?
   b) Какой характер возбуждения автоколебаний (мягкий или жесткий) демонстрирует исследуемая система?
   c) Какой бифуркации соответствуют наблюдаемые изменения?

2. Установить значение параметра c, при котором в фазовом пространстве системы наблюдается устойчивый предельный цикл периода один, соответствующий автоколебаниям, близким к гармоническим. Подключить внешнее периодические воздействие $\xi_x(t) = A\cos(2\pi f_s t)$. Меняя частоту и амплитуду внешнего воздействия, продемонстрировать эффект синхронизации через захват и подавление частоты собственных колебаний.

Показать эволюцию спектра мощности колебаний $x(t)$, соответствующую механизмам захвата и подавления частоты автоколебаний.

3. Установить значение параметра c, при котором исследуемая система находится в режиме хаоса. Меняя частоту и амплитуду внешнего воздействия, пронаблюдать эффект синхронизации хаоса. Проиллюстрировать эффект захвата базовой частоты хаотических автоколебаний. При этом необходимо рассмотреть два случая:
   a) частота внешнего воздействия близка к основной частоте хаотических автоколебаний системы;
   b) частота внешнего воздействия отличается от основной частоты хаотических автоколебаний на 200-500 Гц.
4. На плоскости параметров (A, f_s) построить карту режимов, на которой отметить область несинхронного хаоса, синхронного хаоса и область синхронных периодических колебаний.

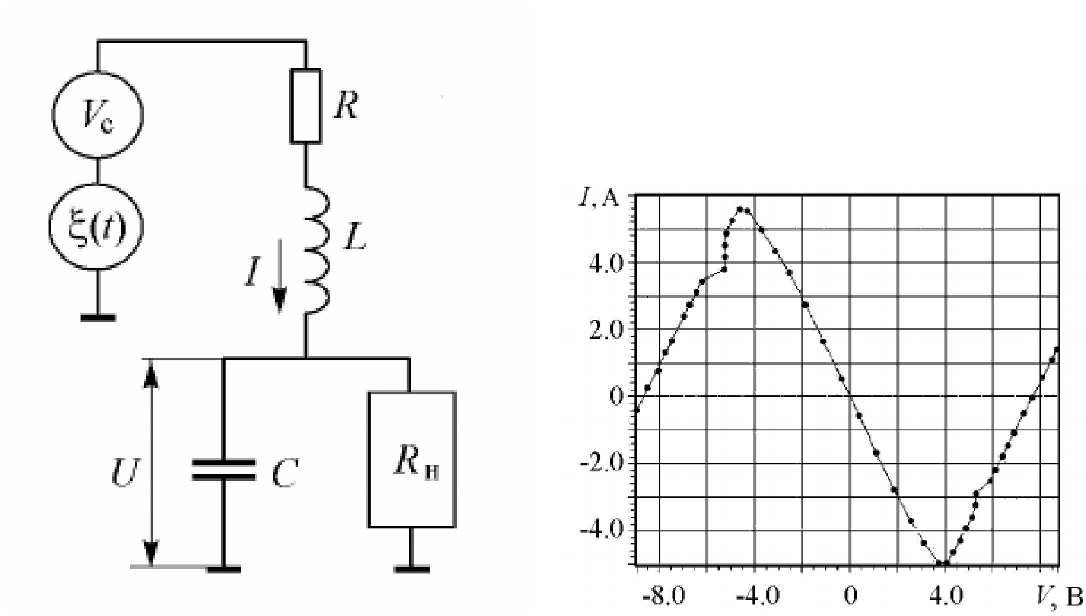
1.3 Явление когерентного резонанса

Цель работы: Исследовать явление когерентного резонанса и стохастической синхронизации в системе ФитцХью-Нагумо

1.3.1 Краткие теоретические сведения

Исследования последних десятилетий показали, что в нелинейных системах шум может играть конструктивную роль: воздействие шума может индуцировать упорядоченные колебательные режимы. Другими словами, при определенных условиях, шум может вызывать рост степени порядка в нелинейной системе. Одним из таких примеров является эффект когерентного резонанса, который выражается в существовании некоторого оптимального значения интенсивности шума, приложенного к нелинейной системе, для которого стохастические колебания становятся наиболее близкими к регулярным.

Базовой моделью для изучения эффекта когерентного резонанса служит *возбудимая система* — осциллятор ФитцХью-Нагумо, упрощенная схема которого показана на рисунке 1.3.1. Она представляет собой колебательный RLC



(а) (б)

Рисунок 1.3.1: Схема осциллятора ФитцХью-Нагумо (а) и вольт-амперная характеристика нелинейного элемента (б)

контур с подключенным к нему нелинейным элементом $R_н$ (в классическом варианте – это тунельный диод), на который действует сумма напряжений: постоянное напряжение от источника питания схемы V_c и переменный внешний сигнал $\xi(t)$. Вольт-амперная характеристика элемента (рис. 1.3.1б) может быть аппроксимирована кубическим полиномом: $I = F(U) = aU^3 - gU$, где g — отрицательная дифференциальная проводимость, наличие которой позволяет производить «подкачку энергии» в колебательный контур. Используя законы Кирхгофа, можно получить уравнения схемы:

$$L\frac{dI}{dt} = V_c + \xi(t) - RI - U$$
$$C\frac{dU}{dt} = I - F(U)$$

Введем динамические переменные $x = -U$ и $y = {}^{I}/_{g}$. Для новых переменных уравнения запишутся в следующей форме:

$$\begin{aligned} \varepsilon\dot{x} &= x - \alpha x^3 - y \\ \dot{y} &= \gamma x - \delta y + \beta + \eta(t) \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

Здесь $\varepsilon = {}^{C}/_{g}$, $\alpha = ag$, $\beta = {}^{V_c}/_{L}$, $\delta = {}^{Rg}/_{L}$ и $\gamma = {}^{1}/_{L}$ — параметры, управляющие поведением осциллятора, причем значение ε полагается малым: $\varepsilon \ll 1$; $\eta(t) = {}^{\xi}/_{L}$ – внешнее воздействие; точка означает дифференцирование по времени. В зависимости от значений параметров система (1.3.1) может находиться в трех различных динамических режимах: автоколебательном, возбудимом и бистабильном. В первом из них она выступает как генератор незатухающих периодических колебаний, во втором - как генератор импульсного сигнала, а в третьем – как триггер.

Рассмотрим устройство пространства параметров автономного осциллятора ФитцХью-Нагумо (1.3.1), т.е. при $\eta(t) = 0$. Координаты состояний равновесия: $P_i = (X_i, Y_i)$, где $Y_i = \alpha X_i^3 - X_i$, а X_i – корни неполного кубического полинома: $\alpha\delta X^3 + (\delta - \gamma)X - \beta = 0$. В зависимости от значений параметров на фазовой плоскости системы (1.3.1) имеется либо одна, либо три точки равновесия. В последнем случае две точки являются устойчивыми, а третья — неустойчивой (седловой), и система демонстрирует бистабильность. Расположение этой области на плоскости параметров $\gamma - \beta$ показано на рисунке 1.3.2 (область I). Вне данной области существует только одно состояние равновесия, которое в зависимости от параметров может быть либо устойчивым (область III), либо неустойчивым (область II). В зоне неустойчивости в системе наблюдаются незатухающие периодические колебания, то есть система (1.3.1) является генератором. Внутри зоны III, вблизи порога автоколебаний наблюдается возбудимый режим, для которого характерно возникновение спайков активности при внешнем воздействии на осциллятор, превышающем некоторый порог

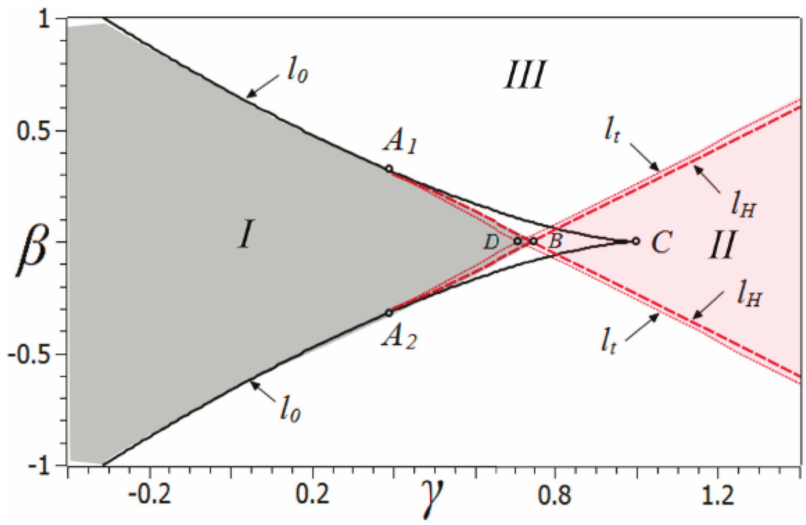


Рисунок 1.3.2: Плоскость параметров $\gamma - \beta$ осциллятора ФитцХью-Нагумо

возбуждения. Свойство возбудимости при воздействии шума сопровождается эффектом когерентного резонанса.

Рассмотрим воозбудимый режим осциллятора подробнее. Параметр ε задает временной масштаб первого уравнения. Если его значение мало, то скорость изменения переменой x будет большой по сравнению со скоростью изменения переменной y. В этом случае перенная x соответствует *быстрым* движениям, а переменная y — *медленным*. На рисунке 1.3.3 показано устройство фазового пространства системы (1.3.1) при значениях параметров, соответствующих возбудимому режиму, то есть при единственном устойчивом состоянии равновесия, вблизи линии бифуркации Андронова-Хопфа. На нем пунктирной линией отображена поверхность $\dot{x} = 0$, соответствующая медленным движениям. На этой кривой располагается единственное состояние равновесия Q (устойчивый фокус), для которого $\dot{y}$ также равно нулю. Попав на левую ветвь (в область 1) траектория движется по ней к неподвижной точке Q. Как видно из рис. 1.3.3, если отклонить траекторию вниз от неподвижной точки на некоторое расстояние, то траектория совершит движение по петле, вернувшись в конце концов к исходной точке Q. Примеры таких траекторий показаны на рисунке линиями со стрелками. При малой величине первоначального отклонения такое возвращение может произойти почти сразу (малые петли на рисунке). При большей величине отклонения, траектория перед возвращением совершит переход по большой петле, обойде все области 1-2-3-4. Минимально необходимая для этого величина отклонения от точки Q представляет собой порог возбуждения D. При соответствующем выборе параметров порог может

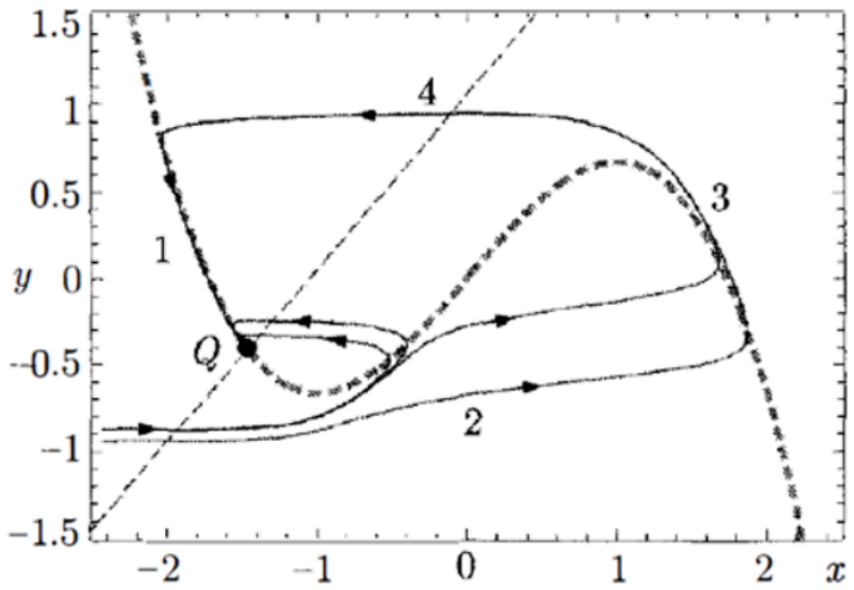


Рисунок 1.3.3: Фазовый портрет осциллятора ФитцХью-Нагумо при малом ε

оказаться очень мал. Тогда внешнее воздействие малой амплитуды $\eta(t)$ будет вынуждать осциллятор совершать колебания значительной величины. Такой режим работы осциллятора называется возбудимым.

Пусть на осциллятор в возбудимом режиме действует внешний шумовой сигнал $\eta(t)$. Тогда поведение системы будет определяться соотношением между интенсивностью (средне-квадратичным отклонением) шума σ_η и порогом D. При малом шуме $\sigma_\eta \ll D$ шум будет оказывать слабое влияние на поведение системы, которое будет представлять собой малые флуктуации в окрестности точки Q. Если интенсивность шума становится сравнимой с величиной порога: $\sigma_\eta \simeq D$, шум время от времени «выбрасывает» фазовую точку в область 1, после чего траектория возвращается по большой петле 1-2-3-4 к состоянию равновесия Q. Во время этого возвращения шум почти не оказывает влияние на траекторию и она определяется свойствами фазового пространства осциллятора. В результате, динамика системы представляет собой нерегулярную череду «выбросов» (называемых также *спайками*), каждый из которых представляет собой импульс затухающих регулярных колебаний. Рост интенсивности приводит к увеличению частоты спайков. Наконец, когда шум становится слишком большим: $\sigma_\eta \gg D$, он начинает влиять на динамику осциллятора не только в окрестности точки Q, но и во время движения по большой петле. В результате регулярный характер колебаний в спайках нарушается и динамика осциллятора становится чисто шумовой.

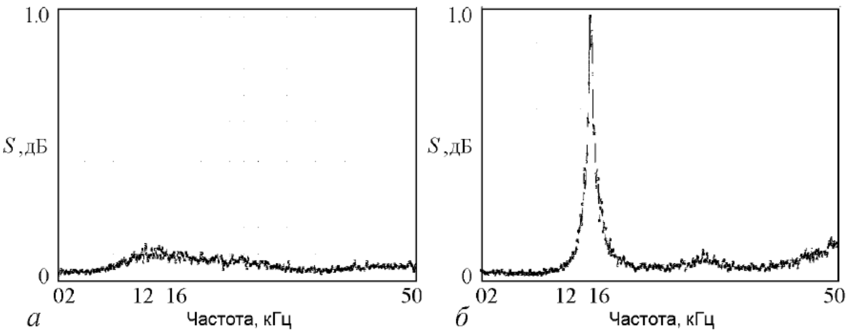


Рисунок 1.3.4: Спектр колебаний осциллятора при $\sigma_\eta \ll D$ (а) и в области когерентного резонанса (б)

Таким образом, в режиме возбудимых колебаний характер колебаний осциллятора ФитцХью-Нагумо существенным образом зависит от интенсивности шума: существует некоторый «оптимальный» по величине шум, при котором колебания будут наиболее близки к регулярным. Наличие такого значения шума «регуляризующего» колебания называется эффектом когерентного резонанса. Этот эффект иллюстрирован на рисунке 1.3.4, где приведены спектры мощности, построенные по колебаниям осциллятора при малом интенсивности шума (а) и при близком к оптимальному (б). Во втором случае в спектре присутствует ярко выраженный пик, соответствующий регулярной компоненте колебаний. Более подробно с явлением когерентного резонанса можно познакомиться в монографии [8], учебнике [9], а также в публикации [10]

1.3.2 Экспериментальная установка

В лабораторной работе рассматривается система ФитцХью – Нагумо в следующей (упрощенной) форме:

$$\begin{cases} \varepsilon\dot{x} = x - ax^3 - y, \\ \dot{y} = \gamma x + b, \end{cases} \tag{1.3.2}$$

Используемая экспериментальная установка (рис. 1.3.5) является аналоговой моделью системы (1.3.2) и задается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} R_0C\varepsilon\dot{x} = x - \dfrac{x^3}{3} - y, \\ R_0C\dot{y} = x + b + \xi(t) + f_{ext}, \end{cases} \tag{1.3.3}$$

где $\varepsilon = 0.05$, f_{ext} — внешнее периодическое воздействие, $\xi(t)$ — внешнее случайное воздействие, $R_0 = 10$ кОм, $C = 10$ нФ. Внешний вид установки показан на рисунке 1.3.5. На передней панели содержатся входные и выходные разъемы, а также – ручка регулировки параметра b. Принципиальная схема

Рисунок 1.3.5: Внешний вид экспериментальной установки.

экспериментальной установки представлена на рис. 1.3.6.

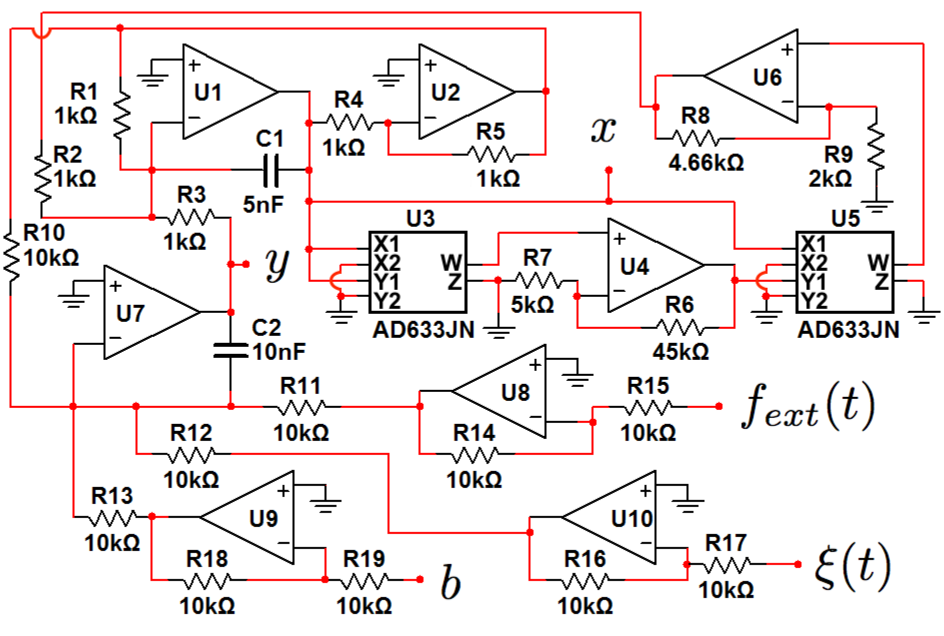


Рисунок 1.3.6: Принципиальная схема экспериментальной установки

Передняя панель установки содержит следующие элементы (рис. 1.3.6): вход Noise для подключения источника шума (п.2), вход External force для подключения внешнего воздействия (п.3), ручка b, отвечающая за значение параметра b, выходы x, y. Определить значения управляющего параметра b в зависимости от положения ручки можно по калибровочной кривой (рис. 1.3.7). Для выполнения работы необходимо запустить программу "Лабораторная работа ФитцХью-Нагумо.vi". Программа позволяет наблюдать в реальном времени временные реализации исследуемой системы, а также спектр мощности колебаний и фазовый портрет. Интерфейс программы представлен на рис. 1.3.8.

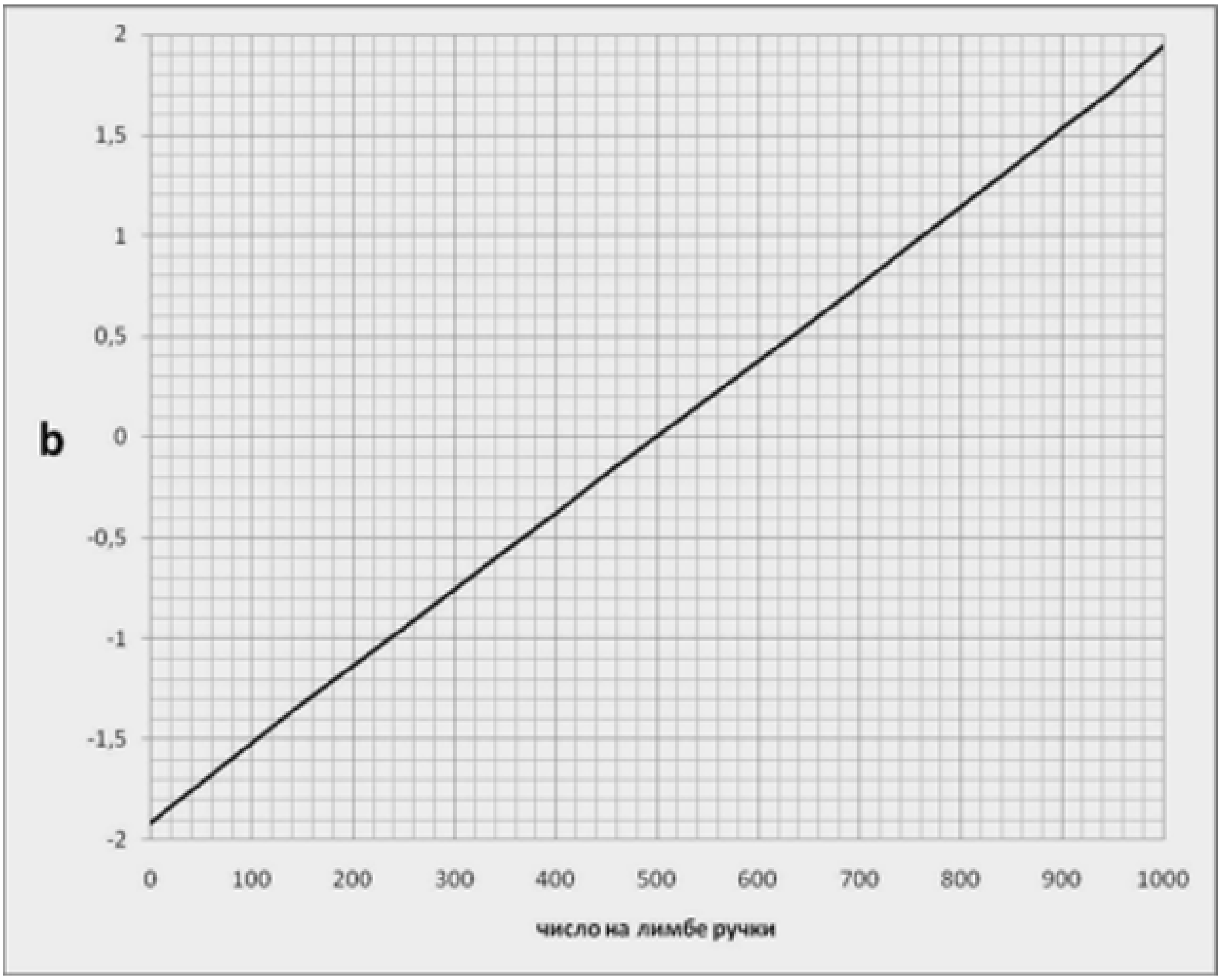


Рисунок 1.3.7: Калибровочная кривая.

1.3.3 Порядок выполнения работы

1. **Исследовать динамику автономной системы ФитцХью – Нагумо.** Для этого пронаблюдать за поведением системы при изменении зна-

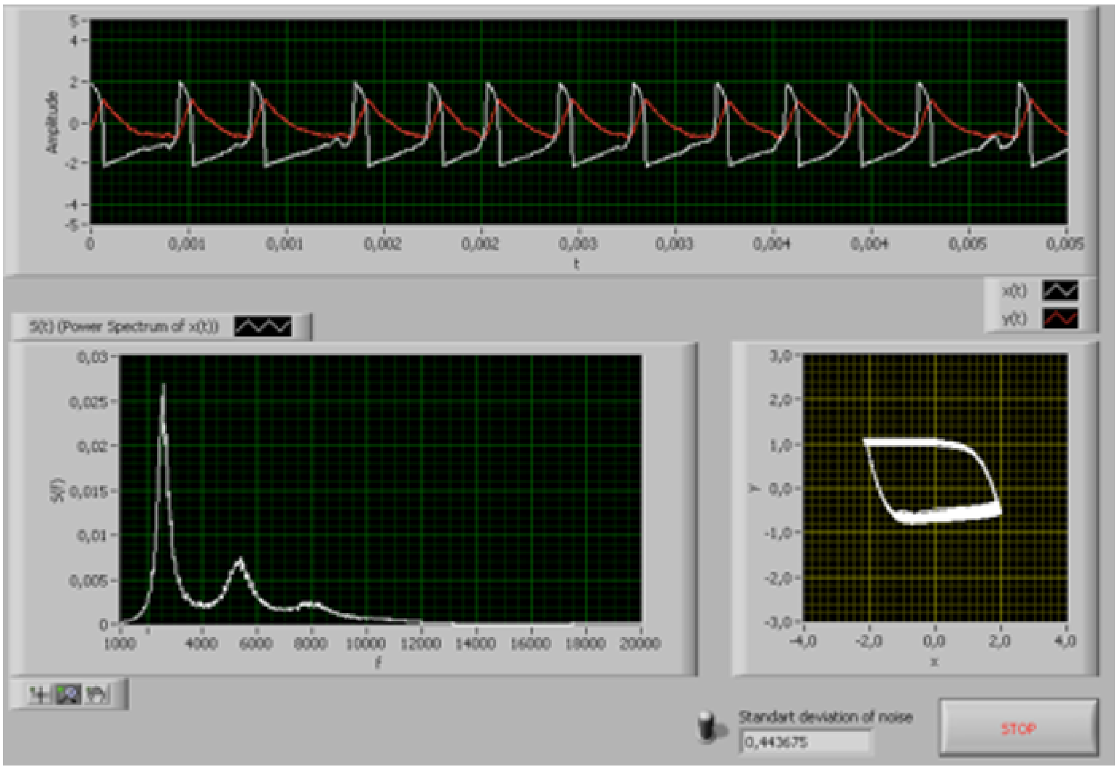


Рисунок 1.3.8: Интерфейс используемой программы.

чения параметра b. Параметр b изменять поворотом соответствующей ручки на передней панели установки. Зафиксировать соответствующие каждому режиму фазовые портреты, временные реализации и спектры. Исследовать характер перехода системы от устойчивого состояния равновесия к автоколебательному режиму. Объяснить полученные результаты.

2. **Исследовать динамику системы ФитцХью – Нагумо под действием шума.** Путем изменения параметра b перевести систему в возбудимый режим. Величину b зафиксировать на значении, которое соответствует возбудимому режиму в системе. Подключить выход источника шума к соответствующему входу на передней панели установки. Исследовать эволюцию спектров при изменении среднеквадратичного отклонения шумового воздействия. Построить зависимость величины $\dfrac{S_x(f_0)}{\Delta f}$ от среднеквадратичного отклонения шума, где $S_x(f_0)$ — высота основного пика в спектре мощности, Δf — ширина спектра на уровне половинной мощности. Объяснить полученные результаты. Среднеквадратичное

отклонение шума высвечивается в окне “Standart deviation of noise”. Для того чтобы определить стандартное отклонение шума, необходимо перевести переключатель слева в верхнее положение.

3. **Исследовать синхронизацию системы ФитцХью – Нагумо гармоническим сигналом в режиме когерентного резонанса.** Для этого выставить уровень шума, соответствующий режиму когерентного резонанса. Подключить внешнее периодическое воздействие к соответствующему входу на передней панели установки. Провести измерения спектра мощности колебаний при изменении амплитуды внешнего сигнала и фиксированной частоте сигнала. Частоту внешнего сигнала изменять в диапазоне от 1 кГц до 5 кГц, амплитуду внешнего сигнала изменять от 0 до 2 В. На плоскости параметров частота-амплитуда воздействия построить области характерных режимов. Показать временные реализации и спектры мощности, иллюстрирующие механизмы захвата и подавления частоты.

1.4 Стохастический резонанс

Цель работы: Исследовать явление стохастическог резонанса в осцилляторе Крамерса

1.4.1 Краткие теоретические сведения

Стохастический резонанс (СР) — это явление усиления периодического сигнала под действием шума определенной интенсивности. Термин «стохастический резонанс» был впервые введен в 1981 году в статье Р. Бенци, А. Сутера и А. Вульпиани, посвященной исследованию периодичности наступления ледниковых периодов., в ходе которого было обнаружен эффект усиления слабого регулярного сигнала под действием шума. Впоследствие, СР был обнаружен во многих физических, химических и биологических системах.

Классической моделью для изучения стохастического резонанса служит осциллятор Крамерса (ОК), на который воздействует смесь гармонического сигнала с амплитудой A и частотой ω_0 и гауссового шума интенсивности σ:

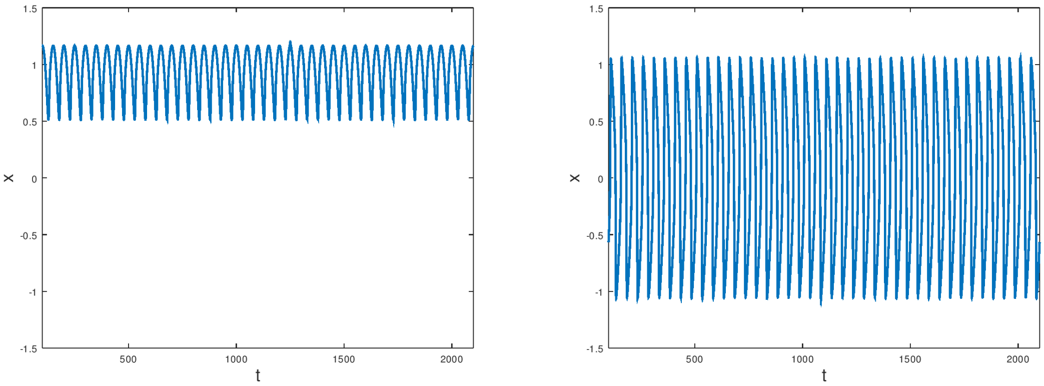
$$\dot{x} = ax - x^3 + A\cos(\omega_0 t) + \sigma\xi(t) \qquad (1.4.1)$$

При отсутствие внешних сигналов и при $a > 0$ ОК представляет собой триггерную систему с двумя устойчивыми состояниями равновесия: $P_{1,2} = \pm\sqrt{a}$ и одним неустойчивым — в нуле: $P_0 = 0$. Последнее разделяет бассейны притяжения устойчивых состояний равновесия. Уравнение (1.4.1) может быть также представлено в виде:

$$\dot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

где $U(x) = 0.25x^4 - 0.5ax^2$ – потенциал, график которого представлен на рисунке 1.4.1. Видно, что в точке $x = 0$ имеется потенциальный барьер высотой $B = 0.25a^4$, который должен быть преодолен, для перемещения из од-

Рисунок 1.4.1: Форма потенциала U(x) для разных значений a

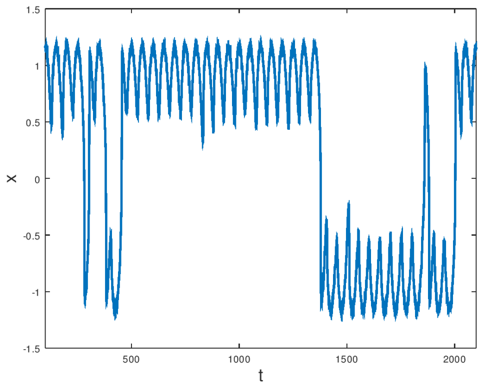


(а) (б)

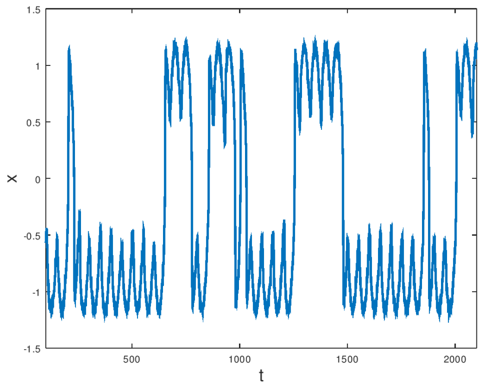
Рисунок 1.4.2: Колебания в осцилляторе Крамерса под действием периодической силы: (а) при $A = 0.42$ и (б) $A = 0.43$; в обоих случаях $\omega_0 = 0.02$

ной «потенциальной ямы» в другую. Если на осциллятор подать гармоническое воздействие с амплитудой A, то результат такого воздействия будет существенным образом зависеть от соотношения между величиной амплитуды колебаний и барьера. При малой амплитуде воздействие не достаточно для перескоков из одной потенциальной ямы в другую и будут наблюдаться небольшие колебания вокруг одного из устойчивых состояний равновесия $P_{1,2}$, так как это показано на рисунке 1.4.2а. При большей амплитуде, энергия сигнала становится выше потенциального барьера, в результате фазовая точка перескакивает из одной потенциальной ямы в другую. В результате, мы наблюдаем колебания существенно большей амплитудоы, как это показано на рисунке 1.4.2б. Таким образом, бистабильная система обладает некоторым порогом чувствительности, при достижении которого влияние внешнего воздействия резко усиливается.

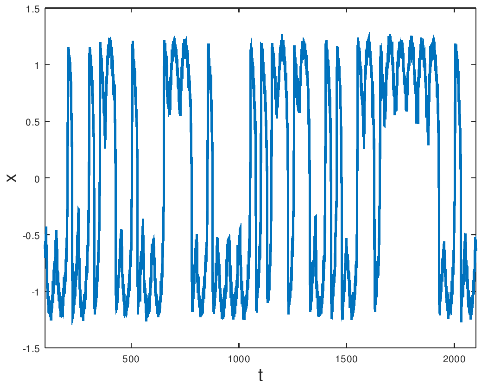
Предположим, что на систему Крамерса действует как периодическая сила, так и шумовой сигнал. Пусть амплитуда воздействия выбрана немного ниже критического значения, так, что в отсутствие шума перескоков не происходит (см. рис. 1.4.2а). В этом случае, добавление в систему небольшого шума приведет к резкому усилению амплитуды колебаний, частота которых будет зависеть от интенсивности шума. При не слишком сильном шуме условие перехода через потенциальный барьер будет выполняться не чаще, чем один раз за период колебаний; более того, если интенсивность шума очень мала, переходы между потенциальными минимумами будут наблюдаться далеко не каждый период. В этом случае перескоки будут низкочастотными, так как



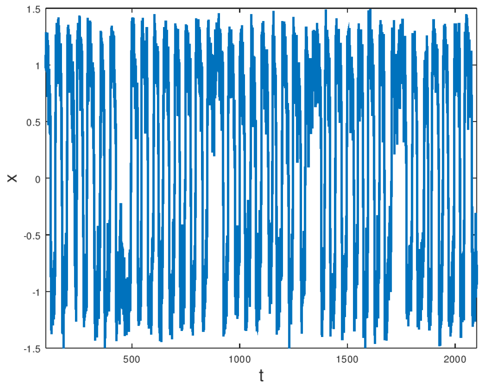
(а)



(б)



(в)



(г)

Рисунок 1.4.3: Колебания в осцилляторе Крамерса под действием смеси периодического сигнала с шумом интенсивностью (а) $\sigma = 0.1$, (б) $\sigma = 0.2$, (в) $\sigma = 1.0$ и (г) $\sigma = 1.5$,

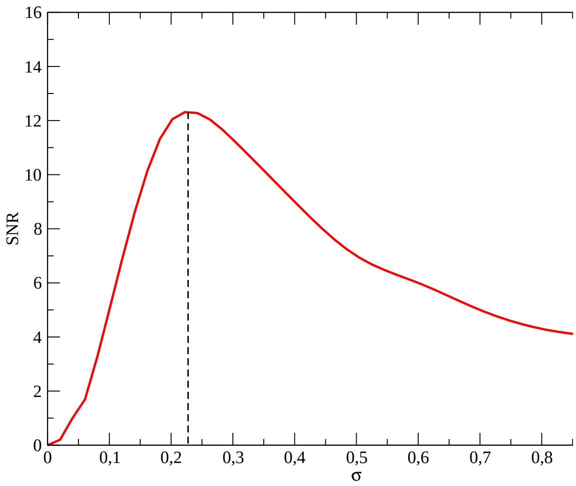


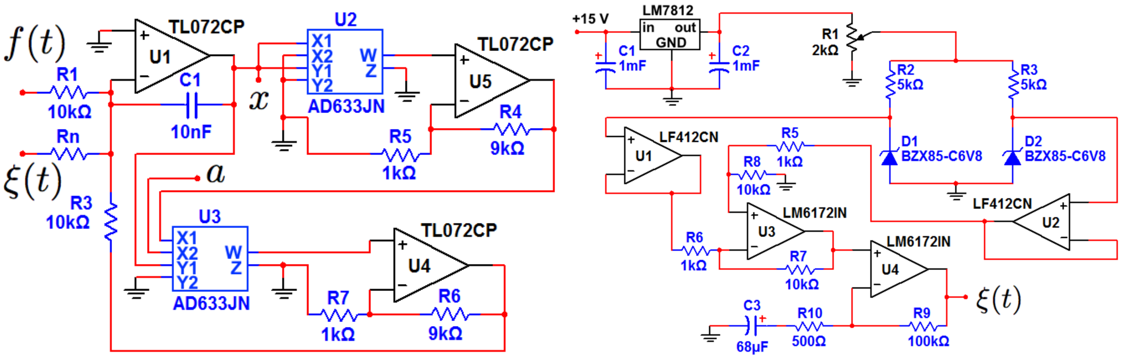
Рисунок 1.4.4: Зависимость SNR от интенсивности шума при СР

это показано на рис. 1.4.3а. Усиление шума ведет к увеличению частоты перескоков (рис. 1.4.3б,в) до тех пор, пока они начнут проявляться на каждом периоде колебаний (рис. 1.4.3г). Этот случай соответствует наибольшей частоте перескоков и колебания осциллятора демонстрируют наиболее регулярный характер. Дальнейший рост шума ведет лишь к увеличению флуктуаций на фоне регулярных переходов из одного состояния в другое.

