

Лабораторная работа: Дискретизация аналоговых сигналов

1 Краткие теоретические сведения

1.1 Введение

Современная радиосвязь становится цифровой, поэтому и радиофизика, как прикладная наука, призванная разрабатывать новые методы и новые устройства связи, все больше и больше занимается цифровыми сигналами и методами их обработки. Цифровая обработка сигналов включает в себя преобразование аналоговых сигналов в цифровые, преобразование цифровых сигналов (цифровая фильтрация), а также обратное преобразование цифровых сигналов в аналоговые. В настоящей лабораторной работе рассматриваются вопросы аналогово-цифрового и цифро-аналогового преобразования и исследуются связанные с этим эффекты.

1.2 Типы сигналов

Выделяют следующие типы сигналов, которым соответствуют определенные формы их математического описания. **Аналоговый сигнал** $x(t)$ (рис. 1) является вещественнозначной функцией вещественного непрерывного аргумента (как правило, этот аргумент - время). Значения аргумента (t) являются вещественными числами, непрерывно заполняющими некоторый интервал: $t \in [t_1; t_2]$. Сам аналоговый сигнал не обязан быть непрерывным - он может иметь конечное или счетное множество точек разрыва, но он должен быть, как минимум, кусочно-непрерывным.

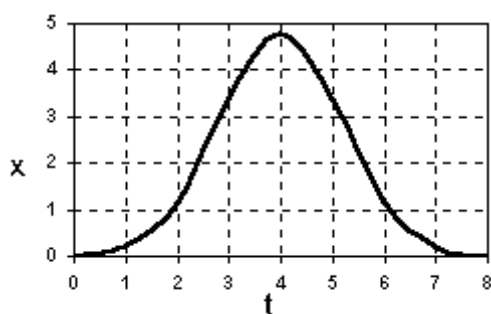


Рис. 1: Аналоговый сигнал

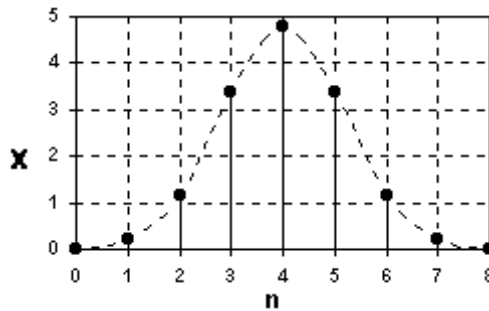


Рис. 2: Дискретный сигнал

Хорошо известный пример кусочно-непрерывного аналогового сигнала - периодическая последовательность прямоугольных импульсов (меандр). Если интервалы значений сигнала или времени, на котором он рассматривается, не ограничены, то по умолчанию они принимаются равными от $-\infty$ до $+\infty$. Пример математической записи аналогового сигнала: $x(t) = 4.8 \exp(-(t-4)^2/2.8)$. График этого сигнала приведен на рис.1. Источниками аналоговых сигналов, как правило, являются физические процессы и явления, непрерывно меняющиеся во времени и/или в пространстве.

Дискретный сигнал $x(n)$ является кусочно-непрерывной вещественно-значной функцией дискретного аргумента n . Иными словами, дискретный сигнал представляет собой набор (последовательность) отсчетов некоторой величины, измеренной в дискретные моменты времени. Интервал времени τ между двумя последовательными отсчетами называется *шагом дискретизации*, а обратная шагу дискретизации величина $f_d = 1/\tau$ - частотой дискретизации или частотой Найквиста (или $\omega_d = 2\pi/\tau$ - круговая частота дискретизации)¹. Дискретный сигнал можно получить из аналогового посредством процедуры *дискретизации во времени*. В этом случае дискретный сигнал $x_d(n)$ представляет собой последовательность отсчетов, значения которых в точности равны значениям исходного аналогового сигнала в моменты времени, отстоящие на шаг дискретизации:

$$x_d(n) = x(n\tau)$$

Так как отсчеты сигнала представляют собой конечный или счетный набор точек - их можно занумеровать целыми числами. Таким образом, область определения функции, задающей дискретный сигнал - множество целых чисел. Пример дискретизации аналогового сигнала, приведенного на рис.1, представлен на рис. 2.

