

Лабораторная работа: Расчет спектра мощности дискретных сигналов

1 Краткие теоретические сведения

1.1 Введение

Среди множества методов анализа радиосигналов спектральные методы являются наиболее распространенными. Под спектром аналогового сигнала $x(t)$ зачастую понимают получающуюся в результате интегрального преобразования Фурье (ИПФ):

$$\mathcal{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (1)$$

комплекснозначную функцию спектральной плотности $\mathcal{F}$, зависящую от “круговой” частоты ω . Эту функцию называют комплексным спектром сигнала, а ее модуль и аргумент (фазу) соответственно - амплитудным и фазовым спектром. Квадрат модуля функции $\mathcal{F}(\omega)$ можно интерпретировать как плотность энергии сигнала $x(t)$, приходящуюся на частоту ω . Действительно, если принять, что $x^2(t)$ - мощность сигнала в момент времени t ¹, а также, что в соответствии с равенством Парсеваля:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}(\omega)|^2 d\omega \quad (2)$$

то, значение $\int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}(\omega)|^2 d\omega$ представляет собой полную энергию сигнала $\mathbb{E}$. Следовательно $|\mathcal{F}(\omega)|^2 = d\mathbb{E}/d\omega$ - плотность энергии.

Необходимо отметить, что формула (1) может быть использована лишь для теоретического анализа простых и детерминированных сигналов, но никак не может служить средством для практического построения спектров. Причины этого заключаются в том, что:

- на практике невозможно наблюдать за сигналом сколь угодно долго, любые измерения являются ограниченными во времени;
- если сигнал $x(t)$ является случайным (а именно случайные сигналы представляют интерес для анализа), то и $\mathcal{F}(\omega)$ оказывается случайной функцией частоты, а следовательно она не будет соответствовать важнейшему свойству для любых измеряемых характеристик - повторяемостью при сходных условиях эксперимента;

¹на самом деле, если x - напряжение или ток какой либо электрической цепи, то $x^2(t)$ - величина пропорциональная мощности с коэффициентом пропорциональности в виде проводимости или сопротивления

- даже для сигналов конечной длительности, для расчета преобразования (1) необходимы значения сигнала в бесконечном числе точек (бесконечное число моментов времени).

Поэтому непосредственное использование (1) для анализа реальных сигналов невозможно, однако $\mathcal{F}(\omega)$ является исходной величиной для построения всех других спектральных характеристик, применяемых на практике.

1.2 Дискретно-временное преобразование Фурье

Перейдем теперь от аналоговых сигналов к дискретным, то есть к сигналам, значения которых определены лишь в дискретные моменты времени $t_n = n\tau$, кратные некоторому постоянному интервалу τ , называемому интервалом дискретизации:

$$x(n) = x(n\tau), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Если этот интервал достаточно мал, то интеграл в (1) можно заменить на сумму:

$$\mathcal{F}(\omega) \simeq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\tau) e^{-j\omega n\tau} \tau$$

Знак примерного равенства трансформируется в строгое равенство, если τ устремить к нулю. Введем комплексную функцию $F(\omega) = \mathcal{F}(\omega)/\tau$. Кроме того, перейдем от “обычной” частоты ω к безразмерной частоте $\bar{\omega}$, нормировав ω на частоту дискретизации $f_d = 1/\tau$: $\bar{\omega} = \omega\tau$. Тогда, функция

$$F(\bar{\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\bar{\omega}n} \quad (3)$$

будет иметь характер комплексной спектральной плотности, зависящей от нормированной частоты $\bar{\omega}$. Формула (3) носит название “дискретно-временное преобразование Фурье” (ДВПФ).

Также как и интегральное преобразование Фурье, выражение (3) трудно применить для построения спектров экспериментальных сигналов. Его используют обычно для анализа спектров таких сигналов, форма которых может быть задана в виде элементарных математических функций (например, $\sin(\bar{\omega}n)$ и т.п.). Из (3) легко вывести основные свойства ДВПФ:

1. Линейность:

$$F_{\sum_i \alpha_i x_i}(\bar{\omega}) = \sum_i \alpha_i F_{x_i}(\bar{\omega})$$

α_i - любые постоянные числа.

2. Симметричность относительно нулевой частоты (для вещественных сигналов):

$$F(-\bar{\omega}) = F^*(\bar{\omega})$$

3. Инвариантность модуля ДВПФ относительно смещения сигнала на постоянный интервал времени n_0 :

$$F_{x(n-n_0)}(\bar{\omega}) = F_{x(n)}(\bar{\omega})e^{-jn_0\bar{\omega}}$$

Данное свойство очень важно для спектрального анализа. Из него следует, что амплитудный спектр $|F(\bar{\omega})|$, который в основном и интересует исследователей, инвариантен к выбору начального момента времени, а фазовый - инвариантен с точностью до любой линейной функции частоты.

4. Периодичность с периодом 2π : $F(\bar{\omega} + 2\pi) = F(\bar{\omega})$.

5. Симметрия относительно частоты $\bar{\omega} = \pi$ (только для вещественных сигналов): $F(\pi - \bar{\omega}) = F^*(\pi + \bar{\omega})$.

Свойства (1) - (3) выполняются как для ИПФ, так и для ДВПФ, а вот свойства (4), (5) - только для ДВПФ. Из них следует, что нет смысла измерять спектр во всем диапазоне частот, а достаточно построить его для интервала $\bar{\omega} \in [0 : \pi]$, поскольку для остальных значений его легко получить при помощи свойств симметрии и периодического продолжения. Отсюда: *любые методы цифрового спектрального анализа дают значения любых спектральных характеристик только в диапазоне нормированных частот $\bar{\omega} \in [0 : \pi]$* . При этом, верхней граничной частоте диапазона $\bar{\omega} = \pi$ на шкале “реальных” частот соответствует частота, равная половине частоты дискретизации $\omega = 2\pi f_d/2$.

1.3 Дискретное преобразование Фурье

Перейдем теперь от “идеализированных” сигналов к реальным, которые всегда имеют ограниченную длительность во времени $n \in [0 : N - 1]$. Из теоремы Котельникова известно, что если аналоговый сигнал имеет ограниченный по частоте спектр, то сигнал может быть точно восстановлен по своей дискретной выборке. Это свойство, благодаря дуальности спектров и сигналов, может быть обращено и на спектры, а именно: если сигнал является ограниченным по времени, то его непрерывный спектр может быть точно восстановлен по дискретной выборке спектра. Давайте докажем это свойство.