Таким образом, в системе существует интенсивность шума, при которой колебания демонстрирут наиболее регулярный характер, то есть величина (мощность) периодической компоненты колебаний максимально превышает величину (мощность) шумовой компоненты. Отношение этих мощностей называется *отношением сигнал-шум* и обозначается обычно как SNR (*Signal to Noise Ratio*):

$$SNR = \frac{P_s}{P_n} \tag{1.4.2}$$

Величина SNR как раз и характеризует регулярность колебаний. Поэтому эффект стоастического резонанса означает, что в зависимости SNR от интенсивности шума существует существенный максимум, соответствующий случаю СР. Типичная картина такой зависимости приведена на рис. 1.4.4, где штриховой линией отмечено оптимальное значение интенсивности шума, соответствующее эффекту СР. Более подробные сведения о явлении стохастического резонанса можно найти в [8, 7, 11]



(а) (б)

Рисунок 1.4.5: (а) Принципиальная схема электронной модели осциллятора Крамерса; (б) Принципиальная схема генератора шума.

1.4.2 Экспериментальная установка

Экспериментальная установка представляет собой электронную аналоговую модель осциллятора Крамерса. Установка спроектирована на базе операционных усилителей TL072CP и аналоговых умножителей AD633JN. Принципиальная схема экспериментальной установки представленf на рис. 1.4.5 (а), а ее работа описывается следующей системой уравнений:

$$R_0 C_0 \dot{x} = ax - x^3 - f(t) - K\xi_x(t), \tag{1.4.3}$$

где $R_0 = 10k\Omega$, $C_0 = 10nF$, $f(t)$ - периодический сигнал, подаваемый с внешнего генератора, $\xi_{x,y}(t)$ - сигнал с генератора шума, схема которого представлена на рис. 1.4.5 (б). Коэффициент усиления шума определяется как $K = R_0/R_n$. Путем изменения сопротивления R_n при неизменных характеристиках источника шума $\xi(t)$ достигается регулировка уровня мощности шумового сигнала $K\xi(t)$ системы (1.4.3). Значение сопротивления R_n определяется как $R_n = 150 + 50\beta$ Ом, где β - число на лимбе, отвечающем за сопротивление R_n (правый лимб на передней панели электронной модели осциллятора Крамерса). Значение управляющего параметра a определяется числом на левом лимбе λ на передней панели электронной модели осциллятора Крамерса согласно формуле: $a = -7.5 + 0.015\lambda$. Экспериментальная установка требует подключения к двухполярному источнику питания $+/-15$ Вольт. Источник питания подключается к входам ”-15 V” , ”+15V” и ”GND” (земля) на задней панели экспериментальной установки. Экспериментальная установка, включащая в себя электронную модель осциллятора Крамерса, генератор шума и блок питания, представлена на рисунке 1.4.6.

Рисунок 1.4.6: Внешний вид экспериментальной установки в сборе

Визуализация и обработка экспериментальных данных осуществляется с помощью программы, созданной на базе программного комплекса LabView. Интерфейс программы позволяет наблюдать в реальном времени колебания динамической переменной экспериментальной установки $x(t)$, а также спектр мощности колебаний $x(t)$ в линейном и логарифмическом масштабе.

1.4.3 Порядок выполнения работы

1. Провести анализ устойчивости состояний равновесия в фазовом пространстве осциллятора Крамерса $\dot{x} = ax - x^3$. Какой бифуркации отвечает значение $a_* = 0$? Эволюцию состояний равновесия при $a \in [-1 : 1]$ изобразить на фазо-параметрической плоскости (a,x).

2. Провести анализ динамики экспериментальной установки при отсутствии внешнего шума и периодического синусоидального сигнала. Эволюцию положения аттракторов системы при вариации параметра a изобразить на плоскости (a,x). Сравнить полученные результаты с диаграммой, полученной в предыдущем задании.

3. Провести экспериментальное наблюдение стохастического резонанса при различных значениях параметра a. Для этого выставить значение параметра a, отвечающее режиму бистабильности. После этого выставить максимальное значение на лимбе, отвечающем за сопротивление R_n, $\beta = 1000$, Затем включить генератор периодического сигнала и генератор шума. Установить амплитуду периодического сигнала немного меньшей порогового значения, при котором наблюдается переход к переключениям между двумя состояниями равновесия. Проанализировать

изменения динамики, наблюдаемые с уменьшением сопротивления R_n (уменьшение числа на правом лимбе). Особенно тщательно требуется проанализировать диапазон $\beta \in [0 : 200]$. Показать временные реализации $x(t)$ и их спектр мощности в трех характерных режимах:

a) Область малых K (большое сопротивление R_n). В этой области шум не влияет принципиальным образом на динамику системы. Наблюдаются редкие переключения между двумя режимами вынужденных колебаний.

b) Оптимальное значение K, при котором наблюдается максимальный отклик на частоте внешнего воздействия. Данному значению параметра K отвечают максимально регулярные переключения между двумя режимами, высота гармоники на частоте внешнего воздействия в спектре колебаний $x(t)$ максимальна.

c) Область больших K (малое сопротивление R_n). В данной области уровень шума настолько высок, что становится невозможным выделить в временных реализациях переключения между двумя колебательными режимами. С ростом K высота гармоники на частоте внешнего воздействия уменьшается.
Рекомендуемые значения параметра a: $a = 1$, $a = 3$, $a = 7.5$. Рекомендуемая частота периодического воздействия $F_{ext} = 300$ Гц.

4. При выбранном значении a, отвечающему режиму бистабильности, настроить установку таким образом, чтобы наблюдался эффект стохастического резонанса (см. предыдущее задание). Построить зависимость соотношения "сигнал-шум" на частоте внешнего воздействия от коэффициента усиления K. Соотношение "сигнал-шум" рассчитывать путем наблюдения эволюции спектра мощности колебаний $x(t)$ согласно формуле (см. обозначения на пояснительном рисунке 1.4.7): SNR $= \frac{S_{max} - S_{min}}{S_{min}}$.

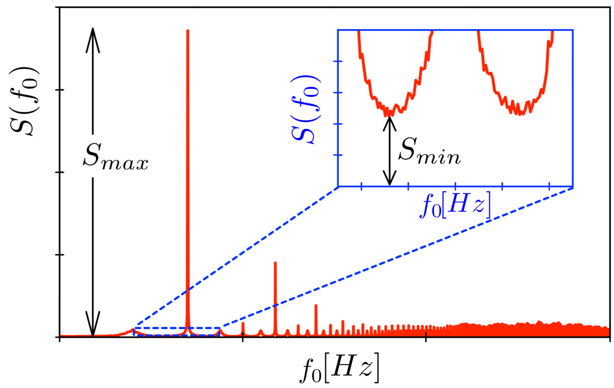


Рисунок 1.4.7: Пояснение к методу расчета соотношения "сигнал-шум" по спектру мощности.

2 Методы обработки сигналов в цифровых системах

2.1 Кодирование и декодирование в цифровых сетях

Цель работы: Исследовать устойчивость методов физического кодирования к шуму и частотным ограничениям канала связи

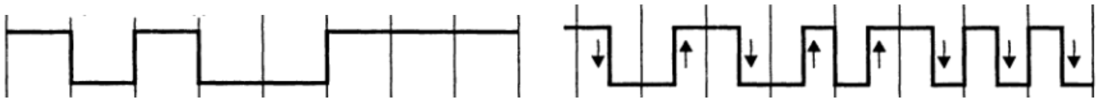
2.1.1 Краткие теоретические сведения

2.1.1.1 Физическое кодирование

Современные системы связи делятся на *аналоговые* и *цифровые*. В последнем случае информация передается посредством комбинирования *символов* из конечного набора, называемого *алфавитом*. Число символов в таком алфавите называется его *мощностью*. Примеры алфавитов:

- двоичный – набор из знаков $\{0, 1\}$, используемый для отображения информации в компьютерной технике;
- десятичный – набор из десяти арабских цифр $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, используемый для отображения числовой информации;
- латинский – набор из символов латинского алфавита $a - Z$, символа пробела и знаков препинания, используемых в письме;
- нотный – набор из нот и вспомогательных символов, используемых для отображения музыки.

Поскольку символы любого конечного алфавита могут быть пронумерованы и соответственно идентифицированы своими номерами, между любыми алфавитами одинаковой мощности существует взаимно однозначное соответствие. Поэтому, все алфавиты одинаковой мощности изоморфны друг другу и могут рассматриваться как один алфавит.



(а) Потенциальный код NRZ (б) Импульсный манчестерский код

Рисунок 2.1.1: Виды некоторых кодовых символов, используемых в цифровых сетях; в обоих случаях для кодирования используется двоичная последовательность “01011000”

Пусть $S = \{s_1, ..., s_M\}$ – алфавит мощностью M. Будем называть *сообщением* длительности N любую последовательность идущих друг за другом N символов алфавита: $s_{i_1}s_{i_2}...s_{i_N}$. Для передачи сообщения на расстояние его символы необходимо преобразовать в физические *сигналы*, как правило электромагнитной природы, например в короткие импульсы напряжения или тока определенной формы. Такое преобразование называется *физическим кодированием.* Таким образом, под физическим кодированием алфавита мощности M (M-ичное кодирование) мы будем понимать отображение:

$$\begin{aligned} s_i &\rightarrow x_i(t) \\ i &= 1, ..., M \end{aligned}$$

где $x_i(t)$ – функция времени, заданная на отрезке $[0 : T_i]$ (T_i – длительность сигнала x_i), соответствующая символу s_i; в дальнейшем будем полагать длительности всех сигналов одинаковыми[1]: $T_i = T$ для всех i. На рисунке изображены импульсные сигналы для двух видов двоичного кодирования: потенциального кода NRZ (рис. 2.1.1a) и импульсного Манчестерского кода (рис. 2.1.1a). Форма сигнала в обоих случаях прямоугольная, однако, для потенциального кода отличие между передаваемыми символами заключается в величине (потенциале) сигнала – высокий уровень соответствует символу “0”, а низкий — “1”, а для импульсного символы различаются переходами между потенциалами – с низкого на высокий соответствует символу “0”, а с высокого на низкий — “1”.

После операции физического кодирования на стороне передатчика формируется временная реализация сигнала в виде идущих друг за другом сигнальных импульсов:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{N} x_{i_k}(t - (k-1)T)$$

[1]Существуют системы кодирования и с неодинаковыми длительностями символов, например азбука Морзе

При попадании в приемник поступивший сигнал разделяется на составляющие импульсы, после чего для каждого из них находится соответствующий ему символ. То есть решается задача, обратная физическому кодированию – *декодирование* сигнала:

$$\begin{aligned} y_i(t) &\rightarrow s_i(t) \\ i &= 1, ..., M \end{aligned}$$

где $y_i(t)$ — импульсные сигналы, поступившие в приемник. Форма этих сигналов может отличаться от исходных (опорных) сигналов $x_i(t)$ за счет трансформации, происходящей на пути от передатчика к приемнику, которые называются *помехами в канале связи.*

2.1.1.2 Помехи при распространении сигналов по каналу связи

Основные источники помех в канале связи:

1. шум — неконтролируемый и непредсказуемый сигнал сложной формы от внешних источников;
2. частотные искажения – изменение формы сигнала за счет неравномерности АЧХ и ФЧХ канала связи и выхода спектра сигнала за пределы рабочей полосы канала связи;
3. межсимвольная интерференция – наложение сигнальных импульсов друг на друга вследствие их "расплывания", происходящего из-за дисперсии в канале связи;
4. нарушение когерентности приема — неконтроллируемые и изменяющиеся задержки времени распространения сигнала по каналу связи;
5. нелинейные искажения — изменение формы сигнала за счет нелинейного взаимодействия с окружающей средой;
6. многолучевые замирания — интерференционный эффект при сложении копий сигнала, прошедших разными путями.

Приведенный список не исчерпывает всех возможных помех. В данной работе мы будем рассматривать только помехи (1) и (2).

2.1.1.3 Помехи, вызванные внешним шумом

В любых системах, работающих при температурах выше абсолютного нуля, существует шум — некоторый сигнал сложной формой — $\xi(t)$. В линейных каналах связи шум не смешивается с сигналом, а просто добавляется к нему:

$$y(t) = x(t) + \xi(t)$$

где $x(t)$ – исходный сигнал, $y(t)$ – сигнал на выходе канала. Такой шум называется *аддитивным*.

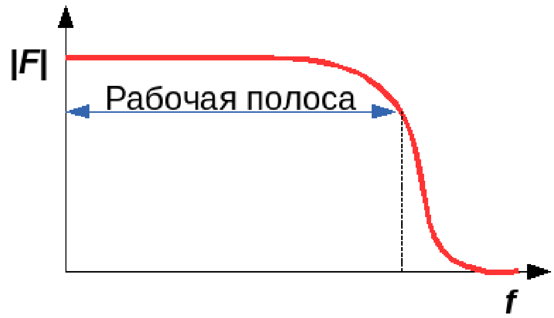
Шумовой сигнал характеризуется рядом параметров, наиболее важными из которых являются:

- Средняя мощность (или интенсивность), под которой понимают обычно дисперсию $D_\xi = \overline{\xi^2(t)}$ (верхняя черта означает усреднение по времени)[2].
- Спектр мощности
$$W_\xi(f) = \frac{\left\langle |F_\xi(f)|^2 \right\rangle}{\Delta t}$$
где $W_\xi(f)$ – функция спектральной плотности мощности (производная от мощности по частоте), F_ξ – функция спектральной плотности сигнала (интегральное преобразование Фурье от сигнала), Δt – время действия сигнала; угловые скобки означают усреднение по ансамблю реализаций. W_ξ связана с дисперсией соотношением: $D_\xi = \int_{-\infty}^{\infty} W_\xi(f) df$. Шумы, создаваемые от множества независимых источников разной природы, обычно являются всечастотными, то есть их спектр на разных частотах примерно одинаков. Шум, спектр мощности которого одинаков для всех частот, называется *белым шумом*.
- Плотность вероятности (распределение) случайного сигнала — функция $\rho(\xi)$, которая характеризует его статистические свойства. Согласно теории вероятности, шумы создаваемые от множества независимых источников, характеризуются гауссовой плотностью вероятности:
$$\rho(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma_\xi}\right)$$
где $\sigma_\xi = \sqrt{D_\xi}$ – средне-квадратичное отклонение (интенсивность).

Следуя большинству учебников и руководств, будем считать канал связи каналом с *аддитивным белым гауссовым шумом* (АБГШ).

[2] Мы полагаем, что шумовой сигнал не имеет постоянной составляющей

(а)



(б)

Рисунок 2.1.2: Четырехполюсник (а) и его АЧХ (б)

2.1.1.4 Помехи, вызванные частотными искажениями

Канал связи можно рассматривать как четырехполюсник — линейную систему, имеющую вход, на который поступает сигнал от передатчика, и выход, соединенный с приемником (см. рис. 2.1.2а). Частотные свойства четырехполюсника характеризуют при помощи кэффициента передачи $K(f)$ – отношения спектров выходного и входного сигналов:

$$K(f) = \frac{F_y(f)}{F_x(f)} \tag{2.1.1}$$

Модуль коэффициента передачи $|K(f)|$ называется *амплитудно-частотной характеристикой* (АЧХ), а его фаза $\arg(K(f))$ – *фазо-частотной характеристикой* (ФЧХ).

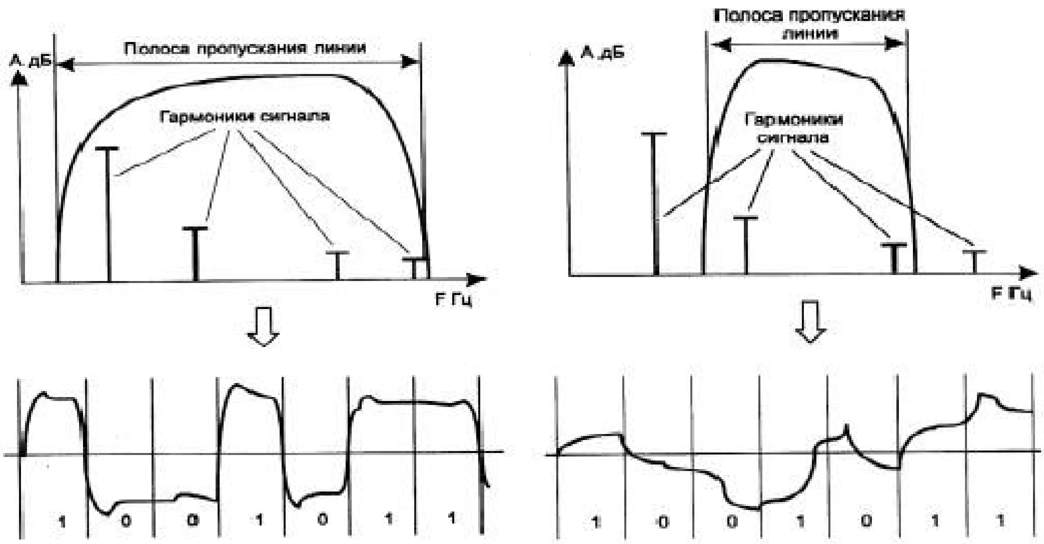
Рассмотрим, какими свойствами должна обладать функция $K(f)$, чтобы прошедший через четырехполюсник сигнал сохранил свою форму. Очевидно, что сохранение формы сигнала $x(t)$ означает, что допустимыми преобразованиями в канале связи будут лишь: (а) изменение амплитуды сигнала и (б) сдвиг сигнала по временной оси (задержка по времени):

$$y(t) = Ax(t - t_0)$$

где A и Δt – некоторые константы. Подставляя данное соотношение в (2.1.1), получим коэффициент передачи идеального по частотным свойствам канала связи:

$$K_{\text{ид}} = A \exp(-jft_0) \tag{2.1.2}$$

Таким образом, идеальный канал связи должен иметь постоянную АЧХ и линейно убывающую ФЧХ. Однако, на практике, физически реализуемые четырехполюсники могут иметь коэффициент передачи, близкий к (2.1.2), толь-



(а) Основной спектр сигнала в пределах рабочей полосы канала (б) Основная гармоника спектра выходит за пределы рабочей полосы канала

Рисунок 2.1.3: Искажение формы сигнала при выходе спектра за пределы рабочей полосы канала

ко в ограниченном диапазоне частот $\Delta f_{\text{к}}$, подобно тому, как это изображено на рис.2.1.2б. Этот диапазон частот называется *рабочей полосой* канала связи. Если частотные характеристики канала отличаются от (2.1.2), и/или спектр сигнала выходит за пределы рабочей полосы канала связи, то сигнал прошедший через четырехполюсник будет иметь форму, отличную от формы входного сигнала[3]. При этом, трансформация сигнала будет тем сильнее, чем большая часть спектра сигнала выйдет за пределы рабочей полосы канала. Примеры таких ситуаций показаны на рисунке 2.1.3.

2.1.1.5 Пропускная способность канала связи

Различают две скорости работы цифровой сети:

- физическая – число символов, переданных в единицу времени (измеряется в *бодах*):
$$V_{\text{ф}} = \frac{N_s}{\Delta t}$$
где N_s – число переданных символов, Δt – затраченное время. Очевидно, что $V_{\text{ф}}$ обратна времени обработки одного символа: $V_{\text{ф}} = {}^{1}/_{T_s}$.

[3]За исключением случая гармонического сигнала

- информационная – количество информации, переданное в единицу времени :
$$V_{\text{и}} = \frac{I}{\Delta t}$$
где I – количество информации в битах, Δt – затрачиваемое время. $V_{\text{и}}$ измеряется в битах/секунду.

Обе скорости связаны между собой очевидным соотношением: $V_{\text{и}} = V_{\text{ф}} I_s$, где I_s – количество информации, передаваемое в среднем с каждым символом. Если все символы алфавита содержат одинаковое количество информации, равное, как известно, $\log_2 M$, то:

$$V_{\text{и}} = \frac{\log_2 M}{T_s} \tag{2.1.3}$$

При наиболее популярной в настоящее время системе кодирования – двоичной ($M = 2$), обе скорости равны друг другу: $V_{\text{и}} = V_{\text{ф}}$.

Максимально допустимая в рамках заданного способа кодирования и используемого канала связи информационная скорость называется пропускной способностью системы связи. Разработчики стараются максимизировать этот параметр. Исходя из формулы (2.1.3) для этого существует два пути: (а) уменьшение длительности импульсов $T_s \to 0$ (т.е. увеличение $V_{\text{ф}}$) и (б) увеличение мощности алфавита $M \to \infty$ (т.е. увеличение I_s). Рассмотри, какие ограничения имеются на пути этих подходов.

Уменьшение длительности сигнальных имульсов влечет за собой увеличение ширины их спектра, поскольку ширина спектра имульса Δf_s и его длительность T_s связаны хорошо известным соотношением: $\Delta f_s T_s = C_s$, где C_s – безразмерная константа, зависящая от формы сигнала; в большинстве случаев C_s близка к единице. Учитывая, что ширина спектра сигнала должна “умещаться” в рабочую полосу канала связи, получаем, что максимальное значение $V_{\text{ф}}$ определяется шириной рабочей полосы канала связи:

$$V_{\text{ф}}^{(max)} = C \Delta f_{\text{к}} \tag{2.1.4}$$

где C – константа, называемая *параметром эффективности* системы связи (измеряется в $\frac{\text{бит/с}}{\text{Гц}}$); его максимально возможное значение равно двум.

Увеличение мощности алфавита влечет за собой во-первых усложнение системы связи, а во-вторых — ухудшение распознования символов (декодирование) в присутствии шума. Последнее обстоятельство будет более подробно рассмотрено в последующих разделах.

Рисунок 2.1.4: Трансформация символа, переданного через канал связи

2.1.1.6 Распознавание сигнальных импульсов (декодирование)

Рассмотрим технологию распознавания символов M-ичного алфавита, переданных по каналу связи к приемнику. Пусть переданное сообщение состояло из единственного символа s_k, преобразованного системой кодирования в импульс $x_k(t)$. При проходе через канал связи импульс $x_k(t)$ преобразуется в импульс $y(t)$ той же длительности (см. рис. 2.1.4) Приемник, получив импульс $y(t)$ должен проанализировать его форму и распознать, какой именно из M символов был изначально передан. Каким образом принимается решение?

В каналах АБГШ для декодирования используется принцип *минимального расстояния* — принятым полагается тот опорный сигнал, расстояние (евклидово) которого до принятого сигнала $y(t)$ минимально:

$$d(x_j, y) = \min_i \{d(x_i, y)\} \Rightarrow s_j$$

Здесь используется стандартное определение евклидово расстояния между функциями, заданными на интервале:

$$d(x, y) = \sqrt{\int_0^T (x(t) - y(t))^2 \, dt} \tag{2.1.5}$$

Таким образом, для декодирования принятого сигнала приемник должен сравнить расстояние между ним и всеми M опорными сигналами из алфавита, определить среди них наименьшее и декларировать соответствующий ему опорный сигнал, как принятый.

Рассмотрим квадрат расстояния между принятым импульсом и некоторым опорным:

$$d^2(x_k, y) = \int_0^T \left[x_k^2(t) + y^2(t) - 2x_k(t)y(t)\right] dt = E_k + E_y - 2Z_{x_k y} \tag{2.1.6}$$

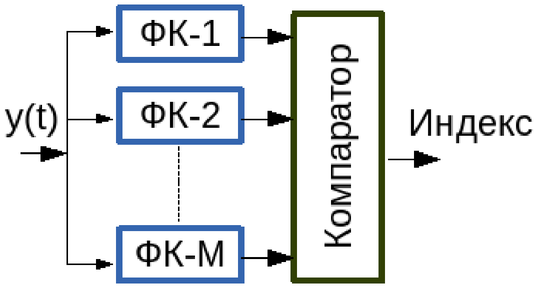


Рисунок 2.1.5: Декодер, работающий по принципу максимума корреляции

где $E_k = \int_0^T x_k^2(t)dt$ – энергия опорного сигнала, $E_y = \int_0^T y^2(t)dt$ – энергия принятого сигнала,

$$Z_{x_k y} = \int_0^T x_k(t)y(t)dt \tag{2.1.7}$$

– корреляция между опорным сигналом и принятым. Поскольку значение E_y общее для всех опорных сигналов, оно не влияет на распознование. Тогда, принцип минимума расстояния можно переформулировать следующим образом: принятым полагается сигнал s_j, для которого величина $Z_{x_j y} - 0.5E_j$ максимальна:

$$Z_{x_j y} - 0.5E_j = \max_i \{Z_{x_i y} - 0.5E_i\} \Rightarrow s_j \tag{2.1.8}$$

Если все кодовые символы имеют одинаковые энергии: $E_i = E$ $(i = 1, ..., M)$, то правило (2.1.8) переходит в *принцип максимума корреляции* — принятым полагается символ, чья корреляция с поступившим сигналом максимальна:

$$Z_{x_j y} = \max_i \{Z_{x_i y}\} \Rightarrow s_j \tag{2.1.9}$$

Таким образом для декодирования символов с одинаковой энергией можно использовать блок из M параллельно работающих *фильтров-корреляторов*, каждый из которых выполняет подсчет корреляции принятого импульса со своим опорным сигналом (рис. 2.1.5). Значения с каждого из корреляторов сравниваются компаратором, который определяет максимальное из них и отображает номер коррелятора, с которого поступил наибольший сигнал. Этот номер и является номером принятого символа.

2.1.1.7 Передача двоичных данных по АБГШ каналу

Оценим достоверность декодирования при двоичной передачи данных ($M = 2$) по каналу связи с АБГШ. Пусть алфавит состоит из двух символов, которые условно назовем “нулем” (s_0) и “единицей” (s_1). Каждый из них на стороне передатчика отображается в импульсный сигнал:

$$\begin{aligned} s_0 &\rightarrow x_0(t) \\ s_1 &\rightarrow x_1(t) \end{aligned}$$

одинаковой энергии E и длительности T. При распространении по АБГШ каналу к сигналам добавляется шум $\xi(t)$ со спектральной плотностью мощности W_0, в результате чего формируется входной сигнал приемника:

$$y(t) = x_i(t) + \xi(t),\ i = 0, 1 \tag{2.1.10}$$

Для декодирования $y(t)$ воспользуемся принципом максимума корреляции. Для этого определим разность корреляций:

$$Z = Z_0 - Z_1$$

где $Z_0 = Z_{x_0y}$, $Z_1 = Z_{x_1y}$. Согласно описанного выше метода и формулы (2.1.8), значение принятого символа определяется знаком Z:

$$\begin{cases} Z > 0 & \Rightarrow s_0 \\ Z < 0 & \Rightarrow s_1 \end{cases}$$

Положим для определенности, что был передан символ s_0 и оценим вероятность ошибки в его распознавании. Ошибка произойдет в том случае, когда полученный сигнал $y(t) = x_0(t)+\xi(t)$ будет распознан приемником, как s_1. Это произойдет, как было определено выше, если $Z < 0$. Определим P_{01} как вероятность события $Z < 0$, произошедшего при условии отправления символа s_0:

$$P_{01} = \Pr\left(Z < 0 \,|s_0\right)$$

и введем функцию плотности вероятности этой ошибки:

$$\rho_{01} = \frac{dP_{01}}{dZ}$$

Согласно теории вероятностей линейное преобразование от гауссова шума является в свою очередь гауссовым шумом. Поэтому плотность вероятности ρ_{01} должна подчиняться гауссовому закону:

$$\rho_{01} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Z} \exp\left(-\frac{(Z-\overline{Z})^2}{2\sigma_Z}\right) \tag{2.1.11}$$

Для того, чтобы получить вероятность ошибки, необходимо проинтегрировать (2.1.11) по диапазону $Z < 0$:

$$P_{01} = \int_{-\infty}^{0} \rho_{01} dZ = Q\left(\frac{\overline{Z}}{\sigma_Z}\right) \tag{2.1.12}$$

где $Q(x)$ — известная в математике *дополнительная функция ошибок:*

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$

Рассчитаем неизвестные пока величины $\overline{Z}$ и σ_Z:

- Расчет среднего от разности корреляций:

$$\begin{aligned}\overline{Z_0 - Z_1} &= \int_0^T \overline{y(t)}\,(x_0(t) - x_1(t))\,dt = \int_0^T \left(x_0(t) + \overline{\xi(t)}\right)(x_0(t) - x_1(t))\,dt = \\ &= \int_0^T x_0(t)\,(x_0(t) - x_1(t))\,dt + \int_0^T \overline{\xi(t)}\,(x_0(t) - x_1(t))\,dt\end{aligned}$$

  Учитывая, что шум полагается с нулевым средним ($\overline{\xi(t)} = 0$), последний интеграл равен нулю. С учетом этого, получаем: $\overline{Z_0 - Z_1} = E - Z_{01}$. Или, учитывая формулу (2.1.6), запишем $\overline{Z}$ в симметричной форме:

$$\overline{Z} = \frac{d^2(x_0, x_1)}{2} \tag{2.1.13}$$

- Расчет средне-квадратичного отклонения разности корреляций:

$$\sigma_Z = \sqrt{\overline{Z^2} - \overline{Z}^2} \tag{2.1.14}$$

  Величина $\overline{Z}$, входящая в (2.1.14), уже найдена нами ранее (см. 2.1.13). Определим $\overline{Z^2}$:

$$\begin{aligned}\overline{(Z_0 - Z_1)^2} &= \overline{\left(\int_0^T (x_0 + \xi)\,(x_0 - x_1)\,dt\right)^2} = \\ &= \overline{\left(\int_0^T x_0\,(x_0 - x_1)\,dt + \int_0^T \xi\,(x_0 - x_1)\,dt\right)^2} = \\ &= \left(\int_0^T x_0\,(x_0 - x_1)\,dt\right)^2 + \overline{\left(\int_0^T \xi\,(x_0 - x_1)\,dt\right)^2} + \\ &+ 2\int_0^T x_0\,(x_0 - x_1)\,dt \int_0^T \overline{\xi}\,(x_0 - x_1)\,dt\end{aligned}$$

  Первый из трех интегралов очевидно как раз равен $\overline{Z}^2$, последний – нулю. Таким образом, вычитая $\overline{Z}^2$ и переходя от квадрата интеграла к двойному интегралу, получаем:

$$\sigma_Z^2 = \overline{\left(\int_0^T \xi\,(x_0 - x_1)\,dt\right)^2} = \iint_0^T \overline{\xi(t)\xi(t')}\,(x_0(t) - x_1(t))\left(x_0(t') - x_1(t')\right) dt dt'$$

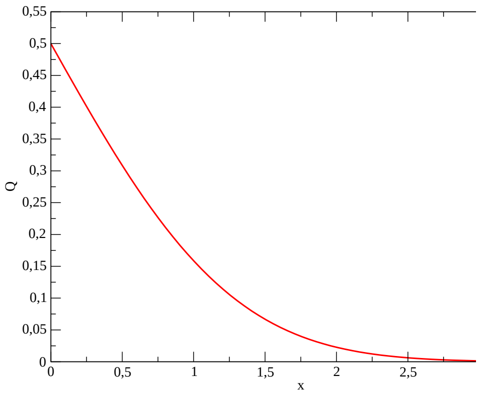


Рисунок 2.1.6: Вид функции $Q(x)$

Учтем, что для белого шума $\overline{\xi(t)\xi(t')} = W_0\delta(t - t')$, где W_0 – величина спектральной плотности мощности белого шума, $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака. Отсюда получаем:

$$\sigma_Z = \sqrt{W_0 \int_0^T (x_0(t) - x_1(t))^2 \, dt} = \sqrt{W_0} d(x_0, x_1)$$

Подставим найденные значения в формулу для вероятности ошибки распознавания (2.1.12):

$$P_{01} = Q\left(\frac{d(x_0, x_1)}{2\sqrt{W_0}}\right)$$

Очевидно, что вероятность ошибочного распознавания единичного символа s_1 будет такой же: $P_{10} = P_{01}$. Поэтому найденная формула дает вероятность ошибки распознавания двоичного символа в канале с АБГШ шумом:

$$P_{\text{ош}} = Q\left(\frac{d(x_0, x_1)}{2\sqrt{W_0}}\right) \tag{2.1.15}$$

2.1.1.8 Анализ полученных закономерностей

Рассмотрим полученную зависимость (2.1.15). Вид функции $Q(x)$ приведен на рис.2.1.6. Она монотонно уменьшается от 0.5 при $x = 0$ до нуля при $x \to \infty$, причем, при $x > 3$ уменьшение происходит очень быстро. Соответственно рост аргумента функции сопровождается уменьшением вероятности ошибок распознавания $P_{\text{ош}}$. Уменьшение $P_{\text{ош}}$ является задачей разработчиков технологии цифровой сети. Как видно из формулы, эта задача решается (а) уменьшением интенсивности шума в канале связи и (б) увеличением расстояния между кодирующими импульсами. Если первая возможность определяется свойствами канала связи, то вторая зависит от способа кодирования.