Цифровой сигнал - сигнал $C(n)$, дискретный, как по значениям, так и по времени: $C \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$. То есть, в случае цифрового сигнала и область определения и область значений принадлежат к множеству целых чисел. Цифровой сигнал может быть получен из дискретного сигнала посредством процедуры *квантования по уровню*. Производится это следующим образом.

1. Выбирается величина *шага квантования* Δx .

¹В теоретических разделах, в формулах будут использоваться, как правило, круговые частоты, измеряемые в радианах а секунду, тогда как в практических разделах - традиционно все измерения проводятся с использованием "обычных" частот, измеряемых в Герцах. То же правило будет использовано и для нормированных частот, рассматриваемых далее.

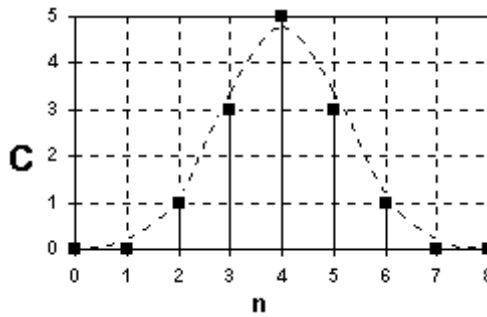


Рис. 3: Цифровой сигнал

2. Формируется множество отсчетов сигнала $X_i = i\Delta x$, i - целое:

$$\mathbb{Q} = \{\dots X_{-3}, X_{-2}, X_{-1}, X_0 = 0, X_1, X_2, \dots\}$$

3. Исходный дискретный сигнал $x_d(n)$ замещается сигналом $X(n)$ следующим образом. В каждый момент времени n выбирается значение X_i из множества отсчетов $\mathbb{Q}$, наиболее близкое к $x_d(n)$:

$$x_d(n) \rightarrow X_i \text{ так что } |X_i - x_d(n)| \leq |X_j - x_d(n)| \text{ для всех } j \neq i$$

4. Полученная последовательность отсчетов $X_i(n)$ заменяется на последовательность номеров отсчетов $C(n) = i(n)$

По существу, цифровой сигнал является разновидностью дискретного сигнала при округлении отсчетов последнего до определенного количества цифр, как это показано на рис.3. Таким образом, для получения из аналогового сигнала дискретного необходимо последовательно провести процедуру (а) дискретизации по времени и (б) квантования по уровню. В результате, вместо непрерывного сигнала мы получаем дискретную последовательность целых чисел $C(n)$.

Большинство сигналов, с которыми приходится иметь дело при обработке данных, являются аналоговыми по своей природе, дискретизованными и квантованными в силу методических особенностей измерений или технических особенностей регистрации, т.е. преобразованными в цифровые сигналы. Но существуют и сигналы, которые изначально относятся к классу цифровых. Например, число гамма-квантов, зарегистрированных в дискретные моменты времени или почасовая зависимость число посещений интернет-сайта.

1.3 АЦП и ЦАП

Устройство, преобразующее аналоговый сигнал в цифровой, называется аналогово-цифровым преобразователем (АЦП). В англоязычной литературе, а оттуда - и в некоторой отечественной русскоязычной - используется аббревиатура ADC (Analog-to-Digital Converter). Обратное преобразование цифровых сигналов в аналоговые выполняется цифро-аналоговым преобразователем, ЦАП (в англоязычной литературе - Digital-to-Analog Converter, DAC). Сигнал на выходе ЦАП

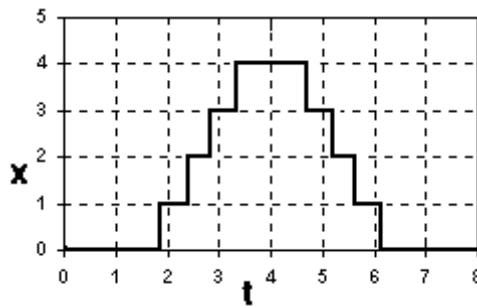


Рис. 4: Сигнал, восстановленный из цифрового при помощи ЦАП

обычно имеет ступенчатую форму, поэтому требует сглаживания, которое, как правило, выполняется при помощи фильтра нижних частот. На рис.4 показан типичный вид сигнала после ЦАП.