Рассмотрим сначала аналоговые, ограниченные во времени сигналы. Пусть аналоговый сигнал $x(t)$ отличен от нуля только на ограниченном интервале времени: $x(t) \neq 0$ при $t \in [-T/2 : T/2]$, где T - длительность сигнала ². Запишем для него ИПФ, учитывая при этом, что за пределами указанного интервала времени сигнал равен нулю:

$$\mathcal{F}(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (4)$$

Введем для сигнала $x(t)$ его периодическое продолжение на всю временную ось, продолжив его

²здесь используется интервал, симметричный относительно нуля только потому, что для него все выкладки осуществляются максимально просто; для интервала $t \in [0 : T]$ все спектральные характеристики домножаются на соответствующий фазовый множитель

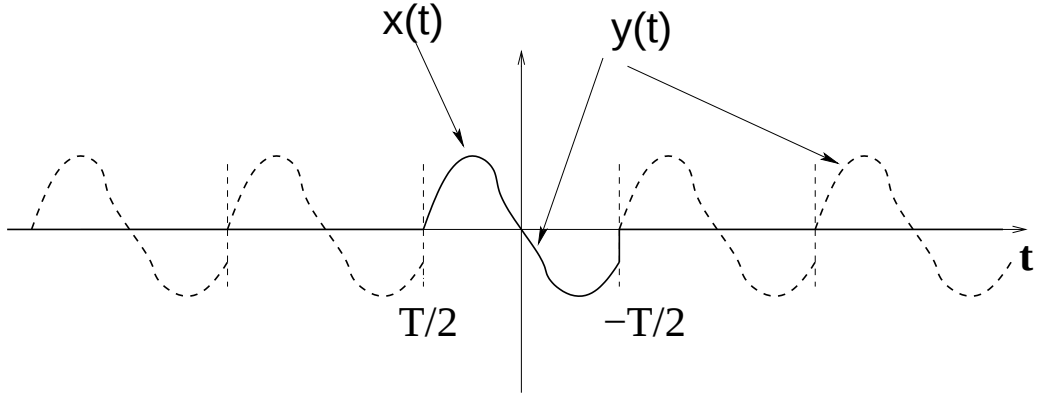


Рис. 1: Сигнал $x(t)$ и его периодическое продолжение $y(t)$

с периодом T (см. рис.1):

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) \text{ если } t \in [-T/2 : T/2] \\ y(t+T) &= y(t) \end{aligned}$$

Сигнал $y(t)$ полностью совпадает с $x(t)$ на интервале интегрирования, а значит его можно поставить в формулу (4), которая при этом не изменится:

$$\mathcal{F}(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} y(t) e^{-j\omega t} dt \quad (5)$$

Поскольку $y(t)$ - периодический сигнал, он может быть представлен в виде дискретного ряда Фурье:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt} \quad (6)$$

Подставим это представление в формулу (5), поменяв местами суммирование и интегрирование, и вынеся постоянные C_k за знак интеграла:

$$\mathcal{F}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \int_{-T/2}^{T/2} y(t) e^{-j(\omega - \frac{2\pi}{T}k)t} dt \quad (7)$$

Интеграл в (7) легко берется, в результате чего получаем:

$$\mathcal{F}(\omega) = -T \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \text{Sinc} \left(\frac{\omega T}{2} - \pi k \right) \quad (8)$$

Здесь под функцией *Sinc* обозначена хорошо известная в радиотехнике функция $\sin(x)/x$. Найдем теперь неизвестные коэффициенты C_k . Для этого подставим в формулу (8) значение частоты, кратное частоте $\omega_0 = 2\pi/T$:

$$\mathcal{F}(n\frac{2\pi}{T}) = -T \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \text{Sinc}(\pi n - \pi k)$$

Вспомним, что функция $Sinc(i\pi)$ равна нулю для всех целых $i = \pm 1, \pm 2, \pm 3$ за исключением $i = 0$, для которого она равна единице. Поэтому от всей суммы останется только одно слагаемое, соответствующее $n = k$:

$$\mathcal{F}(n\frac{2\pi}{T}) = -TC_n,$$

откуда:

$$C_k = -\frac{1}{T}\mathcal{F}(k\frac{2\pi}{T})$$

Подставляя его в (8) получим связь между значениями спектральной плотности на любой частоте и значениями ее на дискретных частотах $\omega_k = k\omega_0$:

$$\mathcal{F}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(k\frac{2\pi}{T})Sinc\left(\frac{\omega T}{2} - \pi k\right) \quad (9)$$

Таким образом, если сигнал является ограниченным во времени, его спектр однозначно определяется значениями спектральной плотности в дискретном числе точек $\omega_k = k\omega_0$: $\mathcal{F}_k = \mathcal{F}(k\omega_0)$. Поэтому, на практике достаточно построить спектр в этих точках. С этой (прикладной) точки зрения будем говорить, что спектр ограниченных во времени сигналов является дискретным. Расстояние по частоте между двумя соседними гармониками этого спектра равно ω_0 , поэтому, эту частоту будем называть *частотой разрешения* спектра.

Вернемся теперь к дискретным сигналам $x(n)$. Спектр дискретных сигналов ограничен сверху по частоте частотой дискретизации $\omega_d = 2\pi/\tau$. С другой стороны, если сигнал ограничен во времени, то его спектр - дискретный с частотой ω_0 . Поэтому, для дискретного, ограниченного во времени сигнала $x(n) = x(n\tau)$, $n = 0, \dots, N-1$, спектр будет содержать ограниченное число гармоник на частотах: $0, \omega_0, 2\omega_0, \dots, (N-1)\omega_0$. Действительно, если мы разделим частотный интервал $2\pi/\tau$ на частоту разрешения $2\pi/T = 2\pi/N\tau$, то получим, что спектр содержит N гармоник.