Рассмотрим, при каком способе можно получить максимальное расстояние между кодовыми сигналами при ограничениях, накладываемых на энергию передаваемых импульсов: $E_0 = E_1 = E$. Для этого распишем выражение для квадрата расстояния:

$$\begin{aligned} d^2(x_0, x_1) &= \int_0^T (x_0 - x_1)^2\, dt = \int_0^T x_0^2 dt + \int_0^T x_1^2 dt - 2\int_0^T x_0 x_1 dt = \\ &= 2E - 2Z_{01} = 2E\,(1 - z_{01}) \end{aligned}$$

где

$$z_{01} = \frac{Z_{01}}{E}$$

– нормированный на энергию сигналов коэффициент корреляции между ними; $z_{01} \in [-1 : 1]$. Поскольку величина энергии фиксирована, единственный способ увеличить расстояние – уменьшить значение коэффициента корреляции. При этом, наименьшее значение $z_{01} = -1$ достигается для случая противоположных кодовых символах: $x_0 = -x_1$. Метод двоичного кодирования с одинаковыми по форме, но противоположными по знаку (инверсными по фазе) импульсами называется *бинарной фазовой манипуляцией* (БФМ). БФМ обеспечивает при заданной энергии символов и заданной интенсивности шума наименьшую вероятность ошибок декодирования:

$$P_{\text{ош}}^{min} = Q\left(\sqrt{\frac{E}{W_0}}\right)$$

Другой часто используемый способ кодирование – некоррелированный, когда кодирующие символы некореллированы друг с другом: $z_{01} = 0$. В этом случае вероятность ошибки декодирования становится несколько больше:

$$P_{\text{ош}}^{\text{некорр.}} = Q\left(\sqrt{\frac{E}{2W_0}}\right)$$

Данный метод называется *ортогональным кодированием.*

2.1.2 Экспериментальная часть

В ходе компьютерного эксперимента предлагается измерить вероятность ошибки распознавания символов двоичного кодирования после прохождения АБГШ канала с ограниченной рабочей полосой. Для этого используется компьютерная программа на LabView. Она позволяет задать двоичный цифровой сигнал произвольной длины; кодировать его с использованием разных методов

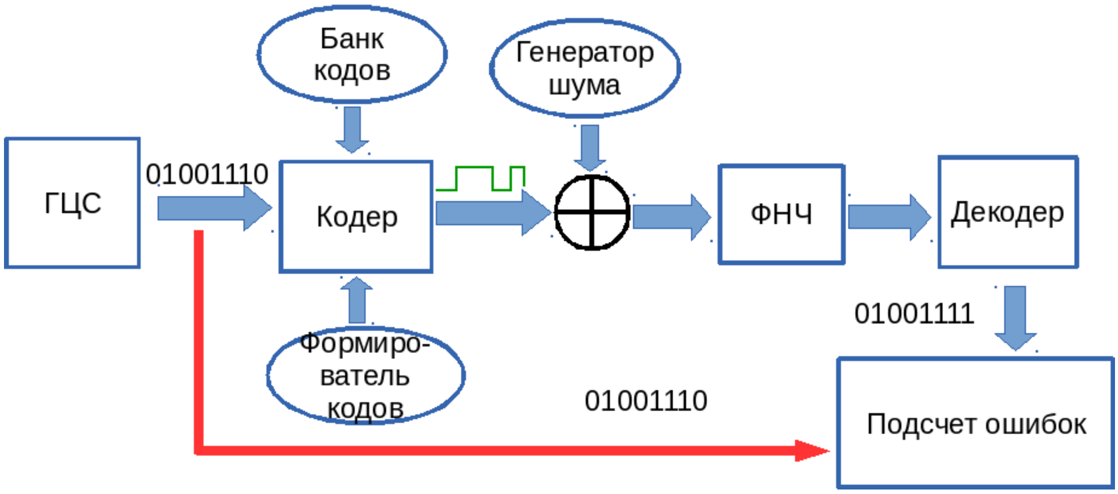


Рисунок 2.1.7: Функциональная схема

кодирования, включая использование собственного двоичного кода; добавить к сигналу гауссов белый шум с заданной спектральной плотностью мощности; пропустить сигнал через цифровой фильтр НЧ с заданной частотой среза; декодировать сигнал и измерить вероятность ошибки.

2.1.2.1 Описание используемой программы

Программа моделирует следующую последовательность операций цифровой сети (см. рис. 2.1.7):

- генерирует случайну цифровую двоичную последовательность выбранной длины (N) – блок “Генератор цифрового сигнала” (ГЦС);
- преобразует ее в сигнал, используя один из нескольких базовых методов физического кодирования — “Банк кодов” , либо используя собственный метод кодирования — “Формирователь кодов”;
- моделирует прохождение полученного сигнала по каналу АБГШ путем добавления к сигналу гауссова шума заданной спектральной плотености мощности (W) от блока “Генератор шума”;
- моделирует трансформацию формы сигнала при прохождении по каналу связи с ограниченной рабочей полосой посредством передачи сигнала через цифровой фильтр нижних частот с перестраиваемой частотой среза (f_h) — блок “ФНЧ”;
- декодирует трансформированный сигнал в последовательность двоичных символов по методу максимума корреляции — блок “Декодер”;

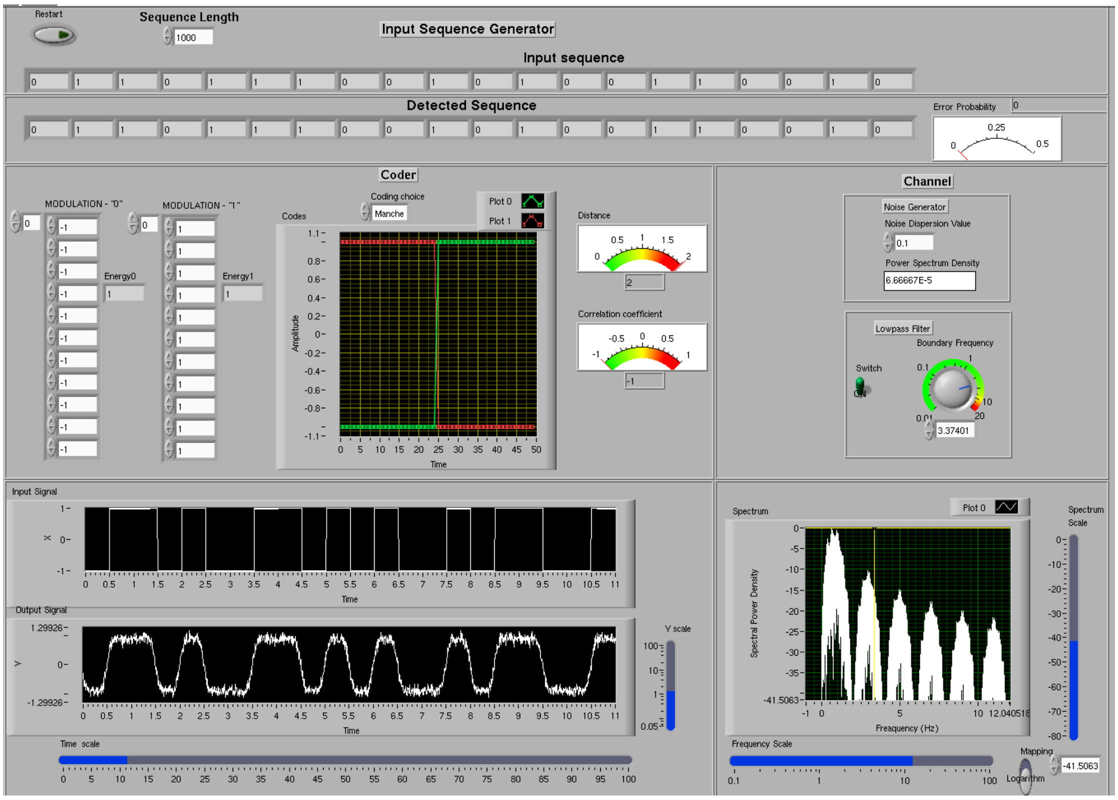


Рисунок 2.1.8: Передняя панель рабочей программы

- сопоставляет полученную последовательность с исходной и определяет вероятность ошибки: $P_{\text{ош}} = \frac{N_{\text{ош}}}{N}$ ($N_{\text{ош}}$ – число ошибочно распознанных символов)— блок “Подсчет ошибок”

В ходе работы программы имеются возможнсть визуально отслеживать исходный и прошедший через канал сигналы, спектр исходного сигнала, форму кодирующих импульсов.

2.1.2.2 Передняя панель установки и органы управления

На рисунке 2.1.8 изображена передняя панель программы. Она состоит из следующих блоков:

- Блок входной последовательности (Input Sequence Generator), управляющий созданием сообщения
  - контроллер, задающий длину последовательности N (Sequence Length) – определяет число символов в последовательности;

  - цифровой индикатор, отображающий сгенерированную блоком последовательностей нулей и единиц (Input Sequence);
  - кнопка Restart, инициирующая генерацию новой последовательности.

- Блок выходной последовательности (Output Sequence), отображающий распознанную последовательность и вероятность ошибки:
  - цифровой индикатор, отображающий выходную последовательность из нулей и единиц (Output Sequence);
  - цифровой индикатор вероятности ошибок распознавания (Error Probability).

- Блок кодирования (Coder):
  - Селектор двоичных кодов (Coding Choice), позводляющий выбрать систему кодирования, либо создать собственный код (пункт “Custom” селектора);
  - массив переключателей, позволяющих задавать форму кодового имульса, при создании собственного кода:
    * для кодирования символа “0” — Modulation - “0”;
    * для кодирования символа “1” — Modulation - “1”;
  - Осциллограф, отображающий форму кодовых импульсов (Codes);
  - Индикаторы, отображающие значения:
    * энергий кодовых символов (Energy0, Energy1);
    * расстояния между символами (Distance);
    * коэффициент корреляции между символами (Correlation Coefficient)

- Блок канала (Channel):
  - Генератор шума (Noise Generator):
    * контроллер, задающий мощность шума (Noise Dispertion Value);
    * индикатор, отображающий соответствующее заданной мощности значение спектральной плотности мощности W (Power Spectrum Density)
  - Фильтр нижних частот (Lowpass Filter):
    * контроллер выбора частоты среза f_h (Boundary Freaquency);
    * переключатель для включения/отключения фильтрации (Switch)

- Блок сигналов:
  - осциллограф, отображающий временную реализацию входного сигнала (Input Signal);
  - осциллограф, отображающий временную реализацию выходного сигнала (Output Signal);
  - органы управления, задающие масштабирование по осям осциллографов
- Блок спектров:
  - анализатор спектра входного сигнала (Spectrum); курсор анализатора связан с ФНЧ и отображает частоту среза фильтра f_h;
  - органы управления, задающие масштабирование по осям анализатора;
  - Переключатель Mapping, задающий формат представления спектра: Линейный (Linear) и Логарифмический (Logarithm)

2.1.2.3 Порядок выполнения работы

1. Измерение устойчивости выбранного способа кодирования к шуму:
   a) выбрать один из видов кодирования;
   b) задать длину цифровой последовательности (для большей точности длина должна составлять несколько тысяч символов);
   c) меняя величину интенсивности шума, снять зависимость вероятности ошибок декодирования от спектральной плотности мощности шума;
   d) рассчитать теоретическую зависимость $P_{\text{ош}}(W_0)$ и сравнить ее с измеренной в п. (c).
2. Измерение устойчивости выбранного способа кодирования к ограничению рабочей полосы канала:
   a) выбрать один из видов кодирования;
   b) задать длину цифровой последовательности (для большей точности длина должна составлять несколько тысяч символов);
   c) меняя частоту среза фильтра f_h, снять зависимость вероятности ошибок декодирования от f_h;
   d) сопоставить полученную зависимость со спектром сигнала.

3. Формирование собственного двоичного кода:
   a) используя *Блок кодирования* создать форму кодовых импульсов для символов “0” и “1”;
   b) провести измерения, аналогичные п. 1 и 2 для собственного кода и сопоставить его с существующими аналогами.

2.1.3 Содержание отчета по работе

1. Краткая теория
2. Описание выбранных способов кодирования с иллюстрациями временных реализаций и спектров.
3. Описание проведенных экспериментов и расчетов с указанием всех используемых значений параметров и характеристик.
4. Графики всех построенных зависимостей; теоретические и экспериментальные зависимости приводятся на одном графике.
5. Выводы, содержащие анализ полученных экспериментальных результатов, с учетом имеющихся теоретических зависимостей.

2.2 Распознавание радиосигналов на фоне шума

Цель работы: Исследовать работу согласованного фильтра для выделения импульсного сигнала из шума

2.2.1 Краткие теоретические сведения

2.2.1.1 Введение

Одной из проблем, которыми занимается современнная радиотехника, является выделение полезного сигнала из смеси сигнала и шума. Такая задача возникает в системах аналоговой и цифровой радиосвязи, в радиолокации и системах радиоэлектронной борьбы, в системах спутниковой навигации. Аналогичные проблемы проявляются в применении радиофизики к задачам диагностики в биологии и медицине, радиоэлектронной разведке в геофизике, радиоастрономии и проч. Классический подход к решению данной задачи заключается в частотно-селективная фильтрации. Она применима в тех случаях, когда спектры полезного сигнала и помехи разнесены по частотам, что позволяет "подавить" шум, не затрагивая сам сигнал. К сожалению, в большинстве случаев спектры сигнала и шума перекрываются, что делает применение частотных фильтров бесполезным или мало эффективным. В этом случае на помощь приходит фильтр, согласованный по форме с сигналом, или *согласованный фильтр* (СФ).

2.2.1.2 Шум и его характеристики

В любых системах, работающих при температурах выше абсолютного нуля, существует шум — неконтролируемый сигнал сложной формы. В линейных системах шум не смешивается с сигналом, а просто добавляется к нему:

$$s(t) = x(t) + \xi(t)$$

где $x(t)$ – полезный сигнал, $\xi(t)$ – шум, $s(t)$ – наблюдаемый сигнал. Такой шум называется *аддитивным.*

Шумовой сигнал характеризуется рядом параметров, наиболее важными из которых являются:

- Средняя мощность (или интенсивность), под которой понимают обычно дисперсию $D_\xi = \overline{\xi^2(t)}$ (верхняя черта означает усреднение по времени)[4].

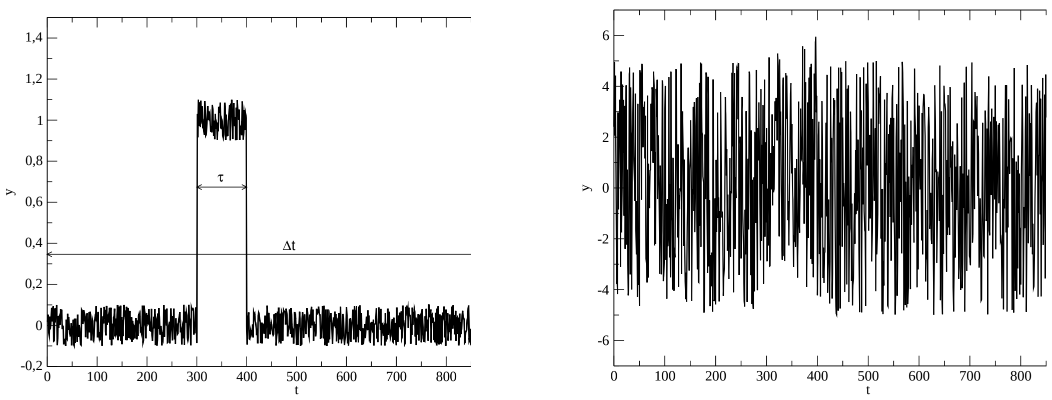
[4]Мы полагаем, что шумовой сигнал не имеет постоянной составляющей

- Спектр мощности
$$W_\xi(f) = \frac{\left\langle |F_\xi(f)|^2 \right\rangle}{\Delta t}$$
где $W_\xi(f)$ – функция спектральной плотности мощности (производная от мощности по частоте), F_ξ – функция спектральной плотности сигнала (интегральное преобразование Фурье от сигнала), угловые скобки означают усреднение по ансамблю реализаций; Δt – время наблюдения. Величина W_ξ связана с дисперсией соотношением:
$$D_\xi = \int_{-\infty}^{\infty} W_\xi(f) df \tag{2.2.1}$$
Шумы, создаваемые от множества независимых источников разной природы, обычно являются всечастотными, то есть их спектр на разных частотах примерно одинаков. Шум, спектр мощности которого одинаков для всех частот: $W(f) = W_0$ — называется *белым шумом.*

- Плотность вероятности (распределение) случайного сигнала — функция $\rho(\xi)$, которая характеризует его статистические свойства. Согласно теории вероятности, шумы создаваемые от множества независимых источников, характеризуются гауссовой плотностью вероятности:
$$\rho(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma_\xi}\right)$$
где $\sigma_\xi = \sqrt{D_\xi}$ – средне-квадратичное отклонение. Шум с гауссовым распределением называется *нормальным* шумом. Помимо нормального шума существует много других вариантов случайных сигналов. Например, *равномерный* шум, у которого плотность вероятности постоянна внутри некоторого интервала значений:
$$\rho(\xi) = \begin{cases} \rho_0, & -\frac{\Delta\xi}{2} \le \xi \le \frac{\Delta\xi}{2} \\ 0, & \xi \notin \left[-\frac{\Delta\xi}{2} : \frac{\Delta\xi}{2}\right] \end{cases}$$
где $\rho_0 = {}^1\!/_{\Delta\xi}$ – константа.

2.2.1.3 Задача распознавания сигнала на фоне шума

Пусть на вход некоторой радиоэлектронной системы приходит полезный сигнал, заданной формы: $x(t)$. Будем полагать, что длительность сигнала τ много меньше по сравнению со временем наблюдения за системой Δt. Такие сигналы будем называть импульсными сигналами или *импульсами.* Пусть по-



(а) $\rho_0 = 0.2$ (б) $\rho_0 = 10$

Рисунок 2.2.1: Смесь импульсного сигнала с равномерным шумом

мимо импульса в системе существует аддитивный белый шум $\xi(t)$. Тогда, для наблюдения (измерения) оказывается доступным суммарный сигнал $s(t) = x(t) + \xi(t)$. При малом шуме: $\xi(t) \ll x(t)$ присутсвие импульсного сигнала очевидным образом распознается визуально по временной реализации $s(t)$. Такой случай представлен на рисунке 2.2.1а, где полезный сигнал имеет вид прямоугольного импульса, длящегося на интервале $300 \leq t \leq 400$. Однако, когда интенсивность шума становится сравнимой или существенно большей, чем интенсивность сигнала, распознать визуально присутствие импульса в шуме становится невозможным (см. рис. 2.2.1б).

Для автоматического распознавания импульсного сигнала в шуме принято ориентироваться на *пиковое* значение сигнала $s_{\text{п}}$, представляющее собой максимальное по модулю значение анализируемого сигнала на интервале наблюдения Δt:

$$s_{\text{п}} = \max_{t \in \Delta t} \{|s(t)|\}$$

Если это значение выше определенного порога s_t, то сигнал полагается присутствующим в шуме, если меньше, – то считается, что полезного сигнала в шуме нет. Например, для приведенного на рис. 2.2.1 а случая достаточно выбрать значение порога $s_t > 0.5\rho_0$, чтобы распознование стало безошибочным. Очевидно, также, что для случая, изображенного на рисунке 2.2.1б, подобрать адекватное значение порога не представляется возможным, поскольку пиковое значение сигнала меньше амплитуды шума. Чтобы решить для больших шумов задачу распознавания необходимо увеличить отношение пикового значения полезного сигнала к средней интенсивности шума. Одним из путей для этого является использование линейной фильтрации.

2.2.1.4 Линейная фильтрация сигналов

Фильтром называется четырехполюсник — устройство обладающее одним входным и одним выходным портом (см. рис. 2.2.2), который преобразует сигнал, поступающий на входной порт ($x(t)$) в сигнал, отходящий от выходного порта ($y(t)$), в соответствии с некоторым правилом, называемым оператором фильтра:

$$y(t) = k\left[x(t)\right]$$

Если оператор k линейный, то есть удовлетворяет принципу суперпозиции:

$$k\left[\sum_{i=1}^{M}\alpha_i x_i(t)\right] = \sum_{i=1}^{M}\alpha_i k\left[x_i(t)\right]$$

где α_i — произвольные константы, то фильтр называется *линейным.* Для линейного фильтра оператор k представляет собой интегральную свертку входного сигнала с некоторой функцией $h(t)$, получившей название и*мпульсной характеристики* фильтра:

$$k[x(t)] = x(t)\circ h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t^{'})h(t-t^{'})dt^{'}$$

Частотные свойства четырехполюсника характеризуют при помощи *кэффициента передачи* $K(f)$ – отношения спектров выходного и входного сигналов:

$$K(f) = \frac{F_y(f)}{F_x(f)} \tag{2.2.2}$$

Испульсная и частотная характеристики фильтра связаны между собой через прямое (2.2.3) и обратное (2.2.4) преобразования Фурье:

$$K(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\exp\left(-j2\pi f t\right)dt \tag{2.2.3}$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(f)\exp\left(j2\pi f t\right)df \tag{2.2.4}$$

Модуль коэффициента передачи $|K(f)|$ называется *амплитудно-частотной характеристикой* (АЧХ), а его фаза $\arg\left(K(f)\right)$ – *фазо-частотной характеристикой* (ФЧХ).

2.2.1.5 Оптимальная фильтрация

Пусть на вход линейного фильтра (рис. 2.2.2) воздействует смесь сигнала $x(t)$ и шума $\xi(t)$:

$$s_{inp}(t) = x(t) + \xi(t)$$

Рисунок 2.2.2: Линейный фильтр, описываемый коэффициентом передачи $K(f)$

которая трансформируется фильтром в выходной сигнал s_{out}. В силу линейности фильтра преобразование сигнала и шума можно рассматривать по-отдельности:

$$s_{out}(t) = y(t) + \eta(t)$$

где $y(t) = x(t) \circ h(t)$ — преобразованный полезный сигнал, а $\eta(t) = \xi(t) \circ h(t)$ — преобразованный шум. В качестве количественной меры, характеризуемой "различимость" выходного сигнала $y(t)$ на фоне выходного шума, введем отношение сигнал/шум q, которое представляет собой отношение максимального значения сигнала на выходе к среднеквадратическому отклонению шума:

$$q = \frac{\max\{|y(t)|\}}{\sigma_\eta} \tag{2.2.5}$$

Введенная величина характеризует насколько максимальное значение сигнала превышает средний уровень шума. *Оптимальным фильтром* называется линейная цепь, которая обеспечивает максимальное значение q. Будем искать характеристики оптимально фильтра. Для этого перейдем от временного представления к частотному (спектрам): $x(t) \to F_x(f)$, $y(t) \to F_y(f)$, $\xi(t) \to W_\xi(f)$, $\eta(t) \to W_\eta(f)$. Определим в терминах спектров величины, входящие в формулу (2.2.5).

Определение пикового значения выходного сигнала Выразим выходной сигнал, через его спектр, используя обратное преобразование Фурье:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F_y(f) \exp(j2\pi f t)\, df$$

Учтем, что $F_y(f)$ согласно формуле (2.2.2) равна $K(f)F_x(f)$. Положим также, что максимум функции $|y(t)|$, достигается в некоторый момент времени t_0:

$$\max\{|y(t)|\} = |y(t_0)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} K(f)F_x(f)\exp\left(j2\pi f t_0\right) df\right| \tag{2.2.6}$$

Определение средне-квадратичного значения шума В силу соотношения (2.2.1), среднеквадратичное отклонение выходного шума σ_η может быть определена через интеграл от его спектральнеой плотности мощности $W_\eta(f)$:

$$\sigma_\eta = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} W_\eta(f)df}$$

которая, в свою очередь, связана со спектральной плотностью мощности входного шума $W_\xi(f)$:

$$W_\eta(f) = |K(f)|^2 W_\xi(f) \tag{2.2.7}$$

Окончательно получаем:

$$\sigma_\eta = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |K(f)|^2 W_\xi(f)df} \tag{2.2.8}$$

Подставив полученные в (2.2.6) и (2.2.8) значения в формулу (2.2.5), запишем выражение для отношения сигнал/шум через характеристики сигнала и шума на входе фильтра:

$$q = \frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty} K(f)F_x(f)\exp\left(j2\pi f t_0\right) df\right|}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |K(f)|^2 W_\xi(f)df}} \tag{2.2.9}$$

Наша задача – подобрать такую функцию $K(f)$, которая максимизирует величину (2.2.9) для заданных $F_x(f)$ и $W_\xi(f)$.

Условие максимизации отношения сигнал/шум Для того, чтобы определить, при каком $K(f)$ значение q будет наибольшим, воспользуемся известным в математике *неравенством Буняковского - Шварца*:

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} A^*(f)B(f)df\right| \leq \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |A(f)|^2 df \int_{-\infty}^{\infty} |B(f)|^2 df} \tag{2.2.10}$$

которое выполняется для любых комплексных функций $A(f)$ и $B(f)$ и обращается в равенство при $A = kB$, где k – произвольная вещественная константа. Обозначим:

$$\begin{aligned} A(f) &= \frac{F_x^*(f)}{\sqrt{W_\xi(f)}} \exp\left(-j2\pi f t_0\right) \\ B(f) &= K(f)\sqrt{W_\xi(f)} \end{aligned}$$

Подстановка в неравенство (2.2.10) приводит к формуле:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} K(f) F_x(f) \exp\left(j2\pi f t_0\right) df \right| \leq \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left|F_x(f)\right|^2}{W_\xi(f)} df \int_{-\infty}^{\infty} \left|K(f)\right|^2 W_\xi(f) df}$$

откуда следует, что:

$$q \leq \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left|F_x(f)\right|^2}{W_\xi(f)} df} \tag{2.2.11}$$

причем (2.2.11) становится равенством (и, соответственно, q достигает максимума) в том случае, когда:

$$K(f) = k \frac{F_x^*(f)}{W_\xi(f)} \exp\left(-j2\pi f t_0\right) \tag{2.2.12}$$

Выражение (2.2.12) является условием для оптимального фильтра.

2.2.1.6 Согласованный фильтр

Рассмотрим теперь случай белого шума: $W_\xi(f) = W_0$. Условие оптимальной фильтрации для него упрощается:

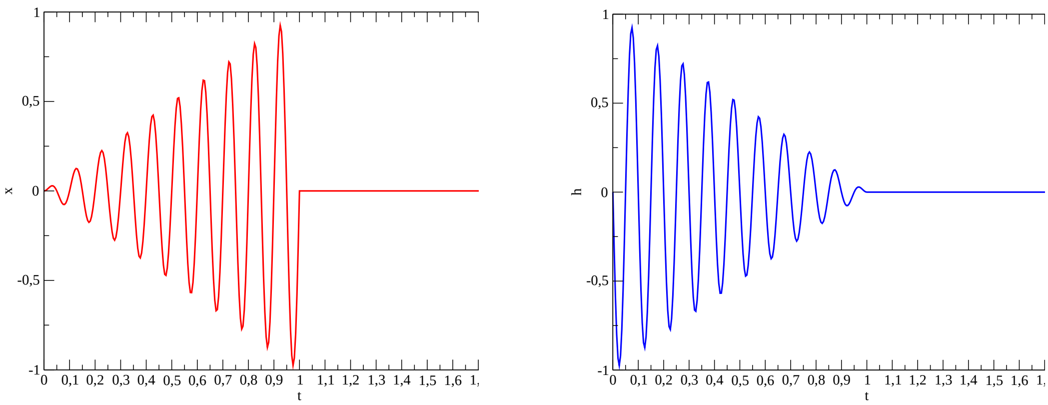
$$K(f) = cF_x^*(f) \exp\left(-j2\pi f t_0\right) \tag{2.2.13}$$

где $c > 0$ – произвольная положительная константа[5]. При этом максимальное значение SNR составляет:

$$q_{max} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left|F_x(f)\right|^2}{W_0} df} = \sqrt{\frac{E_x}{W_0}} \tag{2.2.14}$$

где $E_x = \int \left|F_x(f)\right|^2 df$ – энергия импульса $x(t)$.

[5] c обладает физической размерностью!



(а) (б)

Рисунок 2.2.3: Осцилограмма сигнала (а) и график импульсной характеристики СФ (б)

Импульсная характеристика согласованного фильтра Рассчитаем импульсную характеристику СФ. Согласно (2.2.4) – она есть обратное преобразование Фурье от частотной характеристики (2.2.13):

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} cF_x^*(f)\exp\left(j2\pi f(t-t_0)\right)df = c\left(\int_{-\infty}^{\infty} F_x(f)\exp\left(j2\pi f(t_0-t)\right)df\right)^* = \\ &= c\int_{-\infty}^{\infty} F_x(f)\exp\left(j2\pi f(t_0-t)\right)df \end{aligned}$$

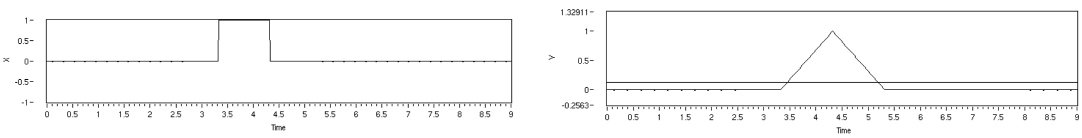
Здесь мы воспользовались правилом перемножения экспонент, операцией комплексного сопряжения, а также тем фактом, что $h(t)$ – вещественная функция, поэтому $h^* = h$. Обратим внимание, что последний интеграл – есть ничто иное, как обратное преобразование Фурье от $F_x(f)$, взятое по отношению к моменту времени $t_0 - t$. Отсюда получаем:

$$h(t) = cx(t_0 - t) \tag{2.2.15}$$

В формулу (2.2.15) входит неопределенная величина t_0 — время пикового значения выходного сигнала фильтра. Из соображений причинности, ясно, что максимальный отклик фильтра не может наблюдаться до завершения импульсного сигнала $x(t)$: если $x(t)$ действует в интервале $0 \le t \le \tau$, то $t_0 \ge \tau$. Выберем минимально возможное значение $t_0 = \tau$. При таком выборе получаем импульсную характеристику СФ:

$$h(t) = cx(\tau - t) \tag{2.2.16}$$

Как видно из формулы, ее форма совпадает с формой “перевернутого” слева - направо сигнала (см. рис. 2.2.3).



(а) (б)

Рисунок 2.2.4: Прямоугольный импульс (а) и его трансформация согласованным фильтром (б)

Выходной сигнал согласованного фильтра НЕ СОВПАДАЕТ по форме с исходным сигналом! [6] Убедимся в этом, определив сигнал на выходе СФ:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t')h(t-t')dt' = c\int_{-\infty}^{\infty} x(t')x(\tau-(t-t'))dt' = c\int_{-\infty}^{\infty} x(t')x(t'-(t-\tau))dt' = \\ &= cR(t-\tau) \end{aligned} \tag{2.2.17}$$

где $R(t)$ – *автокорреляционная функция* для сигнала $x(t)$. Таким образом, форма сигнала на выходе СФ представляет собой сдвинутую на длительность входного импульса автокорреляционную функцию входного сигнала. Поэтому согласованный фильтр иногда называют *фильтр-коррелятор*.

Максимальное значение на выходе согласованного фильтра – есть значение, получаемое в момент окончания действия входного сигнала $t = \tau$ и в соответствии с (2.2.17) равно:

$$y_{max} = cR(0) = cP_x$$

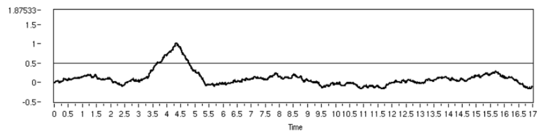
где P_x – средняя мощность сигнала $x(t)$.

2.2.1.7 Распознавание сигнала при помощи согласованного фильтра

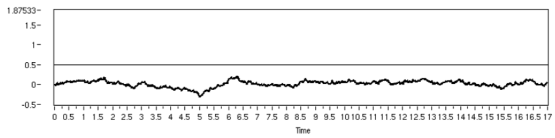
Пусть на входе согласованного фильтра присутствует шумовой сигнал $\xi(t)$ и, возможно, полезный импульсный сигнал $x_1(t)$. Обозначим как $x_0(t)$ – "нулевой" импульс: $x_0(t) = 0$. Задача распознавания – определить по выходному сигналу СФ, какой из двух сигналов: x_1 или x_0 — присутвует на входе фильтра. Для ее решения используется следующий метод:

- задается некоторый пороговый уровень выходного сигнала $Y > 0$;
- в течение заданного интервала наблюдения Δt величина выходного сигнала $y(t)$ сравнивается с величиной порога:

[6] Поэтому согласованный фильтр не может использоваться в аналоговой системе связи, основанной на воспроизводстве формы переданного сигнала



(а)



(б)

Рисунок 2.2.5: Распознавание импульса в шуме: (а) есть импульс ($\max(y(t)) > Y$); (б) нет импульса ($\max(y(t)) < Y$)

– если за интервал наблюдения сигнал на выходе не превосходит по модулю величину порога, считается, что импульс x_1 отсутствует;

– в противном случае, полагается, что импульс x_1 присутствует.

Данное правило можно формально определить в виде двоичной функции от вещественного аргумента:

$$Q(y) = \begin{cases} 1, & \text{при } \max_{t\in\Delta t}(y(t)) \geq Y \\ 0, & \text{при } \max_{t\in\Delta t}(y(t)) < Y \end{cases}$$

значение которой означает номер сигнала, присутствующего на входе СФ. Процесс распознавания проиллюстрировани на рис. 2.2.5.

Ошибки распознавания При использование данного алгоритма могут возникать ошибки двух типов:

1. *ложное срабатывание* — $Q(y) = 1$ при $x(t) = x_0$;

2. *несрабатывание* — $Q(y) = 0$ при $x(t) = x_1$.

Рассмотрим вероятности этих ошибок. Пусть P_{01} — вероятность одного ложного срабатывания, т. е. условная вероятность того, что $Q(y) = 1$, при наличии сигнала x_0 на входе СФ: $P_{01} = \Pr(Q = 1\,|x_0)$, а $P_0 = \Pr(x_0)$– вероятность того, что $x(t) = x_0$. Тогда в среднем вероятность ошибок ложного срабатывания составит произведение этих вероятностей:

$$P_{\text{лс}} = P_0 P_{01}$$

Аналогичным образом определяется средняя вероятность ошибок несрабатывания:

$$P_{\text{нс}} = P_1 P_{10}$$

где $P_{10} = \Pr(Q = 0 \,|x_1\,)$ – условная вероятность нераспознавания одного импульса, если он присутствует на входе СФ, а $P_1 = \Pr(x_1)$ – вероятность появления сигнала x_1 сигнала за время наблюдения [7].

Величина выбранного порога Y влияет на условные вероятности P_{01} и P_{10}, причем эта зависимость разнонаправленная: если выбрать порог слишком маленьким ($Y \to 0$), то вероятность ложного срабатывания становится слишком большой: $P_{01} \to 1$. Данную ситуацию можно охарактеризовать, как чрезмерную чувствительность детектора. С другой стороны, при слишком большом пороге ($Y \to \infty$) система совсем перестает распознавать присутствующие сигналы: $P_{10} \to 1$. Данную ситуацию можно охарактеризовать, как недостаточную чувствительность детектора. Задача разработчика – подобрать оптимальное (компромисное) значение порога.

Функция среднего риска Для того, чтобы определить, какая из двух ошибок является более значимой, для каждой из них вводится весовой коэффициент – "цена ошибки". Обозначим цену ошибки ложного срабатывания c_{01}, а цену ошибки нераспознавания как c_{10}. С учетом введенных коэффициентов определим функцию *среднего риска*:

$$\Phi(Y) = c_{01}P_{01}(Y)P_0 + c_{10}P_{10}(Y)P_1 \tag{2.2.18}$$

которая характеризует в среднем риски, связанные с возможными ошибками метода.

Определим величину порога Y, минимизирующую средний риск ошибок: $\Phi(Y) \to \min$. Необходимым условием минимума функции является условия равенства нулю ее производной: $\Phi'(Y) = 0$. Подставляя сюда выражение для функции среднего риска (2.2.18), находим данное условие:

$$c_{01}P_0\frac{dP_{01}(Y)}{dY} + c_{10}P_1\frac{dP_{10}(Y)}{dY} = 0 \tag{2.2.19}$$

Оптимальное значение Y находится как решение уравнения (2.2.19). Если функции $P_{01}(Y)$ и $P_{10}(Y)$ определены (или апроксимированы) аналитически, то уравнение (2.2.19) также может быть решено аналитически. Если данные зависимости определены как экспериментальные, в виде набора числовых значений, тогда уравнение решается графически: строятся графики $A(Y) = c_{01}P_0\frac{dP_{01}(Y)}{dY}$ и $B(Y) = -c_{10}P_1\frac{dP_{10}(Y)}{dY}$ и определяется точка их пересечения.

2.2.2 Экспериментальная часть

В ходе компьютерного эксперимента предлагается рассмотрение прохождения зашумленного сигнала через согласованный фильтр, измерение отно-

[7] Очевидно, что $P_0 + P_1 = 1$

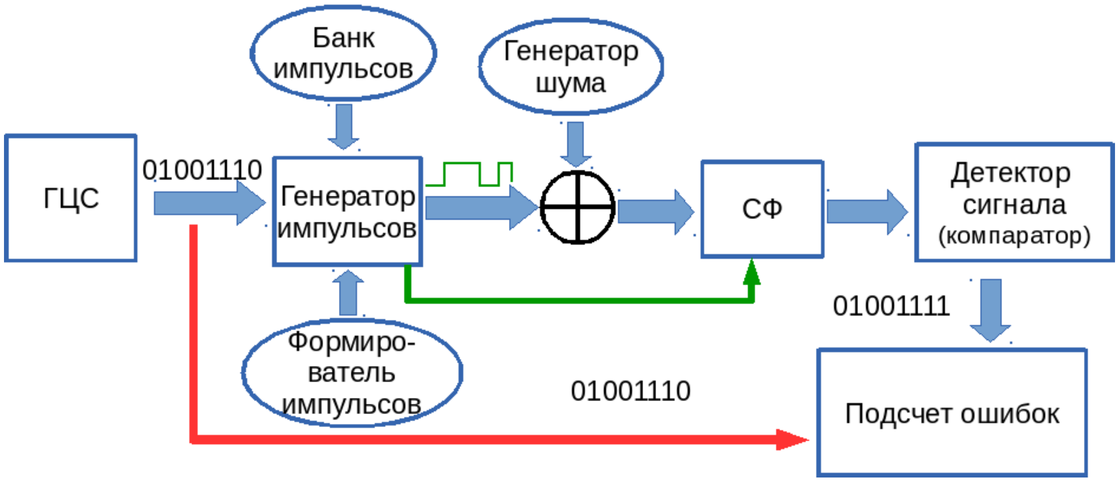


Рисунок 2.2.6: Функциональная схема

шения сигнал/шум на выходе фильтра в зависимости от вида сигнала и интенсивности шума, распознавание сигнала на фоне шума, измерение ошибок ложного срабатывания и нерсамознавания. Для моделирования используется компьютерная программа на LabView. Она позволяет задать двоичный цифровой сигнал произвольной длины с заданной вероятностью появления единиц (нулей) в нем; преобразовать его в физический сигнал, используя систему бинарной амплитудной манипуляции, при которой значение символа управляет амплитудой импульса: символу “1” соответствует имульс единичной амплитуды, символ “0” — нулевой амплитуды; добавить к сигналу нормальный белый шум, заданной спектральной плотности мощности; моделировать прохождение сигнала через согласованный фильтр и распознать импульс в зашумленном сигнале на выходе фильтра; измерить вероятность ошибок детектирования.

2.2.2.1 Описание используемой программы

Программа моделирует следующую последовательность операций цифровой сети (см. рис. 2.2.6):

- генерирует случайну цифровую двоичную последовательность выбранной длины (N) – блок “Генератор цифрового сигнала” (ГЦС) с заданной вероятностью нулей и единиц в ней;
- преобразует ее в сигнал по правилу: ”0” $\to x_0(t)$, ”1” $\to x_1(t)$; при этом $x_0(t) \equiv 0$ – нулевой импульс, а импульс $x_1(t)$ либо берется из “Банка импульсов”, либо проектируется самостоятельно при помощи “Формирователя импульсов”;

- добавляет к сигналу нормальный белый шум заданной спектральной плотности мощности (W_0), полученный от блока “Генератор шума”;
- передает зашумленный сигнал на вход согласованного фильтра, импульсная характеристика которого определяется по форме опорного импульса $x_1(t)$ — блок “СФ”;
- детектирует (распознает) наличие импульсного сигнала x_1 на входе СФ, путем сравнения выходного сигнала СФ с порогом Y и составляет итоговую цифровую последовательность по распознанному сигналу: $x_0(t) \to$ ”0” и $x_1(t) \to$ ”1” — блок “Детектор сигнала (компаратор)”;
- сопоставляет полученную последовательность с исходной и определяет вероятность ошибки: $P_{\text{ош}} = \frac{N_{\text{ош}}}{N}$ ($N_{\text{ош}}$ – число ошибочно распознанных символов)— блок “Подсчет ошибок”

В ходе работы программы имеются возможнсть визуально отслеживать исходный и зашумленный сигналы на входе и выходе СФ, форму импульсного сигнала.

2.2.2.2 Передняя панель установки и органы управления

На рисунке 2.2.7 изображена передняя панель программы. Она состоит из следующих блоков:

- Блок входной последовательности (Input Sequence Generator), управляющий созданием случайной двоичной последовательности
  - контроллер, задающий длину последовательности N (Sequence Length) – определяет число символов в последовательности;
  - контроллер, задающий вероятность появления единичных символов в последовательности (P_1); значению $P_1 = 0$ соответствует полное отсутствие импульсов в сигнале, $P_1 = 1$ — исходный сигнал представляет собой периодическую последовательность импульсов (Pulse Probability);
  - кнопка Restart, инициирующая генерацию новой последовательности.
- Блок задания формы импульса $x_1(t)$ (Signal Shape Generator):
  - селектор выбора импульса из “Банка импульсов” (Signal Choice), позводляющий выбрать форму импульса, либо создать собственный импульсный сигнал (пункт “Custom” селектора);

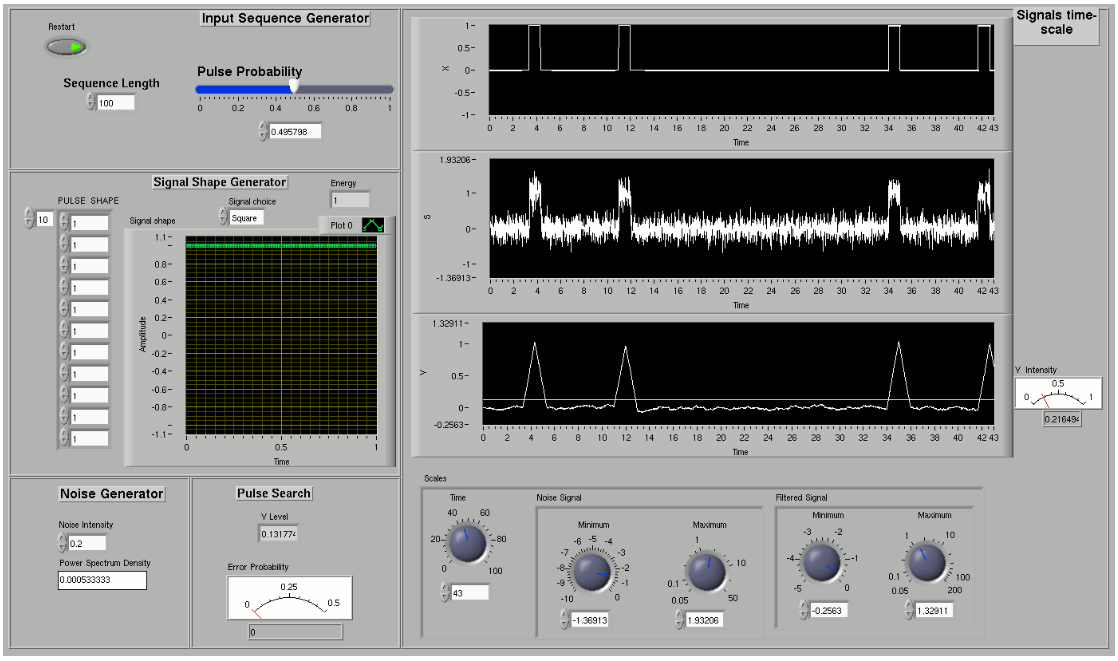


Рисунок 2.2.7: Передняя панель рабочей программы

- массив переключателей, позволяющих задавать форму кодового импульса, при создании собственного кода (Pulse Shape);
- осциллограф, отображающий форму импульса $x_1(t)$ (Signal Shape);
- индикатор энергии импульса $x_1(t)$ (Energy).

• Блок генератора шума (Noise Generator):

- контроллер, задающий интенсивность шума (Noise Intensity);
- индикатор, отображающий значение спектральной плотности мощности W_0 (Power Spectrum Density).

• Блок сигналов (Signal Time-scale):

- осциллограф, отображающий временную реализацию входного сигнала (X);
- осциллограф, отображающий временную реализацию входного сигнала СФ (S);
- осциллограф, отображающий временную реализацию выходного сигнала СФ (Y);
  * в том числе – блок управления курсором, позволяющий отслеживать уровень выходного сигнала

  – органы управления, задающие масштабирование по осям осциллографов.

- Блок распознавания импульсов (Pulse Search):
  – контроллер, задающий величину порога срабатывания Y — совмещен с блоком управления курсором в "Блоке сигналов": положение курсора соответствует значению порога;
  – индикатор вероятности ошибок (Error Probability).

2.2.2.3 Порядок выполнения работы

1. Исследование прохождения сигнала через СФ:
   a) выбрать один из видов импульсов;
   b) задать длину последовательности и вероятность появления импульсов в ней;
   c) сравнить форму сигнала на входе и выходе фильтра, как при наличие шума, так и при его отсутствии;
2. Измерение отношения сигнал/шум на выходе СФ в зависимости от спетральной плотности мощности шума
   a) задать величину W_0 генератора шума;
   b) измерить интенсивность шума σ_η на выходе СФ:
      i. при помощи контроллера Pulse Probability "выключить" импульсы, оставивив только шумовой сигнал;
      ii. получить значение интенсивности на индикаторе "Y Intensity".
   c) измерить пиковое значение импульсного сигнала на выходе фильтра:
      i. при помощи контроллера Pulse Probability "включить" импульсы;
      ii. выключить шум;
      iii. при помощи Y-курсора осциллографа выходного сигнала измерить максимальное значение выходного сигнала y_{max}.
      iv. рассчитать отношение сигнал/шум q (см. ф. 2.2.5) на выходе СФ;
      v. используя индикатор значения энергии импульсного сигнала, рассчитать теоретическое значение q и сравнить ее с измеренной.

3. Исследование возможности распознавание импульсного сигнала при помощи СФ:
   a) выбрать значение величиниы (спектральной плотности мощности) шума;
   b) измерить условную вероятность ошибки ложного срабатывания в зависимости от порогового уровня:
      i. задать пороговый уровень;
      ii. отключить импульсный сигнал (установить вероятность генерации импульсов в ноль);
      iii. измерить вероятность ошибки;
   c) измерить условную вероятность ошибки нераспознавания в зависимости от порогового уровня:
      i. задать пороговый уровень;
      ii. включить импульсный сигнал (установить вероятность генерации импульсов в единицу);
      iii. измерить вероятность ошибки;
   d) Построить графики зависимостей измеренных вероятностей ошибок от Y.
   e) Задать величины цены ошибки для нераспознавания и ложного срабатывания, а также значение вероятности появления импульсов в сигнале.
   f) Определить графически оптимальное значение порога, минимизирующее функцию среднего риска.
   g) Для найденного значения порога и выбранной вероятности импульсов произвести измерение средней вероятности ошибок.
4. Формирование собственного импульсного сигнала и проведение исследований с ним:
   a) используя *Блок задания формы импульса* создать форму импульсов;
   b) провести измерения, аналогичные п. 1 — 3 и сопоставить его результаты с результатами на базе стандартных импульсов.

2.2.3 Содержание отчета по работе

1. Краткая теория
2. Описание выбранных импульсных сигналов с иллюстрациями временных реализаций.
3. Иллюстрации прохождения сигналов через СФ.
4. Описание проведенных экспериментов и расчетов с указанием всех используемых значений параметров и характеристик.
5. Графики всех построенных зависимостей; теоретические и экспериментальные зависимости приводятся на одном графике.
6. Выводы, содержащие анализ полученных экспериментальных результатов, с учетом имеющихся теоретических зависимостей.

2.3 Методы модуляции сигналов в цифровых сетях

Цель работы: Исследовать устойчивость модулированных сигналов к шуму в канале связи

2.3.1 Краткие теоретические сведения

2.3.1.1 Введение

Технологии, используемые для передачи информации на расстояние – основная задача, стоящая перед радиофизикой и радиотехникой. Поскольку при транспортировке радиосигналов последние подвергаются существенным искажениям за счет шумов, существующих в каналах связи, разработка устойчивых к помехам системам кодирования информации – одна из самых насущных задач.

2.3.1.2 Физическое кодирование в цифровых системах связи

Современные системы связи делятся на *аналоговые* и *цифровые*. В последнем случае информация передается посредством комбинирования *символов* из конечного набора, называемого *алфавитом*. Число символов в таком алфавите называется его *мощностью*. Примеры алфавитов:

- двоичный – набор из знаков $\{0, 1\}$, используемый для отображения информации в компьютерной технике;
- десятичный – набор из десяти арабских цифр $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, используемый для отображения числовой информации;
- латинский – набор из символов латинского алфавита $a - Z$, символа пробела и знаков препинания, используемых в письме;
- нотный – набор из нот и вспомогательных символов, используемых для отображения музыки.

Поскольку символы любого конечного алфавита могут быть пронумерованы и соответственно идентифицированы своими номерами, между любыми алфавитами одинаковой мощности существует взаимно однозначное соответствие. Поэтому, все алфавиты одинаковой мощности изоморфны друг другу и могут рассматриваться как один алфавит.

Пусть $S = \{s_1, ..., s_M\}$ – алфавит мощностью M. Будем называть *сообщением* длительности N любую последовательность идущих друг за другом N

символов алфавита: $s_{i_1} s_{i_2} ... s_{i_N}$. Для передачи сообщения на расстояние его символы необходимо преобразовать в физические *сигналы*, как правило электромагнитной природы, например в короткие импульсы напряжения или тока определенной формы. Такое преобразование называется *физическим кодированием.* Таким образом, под физическим кодированием алфавита мощности M (M-ичное кодирование) мы будем понимать отображение:

$$\begin{aligned} s_i &\rightarrow x_i(t) \\ i &= 1, ..., M \end{aligned}$$

где $x_i(t)$ – функция времени, заданная на отрезке $[0 : T_i]$ (T_i – длительность сигнала x_i), соответствующая символу s_i; в дальнейшем будем полагать длительности всех сигналов одинаковыми[8]: $T_i = T$ для всех i. Наиболее простым способом кодирования является потенциальный код, при котором значение передаваемого символа s_i ассоциируется с амплитудой импульса, имеющего, как правило, прямоугольную форму:

$$x_i(t) = A_i w(t)$$

где A_i – амплитуда, ассоциированная с символом s_i, $w(t)$ – *функция временного окна*, длительностью T:

$$w(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0 : T] \\ 0, & t \notin [0 : T] \end{cases}$$

Если информационное сообщение $s_{i_1} s_{i_2} s_{i_3} ... s_{i_N}$закодировано при помощи потенциального кода, то передаваемый сигнал – есть последовательность прямоугольных импульсов разной амплитуды, сдвинутых во времени:

$$x(t) = A_{i_1} w(t) + A_{i_2} w(t - T) + A_{i_3} w(t - 2T) + ... + A_{i_N} w(t - (N - 1)T) \quad (2.3.1)$$

Пример такого сигнала показан на рисунке 2.3.1.

2.3.1.3 Модуляция

Как в аналоговых, так и в цифровых сетях, для передачи информационного сообщения используется *модуляция* амплитуды, частоты или фазы гармонического сигнала ($a \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$); последний принято называть *несущей.* Соответственно, различают амплитудную, частотную и фазовую модуляцию

[8] Существуют системы кодирования и с неодинаковыми длительностями символов, например азбука Морзе

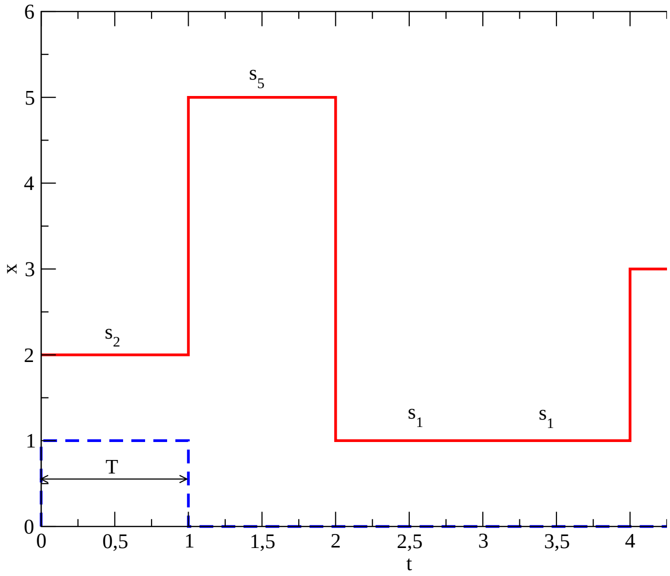


Рисунок 2.3.1: Потенциальное кодирование сообщения $s_2 s_5 s_1 s_1 s_3$; штриховой линией показана функция временного окна длительностью $T = 1$

(АМ, ЧМ и ФМ) несущей. В случае АМ, амплитуда несущей $a(t)$ (она называется *огибающей*) меняется по заданному закону:

$$a(t) = a_0 \left(1 + m_a q(t)\right)$$

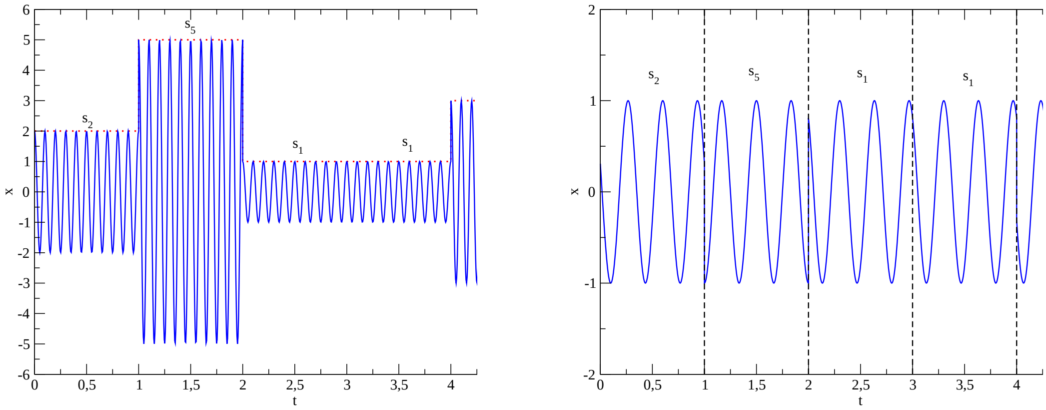
где a_0 – постоянная составляющая амплитуды, $q(t)$ – информационный сигнал (сообщение) единичной амплитуды, m_a – коэффициент (индекс) амплитудной модуляции. Аналогично, при ФМ, передаваемая информация содержится в законе изменения начальной фазы:

$$\varphi(t) = m_\varphi q(t) \tag{2.3.2}$$

где m_φ – коэффициент (индекс) фазовой модуляции [9]. При каждом из указанных видов модуляции происходит смещение по частоте спектра модулирующего сигнала к частоте несущей f_0. Поэтому, использование модуляции необходимо в том случае, когда нужно осуществить перенос передаваемого сигнала в тот частотный диапазон, в котором он может быть передан с наименьшими потерями по существующему каналу связи.

В цифровых сетях передаваемой сообщением является числовая (сигнальная) последовательность, которая может быть преобразована в потенциаль-

[9]Полная фаза при этом будет $2\pi f_0 t + \varphi(t)$



(а) (б)

Рисунок 2.3.2: Цифровые сигналы с (а) АМ и (б) ФМ

ный код. Если огибающая $q(t)$ – есть закодированое при помощи потенциального кода сообщения вида (2.3.1), то АМ сигнал будет представлять собой последовательность радиоимпульсов:

$$x(t) = a_{i_1} w(t) \cos(2\pi f_0 t) + a_{i_2} w(t-T) \cos(2\pi f_0 t) + ... + a_{i_N} w(t-(N-1)T) \cos(2\pi f_0 t)$$

где $a_i = a_0(1 + m_a A_i)$. Вид АМ сигнала для сообщения на рис.2.3.1 представлен на рис. 2.3.2а. Таким образом, цифровая АМ — взаимно-однозначное отображение множества символов в набор амплитуд:

$$s_i \leftrightarrow a_i$$

Аналогично, при цифровой фазовой модуляции закон изменения начальной фазы в (2.3.2) представляет собой потенциальный код (2.3.1), соответственно, модулированный сигнал имеет вид:

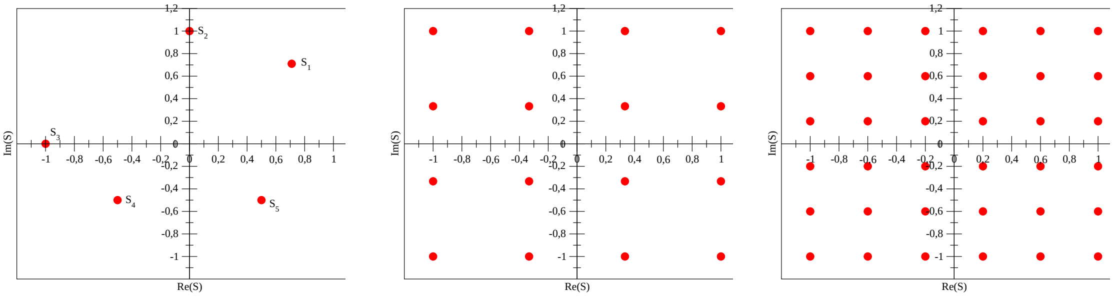
$$x(t) = a\left(w(t) \cos(2\pi f_0 t + \varphi_{i_1}) + w(t-T) \cos(2\pi f_0 t + \varphi_{i_2}) + ... + w(t-(N-1)T) \cos(2\pi f_0 t + \varphi_{i_N}\right.$$

Соответственно, цифровая ФМ — взаимно-однозначное отображение множества символов в набор начальных фаз:

$$s_i \leftrightarrow \varphi_i$$

Вид ФМ сигнала для сообщения на рис.2.3.1 представлен на рис. 2.3.2б.

Помимо использования амплитудной и фазовой модуляции по-отдельности, в цифровых сетях получило применение их комбинация — амплитудно-фазовая



(а) (б) (в)

Рисунок 2.3.3: Изображение АФМ кодов на комплексной плоскости

модуляция (АФМ). АФМ представляет собой взаимно-однозначное отображение множества символов в набор пар значений "амплитуда и фаза":

$$s_i \leftrightarrow \{a_i, \varphi_i\} \tag{2.3.3}$$

а сам модулированный сигнал имеет вид:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{N} a_i \cos(2\pi f_0 t + \varphi_i)\, w(t-(i-1)T)$$

Данный сигнал удобно записывать в комплексной форме. Для этого добавим к $x(t)$ мнимую составляющую – *сопряженный сигнал* $\tilde{x}(t)$, полученный формальной заменой косинуса на синус:

$$X(t) = x(t) + j\tilde{x}(t) = \sum_{i=1}^{N} S_i \exp(j2\pi f_0 t)\, w(t-(i-1)T)$$

Здесь $X(t)$ – комплексный *аналитический сигнал*, $S_i = a_i \exp(j\varphi_i)$ – *комплексная амплитуда*. При этом, наблюдаемый сигнал $x(t)$ можно получить из аналитического посредством операции взятия вещественной части. При комплексном описании каждому символу взаимно-однозначно соответствует своя комплексная амплитуда:

$$s_i \leftrightarrow S_i \tag{2.3.4}$$

Соотношение (2.3.4) часто изображают в виде точек на комплексной плоскости, так, как, например, это представлено на рис.2.3.3а.

Квадратурно-амплитудная модуляция Существует набор стандартных методов АФМ, называемых квадратурно-амплитудной модуляцией (КАМ)[10].

[10] В англоязычной литературе – Quadrature Amplitude Modulation (QAM)

На практике используется несколько вариантов метода: КАМ-16, КАМ-32, ... КАМ-256..., где числовой индекс, соответствует мощности используемого алфавита $M = 2^m$, где $m = 4, 5, 6, ...$ – число двоичных разрядов, используемых для записи одного символа. На комплексной плоскости кодовые символы равномерно покрывают область, близкую к единичному квадрату, формируя на нем эквидистантную решетку, как это показано на рис.2.3.3б для КАМ-16 и на рис.2.3.3в для КАМ-64. Равномерность "упаковки" символов, как это будет показано далее, является важным фактором для помехоустойчивости цифровой сети.

2.3.1.4 Шум и его характеристики

В любых системах, работающих при температурах выше абсолютного нуля, существует шум — неконтролируемый сигнал сложной формы. В линейных системах шум не смешивается с сигналом, а просто добавляется к нему:

$$s(t) = x(t) + \xi(t)$$

где $x(t)$ – полезный сигнал, $\xi(t)$ – шум, $s(t)$ – наблюдаемый сигнал. Такой шум называется *аддитивным.*

Шумовой сигнал характеризуется рядом параметров, наиболее важными из которых являются:

- Средняя мощность (или интенсивность), под которой понимают обычно дисперсию $D_\xi = \overline{\xi^2(t)}$ (верхняя черта означает усреднение по времени)[11].

- Спектр мощности

  $$W_\xi(f) = \frac{\left\langle |F_\xi(f)|^2 \right\rangle}{\Delta t}$$

  где $W_\xi(f)$ – функция спектральной плотности мощности (производная от мощности по частоте), F_ξ – функция спектральной плотности сигнала (интегральное преобразование Фурье от сигнала), угловые скобки означают усреднение по ансамблю реализаций; Δt – время наблюдения. Величина W_ξ связана с дисперсией соотношением:

  $$D_\xi = \int_{-\infty}^{\infty} W_\xi(f) df \tag{2.3.5}$$

  Шумы, создаваемые от множества независимых источников разной природы, обычно являются всечастотными, то есть их спектр на разных частотах примерно одинаков. Шум, спектр мощности которого одинаков для всех частот: $W(f) = W_0$ — называется *белым шумом.*

[11]Мы полагаем, что шумовой сигнал не имеет постоянной составляющей

- Плотность вероятности (распределение) случайного сигнала — функция $\rho(\xi)$, которая характеризует его статистические свойства. Согласно теории вероятности, шумы создаваемые от множества независимых источников, характеризуются гауссовой плотностью вероятности:

$$\rho(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma_\xi}\right)$$

  где $\sigma_\xi = \sqrt{D_\xi}$ – средне-квадратичное отклонение. Шум с гауссовым распределением называется *нормальным* шумом.

В данной работе будем считать канал связи между приемником и передатчиком цифрового сигнала каналом с *аддитивным белым гауссовым шумом* (АБГШ).

2.3.1.5 Передача цифровых данных по АБГШ каналу

Рассмотрим вероятность ошибок, возникающих при передачи M-ичных данных по каналу связи с АБГШ. В результате кодирования и модуляции каждый из M символов алфавита s_i отображается в гармонический сигнал $x_i(t) = a_i \exp\left(2\pi f_0 t + \varphi_i\right) w(t)$. При распространении по АБГШ каналу к сигналам добавляется шум $\xi(t)$ со спектральной плотностью мощности W_0, в результате чего формируется входной сигнал приемника:

$$y(t) = x_i(t) + \xi(t),\ i = 0, 1 \tag{2.3.6}$$

Предположим также, что для декодирования (распознавания) переданного символа в приемнике используется принцип *минимального расстояния* — т.е. принятым полагается тот опорный сигнал, расстояние (евклидово) которого до принятого сигнала $y(t)$ минимально:

$$d(x_j, y) = \min_i \{d(x_i, y)\} \Rightarrow s_j$$

Здесь используется стандартное определение евклидово расстояния между функциями, заданными на интервале:

$$d(x, y) = \sqrt{\int_0^T \left(x(t) - y(t)\right)^2 dt} \tag{2.3.7}$$

Таким образом, для декодирования принятого сигнала приемник должен сравнить расстояние между ним и всеми M опорными сигналами из алфавита, определить среди них наименьшее и декларировать соответствующий ему опорный сигнал, как принятый.

Положим для определенности, что был передан символ s_I и оценим вероятность ошибки в его распознавании. Ошибка произойдет в том случае, когда полученный сигнал $y(t) = x_I(t) + \xi(t)$ будет распознан приемником, как любой другой сигнал, кроме s_I. Пусть, например, переданный сигнал распознан как s_L $(L \neq I)$. Это произойдет, как было определено выше, если $d(x_I, y) > d(x_L, y)$. Обозначим $Z_{IL} = d(x_L, y) - d(x_I, y)$. Определим $P_{I\to L}$ как условную вероятность события $Z_{IL} < 0$, произошедшего при условии отправления символа s_I:

$$P_{I\to L} = \Pr\left(Z_{IL} < 0 \,|s_I\right)$$

и оценим эту величину. В работе “Физическое кодирование в цифровых сетях” (детальный вывод также можно найти в [12]) была получена формула вероятности ошибки при двоичном кодировании, которая применима и в данном случае:

$$P_{I\to L} = Q\left(\frac{d(x_I, x_L)}{2\sqrt{W_0}}\right) \tag{2.3.8}$$

где*:*

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$

— известная в математике *дополнительная функция ошибок,* график которой изображен на рис.2.3.4. Таким образом, вероятность “взаимного перепутывания” символов s_I и s_L при декодировании определяется расстоянием между ними. Аналогично, для любых других символов алфавита. Оценим, теперь, вероятность перепутывания символа s_I с любым из символов. Согласно теории вероятностей, вероятность объединения нескольких событий, не превосходит суммы вероятностей каждого из них:

$$P_{I\to any} \;\; \leq \;\; \sum_{\substack{i=1\\ i\neq I}}^{M} Q\left(\frac{d(x_I, x_i)}{2\sqrt{W_0}}\right) \tag{2.3.9}$$

Средняя вероятность появления ошибки перепутывания данного символа с любым другим $P_{I\text{ош}}$ – есть произведение вероятности генерации символа s_I передатчиком (P_I) на условную вероятность (2.3.9):

$$P_{I\text{ош}} = P_I P_{I\to any}$$

Соответственно, средняя вероятность неверного детектирования ЛЮБОГО из символов – есть сумма вероятностей ошибки для каждого из них:

$$P_{\text{ош}} = \sum_{I=1}^{M} P_{I\text{ош}} \leq \sum_{I=1}^{M} P_I \sum_{\substack{i=1\\ i\neq I}}^{M} Q\left(\frac{d(x_I, x_i)}{2\sqrt{W_0}}\right) \tag{2.3.10}$$

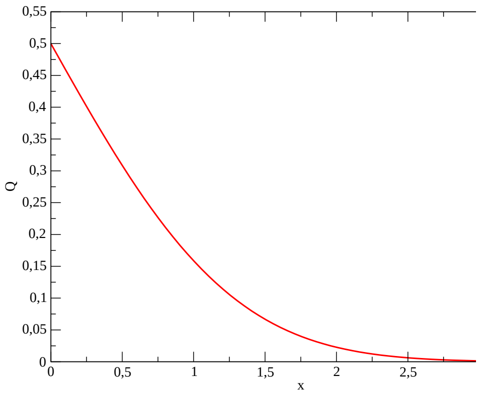


Рисунок 2.3.4: Вид функции $Q(x)$

Если появление любого из M символов сообщения равновероятны, то $P_I = {}^1/_M$ и формула (2.3.10) упрощается:

$$P_{\text{ош}} \le \tfrac{1}{M} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{M} Q\left(\frac{d(x_i, x_j)}{2\sqrt{W_0}}\right) \tag{2.3.11}$$

Рассмотрим полученную зависимость (2.3.11). Функция $Q(x)$ (см. рис.2.3.4) монотонно уменьшается с ростом аргумента от 0.5 при $x = 0$ до нуля при $x \to \infty$, причем, при больших значениях аргумента уменьшение происходит очень быстро. Соответственно, при $x \gg 1$ даже небольшое увеличение расстояния между символами способно уменьшить значение $Q(x)$ до пренебрежимо малых величин. В этом случае, лишь сигнальные пары с минимальным расстоянием вносят существенный вклад в сумму (2.3.11). Предположим, что среди всех M символов существует подгруппа из M_m символов с наименьшим расстоянием между собой, равным d_{min}. Тогда, основной вклад в вероятность ошибки будут вносить именно эти сигналы:

$$P_{\text{ош}} \approx \frac{M_m}{M} Q\left(\frac{d_{min}}{2\sqrt{W_0}}\right), \text{при}\, d_{min} \gg 2\sqrt{W_0} \tag{2.3.12}$$

Межкодовое расстояние для АФМ сигналов Определим евклидово расстояние между сигнальными символами $x_i = a_i \cos\left(2\pi f_0 t + \varphi_i\right)$ и $x_k = a_k \cos\left(2\pi f_0 t + \varphi_k\right)$ как функцию от их амплитуд и фаз. Согласно формуле (2.3.7), квадрат расстояние – есть энергия разностного сигнала $x_{i,k} = x_i - x_k$:

$$d^2(x_i, x_k) = \int_0^T x_{i,k}^2(t)dt = E_{i,k}$$

Для определения $E_{i,k}$ перейдем к аналитическим сигналам: $X_i(t) = S_i \exp(j2\pi f_0 t)$, $X_k(t) = S_k \exp(j2\pi f_0 t)$, где S_i и S_k – комплексные амплитуды. Соответственно, определим комплексный разностный сигнал: $X_{i,k} = S_{i,k} \exp(j2\pi f_0 t)$, где $S_{i,k} = S_i - S_k$. Известно, что для комплексных гармонических сигналов средняя мощность их вещественных прототипов выражается через комплексную амплитуду: $\langle P \rangle = 0.5SS^*$, откуда получим величину энергии для разностного сигнала $x_{i,k}$: $d^2(x_i, x_k) = 0.5 \left| S_i - S_k \right|^2 T$. Подставляя сюда выражения для комплексных амплитуд, получаем:

$$d(x_i, x_k) = \sqrt{0.5 \left(\left| S_i \right|^2 + \left| S_k \right|^2 - 2 \left| S_i \right| \left| S_k \right| \cos\left(\varphi_i - \varphi_k \right) \right) T} \qquad (2.3.13)$$

Таким образом, как мы видим, расстояние между АФМ сигналами определяется расстоянием между их комплексными амплитудами и их длительностью. Поэтому, задача разработчиков цифровых систем – подобрать такие значения комплексных амплитуд сигналов, чтобы величины (2.3.13) были как можно больше. Такая задача называется *задачей упаковки.*

2.3.2 Экспериментальная часть

В ходе компьютерного эксперимента предлагается измерить вероятность ошибки распознавания символов M-ичного кодирования, полученных в результате АФ модуляции, после прохождения ими АБГШ канала. Для этого используется компьютерная программа на LabView. Она позволяет задать цифровой сигнал произвольной длины; преобразовать его в физический сигнал посредством АФ модуляции, присваивая каждому символу определенное значение амплитуды и фазы гармонического колебания; добавить к сигналу гауссов белый шум с заданной спектральной плотностью мощности; детектировать сигнал, используя амплитудный и фазовый детекторы; декодировать сигнал и измерить вероятность ошибки.