Для нахождения этих гармоник, воспользуемся формулой (4), применив ее на частоте $\omega_k = k\omega_0$, заменив интеграл на интегральную сумму, и, приняв, что сигнал $x(n\tau)$ отличен от нуля на интервале времени $0 \leq t < N\tau$:

$$\mathcal{F}(k\omega_0) \simeq \sum_{n=0}^{N-1} x(n\tau)e^{-jk\omega_0 n\tau}$$

Обозначив $X(k) = \mathcal{F}(k\omega_0)/\tau$, заменив знак примерного равенства на строгое равенство (то есть считая интервал τ достаточно малым, и утя, что $\omega_0 = 2\pi/N\tau$, получим выражение:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N} \quad (10)$$

которое используется для практического расчета спектров дискретных и ограниченных во времени сигналов. Оно получило название *дискретное преобразование Фурье (ДПФ)*, иногда его также называю дискретным рядом Фурье. Величина $X(k)$ называется комплексной амплитудой k -ой гармоники спектра. Индексу k соответствует физическая частота $\omega_k = 2\pi k/N\tau$ или нормированная частота $\bar{\omega}_k = 2\pi k/N$. Таким образом, набор $\{X_k\}$, $k = 0, 1, \dots, N-1$ будем в дальнейшем

называть комплексным спектром дискретного, ограниченного во времени сигнала $x(n)$, модули этих величин $|X_k|$ - его амплитудным, а аргументы $\varphi_k = \arctan\left(\frac{\text{Im}X_k}{\text{Re}X_k}\right)$ - фазовым спектром.

Рассмотрим основные свойства ДПФ. Легко увидеть, что они повторяют свойства ДВПФ:

1. Линейность:

$$X_{\sum_i \alpha_i x_i}(k) = \sum_i \alpha_i X_{x_i}(k)$$

α_i - любые постоянные числа.

2. Симметричность относительно нулевой частоты (для вещественных сигналов):

$$X(-k) = X^*(k)$$

3. Инвариантность модуля ДПФ при смещении сигнала на постоянный интервал времени n_0 :

$$X_{x(n-n_0)}(k) = X_{x(n)}(k)e^{-j2\pi kn_0/N}$$

4. Периодичность с периодом N : $X(k+N) = X(k)$.

5. Симметрия относительно гармоники $N/2$ (только для вещественных сигналов, и если N - четное): $F(\frac{N}{2} - k) = F^*(\frac{N}{2} + k)$.

Из свойства (5) следует, что для вещественных сигналов достаточно построить $N/2$ гармоник, а оставшиеся $N/2$ получаются из них с помощью свойства симметрии. Поэтому большинство методов цифрового спектрального анализа по вещественному сигналу из N отсчетов определяет $N/2$ гармонических составляющих спектра.

1.4 Явление “растекания спектра”

Рассмотрим теперь проблему построения спектра для ограниченного во времени сигнала с другой стороны. На практике мы обычно сталкиваемся с ситуацией, когда исследуемый сигнал $x(t)$ доступен для анализа в течение ограниченного интервала времени T , меньшего, чем длительность самого сигнала. Данный интервал принято называть *временным окном*. Как выглядит сигнал за пределами этого окна мы не знаем. Соответственно, задача построения спектра $x(t)$ не имеет однозначного решения: спектры будут разными в зависимости от продолжения сигнала за пределы временного окна. В этом случае, принято использовать в качестве такой интерполяции периодическое продолжение с периодом T , что позволяет применить для построения спектра дискретизованного сигнала описанное в предыдущем разделе дискретное преобразование Фурье. При этом, результат спектрального анализа будет существенным образом зависеть от длительности временного окна. Рассмотрим эту зависимость подробнее.

Выберем для простоты гармонический сигнал $x(t) = \cos(\Omega t)$, функция спектральной плотности для которого, как легко подсчитать представляет собой сумму дельта-функций Дирака:

$$\mathcal{F}(\omega) = \delta(\omega - \Omega) + \delta(\omega + \Omega)$$

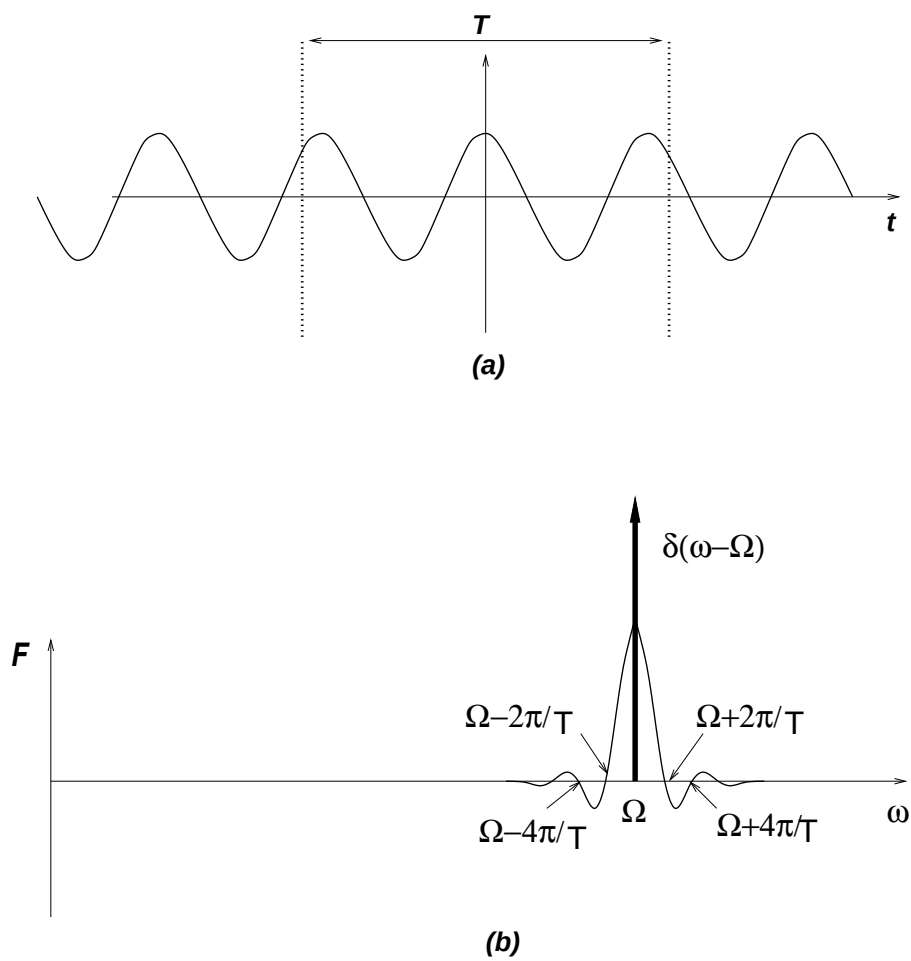


Рис. 2: Гармонический сигнал во временном окне (a) и его функция спектральной плотности (b)