2.3.2.1 Описание используемой программы

Программа моделирует следующую последовательность операций цифровой сети (см. рис. 2.3.5):

- генерирует случайну M-ичную цифровую последовательность выбранной длины N, каждый член которой представляет собой целое число из диапазона $0 \div M - 1$ – блок “Генератор цифрового сигнала” (ГЦС) ;
- преобразует ее в комплексный цифровой сигнал, отображая целые числа последовательности на комплексные амплитуды $i \to S_i = a_i \exp\left(j2\pi f_0 t + \varphi_i\right)$, где значения амплитуд и фаз для символов подбираются самостоятельно при помощи “Формирователя кодов” – блок “Кодер”;

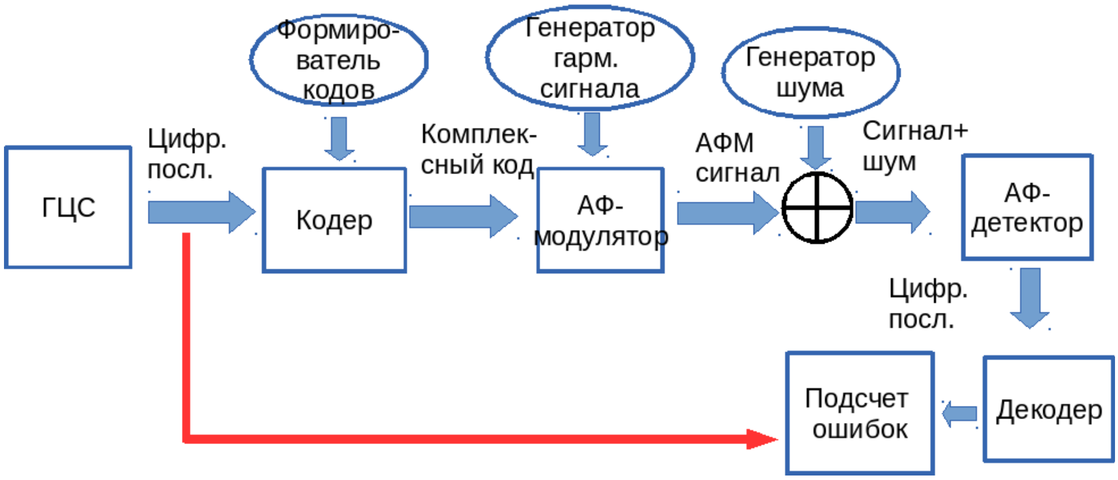


Рисунок 2.3.5: Функциональная схема

- добавляет к сигналу нормальный белый шум заданной спектральной плотности мощности (W_0), полученный от блока “Генератор шума”;
- передает зашумленный сигнал на вход амплитудного и фазового детектора, определяющего значение амплитуды и фазы зашумленного радиоимпульса — блок “АФ - детектор”;
- по полученным значениям амплитуды и фазы распознает, какой из M символов был получен; распознование осуществляется по принципу минимального расстояния — блок “Декодер”;
- сопоставляет полученную последовательность с исходной и определяет вероятность ошибки: $P_{\text{ош}} = \frac{N_{\text{ош}}}{N}$ ($N_{\text{ош}}$ – число ошибочно распознанных символов)— блок “Подсчет ошибок”

В ходе работы программы имеются возможнкcть визуально отслеживать исходный и зашумленный сигналы и спектр зашумленного сигнала.

2.3.2.2 Передняя панель установки и органы управления

На рисунке 2.3.6 изображена передняя панель программы. Она состоит из следующих блоков:

- Блок задания амплитуд и фаз сигнальных импульсов $\{x_i(t)\}_{i=1}^{M}$ — Code Designer:
  - контроллер, задающий мощность используемого алфавита (M) — Alphabite Length;

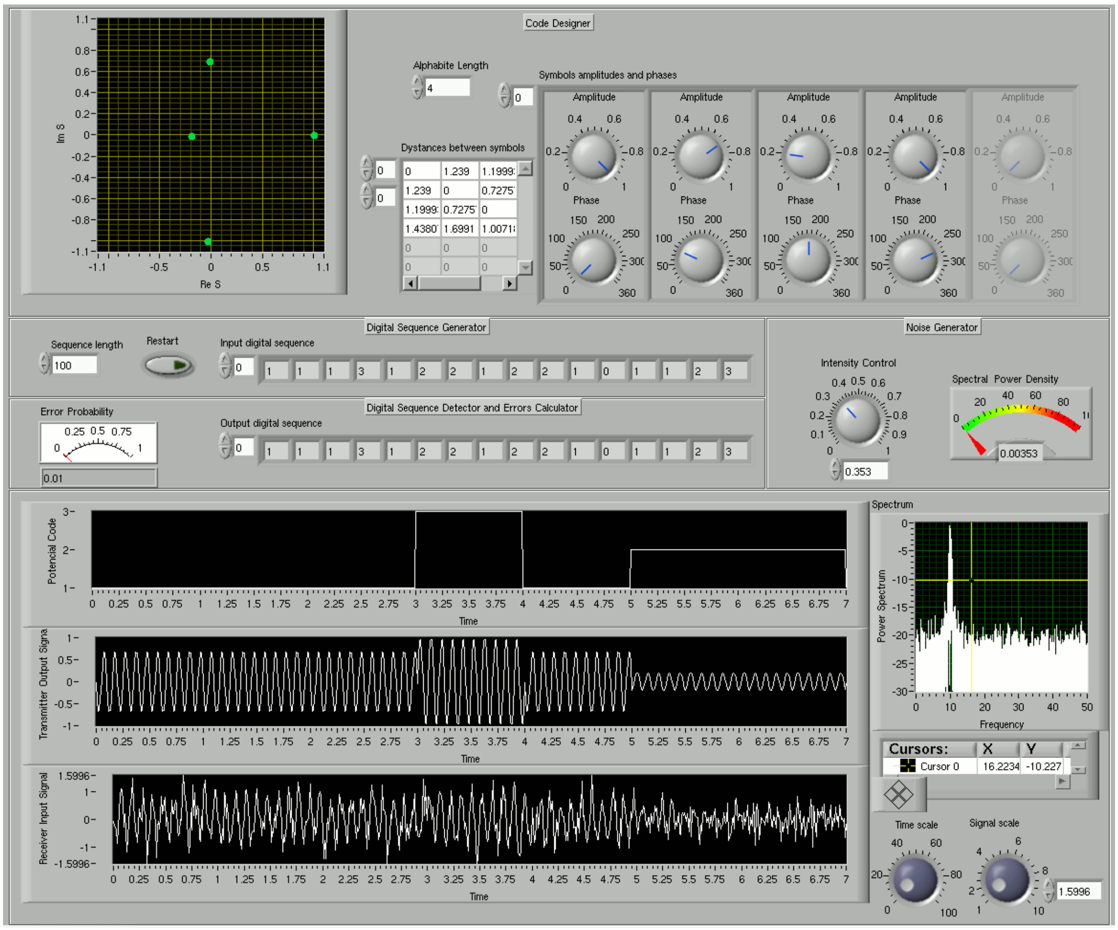


Рисунок 2.3.6: Передняя панель рабочей программы

- массив контроллеров, позволяющих задавать амплитуду (a_i) и фазу (φ_i) — Symbols amplitudes and phases;
- осциллограф, отображающий векторы комплексной амплитуды $(\{S_i = a_i \exp(j\varphi_i)\}_{i=1}^{M}$
- матрица индикаторов расстояний между векторами комплексной амплитуды $D_{ij} = |S_i - S_j|$ — Distances between symbols.

- Блок генерации цифровой последовательности, управляющий созданием случайной двоичной последовательности — Digital Sequence Generator
  - контроллер, задающий длину последовательности символов (N) — Sequence Length;
  - массив индикаторов, отображающих символы последовательности — Input digital sequence;

   – кнопка Restart, инициирующая генерацию новой последовательности.

- Блок генератора шума, создающий случайный сигнал — Noise Generator:
   – контроллер, задающий интенсивность шума — Intensity Control;
   – индикатор, отображающий значение спектральной плотности мощности (W_0) — Spectral Power Density).
- Блок детектирования и подсчета ошибок — Digital Sequence Detector and Errors Calculator:
   – массив индикаторов, отображающих распознанные символы — Output digital sequence;
   – индикатор вероятности ошибок (Error Probability).
- Блок сигналов:
   – осциллограф, отображающий потенциальный код, соответствующий цифровой последовательности — Potencial Code;
   – осциллограф, отображающий временную реализацию модулированного сигнала — Transmitter Output Signal;
   – осциллограф, отображающий временную реализацию зашумленного сигнала — Receiver Input Signal;
   – анализатор спектра зашумленного сигнала — Spectrum
      * в том числе – блок управления курсором, позволяющий отслеживать значение частоты и амплитуды гармоники;
   – органы управления, задающие масштабирование по осям осциллографов.

2.3.2.3 Порядок выполнения работы

1. Измерение устойчивости амплитудной модуляции к шуму:
   a) выбрать двоичный алфавит и определить значения амплитуды для нулевого и единичного символов;
   b) задать длину цифровой последовательности (для большей точности длина должна составлять несколько тысяч символов);
   c) меняя величину интенсивности шума, снять зависимость вероятности ошибок декодирования от спектральной плотности мощности шума;

   d) рассчитать теоретическую зависимость $P_{\text{ош}}(W_0)$ и сравнить ее с измеренной в п. (c).

2. Определение устойчивости АМ к шуму для алфавитов разной длины:

   a) проделать те же измерения, что и в разд. 1, но для последовательно увеличивающейся мощности алфавита M и провести анализ зависимости от M.

3. Измерение устойчивости фазовой модуляции к шуму:

   a) проделать те же измерения, что и в разделах 1 и 2, но для фазовой модуляции;

   b) сравнить результаты с результатами для амплитудной модуляции.

4. Формирование собственного АФМ кода и проведение исследований с ним:

   a) задать значение мощности алфавита M;

   b) используя *Code Designer* подобрать значения амплитуд и фаз для символов, так, чтобы минимизировать вероятность ошибок;

   c) провести измерения $P_{\text{ош}}(W_0)$ и сравнить ее с измеренной в предыдущих разделах.

2.3.3 Содержание отчета по работе

1. Краткая теория

2. Описание выбранных модулированных сигналов с иллюстрациями временных реализаций.

3. Иллюстрации зашумленных сигналов и их спектров.

4. Описание проведенных экспериментов и расчетов с указанием всех используемых значений параметров и характеристик.

5. Графики всех построенных зависимостей; теоретические и экспериментальные зависимости приводятся на одном графике.

6. Выводы, содержащие анализ полученных экспериментальных результатов, с учетом имеющихся теоретических зависимостей.

2.4 Принципы кодового мультиплексирования сигналов

Цель работы: Исследовать устойчивость методов кодового разделения сигналов, основанного на использовании функций Уолша, к шуму в канале связи

2.4.1 Краткие теоретические сведения

2.4.1.1 Кодирование

Современные системы связи делятся на *аналоговые* и *цифровые*. В последнем случае информация передается посредством комбинирования *символов* из конечного набора, называемого *алфавитом*. Число символов в таком алфавите называется его *мощностью*. Примеры алфавитов:

- двоичный – набор из знаков $\{0, 1\}$, используемый для отображения информации в компьютерной технике;
- десятичный – набор из десяти арабских цифр $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, используемый для отображения числовой информации;
- латинский – набор из символов латинского алфавита $a - Z$, символа пробела и знаков препинания, используемых в письме;
- нотный – набор из нот и вспомогательных символов, используемых для отображения музыки.

Поскольку символы любого конечного алфавита могут быть пронумерованы и соответственно идентифицированы своими номерами, между любыми алфавитами одинаковой мощности существует взаимно однозначное соответствие. Поэтому, все алфавиты одинаковой мощности изоморфны друг другу и могут рассматриваться как один алфавит.

Пусть $S = \{s_1, ..., s_M\}$ – алфавит мощностью M. Будем называть *сообщением* длительности N любую последовательность идущих друг за другом N символов алфавита: $s_{i_1}s_{i_2}...s_{i_N}$. Для передачи сообщения на расстояние его символы необходимо преобразовать в физические *сигналы*, как правило электромагнитной природы, например в короткие импульсы напряжения или тока определенной формы. Такое преобразование называется *физическим кодированием*. Таким образом, под физическим кодированием алфавита мощности M (M-ичное кодирование) мы будем понимать отображение:

$$\begin{aligned} s_i &\rightarrow x_i(t) \\ i &= 1, ..., M \end{aligned}$$

где $x_i(t)$ – функция времени, заданная на отрезке $[0 : T_i]$ (T_i – длительность сигнала x_i), соответствующая символу s_i; в дальнейшем будем полагать длительности всех сигналов одинаковыми[12]: $T_i = T$ для всех i.

После операции физического кодирования на стороне передатчика формируется временная реализация сигнала в виде идущих друг за другом сигнальных импульсов:

$$u(t) = \sum_{k=1}^{N} x_{i_k}(t-(k-1)T)$$

При попадании в приемник поступивший сигнал разделяется на составляющие импульсы, после чего для каждого из них находится соответствующий ему символ. То есть решается задача, обратная физическому кодированию – *декодирование* сигнала:

$$\begin{aligned} y_i(t) &\rightarrow s_i(t) \\ i &= 1, ..., M \end{aligned}$$

где $y_i(t)$ — импульсные сигналы, поступившие в приемник.

2.4.1.2 Бинарная фазовая модуляция

Одним из наиболее распространенных способов физического кодирования является *бинарная фазовая модуляция* (БФМ). При БФМ используется двоичный алфавит $\{0, 1\}$; каждый из символов которого представляется импульсным сигналом одинаковой формы, но противоположной полярности: $x_1(t) = -x_0(t) = x(t)$. При БФМ передаваемую числовую последовательность удобно записывать в виде последовательности чисел -1 и 1, заменяя в исходном двоичном сигнале 0 на -1: $\mathbf{s} = \{1, 1, 1, -1, -1, ..., 1\}$. В этом случае передаваемый по каналу сигнал есть произведение элементов числовой последовательности на сдвинутый по времени импульсный сигнал :

$$u(t) = \sum_{k=1}^{N} s_k x(t-(k-1)T) \qquad (2.4.1)$$

где нижний индекс $k = 1, 2, ..., N$ обозначает номер передаваемого символа $s_k = \pm 1$; T – длительность кодового импульса. Кодирование БФМ наименее чувствительно к помехам в канале связи, создаваемым внешним шумом, за счет того, что кодовые импульсы оказываются наиболее удаленными друг от друга.

[12]Существуют системы кодирования и с неодинаковыми длительностями символов, например азбука Морзе

2.4.1.3 Мультиплексирование в цифровых сетях

Каналы связи используются как правило совместно, т.е. являются *разделяемыми* между несколькими абонентами. Процедура объединения передаваемых сигналов от нескольких абонентов в разделяемом канале называется *мультиплексированием*. Обратная процедура — разделение общего сигнала в канале связи на несколько индивидуальных под-сигналов называется *демультиплексированием*. Стандартными технологиями мультиплексирования/демультиплексирования являются:

- частотное разделение (FDM);
- временное разделение (TDM);
- кодовое разделение (CDM).

Во всех трех случаях для разделения абонентских сигналов используется метод *ортогонального кодирования*.

Пусть канал связи разделяется между M абонентами, каждый из которых использует БФМ. Тогда, сигнал, генерируемый передатчиком каждого из абонентов будет представлять собой (2.4.1):

$$u^{(i)}(t) = \sum_{k=1}^{N} s_k^{(i)} x^{(i)}(t-(k-1)T) \tag{2.4.2}$$

где верхний индекс $i = 1, ..., M$ означает номер абонента; $s_k^{(i)} = \pm 1$ — k-й символ, передаваемый i-м абонентом, $x^{(i)}(t)$ — импульсный сигнал, используемый i-м абонентом при кодировании БФМ; последний называется *сигнатурой* i-го абонента. Сигналы индивидуальных абонентов смешиваются в общем канале связи, создавая общий сигнал $u(t)$:

$$u(t) = \sum_{i=1}^{M} \alpha^{(i)} u^{(i)}(t) \tag{2.4.3}$$

где $\alpha^{(i)}$ — амплитудные (весовые) коэффициенты абонентов[13].

Выберем в качестве сигнатур множество *ортонормированных* сигналов:

$$Z_{ij} = \delta_{ij} \tag{2.4.4}$$

где δ_{ij} – символ Кронекера; Z_{ij} – корреляция между i-ой и j-ой сигнатурами:

$$Z_{ij} = \int_0^T x^{(i)}(t) x^{(j)}(t) dt$$

[13]Весовые коэффициенты учитывают различные мощности передатчиков у разных абонентов

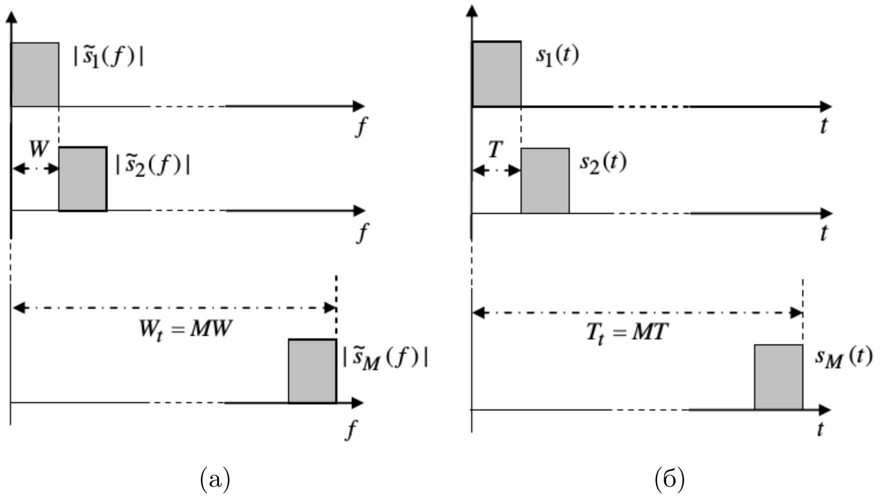


Рисунок 2.4.1: Разделение частотного и временного ресурса канала связи между абонентами при (а) FDM и (б) TDM

В этом случае для выделения амплитуды под-сигнала конкретного абонента достаточно рассчитать корреляцию между сигналом в канале (2.4.3), выбранном на заданном временном интервале $[(k-1)T : T]$ и сигнатурой m-го абонента:

$$Z_{u_k m} = \int_0^T x^{(m)}(t) \sum_{i=1}^{M} \alpha^{(i)} s_k^{(i)} x^{(i)}(t) dt = \sum_{i=1}^{M} \alpha^{(i)} s_k^{(i)} \delta_{mi} = \alpha^{(m)} s_k^{(m)}$$

Знак $Z_{u_k m}$ диагностирует k-й символ, переданный m-м абонентом:

$$s_k^{(i)} = \begin{cases} 1, & Z_{ui}(k) > 0 \\ -1, & Z_{ui}(k) < 0 \end{cases} \tag{2.4.5}$$

Системы мультиплексирования Чтобы реализовать описанный выше алгоритм необходимо подобрать набор ортогональных импульсных сигналов, для использования их в качестве сигнатур. Классическими подходами являются частотное и временное разделения сигналов.

При частотном разделении в качестве сигнатур выбираются радиоимульсы с различными базовыми частотами: $x^{(i)}(t) = \cos\left(2\pi f^{(i)} t\right)$ при $0 \le t \le T$. Как известно, гармонические функции с разными частотами взаимно ортогональны, соответственно, если $T \gg {}^1/_{f^{(i)}}$ радиоимпульсы с отличающимися частотами удовлетворяют требованиям условия (2.4.4). При FDM доступная для канала

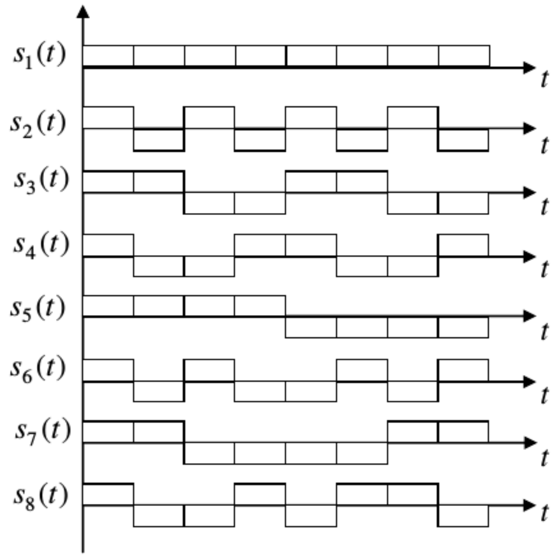


Рисунок 2.4.2: Функции Уолша порядка восемь

полоса частот Δf делится поровну между всеми M абонентами, каждому из которых выделяется сегмент, шириной $W = \Delta f/M$ (см. рис. 2.4.1а).

При временном разделении в качестве сигнатур выбираются короткие импульсы,сдвинутые друг относительно друга по времени: $x^{(i)} = x(t-i\Delta t)$. Если сдвиг по времени превышает длительность импульсов: $\Delta t \geq T$, то они не перекрываются, а следовательно заведомо являются ортогональными. При TDM временной интервал пересылки одного бита T_t разделяется поровну между M абонентами, так что каждому достается интервал $T = T_t/M$. Принцип TDM изображен на рис. 2.4.1б.

Помимо FDM и TDM, которые используются как в цифровых, так и в аналоговых системах связи, существует принцип кодового разделения сигналов от разных абонентов, реализуемый только в цифровых сетях. При CDM сигнатуры различаются ни по частоте или времени, а по форме импульсов. Типичным примером сигнатур, применяемых в сетях CDMA, являются *функции Уолша* — набор ортогональных импульсных сигналов прямоугольной формы. Функции Уолша характеризуются порядком M, который должен быть целым числом, являющимся степенью числа два: $M = 2^k$, $k = 1, 2, 3, ...$ Число функций в наборе совпадает с их порядком. Пример функций Уолша порядка восямь показан на рисунке 2.4.2. Как видно из рисунка, все сигналы Уолша взаимно ортогональны. Поэтому они могут быть использованы в качестве сигнатур. При этом, число абонентов, использующих общий канал связи, не может превышать порядка используемых функций Уолша.

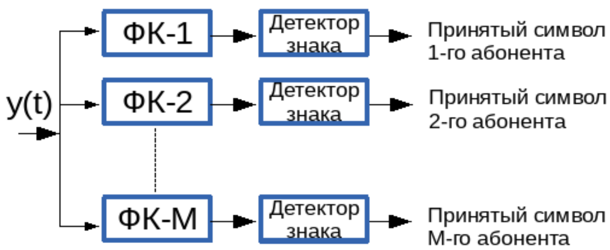


Рисунок 2.4.3: Демультиплексор CDMA

В системах связи, основанных на CDM выделение сигнала абонента происходит на основании правила корреляции (2.4.5). Демультиплексор представляет собой параллельно работающий набор фильтров-корреляторов, каждый из которых настроен на свою сигнатуру, например, на определенный номер функции Уолша. Знак сигнала с выхода i-го фильтра передается i-му абоненту в качестве принятого символа. Схема демультиплексора показана на рис. 2.4.3

2.4.1.4 Детектирование цифрового сигнала в присутствие шума

На разделение сигналов в общем канале связи влияет присутствие шума, который приводит к ошибкам в детектировании символов, так как форма принятых сигналов может отличаться от исходных. Шум — неконтролируемый сигнал сложной формы — $\xi(t)$, существующий в любых системах, работающих при температурах выше абсолютного нуля. В линейных каналах связи шум не смешивается с сигналом, а просто добавляется к нему:

$$y(t) = x(t) + \xi(t)$$

где $x(t)$ – исходный сигнал, $y(t)$ – сигнал на выходе канала. Такой шум называется *аддитивным*. Наличие шума искажает форму кодовых импульсов, что затрудняет их декодирование.

Шумовой сигнал характеризуется рядом параметров, наиболее важными из которых являются:

- Средняя мощность (или интенсивность), под которой понимают обычно дисперсию $D_\xi = \overline{\xi^2(t)}$ (верхняя черта означает усреднение по времени)[14].
- Спектр мощности

$$W_\xi(f) = \frac{\left\langle |F_\xi(f)|^2 \right\rangle}{\Delta t}$$

[14]Мы полагаем, что шумовой сигнал не имеет постоянной составляющей

где $W_\xi(f)$ – функция спектральной плотности мощности (производная от мощности по частоте), F_ξ – функция спектральной плотности сигнала (интегральное преобразование Фурье от сигнала), Δt – время действия сигнала; угловые скобки означают усреднение по ансамблю реализаций. W_ξ связана с дисперсией соотношением: $D_\xi = \int_{-\infty}^{\infty} W_\xi(f)df$. Шумы, создаваемые от множества независимых источников разной природы, обычно являются всечастотными, то есть их спектр на разных частотах примерно одинаков. Шум, спектр мощности которого одинаков для всех частот, называется *белым шумом*.

- Плотность вероятности (распределение) случайного сигнала — функция $\rho(\xi)$, которая характеризует его статистические свойства. Согласно теории вероятности, шумы создаваемые от множества независимых источников, характеризуются гауссовой плотностью вероятности:

$$\rho(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma_\xi}\right)$$

где $\sigma_\xi = \sqrt{D_\xi}$ – средне-квадратичное отклонение (интенсивность).

Следуя большинству учебников и руководств, будем считать канал связи каналом с *аддитивным белым гауссовым шумом* (АБГШ).

Для каналов с АБГШ вероятность ошибки "перепутывания" двоичных символов (P_{01}) оказывается связанной с расстоянием между кодовыми импульсами:

:

$$P_{01} = Q\left(\frac{d(x_0, x_1)}{2\sqrt{W_0}}\right) \tag{2.4.6}$$

где $Q(x)$ — известная в математике *дополнительная функция ошибок:*

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$

графики которой приведен на рис.2.4.4. Как видно из графика, $Q(x)$ монотонно уменьшается от 0.5 при $x = 0$ до нуля при $x \to \infty$, причем, при $x > 3$ уменьшение происходит очень быстро. Соответственно рост аргумента функции сопровождается уменьшением вероятности ошибок распознавания P_{01}. Уменьшение P_{01} является основной задачей разработчиков технологии цифровой сети. Как видно из формулы, эта задача решается (а) уменьшением интенсивности шума в канале связи и (б) увеличением расстояния между кодирующими импульсами. Если первая возможность определяется свойствами канала связи, то вторая зависит от способа кодирования.

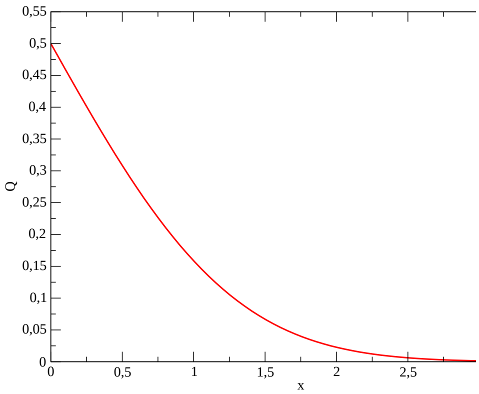


Рисунок 2.4.4: Вид функции $Q(x)$

Рассмотрим, при каком способе можно получить максимальное расстояние между кодовыми сигналами при ограничениях, накладываемых на энергию передаваемых импульсов: $E_0 = E_1 = E$. Для этого распишем выражение для квадрата расстояния:

$$\begin{aligned} d^2(x_0, x_1) &= \int_0^T (x_0 - x_1)^2 \, dt = \int_0^T x_0^2 dt + \int_0^T x_1^2 dt - 2\int_0^T x_0 x_1 dt = \\ &= 2E - 2Z_{01} = 2E\left(1 - z_{01}\right) \end{aligned}$$

где

$$z_{01} = \frac{Z_{01}}{E}$$

– нормированный на энергию сигналов коэффициент корреляции между ними; $z_{01} \in [-1:1]$. Поскольку величина энергии фиксирована, единственный способ увеличить расстояние – уменьшить значение коэффициента корреляции. При этом, наименьшее значение $z_{01} = -1$ достигается для случая противоположных кодовых символах: $x_0 = -x_1$, то есть как раз при бинарной фазовой модуляции. БФМ обеспечивает при заданной энергии символов и заданной интенсивности шума наименьшую вероятность ошибок декодирования:

$$P_{01}^{\text{БФМ}} = Q\left(\sqrt{\frac{E}{W_0}}\right)$$

Другой часто используемый способ кодирование – некоррелированный, когда кодирующие символы некореллированы друг с другом: $z_{01} = 0$. В этом случае вероятность ошибки декодирования становится несколько больше:

$$P_{01}^{\text{орт}} = Q\left(\sqrt{\frac{E}{2W_0}}\right)$$

Данный метод называется *ортогональным кодированием.*

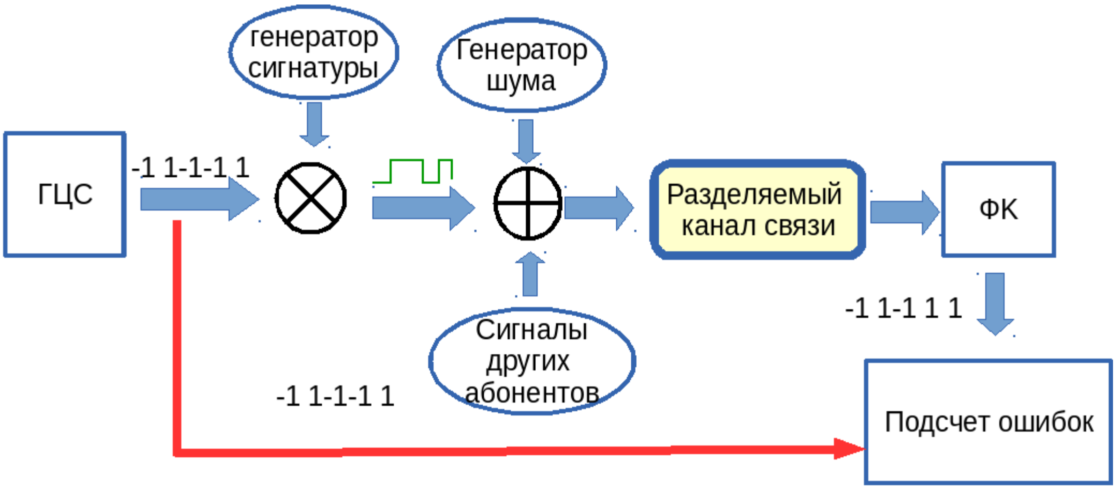


Рисунок 2.4.5: Функциональная схема (для одного абонента)

2.4.2 Экспериментальная часть

В ходе компьютерного эксперимента предлагается рассмотреть смешивание сигналов четырех абонентов в общем канале связи, в котором также присутствует аддитивный гауссов шум, а также измерить вероятность ошибки распознавания символов двоичного кодирования каждого из абонентов после его выделения методом фильтра-коррелятора Для этого используется компьютерная программа на LabView. Она позволяет задать двоичный цифровой сигнал произвольной длины; кодировать его с помощью функций Уолша четвертого порядка; смешивать сигналы от четырех абонентов в общем канале связи, добавить к сигналу гауссов шум с заданной мощностью; декодировать сигнал и измерить вероятность ошибки.

2.4.2.1 Описание используемой программы

Программа моделирует следующую последовательность операций цифровой сети (см. рис. 2.4.5):

- для каждого из четырех абонентов она генерирует случайну цифровую двоичную последовательность выбранной длины (N) в виде последовательности символов $\{-1, 1\}$ – блок "Генератор цифрового сигнала" (ГЦС);
- преобразует ее в физический сигнал, используя БФМ с кодовым сигналом в виде функции Уолша четвертого порядка, при этом номер функции Уолша соответствует номеру абонента — "Генератор сигнатуры" + "Мультиплексор";

- смешивает сигнал с сигналами от остальных трех абонентов — “Сумматор”;
- моделирует прохождение полученного сигнала по каналу АБГШ путем добавления к сигналу гауссова шума заданной мощности (W) от блока “Генератор шума”;
- декодирует трансформированный сигнал в последовательность двоичных символов при помощи использования фильтра-коррелятора — блок “ФК”;
- сопоставляет полученную последовательность с исходной и определяет вероятность ошибки: $P_{\text{ош}} = \frac{N_{\text{ош}}}{N}$ ($N_{\text{ош}}$ – число ошибочно распознанных символов)— блок “Подсчет ошибок”

В ходе работы программы имеются возможнсть визуально отслеживать исходный и прошедший через канал сигналы.

2.4.2.2 Передняя панель установки и органы управления

На рисунке 2.4.6 изображена передняя панель программы. Она состоит из следующих блоков:

- Общая панель, на которой задаются параметры и отображается информация, общие для всех абонентов. На ней располагаются:
  – управляющие элементы:
    * целочисленный цифровой контроллер, задающий длину последовательности N (Sequence Length) – определяет число двоичных символов в последовательности;
    * ручка регулировки интенсивности гауссового шума (Noise Intensity) в канале связи;
    * кнопка управляющая переходом из ждущего режима работы в непрерывные (Do not wait).
  – информационные элементы:
    * индикатор относительного числа ошибок распознавания переданных сигналов (Error Probability, %);
    * осциллограф, отображающий суммарный сигнал, генерируемый всеми абонентами, вместе с шумом (Common CDMA signal)
    * спектроанализатор, отображающий спектр мощности суммарного сигнала
      (Power Spectrum)

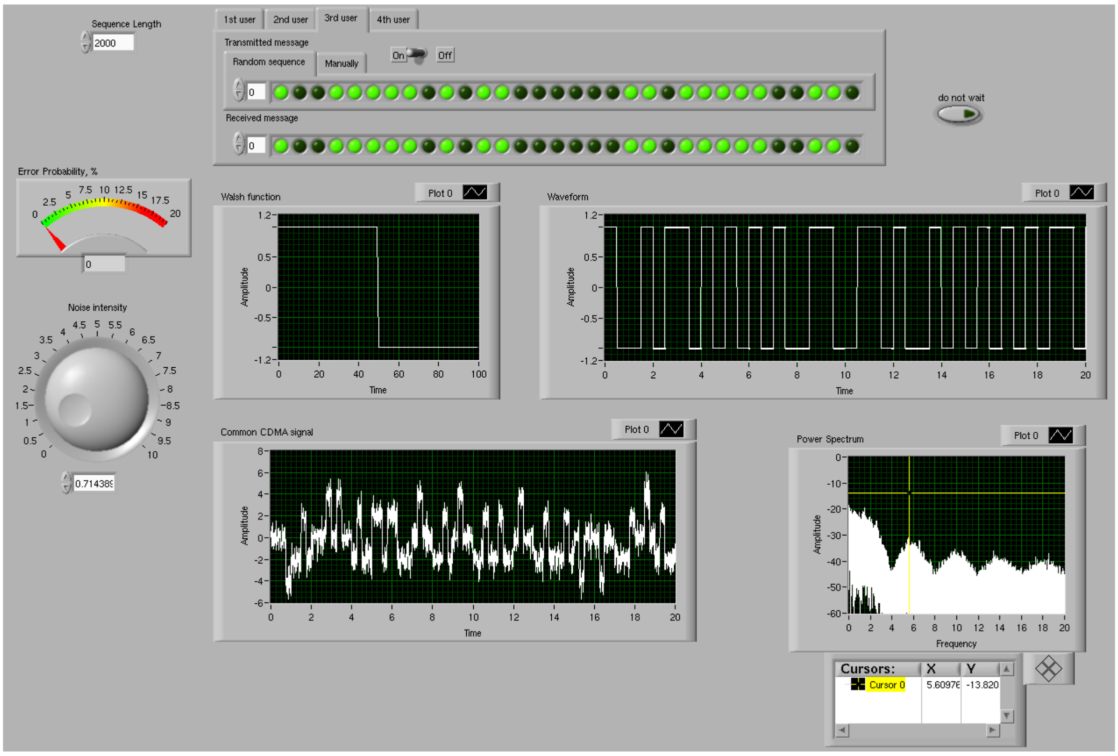


Рисунок 2.4.6: Передняя панель рабочей программы

- На общей панели также отображаются сигналы, связанные с индивидуальными абонентами:
  - осциллограф, отображающий форму сигнатуры (Walsh function);
  - осциллограф, отображающий сигнал, генерируемый абонентом (Waveform).
- Индивидуальные вкладки четырех абонентов, на каждой из которых размещаются:
  - переключатель управляющий включением/выключением сигнала от абонента (On - Off)
  - блок световых индикаторов, отображающий цифровую последовательность (этот же блок позволяет задавать цифровую последовательность), генерируемую абонентом: святящийся индикатор отображает символ “1”, погашенный – “0” (Random Sequence);
  - блок световых индикаторов, отображающий цифровую последовательность, принятую от данного абонента после демультиплексирования (Received message);

– вкладка "Random sequence — Manual", управляющая режимом создания цифровой последовательности: в первом случае (Random) последовательность создается автоматически генератором случайного сигнала, во втором случае (Manual) — вручную, при помощи блока световых индикаторов.

2.4.2.3 Порядок выполнения работы

1. Наблюдение за сигналами и их спектрами в канале CDM:
   a) определить сигнатуры каждого из абонентов;
   b) задать длину цифровой последовательности;
   c) последовательно включая сигналы абонентов, проследить, как меняется форма сигнала в канале связи и его спектра;
   d) измерить как меняется ширина спектра на уровне 3 dB, 10 dB, 20 dB при увеличении числа абонентов (использовать курсорные измерения).
2. Измерение устойчивости технологии CDM к действию гауссова шума:
   a) задать длину цифровой последовательности (для большей точности длина должна составлять несколько тысяч символов);
   b) меняя интенсивность шума (D), снять зависимость вероятности ошибок декодирования от D;
   c) провести измерения для 1, 2, 3 и 4 подключенных абонентов;
   d) построить графики зависимостей и определить, влияет ли число абонентов на устойчивость метода к шуму.

2.4.3 Содержание отчета по работе

1. Краткая теория
2. Описание выбранных сигналов с иллюстрациями временных реализаций и спектров.
3. Описание проведенных экспериментов и расчетов с указанием всех используемых значений параметров и характеристик.
4. Графики всех построенных зависимостей.
5. Выводы, содержащие анализ полученных экспериментальных результатов, с учетом имеющихся теоретических зависимостей.

2.5 Распознавание сигналов нейронной сетью

Цель работы: Рассмотрреть технологию обучения с учителем для простой нейронной сети. Исследовать возможность использования нейронной сети для распознавания импульсных сигналов

2.5.1 Краткие теоретические сведения

2.5.1.1 Введение

Искусственные нейронные сети (ИНС) — сети, состоящие из простых вычислительных блоков, называемых *искусственными нейронами* (ИН). Прототипом ИН служит биологический нейрон — клетка, из которой формируется нервная система человека и животных. Однако, ИН не является аналогом биологического нейрона. Его задача – не моделирование работы последнего, а выполнение ряда вычислительных задач, связанных с обработкой сигналов. Простые задачи могут обрабатываться одним нейроном, более сложные требуют кооперации множества нейронов, объединенных в ИНС. В частности, нейронные сети выполняют следующие задачи:

- классификация сигналов;
- аппроксимация функций;
- предсказание временных рядов;
- кластеризация;
- распознавание сигналов

Нейронные сети характеризуются (а) типом нейронов и (б) топологией. Наиболее простым ИН является сумматор сигналов с нелинейным ограничителем амплитуды выходного сигнала. Наиболее простая топология ИНС – *сети прямого распространения*. В данном виде сетей нейроны объединяются в *слои нейронов*, каждый из которых представляет собой множество параллельно работающих нейронов с общим входным сигналом. В свою очередь, слои нейронов соединяются друг с другом каскадно, формируя тем самым многослойную сеть прямого распространения.

2.5.1.2 Искусственный нейрон

Искусственный нейрон представляет собой невзаимный многополюсник с m входными портами и одним выходным портом, работа которого описывается

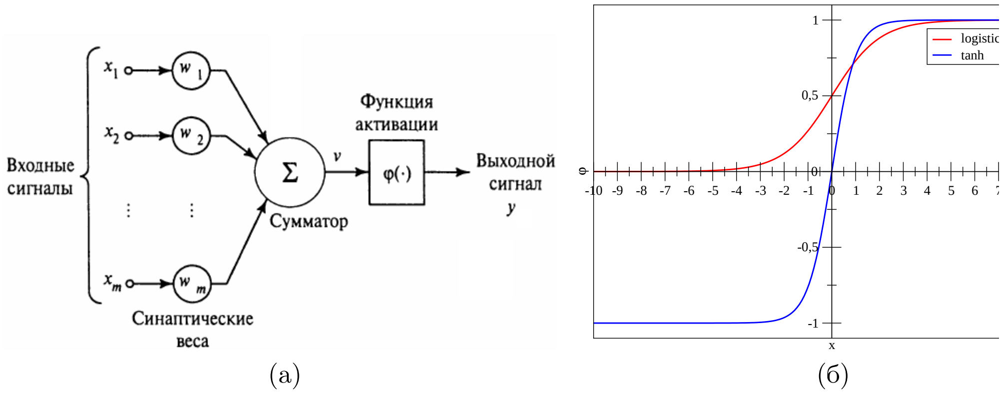


Рисунок 2.5.1: Искусственный нейрон (а) и функции активации (б)

уравнением:

$$y = \varphi\left(\sum_{i=1}^{m} w_i x_i\right) \tag{2.5.1}$$

где x_i – входной сигнал на i-м входе, y – выходной сигнал; w_i – синаптический вес i-го входа; $\varphi(x)$ – функция активации. Структурная схема нейрона показана на рис. 2.5.1а. Уравнение (2.5.1) может быть записано в векторной форме:

$$y = \varphi\left(\bar{w}\bar{x}\right) \tag{2.5.2}$$

где $\bar{x} = [x_1, x_2, ...x_m]^T$, $\bar{w} = [w_1, w_2, ...w_m]^T$ — векторы с соответствующими компонентами, знак T означает транспонирование.

В качестве функций активации используются обычно следующие:

- линейная: $\varphi(x) = x$;
- логистическая: $\varphi(x) = \frac{1}{1+\exp(-x)}$;
- гиперболический тангенс: $\varphi(x) = \tanh(x)$.

В первом случае нейрон представляет собой линейный четырехполюсник (линейный фильтр), во втором и третье — нелинейный четырехполюсник (нелинейный фильтр). Графики функций активации для нелинейных нейронов представлены на рис. 2.5.1б. Как видно из графиков, используемые функции активации (а) монотонно возрастают; (б) отображают бесконечный диапазон значений $(-\infty : \infty)$ в конечный интервал выходных значений: $[0 : 1]$ (для логистической функции) или $[-1 : 1]$ (для гиперболического тангенса). Таким образом, за счет использования подобных функций реализуется режим насыщения выходного сигнала: каков бы ни был входной сигнал, выходной является ограниченным по величине.

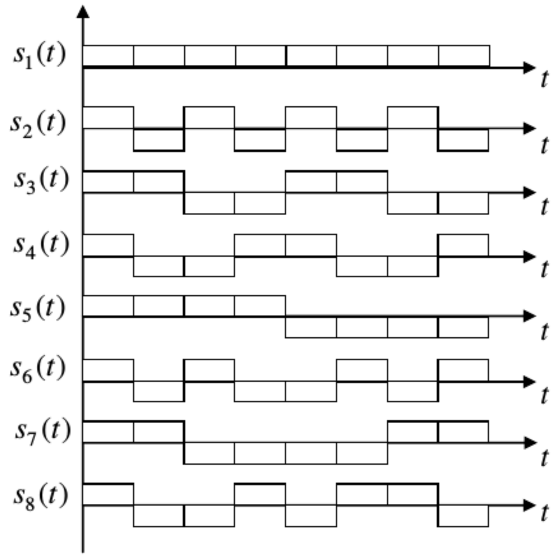


Рисунок 2.5.2: Функции Уолша порядка восемь

2.5.1.3 Настройка (обучение) нейрона

Прежде чем нейрон можно использовать, его необходимо настроить. Настройка нейрона называется его *обучением*. Она заключается в выборе таких значений синаптических весов $\bar{w}$, которые превращают нейрон в цифровой фильтр с заданными свойствами. Такой фильтр должен преобразовывать множество входных сигналов (m-векторов): $\left\{\bar{X}_i\right\}_{i=1}^{N}$ в множество соответствующих (целевых) значений $\{d_i\}_{i=1}^{N}$:

$$\varphi\left(\bar{w}\bar{X}_i\right) = d_i \tag{2.5.3}$$

Пусть, например, необходимо обучить нейрон так, чтобы он распознавал сигналы определенной формы, выполняя тем самым функцию детектора сигналов. Пусть, к примеру в цифровой сети в качестве кодовых импульсов используются сигналы в виде функций Уолша $s_k(t)$, $k = 1, 2, ..., 8$, вид которых показан на рис. 2.5.2 Оцифровав сигналы посредством дискретной выборки с интервалом τ, мы получим множество восьми цифровых сигналов в виде m-векторов:

$$\bar{S}_k = \left[s_k(0), s_k(\tau), s_k(2\tau), ..., s_k((m-1)\tau)\right]^T$$

В качестве целевых значений выберем номер соответствующей функции Уолша: $d_k = k$. Тогда, задачей обучения будет выбор m-вектора синаптических весов, так чтобы обеспечить равенство: $\varphi\left(\bar{w}\bar{S}_k\right) = k$ для всех k.

2.5.1.4 Обучение по методу градиентного спуска

Существуют различные способы обучения нейронов. Наиболее распространенная группа методов называется *обучение с учителем*. Обучение с учителем начинается с формирования обучающего множества — набора обучающих пар $\{\mathbf{P}_i\}_{i=1}^{K}$, каждая из которых представляет собой совокупность входного вектора и целевого значения:

$$\mathbf{P}_i = \left(\bar{X}_i, d_i\right)$$

После этого синаптические веса нейрона инициализируют случайными числами и организуют итерактивную процедуру их настройки в виде отображения последования первого порядка:

$$\bar{w}(n+1) = f(\bar{w}(n)) \tag{2.5.4}$$

где $n = 0, 1, 2, ...$ — номер итерации, f — некоторая функция, определяющая правило подстройки синаптических связей на одном шаге; $\bar{w}(0) = \bar{\xi}$ — случайный вектор. Отображение (2.5.4) часто записывают в форме:

$$\bar{w}(n+1) = \bar{w}(n) + \Delta\bar{w}(n)$$

где $\Delta\bar{w}(n)$ — подстройка синаптических весов на n-ом шаге алгоритма.

Прежде чем определить вид функции f найдем критерий правильности настройки нейрона. Для этого определим ошибку настройки по одной обучающей паре:

$$\varepsilon_i = y_i - d_i \tag{2.5.5}$$

где $y_i = \varphi\left(\bar{w}\bar{X}_i\right)$ — выходное значение нейрона при входном векторе $\bar{X}_i$. Для того, чтобы количественно охарактеризавать работу нейрона по всей совокупности обучающих векторов, введем *целевую функцию*, как сумму квадратов ошибок по всем обучающим парам:

$$\Phi\left(\bar{w}\right) = \sum_{i=1}^{K} \varepsilon_i^2 \tag{2.5.6}$$

Φ — неотрицательная величина, равная нулю только при точной настройке нейрона. Ее значение может служить критерием настройки: чем лучше настроен нейрон, тем меньше Φ. Таким образом, задача обучения нейрона – нахождение таких коэффициентов $\bar{w} = \bar{W}$, которые обращают целевую функцию в глобальный минимум:

$$\Phi\left(\bar{W}\right) \leq \Phi\left(\bar{w}\right)$$

для любых $\bar{w}$.

Построим процедуру обучения так, чтобы на каждой итерации целевая функция уменьшалась: $\Phi(\bar{w}(0)) \geq \Phi(\bar{w}(1)) \geq \Phi(\bar{w}(2)) \geq ...$ Для этого используется *метод градиентного спуска.* Градиентом скалярной функции многих переменных называется вектор, компонентами которого являются частные производные функции по ее переменным:

$$\mathrm{grad}\left(\Phi\left(\bar{w}\right)\right) = \frac{d\Phi}{d\bar{w}} = \left[\frac{\partial\Phi}{\partial w_1}, \frac{\partial\Phi}{\partial w_2}, ..., \frac{\partial\Phi}{\partial w_m}\right]^T \tag{2.5.7}$$

Значение градиента задает направление в пространстве $\bar{w}$ в котором функция возрастает наиболее быстро. Соответственно направление, противоположное направлению градиента — направление наискорейшего убывания функции. Выберем функцию f таким образом, чтобы изменение вектора синаптических весов было противоположно направлено вектору градиента:

$$\Delta\bar{w}(n) = -\eta \mathrm{grad}\left(\Phi\left(\bar{w}(n)\right)\right)$$

где $\eta \in [0:1]$ — неотрицательный параметр, называемый *скоростью обучения.* Если величина скорости достаточно мала ($\eta \to 0$), то на каждом шаге итерационного алгоритма значение целевой функции будем уменьшаться. Поэтому, при $n \to \infty$ целевая функция придет к наименьшему значению — локальному минимуму.

Найдем величину градиента от целевой функции в явном виде. Для этого продифференцируем ее по аргументу $\bar{w}$:

$$\frac{d\Phi}{d\bar{w}} = 2\sum_{i=1}^{K} \varepsilon_i \frac{d\varepsilon_i}{d\bar{w}} = 2\sum_{i=1}^{K} \varepsilon_i \frac{dy_i}{d\bar{w}}$$

Найдем производную ${}^{dy_i}/_{d\bar{w}}$, используя правило дифференцирования сложной функции:

$$\frac{d\varphi\left(\bar{w}\bar{X}_i\right)}{d\bar{w}} = \varphi' \bar{X}_i$$

где φ' — производная функции активации по своему аргументу. Используя полученные соотношения запишем итоговое правило для подстройки коэффициентов нейрона на одном шаге алгоритма:

$$\Delta\bar{w}(n) = -\eta \sum_{i=1}^{K} \delta_i \bar{X}_i \tag{2.5.8}$$

где $\delta_i = \varphi'\varepsilon_i$ — *обобщенная ошибка.* Уравнение (2.5.8) называют *дельта-правилом.*

Величина обобщенной ошибки, входящая в дельта-правила может быть легко определена из вида функции активации. Для линейной функции, она равна единице. Для логистической функции $\varphi' = y_i\,(1 - y_i)$, соответственно дельта-правило выражается как:

$$\Delta\bar{w}(n) = -\eta \sum_{i=1}^{K} \varepsilon_i y_i\,(1 - y_i)\,\bar{X}_i \qquad (2.5.9)$$

Для гиперболического тангенса $\varphi' = (1 - y_i)^2$, соответственно дельта-правило выражается как[15]:

$$\Delta\bar{w}(n) = -\eta \sum_{i=1}^{K} \varepsilon_i \left(1 - y_i^2\right) \bar{X}_i \qquad (2.5.10)$$

2.5.1.5 Особенности реализации алгоритма обучения

Формула (2.5.8) определяет процедуру обучения нейрона. Однако, успешность процесса обучения зависит от нескольких факторов:

- Выбор начальных весовых коэффициентов $\bar{w}(0)$. Начальные условия выбирают обычно в виде случайных чисел, равномерно распределенных в диапазоне $[-1/\sqrt{m} : 1/\sqrt{m}]$, тем не менее, при разных условиях результат обучения может быть существенно разным. Это связано с тем, что метод градиентного спуска приводит целевую функцию к одному из минимумов, но не гарантирует, что этот минимум является глобальным. Исключением является линейный нейрон, для которого существует единственный минимум целевой функции; в случае нелинейных нейронов $\Phi\,(\bar{w})$ может иметь несколько локальных минимумов. Поскольку значение градиента в экстремуме (минимуме) становится равным нулю, после попадания в локальный минимум алгоритм подстройки весов перестает работать и нейрон "застревает" в нем.

- Выбор скорости обучения. Итерационная процедура (2.5.8) гарантирует сходимость целевой функции к одному из локальных минимумов лишь при $\eta \to 0$. На практике это означает, что при слишком большом выборе η алгоритм может оказаться расходящимся и обучение не состоится. С другой стороны, слишком малое значение скорости приводит к замедлению процесса обучения. Поэтому выбор правильного значения η – вопрос компромиса между скоростью и надежностью обучения.

[15] выражения для производных логистической и тангенциальной функций предлагается вывести самостоятельно

- Критерий остановки алгоритма. Качество настройки нейрона оценивается по значению целевой функции. Поэтому естественным критерием является достижение ею некоторого порогового значения μ при достижении которого алгоритм завершают. Однако, в ходе обучения возможно попадание функции $\Phi(\bar{w})$ в локальный минимум, величина которого больше μ. В точке минимума величина градиента становится равной нулю, поэтому дальнейшее обучение прекращается. Отследить достижение локального минимума можно, введя пороговое значение для градиента μ_g. Обучение прекращают, если $|\mathrm{grad}(\Phi(\bar{w}))| \leq \mu_g$. Наконец, возможна ситуация, когда при неудачном выборе скорости обучения алгоритм настройки не сходится. В этом случае оба предыдущих критерия не будут работать. Чтобы завершить работу алгоритма вводят максимальное число итераций N, после которых настройку завершают.

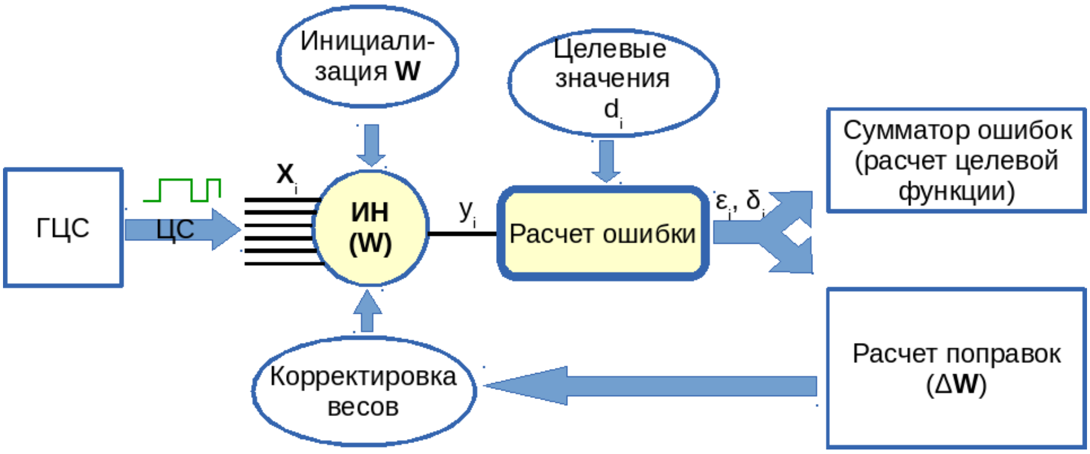
2.5.2 Экспериментальная часть

В ходе компьютерного эксперимента предлагается рассмотреть задачу детектирования цифровых сигналов посредством простейшей ИНС, состоящей из одного нейрона. Работа разбивается на две под-задачи: (а) обучение нейрона и (б) исследование работоспособности обученного нейрона при наличии помех в канале связи. Для исследования используется компьютерная программа на LabView. Она позволяет смоделировать искусственный нейрон с логистической функцией активации; задать множество обучающее множество из цифровых сигналов произвольной формы; провести обучение нейрона по методу градиентного спуска; моделировать искажение сигналов за счет аддитивного гауссова шума, изменения его амплитуды и формы; моделировать прохождение искаженного сигнала через нейронную сеть и измерить вероятность ошибки декодирования.

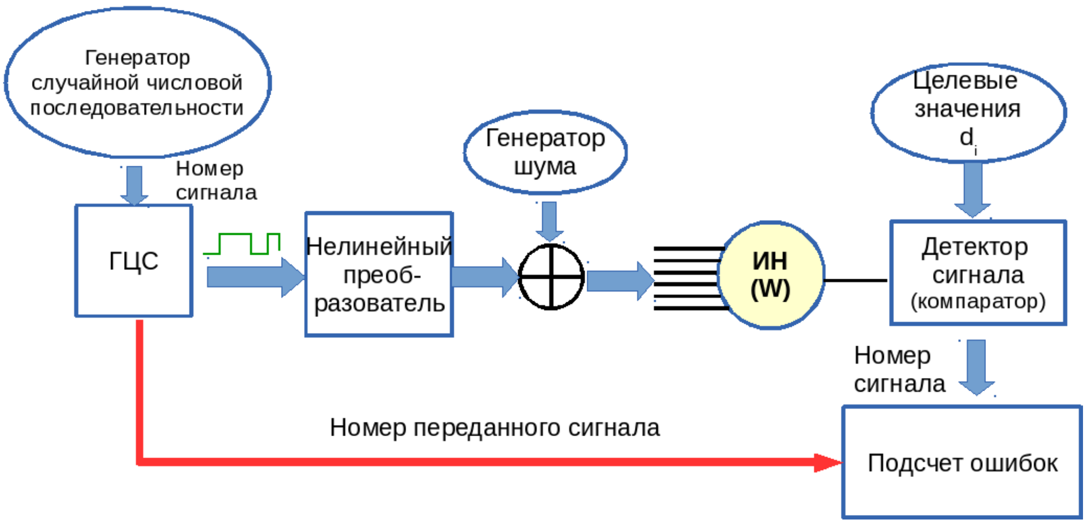
2.5.2.1 Описание используемой программы

Программа реализует две задачи: (а) обучение нейрона и (б) детектирование сигналов посредством обученного нейрона. Структурная схема соответствующих первой подпрограммы представлена на рис.2.5.3а. Она реализует обучение нейрона градиентным методом, используя набор обучающих пар $\left\{\bar{X}_i, d_i\right\}_{i=1}^{M}$:

- генерирует M цифровых последовательностей выбранной длины (N) в виде входных векторов $\left\{\bar{X}_i = \left[x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, ..., x_N^{(i)}\right]^T\right\}_{i=1}^{M}$ — блок “Генератор цифрового сигнала” (ГЦС);



(а)



(б)

Рисунок 2.5.3: Функциональная схема программ (а) обучения нейрона и (б) использования нейрона в качестве детектора

- для каждого из M векторов задает целевое значение $\{d_1, ..., d_M\}$ — блок "Целевые значения";

- входные вектора $\bar{X}_i$ подаются на вход искусственного нейрона с логистической функцией активации (блок "ИС"), начальные значения синаптических весов которого ($\bar{W}$) инициализируются с помощью генератора случайных чисел с равномерным распределением — блок "Инициализация $\bar{W}$";

- значение с выхода ИН (y_i) сравнивается с соответствующим целевым значением и вычисляются величины ошибки и обобщенной ошибки (ε_i, δ_i) — блок "Расчет ошибок";

- полученные значения ошибок возводятся в квадрат и суммируются, расчитывая значение целевой функции (2.5.6) — блок "Сумматор ошибок";

- одновременно, полученные значения обобщенных ошибок используются для расчета поправок к синаптическим весам нейрона ($\Delta\bar{W}$) согласно формуле (2.5.8) — блок "Расчет поправок";

- наконец, полученные значения поправок используются для корректировки весов нейрона: $\bar{W} \to \bar{W} + \Delta\bar{W}$ — блок "Корректировка весов"

Указанная последовательность действий составляет один шаг итерационной процедуры настройки весов нейрона. Последовательность таких шагов позволяет осуществлять постепенную настройку нейрона, качество которой оценивается по значению целевой функции. Алгоритм завершается, когда целевая функция достигает установленного малого значения, после чего нейрон считается настроенным.

Структурная схема программы, реализующая использование обученного нейрона для детектирования сигналов приведена на рис. 2.5.3б. Она позволяет измерить вероятность ошибки детектирования сигналов $\left\{\bar{X}_i\right\}_{i=1}^{M}$ при искажении их формы за счет помех в виде шума или нелинейных искажений:

- генерирует случайную последовательность номеров сигналов $\{i_1, i_2, ..., i_k\}$ — блок "Генератор случайной числовой последовательности";

- формирует последовательность идущих друг за другом соответствующих цифровых сигналов $\left\{\bar{X}_{i_1}, \bar{X}_{i_2}, ..., \bar{X}_{i_k}\right\}$ — блок "ГЦС";

- моделирует искажения полученного сигнала за счет преобразования $x \to x + \alpha x^2$ и изменения амплитуды сигнала — блок "Нелинейный преобразователь";

- моделирует прохождение полученного сигнала по каналу АБГШ путем добавления к сигналу гауссова шума заданной мощности от блока "Генератор шума";

- подает трансформированный сигнал на вход обученного нейрона (блок "ИН"), получая с выхода последнего последовательность числовых значений $\{y_1, y_2, ..., y_k\}$;

- детектирует (определяет) номера переданных сигналов; принятым полагается сигнал $\bar{X}_m$, целевое значение которого (d_m) ближе всего к выходному значению y_i — блок "Детектор сигнала";

- сопоставляет полученную последовательность номеров сигналов с исходной $\{i_1, i_2, ..., i_k\}$ и определяет вероятность ошибки: $P_{\text{ош}} = \frac{M_{\text{ош}}}{M}$ ($M_{\text{ош}}$ – число ошибочно распознанных символов)— блок "Подсчет ошибок"

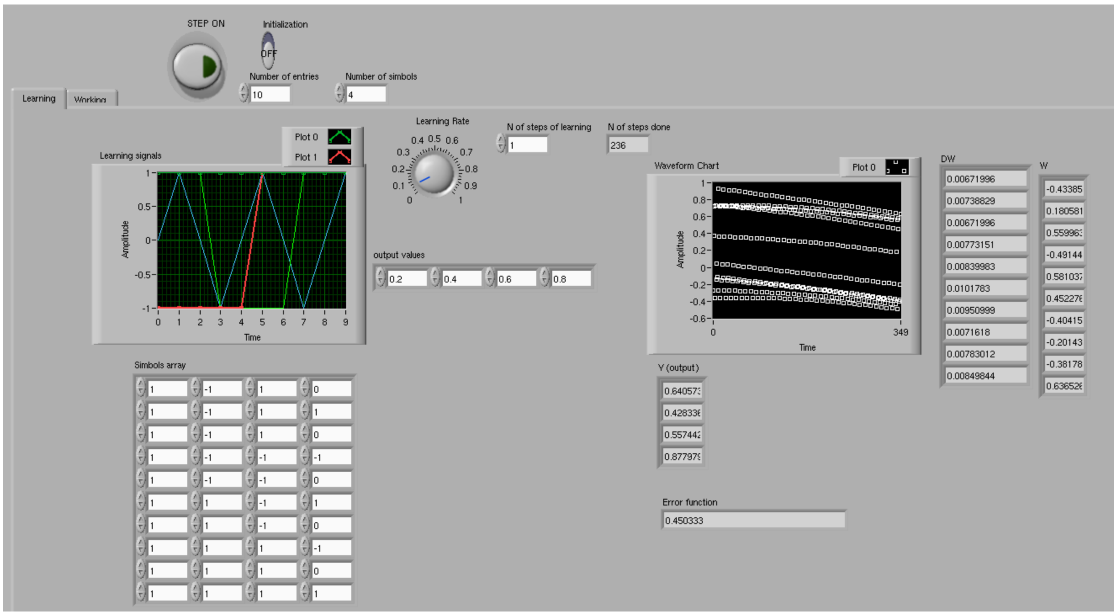
В ходе работы программы имеются возможнсть визуально отслеживать значения синаптических весов нейрона, исходный и прошедший через канал сигналы.

2.5.2.2 Передняя панель установки и органы управления

На рисунке 2.5.4 изображена передняя панель программы. Она состоит из следующих блоков:

- Общая панель, на которой задаются параметры и отображается информация, характеризующие нейрон. На ней располагаются:
  - целочисленный цифровой контроллер, задающий размерность входных векторов нейрона N (Number of entries);
  - целочисленный цифровой контроллер, задающий число входных векторов M (Number of simbols);
  - кнопка, включающая начальную инициализацию нейрона (Initialisation);
  - кнопка, перехода к слеюующему шагу обучения/работы нейрона.

- Панель обучения нейрона (Learning), на которой размещаются:
  - массив числовых контроллеров, формирующий цифровые сигналы $\bar{X}_i$, размерность каждого сигнала должна совпадать с N, а их число с M (Symbols array);
  - осциллограф, отображающий форму сигналов $\bar{X}_i$ (Learning signals);
  - массив из M числовых контроллеров, задающий целевые значения d_i (output values);



(а)

(б)

Рисунок 2.5.4: Передняя панель рабочей программы

  - ручка, управляющая скоростью обучения η (Learning rate);
  - целочисленный цифровой контроллер, задающий число итераций (N of steps of learning);
  - целочисленный цифровой индикатор, отображающий число итераций с начала обучения (N of steps done);
  - графопостроитель, отображающий график изменения синаптических весов нейрона в ходе обучения (Waveform chart);
  - массив числовых индикаторов, отображающий текущие значения весов нейрона (W);
  - массив числовых индикаторов, отображающий текущие значения подстройки весов нейрона (dW);
  - массив числовых индикаторов, отображающий текущие значения выходных сигналов нейрона (Y (output));
  - числовой индикатор, отображающий значение целевой функции ошибок (Error function).

- Панель работы нейрона в качестве детектора цифрового сигнала (Working), на которой размещаются:
  - целочисленный числовой контроллер, задающий число передаваемых символов (N of symbols);
  - блок числовых индикаторов, отображающий цифровую последовательность генерируемых сигналов (Input sequence);
  - блок числовых индикаторов, отображающий цифровую последовательность, принятую после детектирования нейроном (Output sequence);
  - осциллограф, отображающий передаваемый сигнал (Input signal);
  - осциллограф, отображающий принимаемый сигнал (Output signal);
  - числовые индикаторы, отображающие число ошибок и вероятность ошибки детектирования, соответственно (N of errors) и (Probability of Errors);
  - ручка, управляющая величиной нелинейных искажений α (Nonlinear distortion);
  - ручка, управляющая интенсивностью (средне-квадратичным отклонением) аддитивного гауссового шума (Gauss noise);
  - ручка, управляющая интенсивностью сигнала (Amplification).

2.5.2.3 Порядок выполнения работы

1. Обучение нейрона:
    a) задать размерность входных векторов нейрона и их;
    b) сформировать форму цифровых сигналов;
    c) задать скорость обучения нейрона;
    d) инициализировать веса нейрона;
    e) провести последовательное обучение нейрона, отслеживая величину ошибки;
    f) остановить процесс обучения, при достижении величины ошибки заданного значения.
2. Измерение устойчивости работы нейрона в качестве детектора сигналов к действию гауссова шума и нелинейных искажений:
    a) задать длину цифровой последовательности (для большей точности длина должна составлять несколько тысяч символов);
    b) меняя интенсивность шума (D), снять зависимость вероятности ошибок детектирования от D;
    c) меняя коэффициент искажений (α), снять зависимость вероятности ошибок детектирования от α;

2.5.3 Содержание отчета по работе

1. Краткая теория
2. Описание выбранных сигналов с иллюстрациями временных реализаций.
3. Описание проведенных экспериментов и расчетов с указанием всех используемых значений параметров и характеристик.
4. Графики всех построенных зависимостей.
5. Выводы, содержащие анализ полученных экспериментальных результатов.