Пусть временное окно, в течение которого сигнал доступен для наблюдения, имеет длительность T . Выберем его для упрощения выкладок симметрично относительно нулевого момента времени: введем функцию временного окна $W(t)$, равную единице на интервале наблюдения и равную нулю вне его:

$$W(t) = \begin{cases} 1 & \text{если } t \in [-T/2 : T/2] \\ 0 & \text{если } t \notin [-T/2 : T/2] \end{cases} \quad (11)$$

Наблюдаемый сигнал $y(t)$ есть исходный сигнал $x(t)$, умноженный на функцию окна: $y(t) = x(t)W(t)$. Построим спектр наблюдаемого сигнала $y(t)$:

$$\mathcal{F}_y(\omega) = \frac{T}{2} \left(\text{Sinc} \left((\omega - \Omega) \frac{T}{2} \right) + \text{Sinc} \left((\omega + \Omega) \frac{T}{2} \right) \right) \quad (12)$$

Так как спектр симметричен относительно нулевой частоты, ограничимся областью положительных частот: $\mathcal{F}_y^+(\omega) = \frac{T}{2} \text{Sinc} \left((\omega - \Omega) \frac{T}{2} \right)$. Характерная форма спектра показана на рис.2b: максимальное значение спектральной плотности достигается на частоте Ω . “Горб” функции $\mathcal{F}_y(\omega)$ на этой частоте называется “основным лепестком”. Величина (амплитуда) основного лепестка прямо пропорциональна длительности временного окна T . Основной лепесток ограничен справа и слева “нулями” функции спектральной плотности на частотах $\Omega + 2\pi/T$ и $\Omega - 2\pi/T$. При неограниченном увеличении длительности временного окна $T \rightarrow \infty$ амплитуда лепестка стремится к бесконечности, а его ширина - к нулю, и спектральная плотность становится все больше и больше похожа на дельта функцию $\mathcal{F}_y^+(\omega) \rightarrow \delta(\omega - \Omega)$. Кроме основного лепестка спектр содержит также “боковые лепестки”, которые примыкают к основному. Их ширина равна $2\pi/T$, а амплитуда быстро спадает по отношению к амплитуде основного лепестка с увеличением номера: $2/3\pi, 2/5\pi, 2/7\pi, \dots, 2/(1+2M)\pi, \dots$ (M - номер лепестка).

Перейдем теперь от спектральной плотности к дискретному спектру, то есть к спектру периодического продолжения сигнала $x(t)$ с периодом, равным длительности временного окна. Этот спектр представляет собой набор гармоник на частотах $\omega_k = 2\pi k/T, k = 0, 1, 2, \dots$, величина которых пропорциональна спектральной плотности. Здесь нужно различить два характерных случая:

1. Длительность временного окна кратна периоду сигнала:

$$T = m \frac{2\pi}{\Omega} \quad (13)$$

m - целое число. Из (13) следует, что гармоника спектра с номером $k = m$ точно приходится на базовую частоту периодического сигнала Ω : $\omega_m = 2\pi m/T = \Omega$ (см. рис.3a,b). Все же остальные гармоники, соответствующие частотам $\omega_{m\pm 1} = \Omega \pm 2\pi/T, \omega_{m\pm 2} = \Omega \pm 4\pi/T, \omega_{m\pm 3} = \Omega \pm 6\pi/T, \dots$ попадают в “нули” функции спектральной плотности и, соответственно, их амплитуда оказывается равной нулю. Таким образом, спектр сигнала в данном случае содержит единственную гармонику на частоте Ω , то есть качественно совпадает со спектром исходного сигнала $x(t)$.

2. Длительность временного окна не равна целому числу периодов сигнала $x(t)$:

$$T = m \frac{2\pi}{\Omega + \Delta\Omega} \quad (14)$$

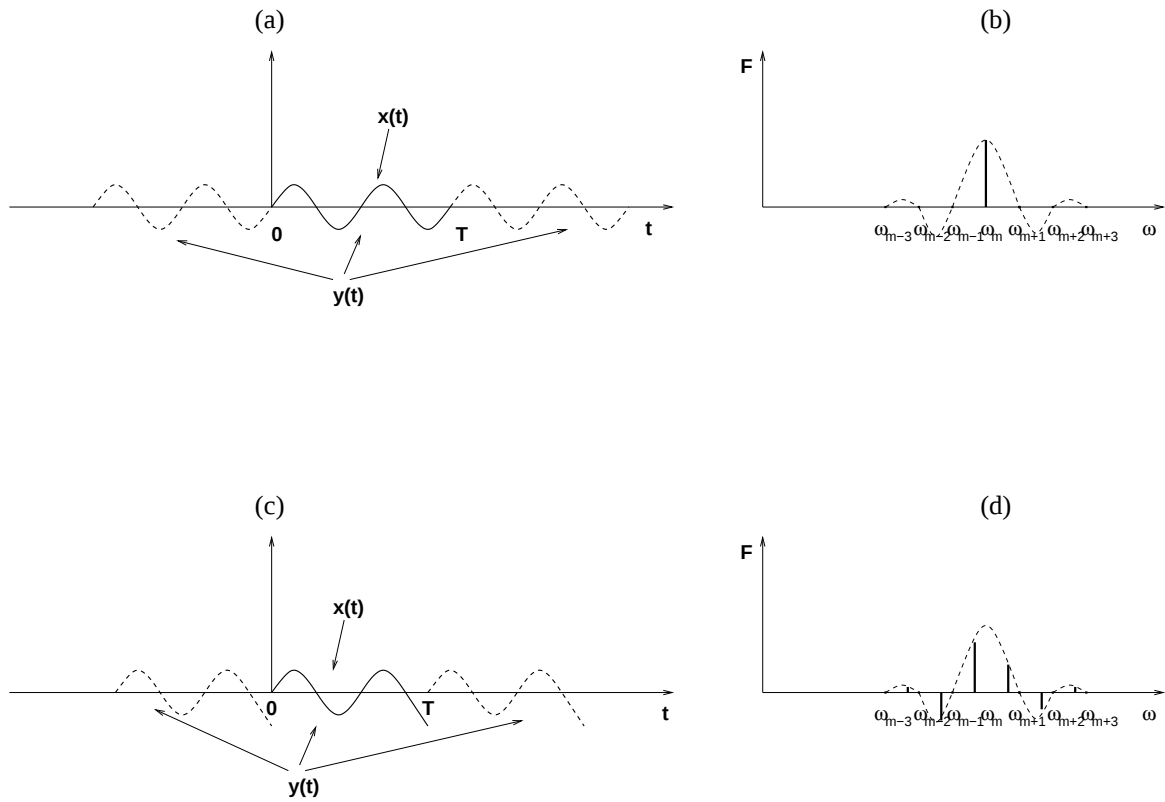


Рис. 3: Явление растекания спектра: (a) сигнал $x(t)$ и его периодическое продолжение $y(t)$ (длительность сигнала кратна периоду); (b) спектр сигнала $y(t)$; (c) сигнал $x(t)$ и его периодическое продолжение $y(t)$ (длительность сигнала не кратна периоду); (d) спектр сигнала $y(t)$