3 Случайные процессы и сигналы

3.1 Исследование фильтра Калмана

Цель работы: знакомство с работой дискретного квазиоптимального фильтра Калмана

3.1.1 Краткая теория

Одним из широко используемых на практике инструментов фильтрации данных является дискретный фильтр Калмана. Рассмотрим принцип его функционирования на простейшем примере фильтрации одномерной последовательности данных, т.е. будем полагать, что $X(t)$, $X_{\text{с}}(t, \lambda(t))$, $\lambda(t)$, $X_{\text{шн}}(t)$ — скалярные вещественные функции. Пусть уравнения наблюдения и сообщения являются линейными относительно λ, и имеют следующий простой вид:

$$X(t) = H(t)\lambda(t) + X_{\text{шн}}(t); \tag{3.1.1}$$

$$\frac{d\lambda}{dt} + \alpha(t)\lambda = u(t) + X_{\text{фш}}(t); \tag{3.1.2}$$

где $H(t)$, $u(t)$, $\lambda(t)$ — известные детерминированные функции времени. В частном случае это могут быть константы H, u, λ. Источники шума $X_{\text{шн}}(t)$ и $X_{\text{фш}}(t)$ будем считать независимыми, белыми и гауссовыми. Начальное распределение величины $\lambda(t_0) = \lambda_0$ также будем полагать гауссовым. Таким образом, выполняются все условия линейной фильтрации. Кроме того, будем представлять источники шума в виде

$$X_{\text{шн}}(t) = \sqrt{2D_{\text{шн}}}n_{\text{шн}}(t),\ X_{\text{фш}}(t) = \sqrt{2D_{\text{фш}}}n_{\text{фш}}(t). \tag{3.1.3}$$

Будем считать, что измерения производятся в дискретные моменты времени t_i ($i = 1, 2, 3, \ldots$) с постоянным шагом дискретизации $t_{i+1} - t_i = \Delta t$. Обозначим $X(t_i) = X_i$, $\lambda(t_i) = \lambda_i$, $H(t_i) = H_i$, $u(t_i)\Delta t = U_i$, $1 - \alpha(t_i)\Delta t = \beta_i$. Вместо непрерывных источников шума $X_{\text{шн}}(t)$ и $X_{\text{фш}}(t)$ введем дискретные источники стандартного гауссова белого шума $N_i^{\text{шн}}$ и $N_i^{\text{фн}}$:

$$X_{\text{шн}}(t) \to \sigma_{\text{шн}} N_i^{\text{шн}} = \frac{1}{\Delta t} \int\limits_{t_i}^{t_i+\Delta t} X_{\text{шн}}(t)dt,\ X_{\text{фш}}(t) \to \sigma_{\text{фш}} N_i^{\text{фш}} = \frac{1}{\Delta t} \int\limits_{t_i}^{t_i+\Delta t} X_{\text{фш}}(t)dt. \tag{3.1.4}$$

Откуда следует, что

$$\sigma_{\text{шн}}^2 = \frac{2D_{\text{шн}}}{\Delta t},\ \sigma_{\text{фш}}^2 = \frac{2D_{\text{фш}}}{\Delta t} \tag{3.1.5}$$

где $sigma_{\text{шн}}$ и $sigma_{\text{фш}}$ — среднеквадратические значения для дискретного шума наблюдения и дискретного формирующего шума, соответственно. Вместо уравнений (3.1.1) и (3.1.2) приходим к следующим уравнениям с дискретным временем:

$$X_i = H_i \lambda_i + \sigma_{\text{шн}} N_i^{\text{шн}}; \tag{3.1.6}$$

$$\lambda_i = \beta_{i-1}\lambda_{i-1} + U_{i-1} + \sigma_{\text{фш}} N_{i-1}^{\text{фш}}; \tag{3.1.7}$$

Рассмотрим фильтр, оптимальный по критерию Байеса. Для гауссова распределения наивероятнейшее значение совпадает со средним значением. Таким образом, в качестве оптимальной оценки при заданной последовательности результатов наблюдений $x_0, x_1, \ldots x_i$ берется условное среднее:

$$y_i = \langle \lambda_i | x_0, x_1, \ldots x_i \rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda_i p(\lambda_i | x_0, x_1, \ldots x_i) d\lambda_i. \tag{3.1.8}$$

Это одно из множества значений случайной величины Y_i на выходе фильтра, получаемых для разных реализаций последовательности наблюдений. Точность оценки (3.1.9) для данной последовательности наблюдений $x_0, x_1, \ldots x_i$ (средний квадрат ошибки) есть условная дисперсия величины λ_i:

$$\hat{\sigma}_{\lambda_i}^2 = \langle (\lambda_i - y_i)^2 | x_0, x_1, \ldots x_i \rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\lambda_i - y_i)^2 p(\lambda_i | x_0, x_1, \ldots x_i) d\lambda_i. \tag{3.1.9}$$

Можно показать, что для условной плотности вероятности $p(\lambda_i | x_0, x_1, \ldots x_i)$ справедливо равенство:

$$p(\lambda_i | x_0, x_1, \ldots x_i) = C_0 p(\lambda_i | x_0, x_1, \ldots x_{i-1}) p(x_i | \lambda_i), \tag{3.1.10}$$

где коэффициент C_0 не зависит от λ_i. Действительно, можно представить:

$$p(\lambda_i x_i | x_0, x_1, \ldots x_{i-1}) = p(x_i | x_0, x_1, \ldots x_{i-1}) p(\lambda_i | x_0, x_1, \ldots x_{i-1}, x_i) \tag{3.1.11}$$

С другой стороны

$$p(\lambda_i x_i|x_0, x_1, \dots x_{i-1}) = p(\lambda_i|x_0, x_1, \dots x_{i-1}) p(x_i|x_0, x_1, \dots x_{i-1}, \lambda_i) \qquad (3.1.12)$$

Причем, из уравнения наблюдения (3.1.6) следует независимость значения x_i от предшествующих наблюдений $x_0, x_1, \dots x_i$ при заданном значении λ_i, т.е.

$$p(x_i|x_0, x_1, \dots x_{i-1}, \lambda_i) = p(x_i|\lambda_i). \qquad (3.1.13)$$

Из выражений (3.1.11) – (3.1.13) следует выражение (3.1.10), где

$$C_0 = \frac{1}{p(x_i|x_0, x_1, \dots x_{i-1})} \qquad (3.1.14)$$

В правой части равенства (3.1.10) сомножители представляют собой гауссовы распределения. Используя уравнения (3.1.6) – (3.1.7) легко найти средние значения и дисперсии этих условных распределений:

- $p(x_i|\lambda_i)$ — гауссово распределение со средним значением

$$\langle X_i|\lambda_i\rangle = H_i\lambda_i + \sigma_{\text{шн}}\langle N_i^{\text{шн}}\rangle = H_i\lambda_i$$

  и дисперсией

$$\langle(X_i - \langle X_i|\lambda_i\rangle)^2|\lambda_i = (H_i\lambda_i + \sigma_{\text{шн}} N_i^{\text{шн}} - H_i\lambda_i)^2|\lambda_i\rangle = \sigma_{\text{шн}}^2;$$

- $p(\lambda_i|x_0, x_1, \dots x_{i-1})$ — гауссово распределение со средним значением

$$\langle\lambda_i|x_0, x_1, \dots x_{i-1}\rangle = \beta_{i-1}\langle\lambda_{i-1}|x_0, x_1, \dots x_{i-1}\rangle + U_{i-1} + \sigma_{\text{фш}}\langle N_{i-1}^{\text{фш}}\rangle = \beta_{i-1} y_{i-1} + U_{i-1}$$

  и дисперсией

$$\begin{aligned} &\langle(\lambda_i - \langle\lambda_i|x_0, x_1, \dots x_{i-1}\rangle)^2|x_0, x_1, \dots x_{i-1}\rangle = \\ &= \langle(((\beta_{i-1}\lambda_{i-1} + U_{i-1} + \sigma_{\text{фш}} N_{i-1}^{\text{фш}}) - (\beta_{i-1} y_{i-1} + U_{i-1}))^2|x_0, x_1, \dots x_{i-1}\rangle = \\ &= \langle(\beta_{i-1}(\lambda_{i-1} - y_{i-1}) + \sigma_{\text{фш}} N_{i-1}^{\text{фш}})^2|x_0, x_1, \dots x_{i-1}\rangle = \beta_{i-1}^2\hat{\sigma}_{\lambda_{i-1}}^2 + \sigma_{\text{фш}}^2 \end{aligned}$$

Здесь $\hat{\sigma}_{\lambda_{i-1}}^2$ — условная дисперсия сообщения (ошибка оценки) в момент t_{i-1}. Получаем выражения для условных распределений:

$$p(x_i|\lambda_i) = C_1 \exp\left(-\frac{(x_i - H_i\lambda_i)^2}{2\sigma_{\text{шн}}^2}\right)$$

и

$$p(\lambda_i|x_1, x_2, \dots x_{i-1}) = C_2 \exp\left(-\frac{(\lambda_i - \beta_{i-1} y_{i-1} - U_{i-1})^2}{2(\beta_{i-1}^2\sigma_{\lambda_{i-1}}^2 + \sigma_{\text{фш}}^2)}\right).$$

В соответствии с (3.1.10) получаем распределение

$$p(\lambda_i|x_1, x_2, \dots x_i) = C_3 \exp\left(-\frac{(x_i - H_i\lambda_i)^2}{2\sigma^2_{\text{шн}}} - \frac{(\lambda_i - \beta_{i-1}y_{i-1} - U_{i-1})^2}{2(\beta^2_{i-1}\sigma^2_{\lambda_{i-1}} + \sigma^2_{\text{фш}})}\right). \tag{3.1.15}$$

Это есть гауссово распределение со средним значением $y_i = \langle\lambda_i|x_1, x_2, \dots x_i\rangle$ и дисперсией $\sigma^2_{\lambda_i} = \langle(\lambda_i - y_i)^2|x_1, x_2, \dots x_i\rangle$. Оно должно иметь вид:

$$p(\lambda_i|x_0, x_1, \dots x_i) = C_3 \exp\left(-\frac{(\lambda_i - y_i)^2}{2\hat{\sigma}^2_{\lambda_i}}\right). \tag{3.1.16}$$

Сравнивая показатели экспоненты в (3.1.15) и (3.1.16), получаем соотношения, которым должны удовлетворять оценка y_i и ошибка $\hat{\sigma}^2_{\lambda_i}$ оценки:

$$y_i = \beta_{i-1}y_{i-1} + U_{i-1} + k_i\left(x_i - H_i\left(\beta_{i-1}y_{i-1} + U_{i-1}\right)\right), \tag{3.1.17}$$

$$\frac{1}{\hat{\sigma}^2_{\lambda_i}} = \frac{1}{\beta^2_{i-1}\sigma^2_{\lambda_{i-1}} + \sigma^2_{\text{фш}}} + \frac{H_i^2}{\sigma^2_{\text{шн}}}, \tag{3.1.18}$$

где

$$k_i = \frac{H_i\hat{\sigma}^2_{\lambda_i}}{\sigma^2_{\text{шн}}}.$$

Уравнения (3.1.16)–(3.1.18) представляют собой уравнения оптимального дискретного фильтра Калмана. Уравнение (3.1.17) задает алгоритм получения оптимальной оценки, а уравнение (3.1.18) описывает эволюцию условной дисперсии сообщения Y_i (т.е. ошибки оценки). Так как в уравнение (3.1.18) не входит X_i, то условная дисперсия совпадает $\hat{\sigma}^2_{\lambda_i}$ с безусловным значением среднего квадрата ошибки: $\hat{\sigma}^2_{\lambda_i} = \sigma^2_{\text{ош}}$. То есть это ошибка оценки $\langle y_i|x_0, x_1, \dots x_i\rangle$, которая является характеристикой фильтра, не зависящей от наблюдаемых данных.

Схема фильтра приведена на рис. 3.1.1. Если наблюдения отсутствуют ($H_i \equiv 0$), то $y_i = \beta_{i-1}y_{i-1} + U_{i-1}$ — это экстраполяция оценки на один шаг. Фильтр Калмана вырождается в формирующий фильтр. На входе из принимаемого значения x_i вычитается его предсказуемая часть $H_i\left(\beta_{i-1}y_{i-1} + U_{i-1}\right)$. Разность умножается на коэффициент k_i и в сумме с априорной оценкой $\beta_{i-1}y_{i-1} + U_{i-1}$ (экстраполяцией) формирует оптимальную оценку y_i на выходе. Таким образом, фильтр Калмана — это рекурсивный фильтр.

Фильтр Калмана (3.1.17) является нестационарным. Коэффициент k_i меняется во времени. Нестационарность сохраняется, даже если положить H, β и U константами. Это связано с процессом установления условной дисперсии. При условии $H, \beta, U = const$ существует предел

$$\hat{\sigma}^2_{\lambda_{\text{ст}}} = \lim_{i\to\infty} \hat{\sigma}^2_{\lambda_i}.$$

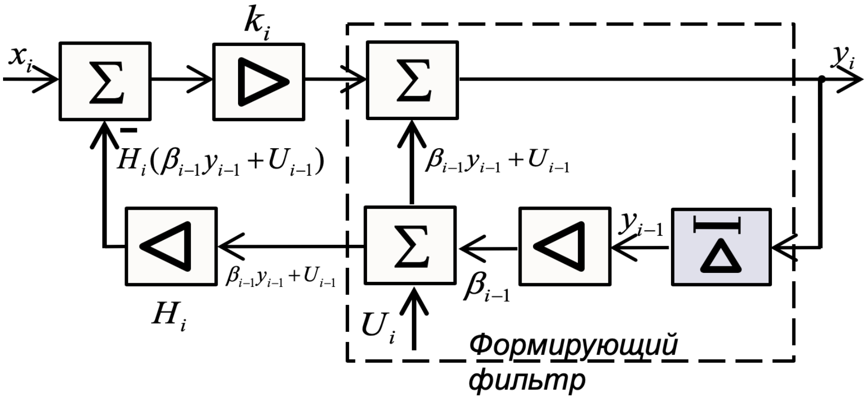


Рисунок 3.1.1: Схема оптимального дискретного фильтра Калмана, задаваемого уравнением (3.1.17).

При этом для оценки часто используют уравнение стационарного фильтра:

$$y_i = \beta_{i-1}y_{i-1} + U_{i-1} + \frac{H\hat{\sigma}^2_{\lambda_{\text{ст}}}}{\sigma^2_{\text{шн}}}\left(x_i - H_i\left(\beta_{i-1}y_{i-1} + U_{i-1}\right)\right). \tag{3.1.19}$$

Полученная оценка y_i не является оптимальной, но, во многих случаях, достаточно быстро сходится к оптимальной при $i \to \infty$. Фильтр с постоянными параметрами (3.1.19) называют квазиоптимальным или стационарным фильтром Калмана.

3.1.2 Экспериментальная часть

В лабораторной работе планируется восстановить информационный сигнал $\lambda(t)$, задаваемый простым стохастическим уравнением первого порядка:

$$\frac{d\lambda}{dt} + \alpha\lambda = \sqrt{2D_{\text{фш}}}n_{\text{фш}}(t), \tag{3.1.20}$$

где α — постоянный параметр. Параметры α и $D_{\text{фш}}$ в работе фиксируются неизменными. Измерения сигнала производятся с шагом Δt. Уравнение наблюдения имеет вид:

$$X_i = H\lambda_i + \sigma_{\text{шн}}N_i^{\text{шн}}, \tag{3.1.21}$$

где H — постоянная величина, $N_i^{\text{шн}}$ — нормированный источник дискретного гауссова белого шума (шум наблюдения), $\sigma_{\text{шн}}$ — интенсивность (среднеквадратичное значение) шума наблюдения. При этом уравнение оптимального дискретного фильтра Калмана (3.1.17) и уравнение ошибки (3.1.18) принимают вид:

$$y_i = \beta y_{i-1} + k_i\left(x_i - H\beta y_{i-1}\right), \tag{3.1.22}$$

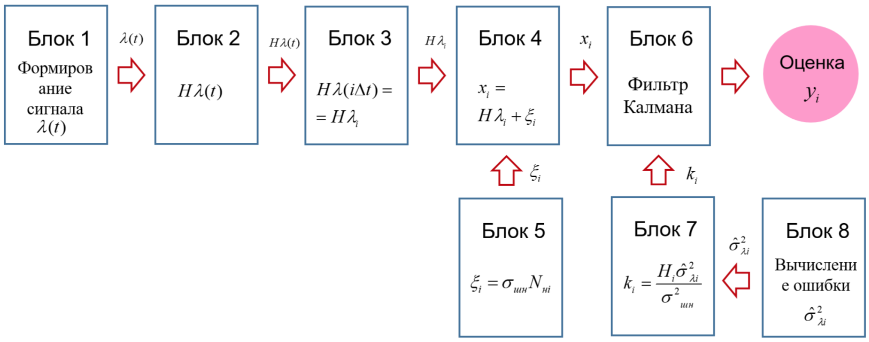


Рисунок 3.1.2: Блок-схема виртуальной экспериментальной установки

$$\frac{1}{\hat{\sigma}^2_{\lambda_i}} = \frac{1}{\beta^2\sigma^2_{\lambda_{i-1}} + \sigma^2_{\text{фш}}} + \frac{H}{\sigma^2_{\text{шн}}}, \tag{3.1.23}$$

где

$$k_i = \frac{H\hat{\sigma}^2_{\lambda_i}}{\sigma^2_{\text{шн}}}.$$

3.1.2.1 Описание используемой программы

Для реализации лабораторной работы в среде LabVIEW была разработана и создана виртуальная лабораторная установка, которая описана ниже. Упрощенная блок-схема виртуальной установки приведена на рис. 3.1.2.

Блок 1 формирует информационный сигнал $\lambda(t)$ путем интегрирования стохастического дифференциального уравнения (3.1.20) при заданных параметрах α, $D_{\text{фш}}$, h.

Блок 2 производит умножение информационного сигнала $\lambda(t)$ на константу H. В частном случае $H = 1$, его можно не учитывать.

Блок 3 осуществляет выборку значений с заданным шагом $\Delta t = mh$. На выходе блока имеем последовательность значений $H\lambda_i$. В процессе выполнения работы шаг наблюдения Δt можно менять, выбирая различные значения m.

Блок 4 осуществляет суммирование значений $H\lambda_i$ со случайными числами ξ_i для имитации шума наблюдения. В результате получаем значения наблюдаемого сигнала x_i в соответствии с уравнением наблюдения (3.1.21).

Блок 5 создает шум наблюдения $\xi_i = \sigma_{\text{шн}} N_i^{\text{шн}}$. В процессе выполнения работы интенсивность шума наблюдения можно менять.

Блок 6 представляет собой сам фильтр Калмана. На вход Блока 6 поступают наблюдаемые дискретные по времени значения полезного сигнала x_i, а

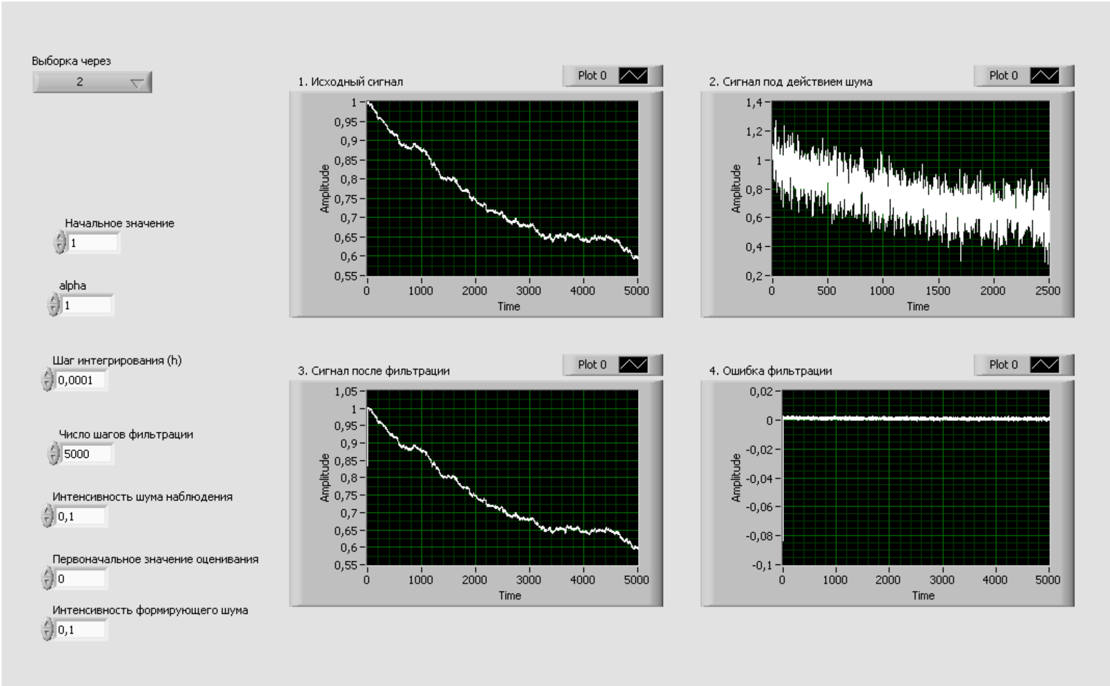


Рисунок 3.1.3: Вид главной панели виртуальной установки.

также значения коэффициента k_i. На выходе этого получаем оценку информационного сигнала y_i с выбранным шагом по времени.

Блок 7 на каждом шаге по времени осуществляет расчет коэффициента k_i. Он зависит от ошибки оценки $\hat{\sigma}^2_{\lambda_i}$, значения которой на каждом шаге поступают с Блока 8.

Блок 8 производит вычисление ошибки оценки $\hat{\sigma}^2_{\lambda_i}$ в результате решения уравнения (3.1.23).

3.1.2.2 Передняя панель установки и органы управления

На рис. 3.1.3 приведен вид передней панели виртуального прибора. На главном экране можно задавать параметры модели. Можно задать длину последовательности данных n, начальное значение переменной $\lambda(0) = \lambda_0$, параметры α и H, шаг интегрирования h, интенсивность формирующего шума $D_{\text{фш}}$, интенсивность дискретного шума наблюдения $\sigma_{\text{шн}}$, и первоначальное значение оценивания y_0. На панели прибора имеются четыре окна для отображения результатов. В них можно наблюдать информационный сигнал $\lambda(t)$, значения наблюдаемого сигнала x_i, результат фильтрации y_i, и ошибку фильтрации.

В работе предусмотрена запись полученных данных в специальный файл, что позволяет наблюдать результаты не только на экране виртуального прибора, но и строить графики с использованием графических программ, например gnuplot или GRACE.

3.1.2.3 Порядок выполнения работы:

- Выбрать, в соответствии с заданием, значения параметров уравнения сообщения и интенсивность шума наблюдения и получить сигнал в виде массива данных. Пронаблюдать изменения исходного сигнала под действием шума.

- Рассчитать оптимальные параметры фильтра. Для этого, используя уравнение ошибки (3.1.18), рассчитать зависимость ошибки от шага фильтрации и определить коэффициент k_i в уравнении оптимального фильтра (3.1.22).

- Используя фильтр Калмана, получить оптимальную оценку информационного сообщения.

- Пронаблюдать зависимость точности фильтрации от шага Δt, через который производятся измерения наблюдаемых данных.

- Изменяя интенсивность шума наблюдения, определить влияние уровня шума на качество и скорость фильтрации.

3.1.2.4 Задания

- Выбрать следующие параметры моделирования: начальное значение $\lambda_0 = 1$; параметр уравнения сообщения $\alpha = 1$; шаг интегрирования уравнения при моделировании сообщения $h = 0.0001$; коэффициент преобразования сигнала в уравнении наблюдения $H = 1$; интенсивность формирующего шума $D_{\text{фш}} = 0.1$; интенсивность шума наблюдения $\sigma_{\text{шн}} = 0.1$; количество данных во входной последовательности (число шагов фильтрации) $n = 5000$. Исследовать работу фильтра при различных значениях шага наблюдения: $\Delta t = 0.0005$; 0.001; 0.05. По полученным данным построить на одном графике и сравнить сигнал $\lambda(t)$ и значения его оценки y_i на выходе фильтра Калмана (3.1.22).

- Исследовать работу фильтра при различном уровне шума наблюдения. Выбрать следующие параметры моделирования, задав шаг измерения $\Delta t = 0.005$. Для различных значений интенсивности шума наблюдения $\sigma_{\text{шн}} = 0.1$; 0.5; 1.0 построить на одном графике и сравнить сигнал $\lambda(t)$ и значения его оценки y_i на выходе оптимального фильтра.

- Привести соответствующие графики ошибки оценки $\hat{\sigma}^2_{\lambda_i}$, задаваемой уравнением (3.1.23).

3.2 Влияние шума на работу автогенератора

Цель работы: исследование корреляционных и спектральных характеристик автоколебаний генератора с источником аддитивного гауссова белого шума. Сравнение результатов численного моделирования с теоретическими результатами, полученными в рамках квазигармонического анализа

3.2.1 Краткие теоретические сведения

Колебания в реальном автогенераторе всегда характеризуются некоторыми флуктуациями амплитуды и фазы и, как следствие этого, конечной шириной спектральной линии. Строго монохроматических колебаний получить в принципе невозможно. Причиной этого являются неустранимые собственные шумы генератора, такие как тепловой и дробовой шум. Собственные шумы приводят к неустранимым флуктуациям амплитуды и фазы колебаний, получившим название естественных флуктуаций. Теория флуктуаций в автоколебательных системах типа квазигармонических радиофизических генераторах была развита в работах А.Н. Малахова и Р.Л. Стратоновича.

Автоколебания автогенератора, содержащего аддитивный источник шума (т.е. источник, интенсивность которого не зависит от значений динамических переменных), можно качественно описать с помощью уравнения ван дер Поля, добавив в него случайное слагаемое с соответствующими характеристиками. В безразмерном виде получаем следующее стохастическое дифференциальное уравнение (СДУ):

$$\ddot{X} + X = \left(\varepsilon - X^2\right)\dot{X} + \xi(t), \tag{3.2.1}$$

где ε — параметр, управляющий режимом генерации. Реальные шумы во многих случаях приближенно можно заменить на источник белого гауссова шума $\xi(t) = \sqrt{2D}n(t)$, где $n(t)$ — нормированный нормальный белый шум, D — константа, характеризующая интенсивность шума. Для нормированного белого шума выполняются условия $\langle n(t)\rangle \equiv 0$, $\langle n(t)n(t+\tau)\rangle = \delta(t)$, где $\delta(t)$ — функция Дирака, а скобки $\langle \ldots \rangle$ означают статистическое усреднение.

В результате случайных воздействий (шума) фазовые траектории отклоняются от предельного цикла и заполняют некоторую область на фазовой плоскости в окрестности предельного цикла (рис. 3.2.1).

Используя замену переменных

$$\begin{aligned} X(t) &= a(t)\cos\left(\omega_0 t + \varphi(t)\right), \\ Y(t) &= \dot{X} = -a(t)\omega_0 \sin\left(\omega_0 t + \varphi(t)\right) \end{aligned}$$

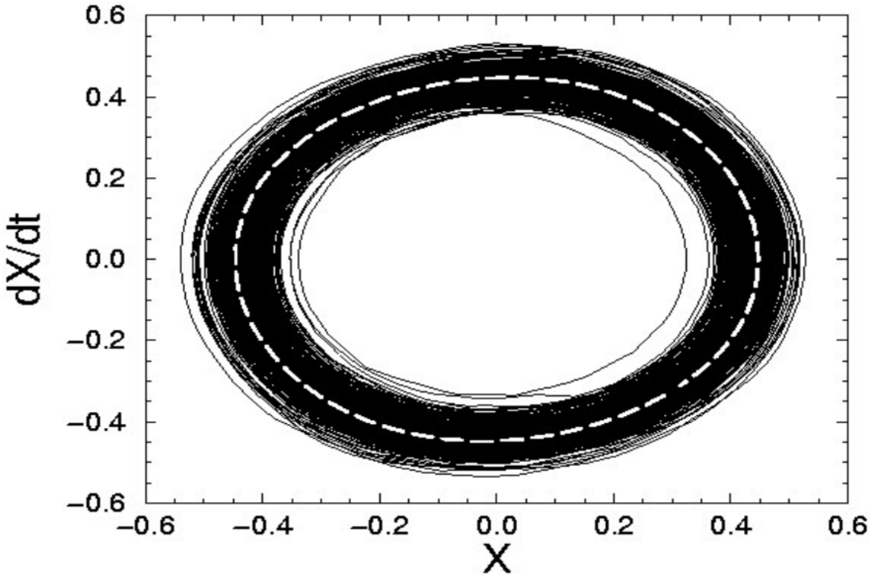


Рисунок 3.2.1: Фазовый портрет «зашумленного» предельного цикла в системе (3.2.1). Белым пунктиром показан невозмущенный предельный цикл

и усреднение соотношений за период автоколебаний $T_0 = 2\pi/\omega_0$ в предположении «медленности» изменения функций $a(t)$ и $\varphi(t)$ по сравнению с периодом T_0, с учетом равенства $\omega_0 = 1$ получаем следующие СДУ для мгновенной амплитуды и флуктуации фазы:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \left(\frac{\varepsilon}{2} - \frac{a^2}{8}\right) a + \frac{D}{2a} + \sqrt{D} n_1(t), \\ \dot{\varphi} &= \frac{\sqrt{D}}{a} n_2(t), \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

где $n_1(t)$ и $n_2(t)$ — независимые источники нормированного гауссова белого шума.

Поскольку первое уравнение системы (3.2.2), описывающее изменения мгновенной амплитуды, не содержит переменной $\varphi(t)$, можно сделать вывод, что в квазигармоническом приближении амплитуда не зависит от флуктуации фазы. Статистический анализ амплитудного уравнения показывает, что при малой интенсивности шума и развитой генерации среднее значение амплитуды $\overline{a} = \langle a(t) \rangle$ близко к невозмущенному значению $a_0 = 2\sqrt{\varepsilon}$, т.е. к амплитуде установившихся колебаний в генераторе без шума. Считая флуктуации амплитуды $\rho(t) = a(t) - a_0$ малыми, получаем линеаризованное уравнение для флуктуаций амплитуды:

$$\dot{\rho} + \varepsilon\rho = \sqrt{D} n_1(t). \tag{3.2.3}$$

Уравнение (3.2.3) описывает гауссов процесс, называемый одномерным процессом Орнштейна – Уленбека. В установившемся режиме его среднее значение равно нулю, а корреляционная функция носит экспоненциальный характер:

$$\Psi_\rho(\tau) = \Psi_a(\tau) = \sigma_a^2 \exp\left\{-\varepsilon|\tau|\right\}. \tag{3.2.4}$$

Второе уравнение системы (3.2.2) описывает флуктуации фазы автоколебаний. В общем случае переменная $\varphi(t)$ зависит от мгновенной амплитуды $a(t)$, так как амплитуда входит в фазовое уравнение. Однако в случае малого шума и развитой генерации флуктуации амплитуды малы и в уравнении для фазы можно положить $a(t) \approx a_0$. В этом приближении фазовое уравнение

$$\dot{\varphi} = \frac{\sqrt{D}}{a_0} n_2(t) \tag{3.2.5}$$

описывает винеровский процесс, который представляет собой нестационарный гауссов процесс, со средним значением $\overline{\varphi} = \varphi(t_0) = \varphi_0$ и дисперсией

$$\sigma_\varphi^2 = 2B_\varphi\left(t - t_0\right), \tag{3.2.6}$$

где $B_\varphi = D/2a_0^2$ — коэффициент диффузии фазы, t_0 — начальный момент времени. Одномерное распределение флуктуаций фазы имеет вид:

$$p_1(\varphi, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\varphi^2}} \exp\left[-\frac{\left(\varphi - \varphi_0\right)^2}{2\sigma_\varphi^2}\right]. \tag{3.2.7}$$

Вместо величины $\varphi(t) \in (-\infty, +\infty)$ можно рассмотреть величину $\phi(t)$, определенную в ограниченном интервале, которая обычно определяется одним из двух способов:

1. $\phi(t) = \varphi(t) - 2\pi\nu(t),\ \phi(t) \in [0, 2\pi]$;
2. $\phi(t) = \varphi(t) - 2\pi\nu(t) - \pi,\ \phi(t) \in [-\pi, \pi]$,

где $\nu(t) = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ — целое число полных оборотов по окружности. Для приведенной величины $\phi(t)$ существует стационарное распределение, которое является равномерным в интервале определения $\phi(t)$. Для $\phi(t) \in [0, 2\pi]$ имеем

$$p_1(\varphi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi},\ \varphi \in [0, 2\pi], \\ 0,\ \varphi \notin [0, 2\pi]. \end{cases} \tag{3.2.8}$$

На основании изложенных выше результатов можно сделать вывод, что в случае развитой генерации и слабого шума при $\omega_0 = 1$ автоколебания $X(t)$ описываются моделью гармонического (узкополосного) шума:

$$X(t) = (a_0 + \rho(t)) \cos(t + \varphi(t)), \tag{3.2.9}$$

где флуктуации амплитуды $\rho(t)$ и фазы $\varphi(t)$ можно считать статистически независимыми случайными процессами, «медленными» по сравнению с $\cos(t)$. При этом $\rho(t)$ описывается одномерным процессом Орнштейна – Уленбека, а $\varphi(t)$ представляет собой винеровский процесс, так что выполняются соотношения (3.2.3)–(3.2.8).

Легко убедиться, что в установившемся режиме среднее значение на ансамбле реализаций есть $\langle X(t)\rangle \equiv 0$. А корреляционную функцию установившихся колебаний в генераторе можно представить как:

$$\Psi_X(\tau) = \frac{1}{2}\left(a_0^2 + \sigma_0^2 \exp(-\varepsilon|\tau|)\right) \exp(-B_\varphi|\tau|) \cos(\tau). \tag{3.2.10}$$

Её можно представить, как сумму двух экспоненциально спадающих слагаемых с различными декрементами затухания и различными коэффициента-ми перед экспонентой:

$$\begin{aligned} &\Psi_X(\tau) = \Psi_X^I(\tau) + \Psi_X^{II}(\tau),\\ &\Psi_X^I(\tau) = \beta_1 \exp(-\alpha_1|\tau|) \cos(\tau),\\ &\Psi_X^{II}(\tau) = \beta_2 \exp(-\alpha_2|\tau|) \cos(\tau), \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

где $\alpha_1 = B_\varphi = D/8\varepsilon,\ \beta_1 = a_0^2/2 = 2\varepsilon,\ \alpha_2 = \varepsilon + B_\varphi \approx \varepsilon,\ \beta_2 = \sigma_a^2/2 = D/4\varepsilon.$

Соответствующая спектральная плотность мощности представляет собой сумму двух сдвинутых на частоту $\omega_0 = \pm 1$ лоренцианов:

$$\begin{aligned} &W_X(\omega) = W_X^I(\omega) + W_X^{II}(\omega),\\ &W_X^I(\omega) = \frac{\beta_1\alpha_1}{\alpha_1^2 + (\omega+1)^2} + \frac{\beta_1\alpha_1}{\alpha_1^2 + (\omega-1)^2},\\ &W_X^{II}(\omega) = \frac{\beta_2\alpha_2}{\alpha_2^2 + (\omega+1)^2} + \frac{\beta_2\alpha_2}{\alpha_2^2 + (\omega-1)^2}. \end{aligned} \tag{3.2.12}$$

Слагаемое $W_X^I(\omega)$ связано с флуктуациям фазы. Ширина этой компоненты очень мала, а максимальное значение велико. Слагаемое $W_X^{II}(\omega)$ определяется, в основном, флуктуациями амплитуды. Ширина этой компоненты велика, а значение в максимуме мало. На рис. 3.2.2 приведен вид двух слагаемых спектральной плотности мощности. Для удобства сравнения они нормированы на одну и ту же величину $W_{max}^I(\omega) = W_X^I(+1)$ и представлены в децибелах. В

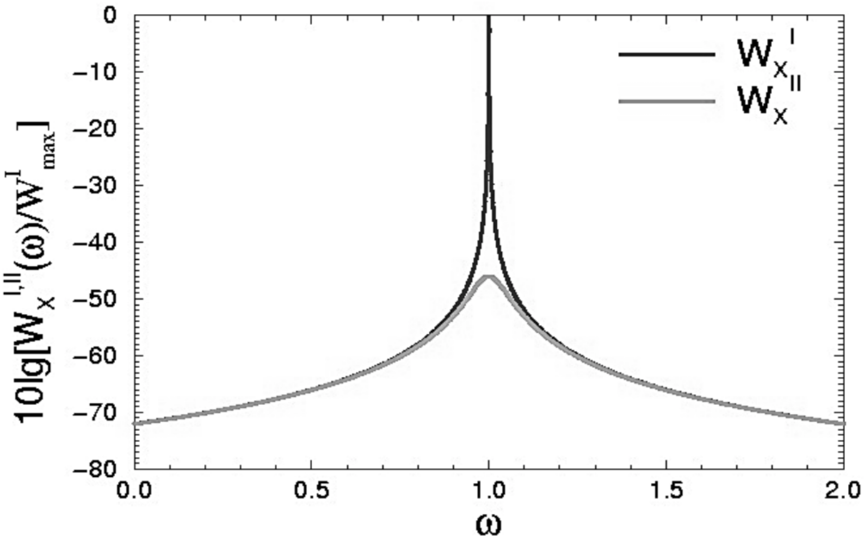


Рисунок 3.2.2: Сравнение двух слагаемых спектральной плотности мощности $W_X^I(\omega)$ и $W_X^{II}(\omega)$ автоколебаний в квазигармоническом генераторе (3.2.1) с источником шума. Оба слагаемых нормированы на одну и ту же величину и представлены в децибелах.

силу симметрии двухсторонней спектральной плотности мощности графики изображены только в области положительных частот.

При слабом шуме можно считать, что $W_X(\omega) \approx W_X^I(\omega)$, т.е. можно пренебречь амплитудными флуктуациями для оценки ширины спектра. Соответствующая оценка дает минимальное значение ширины спектра, называемое естественной шириной спектральной линии:

$$\Delta\omega_{0.5} = 2B_\varphi = \frac{D}{4\varepsilon}.$$

В размерных единицах (с учетом $\omega_0 \neq 1$) получаем

$$\Delta\omega_{0.5}^{\text{разм}} = \Delta\omega_{0.5} \times \omega_0.$$

Эта величина, как правило, очень мала, так как определяется интенсивностью естественных источников шума D.

3.2.2 Экспериментальная часть

3.2.2.1 Экспериментальная установка

Для реализации лабораторной работы в среде LabVIEW была разработана и создана виртуальная лабораторная установка, которая описана ниже. На

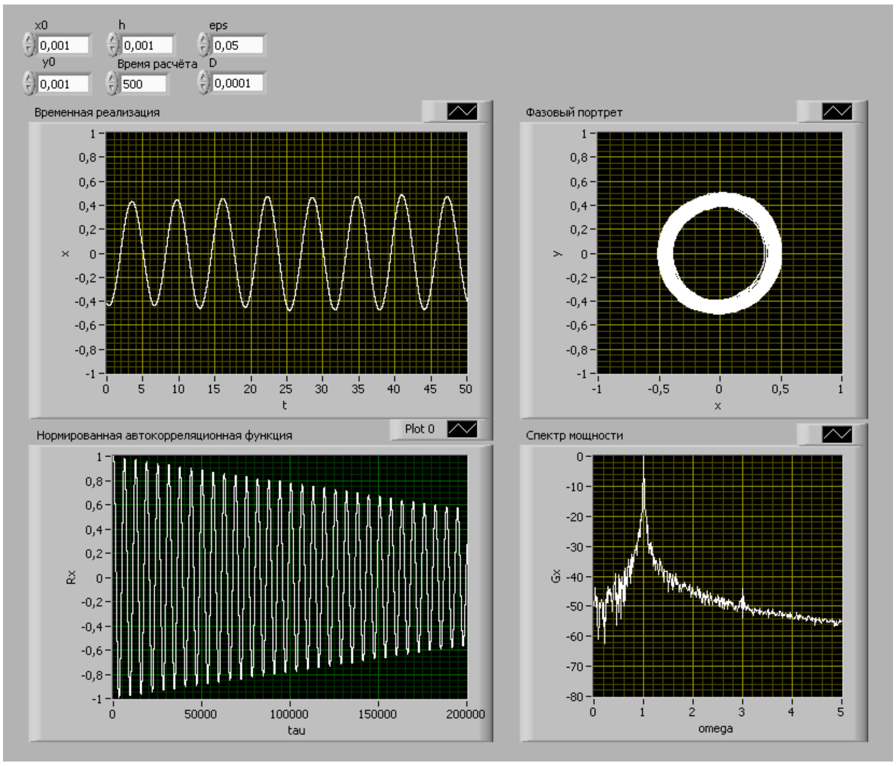


Рисунок 3.2.3: Вид главной панели виртуальной установки.

рис. 3.2.3 приведен вид передней панели виртуального прибора. На главном экране можно задавать параметры модели: начальные условия для интегрирования $x0$ и $y0$, шаг интегрирования h, время расчета в безразмерных единицах, управляющий параметр eps и интенсивность шума D. На панели прибора имеются четыре окна для отображения результатов. В них можно наблюдать временную реализацию $x(t)$, фазовый портрет, нормированную корреляционную функцию $R_X(\tau)$ и нормированный спектр мощности $G_X(\omega)$.

В работе предусмотрена запись полученных данных в специальный файл, что позволяет наблюдать результаты не только на экране виртуального прибора, но и строить графики с использованием графических программ, например gnuplot или GRACE.

3.2.2.2 Порядок выполнения работы

Задание 1:

- Исследовать вид корреляционной функции колебаний автогенератора с источником шума. Для этого численно проинтегрировать уравнение генератора (3.2.1) с шагом $h = 0.001$ и получить массив данных $X(t_i)$ в установившемся режиме. По полученным данным рассчитать корреляционную функцию стационарного процесса $X(t)$ по формуле

$$\Psi_X(\tau) = \langle X(t)X(t+\tau)\rangle - \langle X(t)\rangle^2, \tag{3.2.13}$$

заменив статистическое усреднение $\langle \ldots \rangle$, усреднением по времени. Нормированную корреляционную функцию (коэффициент корреляции)

$$R_X(\tau) = \frac{\Psi_X(\tau)}{\Psi_X(0)} \tag{3.2.14}$$

построить графически.

- На том же графике нанести огибающую нормированной корреляционной функции, соответствующую теоретическому результату, полученному в квазигармоническом приближении (т.е., по формуле (3.2.10)). Расчеты провести для значений параметров, указанных преподавателем (например, $\varepsilon = 0.05$, $D = 0.0001$ и $D = 0.001$). Прокомментировать полученные результаты.

Задание 2:

- Исследовать вид спектральной плотности мощности колебаний автогенератора с источником шума. Для этого численно проинтегрировать уравнение генератора (3.2.1) с шагом $h = 0.001$ и получить массив данных $X(t_i)$ в установившемся режиме. По полученным данным рассчитать односторонний (физический) спектр мощности автоколебаний $W_X^+(\omega)$ используя быстрое преобразование Фурье. Изобразить полученный нормированный спектр графически в децибелах:

$$G_X(\omega) = 10 \lg \frac{W_X^+(\omega)}{W_X^+(\omega_m)} \tag{3.2.15}$$

где ω_m — частота максимума ($\omega_m \approx \omega_0 = 1$).[1]

- Вычислить спектральную плотность мощности автоколебаний по формуле (3.2.12), полученной для квазигармонического приближения считая $B_\varphi << \varepsilon$. В этом случае приближенно можно считать

$$W_X^I(\omega) \approx \frac{\sigma_a^2 \varepsilon}{\varepsilon^2 + (\omega - \omega_0)^2}. \tag{3.2.16}$$

[1] Очевидно, нормированный спектр $G_X(\omega)$ не зависит от того, какая спектральная плотность мощности рассматривается — двухсторонняя $W_X(\omega)$ или односторонняя $W_X^+(\omega)$.

Отнормировать теоретический спектр $W_X(\omega)$ в соответствии с (3.2.15) и представить на одном графике вместе с численным результатом. Все расчеты провести для значений параметров, указанных преподавателем (например, $\varepsilon = 0.05$, $D = 0.0001$ и $D = 0.001$). Прокомментировать полученные результаты.

3.3 Рассеяние волн в среде со случайными неоднородностями

Цель работы: исследование влияния случайной неоднородности на распространение волн в одномерной среде и расчет статистических характеристик случайных волн.

3.3.1 Краткие теоретические сведения

3.3.1.1 Случайные волны в одномерной среде

Случайные волны представляют собой специфический вид случайных полей, имеющих волновую природу. Пусть в одномерной среде (вдоль пространственной координаты x) имеется скалярное случайное волновое поле, задаваемое некоторой комплексной случайной функцией $E(x,t)$. Рассмотрим наиболее распространенные модели случайных волн в одномерной среде.

- Неоднородная монохроматическая случайная волна:

  $$E(x,t) = A(x)\exp\left[j\left(\omega_0 t - k_0 x\right)\right]$$

  где k_0 — волновое число, ω_0 — частота гармонических колебаний. Волна является неоднородной, так как комплексная амплитуда волны $A(x)$ представляет собой случайную функцию пространственной координаты x. Таким образом, волна имеет случайный пространственный профиль. Если комплексная амплитуда представляет собой случайное поле, статистически однородное по x и мало меняется на длине волны $\lambda_0 = 2\pi/k_0$, то зависимость E от x представляет собой «квазигармонический пространственный шум» с узким пространственным спектром $W_E(k,t)$:

  $$W_E(k,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_E(s,t)\exp\left(-jks\right)ds,$$

  где $s = x_2 - x_1$ — интервал между двумя точками в пространстве. При этом пространственный спектр имеет максимум при $k = k_0$.

- Однородная случайная волна:

  $$E(x,t) = A(t)\exp\left[j\left(\omega_0 t - k_0 x\right)\right]$$

Здесь комплексная амплитуда волны $A(t)$ является случайной функцией времени. Если при этом предполагается, что изменения амплитуды во времени есть стационарный процесс, который является медленным по сравнению с периодом $T_0 = 2\pi/\omega_0$, то однородная случайная волна будет квазимонохроматической. То есть колебания величины E во времени в любой точке пространства будут представлять собой квазигармонический шум. Спектр колебаний во времени

$$W_E(k, \omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_E(x, \tau) \exp\left(-j\omega\tau\right) d\tau,$$

где $\tau = t_2 - t_1$, в любой точке пространства x является узкополосным и имеет максимум на частоте ω_0.

- Неоднородная случайная волна (общий случай):

$$E(x, t) = A(x, t) \exp\left[j\left(\omega_0 t - k_0 x\right)\right]$$

Комплексная амплитуда волны $A(x, t)$ является случайной функцией как координаты, так и времени. Если она представляет собой «медленную» случайную функцию времени, то имеем случай неоднородной квазимонохроматической случайной волны. Зависимость от x также может быть «медленной».

3.3.1.2 Рассеяние электромагнитных волн в статистически неоднородных средах

Случайные неоднородности сред влияют на характеристики волн в этих средах. Такие задачи решаются либо с помощью численного моделирования, либо приближенными теоретическими методами.

Рассмотрим одномерную стационарную недиспергирующую линейную среду. Волновое поле $E(x, t)$ будем, для простоты, считать скалярным. Тогда для $E(x, t)$ справедливо уравнение

$$c^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + 4\pi \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0, \tag{3.3.1}$$

где c — скорость света. В случае линейной поляризации среды

$$P(x, t) = \chi(x) E(x, t), \tag{3.3.2}$$

где линейная восприимчивость $\chi(x)$ выражается через диэлектрическую проницаемость среды $\varepsilon(x)$ как

$$\chi(x) = \frac{\varepsilon(x) - 1}{4\pi}. \tag{3.3.3}$$

Из (3.3.1)–(3.3.3) получаем

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{\varepsilon(x)}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \qquad (3.3.4)$$

Функция $\varepsilon(x)$ описывает неоднородность среды. Будем называть ее диэлектрической проницаемостью. Полагаем, что среда имеет случайные неоднородности, которые не меняются во времени и зависят только от пространственной координаты x. Для случайно неоднородной среды можно записать:

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_{\text{ср}} + \tilde{\varepsilon}(x), \qquad (3.3.5)$$

где $\varepsilon_{\text{ср}} = const$ — среднее по ансамблю реализаций, $\tilde{\varepsilon}(x)$ — флуктуация. С учетом (3.3.5) уравнение (3.3.4) принимает вид

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \left(\frac{1}{v^2} + \frac{\tilde{\varepsilon}(x)}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}\right) = 0, \qquad (3.3.6)$$

где $v = c/\sqrt{\varepsilon_{\text{ср}}}$ — скорость волны в однородной среде. Представляя решение (3.3.6) в виде монохроматической случайной волны

$$E(x,t) = A(x)\exp\left[j\left(\omega_0 t - kx\right)\right], \qquad (3.3.7)$$

где $k = \omega_0/v$ — волновое число, получаем уравнение для комплексной амплитуды $A(x)$

$$\frac{d^2 A}{dx^2} - 2jk\frac{dA}{dx} + \tilde{\varepsilon}k_0^2 A = 0, \qquad (3.3.8)$$

где $k_0 = \omega_0/c$.

Если флуктуации параметров среды малы и рассеянное поле мало по сравнению с полем первичной волны, то применяют метод малых возмущений. Первое приближение этого метода составляет теорию однократного рассеяния (борновское приближение). В борновском приближении поле в неоднородной среде можно представить в виде

$$E(x,t) = E_0(x,t) + \tilde{E}(x,t),$$

где $E_0(x,t)$ — поле первичной (падающей) волны, $\tilde{E}(x,t)$ — поле рассеянной волны. Будем считать первичную волну монохроматической:

$$E_0(x,t) = u_0\exp\left[j\left(\omega_0 t - kx\right)\right] \qquad (3.3.9)$$

где u_0 — вещественная амплитуда первичной волны. Для рассеянной волны из (3.3.6) получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\tilde{\varepsilon}(x)\frac{k^2}{\varepsilon_{\text{ср}}}u_0\exp\left[j\left(\omega_0 t - kx\right)\right] \qquad (3.3.10)$$

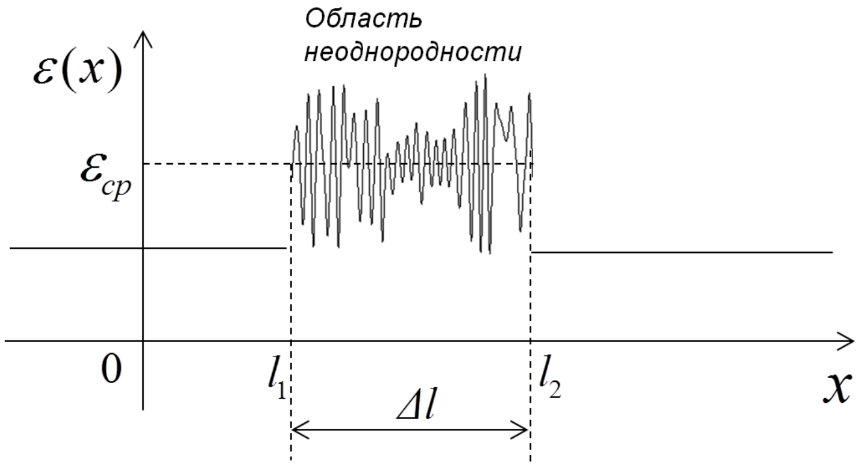


Рисунок 3.3.1: Иллюстрация пространственного распределения случайной неоднородности диэлектрической проницаемости (реализация функции $\varepsilon(x)$)

Пусть имеется конечная область неоднородности $x \in [l_1, l_2]$ (рис. 3.3.1). Приближенное решение неоднородного уравнения (3.3.10) в области $x >> l_2$ имеет вид

$$\tilde{E}(x) = -u_0 \frac{k^2}{x\varepsilon_{\text{ср}}} \exp\left[j\left(\omega_0 t - kx\right)\right] \int\limits_{l_1}^{l_2} \tilde{\varepsilon}(x')dx'. \tag{3.3.11}$$

Используя выражение (3.3.10), можно получить следующее приближенное выражение для интенсивности рассеянной волны в дальней зоне

$$\tilde{I}(x) = \langle \left|\tilde{E}(x,t)\right|^2 \rangle = u_0^2 \Delta l \frac{k_0^4}{x^2} \int\limits_{-\Delta l}^{\Delta l} \Psi_\varepsilon(s)ds, \tag{3.3.12}$$

где $\Delta l = l_2 - l_1$ — длина интервала неоднородности, $\Psi_\varepsilon(s)$ — пространственная корреляционная функция статистически однородного случайного поля $\varepsilon(x)$, $s = x_2 - x_1$.

3.3.2 Экспериментальная часть

3.3.2.1 Экспериментальная установка

Для реализации лабораторной работы в среде LabVIEW была разработана и создана виртуальная лабораторная установка, которая описана ниже. На

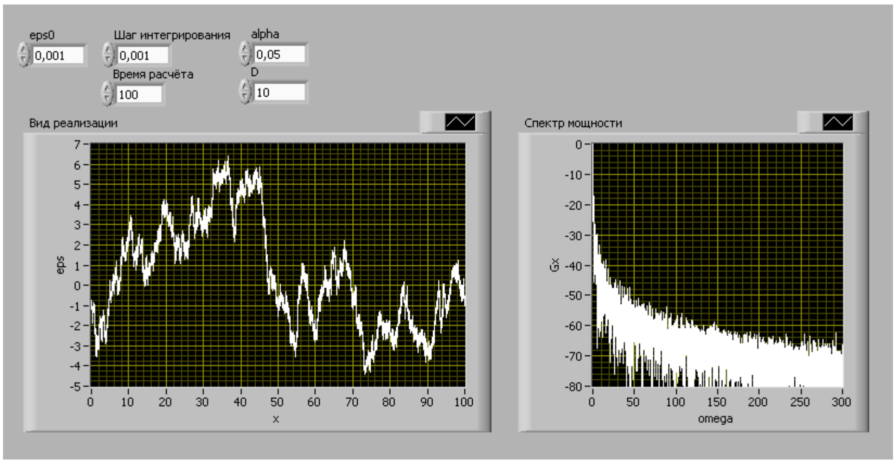


Рисунок 3.3.2: Вид главной панели виртуальной установки.

рис. 3.3.2 приведен вид передней панели виртуального прибора. На главном экране можно задавать параметры процесса Орнштейна – Уленбека: начальное условие для интегрирования $eps0$, шаг интегрирования, время расчета в безразмерных единицах, управляющий параметр $alpha$ и интенсивность шума D. На панели прибора имеются два окна для отображения результатов. В них можно наблюдать временную реализацию $eps(x)$ и нормированный спектр мощности процесса.

В работе предусмотрена запись полученных данных в специальный файл, что позволяет наблюдать результаты не только на экране виртуального прибора, но и строить графики с использованием графических программ, например gnuplot или GRACE.

3.3.2.2 Порядок выполнения работы

Задание 1:

- Рассмотреть уравнение (3.3.8), описывающее комплексную амплитуду $A(x)$ монохроматической волны в неоднородной одномерной среде. Считать, что флуктуации $\tilde{\varepsilon}(x)$ описываются одномерным процессом Орнштейна – Уленбека:
$$\frac{d\tilde{\varepsilon}}{dx} + \alpha\tilde{\varepsilon} = \sqrt{2\alpha D n(x)}, \tag{3.3.13}$$
где $n(x)$ — нормированный некоррелированный гауссов источник шума. Создать программу интегрирования (3.3.8) для выбранной реализации $\tilde{\varepsilon}(x)$, полученной с помощью виртуального прибора LabVIEW. При численном моделировании неоднородной среды необходимо использовать

установившиеся решения стохастического уравнения (3.3.13) в выбранном интервале неоднородности $x \in [l_1, l_2]$. Вне этого интервала положить диэлектрическую проницаемость постоянной $\varepsilon(x) = 1$ (рис. 3.3.1). Рассчитать интенсивность случайного поля $I(x) = |A(x)|^2$ в случае конкретной реализации функции $\tilde{\varepsilon}$.

- Сравнить графики функций $I(x)$ и $\tilde{\varepsilon}(x)$.

Задание 2:

- Для $x >> l_2$ рассчитать численно интенсивность рассеянной волны

$$\tilde{I}(x) = \langle \left| \tilde{E}(x) \right|^2 \rangle = \langle (\Re\left[A(x)\right] - u_0)^2 + (\Im\left[A(x)\right])^2 \rangle,$$

используя результаты интегрирования (3.3.8) для ансамбля реализаций $\tilde{\varepsilon}(x)$.

- Сопоставить график функции $\tilde{I}(x)$, полученный в результате численного решения задачи, с результатом, рассчитанным по формуле (3.3.12). С учетом (3.3.13) в формуле (3.3.12) можно положить

$$\Psi_\varepsilon(s) = D \exp\left(-\alpha |s|\right). \tag{3.3.14}$$

При расчетах задать следующие значения параметров: $k_0 = 1$; $\varepsilon_{\text{ср}} = 1.1$; $u_0 = 1$; $\alpha = 0.1$; $D = 10$; $l_1 = 0$; $l_2 = 100$. При выполнении пункта 1 задания 2 рассмотреть распределение интенсивности в интервале $x \in [500, 1000]$.

3.4 Исследование эффективной синхронизации

Цель работы: исследование влияния шума на эффект синхронизации автогенератора внешним гармоническим воздействием.

3.4.1 Краткие теоретические сведения

Простейшей математической моделью для исследования вынужденной синхронизации зашумленных автоколебаний является следующее стохастическое дифференциальное уравнение, описывающее неавтономный генератор ван дер Поля под действием случайной силы:

$$\ddot{X} + X = \left(\varepsilon - X^2\right)\dot{X} + b\cos\left(\omega_1 t + \varphi_1^0\right) + \xi(t), \tag{3.4.1}$$

где $\xi(t) = \sqrt{2D}n(t)$ — гауссов белый шум с постоянной интенсивностью D; b, φ_1^0 и ω_1 — амплитуда, начальная фаза и безразмерная частота внешнего воздействия соответственно.

Если ввести замену переменных

$$\begin{aligned} X(t) &= \rho(t)\cos\left(\omega_1 t + \varphi(t)\right), \\ \dot{X}(t) &= -\rho(t)\omega_1\sin\left(\omega_1 t + \varphi(t)\right), \end{aligned} \tag{3.4.2}$$

можно получить систему стохастических укороченных уравнений для амплитуды и фазы:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \left(\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\rho^2}{8}\right)\rho - \beta\sin\left(\varphi - \varphi_1^0\right) + \frac{D}{2\rho\omega_1^2} + \frac{\sqrt{D}}{\omega_1}n_1(t), \\ \dot{\varphi} &= \Delta - \frac{\beta}{\rho}\cos\left(\varphi - \varphi_1^0\right) + \frac{\sqrt{D}}{\omega_1\rho}n_2(t), \end{aligned} \tag{3.4.3}$$

где $n_1(t)$ и $n_2(t)$ — независимые источники нормированного гауссова белого шума, параметр $\Delta = \left(1 - \omega_1^2\right)/2\omega_1 \approx 1 - \omega_1$ характеризует частотную расстройку, а параметр $\beta = b/2\omega_1$ — амплитуду воздействия. Выберем $\varphi_1^0 = 0$, так как выбор её значения ни на что не влияет.

Если выполняются условия $b^2 << \varepsilon$ и $D << \varepsilon$, то отклонения амплитуды от её невозмущенного значения $\rho_0 = 2\sqrt{\varepsilon}$ незначительны. Поэтому ими можно пренебречь и получить уравнение фазовой динамики в виде

$$\dot{\varphi} = \Delta - \Delta_c\cos\varphi + \sqrt{2B_\varphi}n_2(t), \tag{3.4.4}$$

где $\Delta_c = \beta/2\sqrt{\varepsilon}$ — ширина полосы синхронизации в отсутствие шума, а $B_\varphi = D/8\omega_1^2\varepsilon$ — интенсивность «фазового шума». Уравнение (3.4.4) описывает диффузионный процесс, который можно представлять как броуновское движение «частицы» с координатой φ в одномерном наклоненном периодическом потенциале $U(\varphi)$. При отсутствии шума в случае $\Delta < \Delta_c$ минимумы потенциала соответствуют синхронизации, так как мгновенная разность фаз автоколебаний и внешней силы остается постоянной во времени. Наличие шума приводит к диффузии разности фаз в потенциале: величина $\varphi(t)$ флуктуирует вблизи минимумов потенциала, время от времени совершая случайные скачки, соответствующие переходу «частицы» из одной потенциальной ямы в другую.

На рис. 3.4.1 показаны реализации разности фаз для различных значений интенсивности шума и, соответственно, различных B_φ, полученные в результате численного интегрирования стохастического дифференциального уравнения (3.4.4). При малых интенсивностях шума ($B_\varphi = 0.02$) мгновенная разность фаз в течение длительного времени остается ограниченной в пределах $\pm\pi$, что соответствует захвату фазы. Увеличение интенсивности шума приводит к уменьшению длительности времен пребывания φ в одной из потенциальных ям, и становятся видны перескоки мгновенной разности фаз между различными метастабильными состояниями ($B_\varphi = 0.05$). Участки приблизительного постоянства мгновенной разности фаз еще достаточно хорошо заметны, однако среднее значение φ возрастает во времени. Чем больше наклон потенциального профиля (расстройка), чем мельче ямы (меньше амплитуда синхронизирующего сигнала) и чем больше интенсивность шума, тем меньше суммарное время, в течение которого фазы генератора и воздействия захвачены. Сильный шум приводит к быстрому неограниченному росту абсолютной величины разности фаз (зависимость $\varphi(t)$ для $B_\varphi = 0.1$) и существенному изменению средней частоты колебаний.

Для стохастического дифференциального уравнения (3.4.4) можно записать уравнение Фоккера – Планка – Колмогорова (ФПК):

$$\frac{\partial p_\varphi(\varphi,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \varphi}\left[(\Delta - \Delta_c\cos\varphi)\, p_\varphi(\varphi,t) - B_\varphi \frac{\partial p_\varphi(\varphi,t)}{\partial \varphi}\right]. \qquad (3.4.5)$$

Значения фазовой переменной φ при любых Δ и Δ_c неограниченно растут по абсолютной величине, поэтому случайный процесс, описываемый уравнением (3.4.5), является нестационарным. Однако, поскольку коэффициенты уравнения ФПК — периодические по φ, то можно рассматривать приведенную фазу ϕ, ограниченную в интервале $[-\pi,\pi]$: $\phi(t) = \varphi(t) - 2\pi n$, где $n = [(\varphi(t)+\pi)/2\pi]$ ($[\ldots]$ означает целую часть числа). Плотность вероятности приведенной фазы

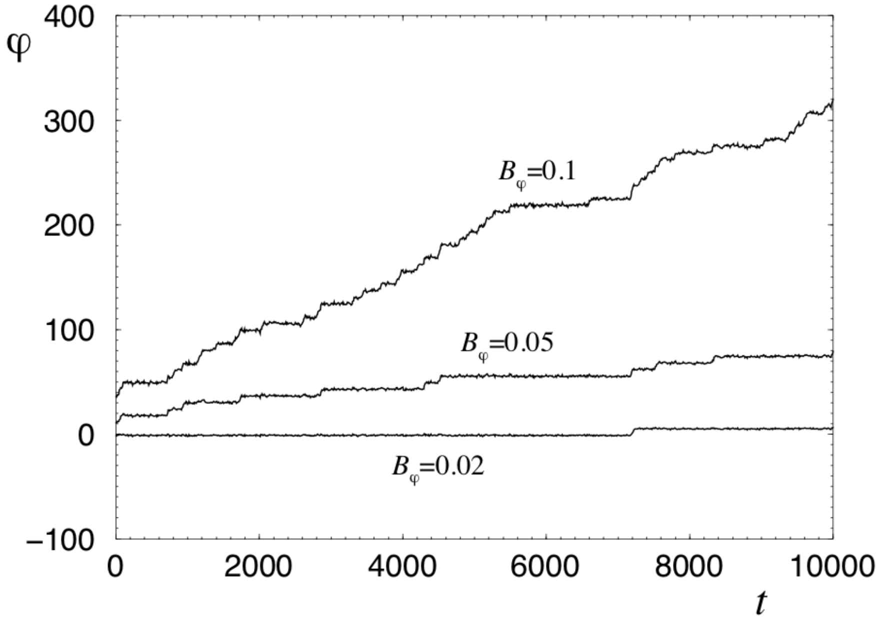


Рисунок 3.4.1: Зависимость мгновенной разности фаз от времени для нескольких значений интенсивности шума при $\Delta = 0.06$ и $\Delta_c = 0.15$.

ϕ выражается как

$$p_\phi(\phi, t) = \sum_n p_\varphi(\varphi, t). \tag{3.4.6}$$

Уравнение Фоккера – Планка – Колмогорова для $p_\phi(\phi, t)$ имеет тот же самый вид, что и (3.4.5), но теперь существует стационарное решение, имеющее гауссову форму:

$$p_\phi^{\text{ст}}(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi B_\varphi / \Delta_c}} \exp\left(\frac{-\left(\phi + \pi/2\right)^2}{2B_\varphi/\Delta_c} \right) \tag{3.4.7}$$

с максимумом в точке ϕ_0. Хорошо заметный максимум гауссова распределения разности фаз свидетельствует о захвате фазы. В пределе $B_\varphi \to 0$ плотность вероятности становится δ-функцией, то есть

$$\lim_{B_\varphi \to 0} p_\phi^{\text{ст}}(\phi) = \delta(\phi + \pi/2).$$

При небольшой, но конечной интенсивности шума распределение $p_\phi^{\text{ст}}(\phi)$ отклоняется от гауссова, но имеет при этом хорошо заметный максимум.

Зная стационарную плотность вероятности $p_\phi^{\text{ст}}(\phi)$, можно найти среднюю разностную частоту колебаний:

$$\Omega = \omega_c - \omega_1 = \langle \dot{\phi} \rangle = \int\limits_{-\pi}^{+\pi} (\Delta - \Delta_c \cos \phi)\, p_{\phi}^{\text{ст}}(\phi) d\phi, \qquad (3.4.8)$$

где ω_c — средняя частота автоколебаний в присутствии воздействия. В области синхронизации в системе с шумом величина Ω отлична от нуля и представляет собой средний сдвиг частоты синхронных колебаний в сторону собственной частоты автогенератора, вызванный флуктуациями фазы. Графики зависимости Ω от расстройки Δ, рассчитанные для модели (3.4.4), приведены на рис. 3.4.2. Величина Ω плавно меняется с изменением расстройки, обращаясь в ноль только в точке $\Delta = 0$. Полученные в присутствии шума кривые располагаются между кривой, соответствующей системе без шума, и прямой $\Omega = \Delta$, отражающей полное отсутствие синхронизации. Таким образом, наличие случайных гауссовых возмущений приводит к тому, что средняя частота автоколебаний не совпадает с частотой воздействия, а находится между частотой воздействия и частотой невозмущенных автоколебаний. Однако, если интенсивность шума достаточно мала, зависимость $\Omega(\Delta)$ имеет характерную для синхронизации почти горизонтальную «полочку» (рис. 3.4.2, $B_{\varphi} = 0.01$). С ростом интенсивности шума такая «полочка» постепенно исчезает.

3.4.2 Экспериментальная часть

3.4.2.1 Экспериментальная установка

Для реализации лабораторной работы в среде LabVIEW была разработана и создана виртуальная лабораторная установка, которая описана ниже.

На рис. 3.4.3 приведен вид передней панели виртуального прибора. На главном экране можно задавать параметры модели: начальные условия для интегрирования $x0$ и $y0$, шаг интегрирования h, время расчета в безразмерных единицах, управляющий параметр eps, интенсивность шума D, амплитуду b и частоту $omega\_ext$ внешнего гармонического воздействия. На панели прибора имеются четыре окна для отображения результатов. В них можно наблюдать временную реализацию $x(t)$, фазовый портрет, вид внешнего гармонического воздействия и нормированный спектр мощности $G_X(\omega)$.

В работе предусмотрена запись полученных данных в специальный файл, что позволяет наблюдать результаты не только на экране виртуального прибора, но и строить графики с использованием графических программ, например gnuplot или GRACE.

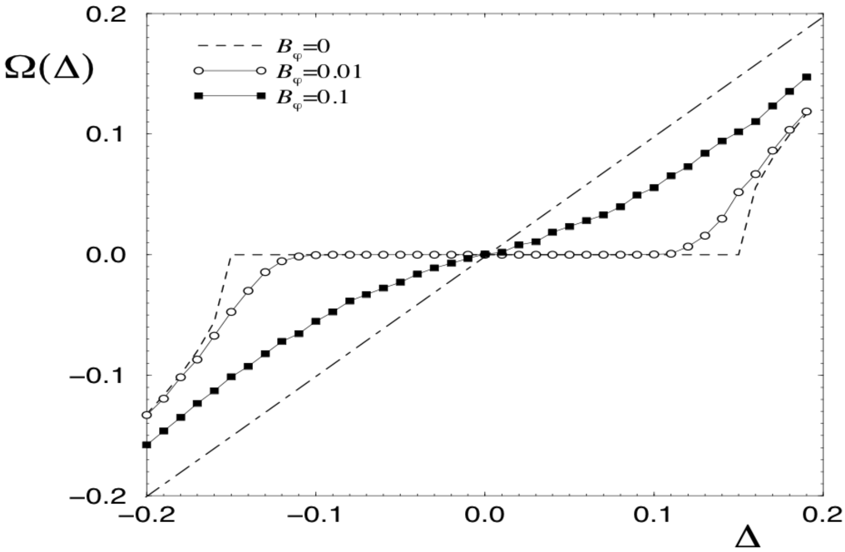


Рисунок 3.4.2: Зависимости средней разностной частоты Ω от параметра расстройки в модели (3.4.4), полученные при $\Delta_c = 0.15$ для двух различных значений интенсивности шума и в отсутствии шума. Штрих-пунктиром нанесена прямая $\Omega = \Delta$.

3.4.2.2 Порядок выполнения работы

Задание 1:

- Исследовать влияние шума на зависимость мгновенной разности фаз от времени. Для этого проинтегрировать численно с помощью виртуальной установки LabVIEW стохастическое дифференциальное уравнение (3.4.1) при различных интенсивностях шума D. Написать программу расчёта мгновенной разности фаз по полученным временным реализациям и представить зависимости мгновенной разности фаз от времени для различных интенсивностей шума на одном графике. Сравнить полученные результаты с результатами для уравнения фазовой динамики (3.4.4) (рис. 3.4.1).

Задание 2:

- Исследовать влияние шума на зависимость средней разностной частоты от расстройки частоты. Для этого проинтегрировать численно с помощью виртуальной установки LabVIEW стохастическое дифференциальное уравнение (3.4.1) при различных интенсивностях шума D. Написать программу расчёта средней разностной частоты по полученным

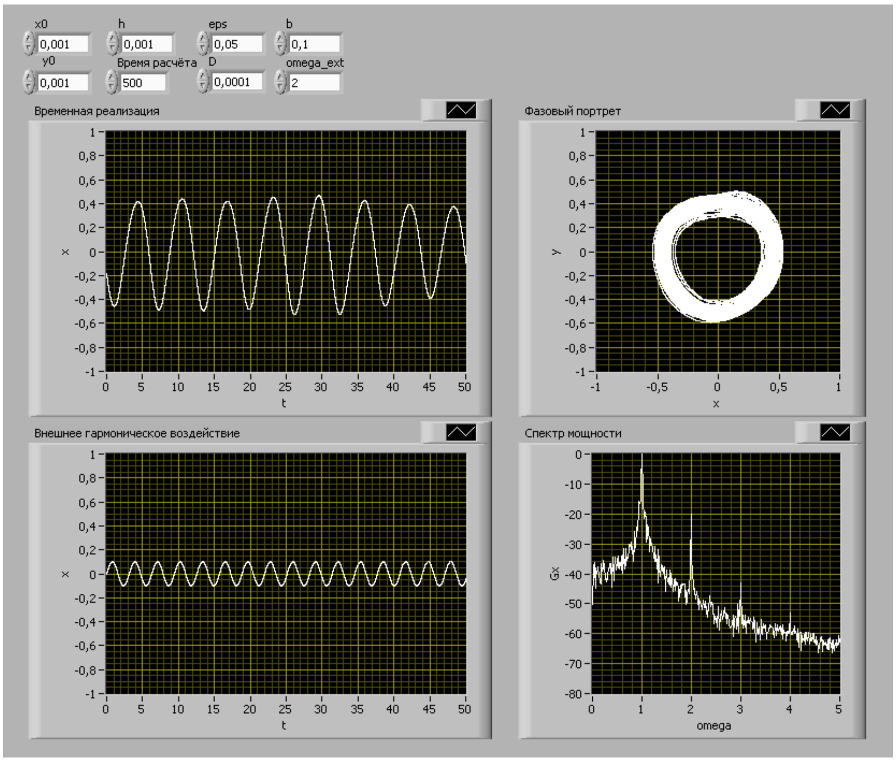


Рисунок 3.4.3: Вид главной панели виртуальной установки.

временным реализациям и представить средней разностной частоты от расстройки частоты для различных интенсивностей шума на одном графике. Сравнить полученные результаты с результатами для уравнения фазовой динамики (3.4.4) (рис. 3.4.2).

Литература

[1] В.С. Анищенко, Сложные колебания в простых системах. – М.: Наука, 1990 (2-е изд. М.: УРСС, 2009)

[2] К.Ф. Теодорчик, Автоколебательные системы с инерционной нелинейностью. ЖТФ, 1946. – Т. 16, вып. 7. – С. 845–854.

[3] В.С. Анищенко, В.В. Астахов, Экспериментальное исследование механизма возникновения и структуры странного аттрактора в генераторе с инерционной нелинейностью. Радиотехника и электроника, 1983. – Т. 28, N 6. – С. 1109–1115.

[4] В.С. Анищенко, В.В. Астахов, Т.Е. Вадивасова, Генератор Анищенко–Астахова как одна из базовых моделей детерминированного хаоса. Известия СГУ. Сер. "Физика", 2005. – Т. 5, N 1. – С. 54-67.

[5] В.В. Астахов, А.В. Шабунин. Радиофизический практикум по теории колебаний: Учебное пособие для студентов вузов. – Саратов: Изд-во ГосУНЦ "Колледж", 2003. – 147 с.

[6] А. Пиковский, М. Розенблюм, Ю. Куртс. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. – Москва: Техносфера, 2003. – 496 с.

[7] В.С. Анищенко, Т.Е. Вадивасова. Лекции по нелинейной динамике: Учебное пособие для студентов вузов. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2010. – 322 с.

[8] В.С. Анищенко, В.В. Астахов, Т.Е. Вадивасова, А.Б. Нейман, Г.И. Стрелкова, Л. Шиманский-Гайер. Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. Под редакцией В.С. Анищенко - Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003, - 544 с.

[9] Анищенко В. С., Вадивасона Т. Е. Лекции по нелинейной динамике: учеб. пособие для вузов. - М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011.- 516 с.

[10] А.В.Феоктистов, С.В.Астахов, В.С.Анищенко Когерентный резонанс и синхронизация стохастических автоколебаний в системе ФитцХью-Нагумо // Изв. Вузов «ПНД». 2010. № 5. С. 33-44.

[11] В.С. Анищенко, А.Б. Нейман, Ф. Мосс, Л. Шиманский-Гайер. Стохастический резонанс как индуцированный шумом эффект увеличения степени порядка // Успехи Физических Наук, Т.169, №1, с.7-38.

[12] В. Ипатов Широкополосные системы и кодовое разделение сигналов. Принципы и приложения // М: Техносфера, 2007. –488 с.

[13] В.Н. Исаков Статистическая теория радиотехнических систем // Электронная публикация: http://strts.online-narod.ru, 2010.

[14] С. Хайкин Нейронные сети. Полный курс // М: Издательский дом “Вильямс”, 2016. –1104 с.