m - целое число, $\Delta\Omega \ll \Omega$ - малая добавка к частоте. В этом случае, ни одна из гармоник ω_k не попадает точно на значение частоты Ω , ближайшая к ней гармоника с номером m соответствует частоте $\Omega + \Delta\Omega$ (см рис.3с,d). Кроме того, остальные гармоники $\omega_{m\pm1} = \Omega + \Delta\Omega \pm 2\pi/T$, $\omega_{m\pm2} = \Omega + \Delta\Omega \pm 4\pi/T$, $\omega_{m\pm3} = \Omega + \Delta\Omega \pm 6\pi/T$, ... также “промахиваются” мимо нулей функции спектральной плотности на ту же величину $\Delta\Omega$. Поэтому спектр анализируемого сигнала будет содержать основную гармонику на частоте $\Omega + \Delta\Omega$, а также бесконечное множество дополнительных (боковых) гармоник на частотах $\Omega + \Delta\Omega \pm 2k\pi/T$.

Итак, дискретный спектр одного и того же сигнала кардинальным образом меняется при небольшом изменении длительности временного окна. Оптимальным является такой выбор временного окна, когда его длительность составляет целое число периодов сигнала. В этом случае окно не искажает вид спектра. Отчего так происходит? Это легко понять, если вспомнить, что дискретный спектр строится по периодическому продолжению сигнала. Легко увидеть (рис. 3а), что если период этого продолжения составляет целое число периодов сигнала - продолженный сигнал совпадает с истинным. Если же нет - то на граничных точках периодического продолжения возникают разрывы (рис. 3с). В результате сигнал $y(t)$ более не является копией сигнала $x(t)$, а значит и вид его спектра будет отличаться от вида спектра исходного сигнала:

- он будет содержать дополнительные гармонические составляющие, которых нет в спектре исходного сигнала (боковые лепестки);
- частота основной гармоники спектра окажется сдвинутой относительно “истинной” частоты.

Такое искажение спектра, вызванное ограниченностью временного окна называют “растеканием” спектра.

Явление растекания спектра мешает проведению спектральных измерений. Один и тот же сигнал может давать существенно разные спектры при разном выборе параметров расчета. Как бороться с этим явлением? Ясно, что увеличение длительности временного окна уменьшает растекание, однако, не всегда есть возможность наблюдать за сигналом сколь угодно долго. Если длительность окна увеличить нельзя, то можно устранить растекание подобрав его длительность кратной периоду сигнала. Беда в том, что основная масса сигналов не периодические. В этом случае полностью устранить растекание не удастся. Однако, можно его сделать меньшим, если у сигнала есть некоторый “характерный период” T , то есть интервал времени, через который он почти повторяется: $x(t + T) \simeq x(t)$. Для этого следует выбрать время наблюдения кратным к T . Если же исследуемый сигнал - шумовой без ясно выраженного периода колебаний, то растекание сигналов короткой длительности является неустраняемым явлением. При этом, как уже было сказано выше, в спектре “укороченного” сигнала появляется множество дополнительных гармоник, отсутствующих в спектре исходного. Часть этих гармоник (одна или две) располагаются в основной лепестке, часть - формируют боковые лепестки (по одной гармонике на каждый лепесток). Основной и боковые лепестки по разному могут влиять на результат измерений. Например, широкий основной лепесток нежелателен, если нужно различить в спектре два периодических сигнала с близкими базовыми частотами и почти равными амплитудами: перекрытие их основных лепестков помешает их разделению. В то же время, наличие боковых лепестков в данном случае не столь важно. С другой стороны, если нам нужно различить слабый сигнал на фоне сильного, существенно “нейтрализовать” его боковые лепестки, потому что спектральные

	Прямоугольное	Треугольное	Гаусса
Вид функции $W(n)$	$w(n)$	$(1 - 2\alpha(n)) w(n)$	$\exp[-12.5(1 - 2\alpha(n))^2]$
Ширина главного лепестка (на уровне половинной мощности, измеряется числом гармоник ДПФ)	0.89	1.28	1.33
Относительная высота боковых лепестков (dB)	-13.3	-26.5	-42
Скорость спада боковых лепестков (dB)	-6	-12	-6

Таблица 1: Характеристики временных окон. Функция прямоугольного окна $w(n) = \begin{cases} 1 & \text{если } n \in [0 : N - 1] \\ 0 & \text{если } n \notin [0 : N - 1] \end{cases}$, $\alpha(n) = \left| \frac{n - (N-1)/2}{N-1} \right|$

составляющие слабого сигнала легко могут быть замаскированы ими, даже если базовые частоты сигналов существенно различаются. Существует метод “перераспределения” растекания спектра между основным и боковыми лепестками. Этот метод называется “выбором формы временного окна”. Он заключается в специальном подборе функции $W(t)$. Временное окно простейшей формы (11), о котором говорилось выше, называется “прямоугольным окном”. Кроме него, возможны другие формы, такие как треугольное окно, окно Гаусса и другие. Каждое из этих окон характеризуется своими характеристиками: шириной основного лепестка, высотой боковых лепестков относительно основного, скоростью спада высоты боковых лепестков с увеличением их номера. Для указанных окон эти характеристики приведены в таблице 1.

Как видно из таблицы, ни одно из окон не дает возможность улучшить все расчетные характеристики, а лишь улучшает одни из них, за счет ухудшения других. Это правило является универсальным: выбор формы временного окна не позволяет уменьшить явление растекания спектра, а лишь улучшает какую-то из характеристик. При этом остальные характеристика за счет этого ухудшаются.

1.5 Основное соотношение для спектров детерминированных сигналов

Как было показано в разделе 1.3, частотный интервал между соседними гармониками (частота разрешения) определяется длительностью сигнала (длительность временного окна). Так для дискретного сигнала $x(n)$, нормированная частота разрешения $\bar{\omega}_0$ определяется числом точек выборки сигнала N :

$$\bar{\omega}_0 = \frac{2\pi}{N},$$

а для аналогового сигнала $x(t)$ частота разрешения ω_0 определяется его длительностью:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Отсюда легко получаем *основное соотношение для спектров детерминированных сигналов*, которое связывает разрешение спектра и длительность доступного для анализа сигнала:

$$\omega_0 T = 2\pi \quad (15)$$

Это соотношение является очень важным для практики. Так как произведение длительности сигнала на частоту разрешения является постоянной величиной, которая не может быть уменьшена использованием каких-либо технических ухищрений (также как и знаменитое соотношение неопределенности в квантовой физике), то существует минимальное разрешение в спектре, которое мы можем достичь при заданной длительности сигнала.

1.6 Спектр мощности случайных сигналов

Основной интерес для радиофизики представляют случайные шумовые сигналы, поскольку только такие сигналы могут быть использованы для передачи информации. Случайный сигнал представляет собой зависимую от времени случайную величину $X(t)$. Если мы проведем измерения случайного сигнала в течение некоторого интервала времени T , то получим некоторую временную реализацию процесса $x_1(t)$, $0 \leq t \leq T$. При следующем измерении временная реализация $x_2(t)$ будет уже иной: $x_1(t) \neq x_2(t)$. Набор (ансамбль) временных реализаций случайного процесса $\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_M(t)\}$, полученных на едином временном интервале, позволяет рассчитать статистические характеристики, характеризующие случайный процесс. Одной из таких характеристик является спектр мощности случайного процесса (случайного сигнала).

Случайные сигналы делятся на стационарные и нестационарные. Стационарными называются такие процессы, статистические характеристики которых не зависят от начального момента времени. В частности, одномерная плотность вероятности процесса ρ не зависит от времени: $\rho(t) = \text{Const}$, а автокорреляционная функция K зависит только от разности моментов времени: $K(t_1, t_2) = K(t_2 - t_1)$. Среди стационарных процессов выделяют также эргодические процессы, это такие случайные процессы, для которых среднее значение, вычисленное по ансамблю реализаций, совпадает со средним значением, подсчитанным при усреднении по времени. В дальнейшем будем считать, что все рассматриваемые случайные процессы являются эргодическими.

Возьмем одну из реализаций случайного дискретного процесса $x(n)$, длительностью N : $(x_i(0), x_i(1), \dots, x_i(N-1))$, i - номер реализации. Для этой временной реализации можно построить ДПФ:

$$X_i(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_i(n) e^{-j2\pi kn/N}$$

Здесь $X_i(k)$ - спектр, построенный по реализации $x_i(n)$. Его называют также *периодограммой* отдельной реализации случайного процесса. Так как процесс является случайным, все временные реализации $x_i(n)$, $i = 1, 2, \dots, M$ - будут разными, а значит и разными будут соответствующие периодограммы $X_i(k)$. Соответственно функция $X_i(k)$ будет характеризовать не спектр случайного

сигнала, а лишь спектр одной из его реализаций и будет являться случайной функцией частоты. При другом выборе временной реализации мы получим другую периодограмму. *Использование периодограммы $X_i(k)$ в качестве спектра случайного сигнала - характерная ошибка спектрального анализа.* Для получения спектра случайного процесса необходимо провести операцию статистического усреднения по ансамблю периодограмм $\{X_i(k)\}_{i=1}^M$. Однако, нельзя усреднять сами периодограммы - они не являются инвариантными к выбору начального момента времени: каждая из них будет отличаться на свой экспоненциальный множитель $e^{-j2\pi kn_0/N}$ в соответствии со свойством (3) ДПФ. Поэтому усредняют либо модули $|X_i(k)|$ (амплитудный спектр), либо, чаще всего - квадраты модулей $|X_i(k)|^2$ (спектр мощности).

Рассмотрим методику построения спектра мощности случайного дискретного сигнала. Для анализа берется некоторая временная реализация сигнала, длиной L точек.

1. Временная реализация делится на ансамбль из M более коротких реализаций длительностью N точек, так что $L = M \times N$:

$$\left\{ \underbrace{x(0), x(1), \dots, x(N-1)}_{\text{1-ая реализация}}, \underbrace{x(2N), \dots, x((M-1)N), \dots, x(L-1)}_{\text{M-ая реализация}} \right\}$$

Получаем ансамбль реализаций $x_i(n)$, $i = 1, 2, \dots, M$, $n = 0, 1, \dots, N-1$.

2. Выбираем соответствующую функцию временного окна $W(n)$. Домножаем каждую из реализаций на эту функцию³:

$$y_i(n) = x_i(n)W(n)$$

3. По каждой реализации посредством ДПФ строим периодограмму:

$$Y_i(k) = \sum_{n=0}^{N-1} y_i(n)e^{-j2\pi kn/N}$$

4. Подсчитываем *выборочные* спектры мощности:

$$P_i(k) = Y_i(k)Y_i^*(k)$$

5. Подсчитываем *оценку спектра мощности*, усредняя по ансамблю выборочные спектры:

$$\hat{P}(k) = \langle P_i(k) \rangle = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M P_i(k) \quad (16)$$

Функция $\hat{P}(k)$ называется оценкой спектра мощности, поскольку она строится по конечному ансамблю из M реализаций. Истинный спектр мощности получится, если мы возьмем бесконечно большое число выборочных спектров для взятия среднего:

$$P(k) = \lim_{M \rightarrow \infty} \hat{P}(k) \quad (17)$$

³Этот пункт может быть опущен, если используется прямоугольное окно. В этом случае $y_i(n) = x_i(n)$

При реальных измерениях длительность шумового сигнала всегда конечна, а значит конечны длительность отдельной реализации N и число реализаций M . Ясно что сигнал ограниченной длительности $L = M \times N$ можно разбить на под-реализации множеством разных способов. Например, если общая длительность дискретного сигнала составляет 1000 отсчетов, можно “нарезать” 100 временных реализаций по 10 точек в каждой, можно - 10 реализаций по 100 точек, а можно оставить одну длинную реализацию в 1000 отсчетов. Какое из таких разбиений лучше? Чтобы ответить на этот вопрос, надо понять за что отвечают параметры M и N . Что касается длительности под-реализации N , то ответ уже был дан в разделе 1.3: она определяет разрешающую способность спектра $\overline{\omega}_0 = 2\pi/N$. Рассмотрим теперь параметр M .

Если рассматриваемый процесс является “истинно” случайным, например является белым шумом с нормальным распределением, то в теории спектров показано, что дисперсия спектра мощности, подсчитанного по одной реализации, при больших N стремится к значению квадрата спектра мощности:

$$D_{p_i}(k) = \langle P_i^2(k) - P^2(k) \rangle \xrightarrow{M \rightarrow \infty} P^2(k)$$

Иными словами “ошибка” при расчете спектра мощности по одной реализации сопоставима со значением самого спектра мощности. Именно поэтому спектр мощности, подсчитанный по одной периодограмме, как уже было сказано выше, не может характеризовать спектр мощности случайного процесса: оценка, полученная по одной периодограмме является несостоятельной. Если же мы подсчитаем среднее по M периодограммам, то в соответствии с теорией вероятности дисперсия для среднего по M независимым измерениям уменьшается в M раз:

$$D_{\hat{p}}(k) = \frac{D_{p_i}(k)}{M} \simeq \frac{P^2(k)}{M}$$

Тогда среднеквадратичное отклонение оценки спектра мощности по M периодограммам $\sigma_{\hat{p}_i} = \sqrt{D_{\hat{p}_i}(k)}$ будет уменьшаться с ростом числа периодограмм как $1/\sqrt{M}$:

$$\sigma_{\hat{p}} = \frac{P(k)}{\sqrt{M}}$$

Чем меньше среднеквадратичное отклонение, тем достовернее оценка спектра мощности. Отношение значения квадрата спектра мощности к дисперсии его оценки называют *качеством расчета спектра* или его *статистической устойчивостью* (Q):

$$Q = \frac{P^2(k)}{D_{\hat{p}}(k)} = M \quad (18)$$

Таким образом, число периодограмм влияет на статистическую устойчивость расчетного спектра мощности.

Если перемножить значение разрешающей способности спектра $\overline{\omega}_0$ на число точек временного ряда L и разделить на статистическую устойчивость Q то получим постоянную 2π . Действительно:

$$\frac{\overline{\omega}_0 L}{Q} = \frac{\frac{2\pi}{N} L}{M} = 2\pi \quad (19)$$

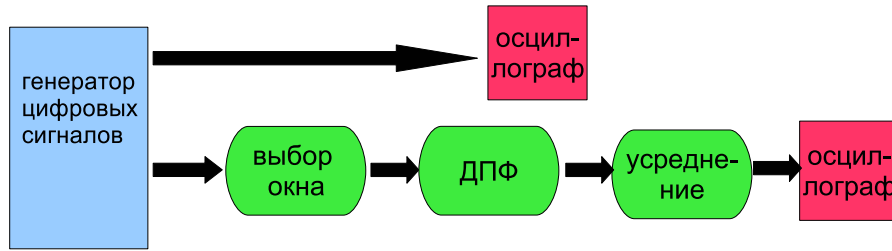


Рис. 4: Функциональная схема цифрового анализатора спектров

Выражение (19) называется основным соотношением для спектров случайных дискретных сигналов. Из него видно, что если число точек временного ряда фиксировано ($L = Const$), то можно либо повысить разрешающую способность (уменьшить $\overline{\omega_0}$) за счет понижения качества расчета спектра (уменьшить Q), либо, наоборот, улучшить статистическую устойчивость расчета спектра (увеличить Q), одновременно ухудшив его разрешающую способность. Для спектров случайных аналоговых сигналов выражение (19) преобразуется к следующему виду:

$$\frac{\omega_0 T}{Q} = 2\pi$$

где T - полное время анализа аналогового сигнала.

2 Практическая часть

В ходе работы исследуется явление растекания спектра регулярных сигналов, влияние формы временного окна на результаты спектрального анализа, экспериментально проверяется основное соотношение между длительностью сигнала и разрешающей способностью спектра, рассматривается влияние усреднения по ансамблю периодограмм на статистическую устойчивость спектра шумовых сигналов.

2.1 Экспериментальная установка

Экспериментальная установка представляет собой компьютерную программу, созданную в среде программирования LabView, которая позволяет моделировать регулярные и шумовые радиосигналы и строить их спектры мощности. Функциональная схема изображена на рис. 4 В установку входит генератор сигналов с дискретным временем, позволяющий генерировать двух-тональный гармонический с добавлением шума:

$$x(n) = A_1 \cos(\overline{\omega_1} n) + A_2 \cos(\overline{\omega_2} n) + A_3 \xi(n) \quad (20)$$

где $A_{1,2}$ - амплитуды гармонических сигналов, $\overline{\omega_{1,2}}$ - их нормированные частоты, $\xi(n)$ - дискретный нормальный шум с интенсивностью A_3 . Из выражения (20) видно, что в работе используется смесь двух-тонального сигнала с шумом. Сигнал от генератора подается на цифровой анализатор

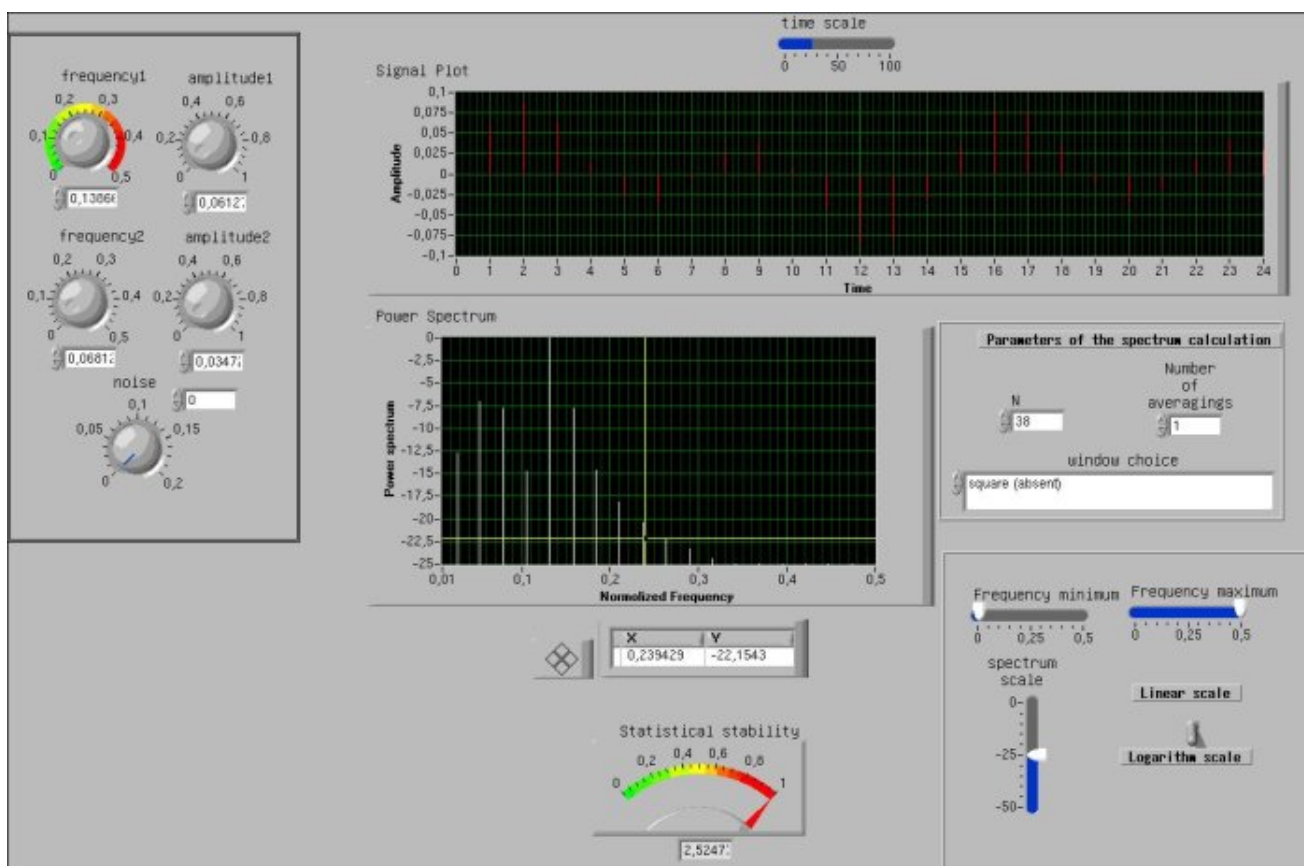


Рис. 5: Вид передней панели установки для анализа спектров дискретных сигналов

спектра, состоящий из каскадно соединенных блоков: (а) выбора функции временного окна, позволяющий выбрать одно из трех окон (прямоугольное, треугольное, окно Гаусса); (б) блок расчета ДПФ; блок усреднения выборочных спектров мощности. Число точек ДПФ и число усреднений выбирается пользователем. Форма полученного спектра мощности отображается на осциллографе. На другом осциллографе отображается форма анализируемого сигнала.

На рис.5 приведена передняя панель установки. На ней располагаются:

- окно осциллографа для визуализации формы сигнала (Signal Plot), масштаб по оси времени регулируется бегунком (Time scale);
- окно анализатора спектра, масштаб по оси частот регулируется бегунками (Frequency minimum) и (Frequency maximum), масштаб по оси спектров регулируется бегунком (Spectrum scale), выбор шкалы отображения спектра регулируется переключателем (Linear scale – Logarithm scale);
- окно положения курсора анализатора спектра (X Y);
- окно генератора дискретных сигналов в котором располагаются ручки управления ам-

плитудами гармоник (Amplitude1) и (Amplitude2), ручки управления частотами гармоник (Frequency1) и (Frequency2), ручка управления интенсивностью шума (noise);

- окно выбора параметров расчета спектров, в котором располагается регулятор, задающий число точек ДПФ (N), регулятор, задающий число усреднений при расчете спектра мощности (Number of averagings) и селектор выбора временного окна (Window choice);
- Стрелочный индикатор, отображающий значение статистической устойчивости значения спектра мощности белого шума (Statistical Stability).

2.2 Ход работы

1. Исследование разрешающей способности спектра.

- (a) Выбрать частоту основного тона $\bar{f}_1$, амплитуды обоих сигналов двух-тонального генератора - равными друг другу. Число отсчетов $N \simeq 1000$. Менять частоту второго тона $\bar{f}_2$, определить минимальную разность частот $\Delta\bar{f} = |\bar{f}_1 - \bar{f}_2|$ при которой оба тона различаются в спектре сигнала (считать, что они различаются, если между ними присутствует хотя бы одна гармоника меньшая по величине). Провести эти измерения при увеличивающемся числе отсчетов N и построить зависимость разрешающей способности анализатора спектра $\Delta\bar{f}$ от N . Построить несколько характерных спектрограмм.
- (b) Провести указанные в пункте (a) измерения для смеси сигнала с малым шумом. Построить данные зависимости для разного числа усреднений: $M = 1$, $M = 10$, $M = 100$.

2. Исследование явления растекания спектра.

- (a) Подать на вход анализатора спектра одно-тональный гармонический сигнал (амплитуду второго тона установить равной нулю). Выбрать амплитуду и частоту сигнала. Меняя число отсчетов N следить за изменением формы спектров. Построить несколько характерных спектрограмм. Определить набор значений N , при которых спектр является идеальным (не содержит дополнительных гармоник). Построить зависимости отношения величины основной гармоники к соседней (в децибелах) от N . Построить график зависимости ширины спектра на уровне -20 дБ от N .
- (b) Подать на вход анализатора спектра двух-тональный сигнал. Выбрать амплитуду второго тона малой по сравнению с амплитудой основного. Найти минимальную разность частот, для которой гармонику второго тона можно различить на фоне первого. Провести эти измерения для разных форм временного окна и определить, какое окно лучше для выделения слабых сигналов. Построить характерные спектрограммы.

3. Исследование влияния усреднения на качество спектра мощности случайных сигналов.

- (a) Подать на вход анализатора шумовой сигнал. Построить ряд спектрограмм, последовательно увеличивая число усреднений при расчете спектра мощности. Построить зависимость статистической устойчивости от числа усреднений и сравнить с теоретической. Провести измерения для нескольких значений числа отсчетов N . Как статистическая устойчивость зависит от N ?

- (b) Выбрать произвольную частоту. Построить для этой частоты $\sim 20 - 30$ значений величины гармоники на выбранной частоте при отсутствии усреднения. Оценить среднее значение и средне-квадратичное отклонение. Провести те же измерения при $M = 10$ и сопоставить результаты.
- (c) Подать на вход анализатора спектра смесь одно-тонального гармонического сигнала с шумом. Определить отношение сигнал/шум, как отношение величины основного пика, соответствующего регулярному сигналу к средней величине шумового пьедестала (в дБ). Построить зависимость этого отношения от числа усреднений M .