АЦП последовательно выполняет две операции над аналоговым сигналом: дискретизацию и квантование. Поэтому и основными характеристиками АЦП являются шаг дискретизации по времени τ и шаг квантования во уровню Δx . В технической документации вместо τ обычно используют обратную величину - частоту дискретизации, которую измеряют в количестве выборок в секунду $\left[\frac{\text{выб.}}{c} \right]$ или в Герцах. Вместо шага квантования в описании АЦП указывают связанную с ней величину - *разрядность АЦП*, под которой понимают число двоичных разрядов (k), используемых для записи одного квантованного значения. Так, например, предположим, что АЦП является восьмиразрядным: $k = 8$. Тогда, оно может отобразить $2^8 = 256$ целых чисел: от 0 до 255. Максимальная амплитуда сигнала на входе АЦП (X_{max}) является фиксированной и также указывается в его техническом описании. Таким образом, весь динамический диапазон значений входного сигнала будет простирается от $-X_{max}$ до X_{max} . Этот диапазон делится на 256 уровней, следовательно, шаг квантования составит $2X_{max}/256$. Из рассмотренного примера понятна связь между разрядностью АЦП k и шагом квантования Δx :

$$\Delta x = \frac{X_{max}}{2^{k-1}}$$

Характеристики АЦП: частота дискретизации и разрядность определяют стоимость этого устройства. АЦП с высокой частотой дискретизации - достаточно дороги. Поэтому, при выборе схемы обработки сигнала необходимо представлять, какими необходимыми характеристиками должен обладать АЦП, чтобы не привести к необратимым искажениям сигнала. В данной работе будут рассматриваться только эффекты, связанные с дискретизацией сигнала по времени, а вопросы квантования оставлены пока без внимания.

1.4 Связь между спектрами аналогового и дискретного сигналов

Чтобы оценить те явления, которые возникают при дискретизации сигнала, удобно перейти от временного представления сигналов к спектральному. Для этого рассмотрим сначала, как связаны спектры аналогового и дискретизованного сигналов. Пусть нам дан некоторый непрерывный

аналоговый сигнал $x(t)$, которому соответствует функция спектральной плотности $F(\omega)$:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j\omega t) dt$$

Построим другой сигнал $y(t)$, представляющий собой выборку исходного сигнала $x(t)$ в дискретные моменты времени $\tau, 2\tau, 3\tau, \dots$, аналогично тому, как это показано на рис.2. Для того, чтобы выражение для $y(t)$ можно было записать аналитически, введем вспомогательную функцию единичного бесконечно короткого импульса

$$\xi(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t = 0 \\ 0 & \text{при } t \neq 0 \end{cases}$$

Тогда дискретизованный сигнал можно записать аналитически:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\xi(t - n\tau) \quad (1)$$

Видно, что $y(t)$ отличен от нуля лишь в моменты времени, кратные шагу дискретизации τ , причем в этом случае он равен исходному сигналу. Если мы попробуем построить спектр от (1), то получим спектральную плотность, тождественно равную нулю. Это легко понять, если обратить внимание, что сигнал $y(t)$ равен нулю почти всюду, за исключением счетного числа точек. Чтобы обойти эту неприятность введем вспомогательный сигнал

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - n\tau) \quad (2)$$

где $\delta(t)$ - знаменитая дельта функция Дирака, равная нулю везде, за исключением $t = 0$, где она обращается в бесконечность. Видно, что сигнал $s(t)$ отличается от дискретной выборки $y(t)$ только своей амплитудой - она у него бесконечно велика. Однако, как мы знаем, свойства спектра не зависят от амплитуды сигнала, поскольку интегральное преобразование Фурье - линейная операция. Поэтому форма спектра для сигнала $s(t)$ будет совпадать с формой спектра для сигнала $y(t)$, при том, что величина этого спектра, как мы увидим далее, будет ненулевой.

Итак, построим функцию спектральной плотности для выборки $s(t)$ и сравним ее с $F(\omega)$:

$$F_s(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\tau) \right] \exp(-j\omega t) dt \quad (3)$$

Функция $\varphi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\tau)$ представляет собой периодическую последовательность дельта функций с периодом τ . Следовательно, она может быть представлена в виде ряда Фурье:

$$\varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \exp\left(j\frac{2\pi}{\tau}kt\right) \quad (4)$$

Коэффициенты C_k можно найти, используя известное соотношение между спектральной плотностью одиночного импульса (в данном случае $\delta(t)$) и коэффициентами ряда Фурье периодической последовательности таких импульсов ($\varphi(t)$):

$$C_k = \frac{1}{\tau} F_{\delta} \left(\frac{2\pi}{\tau} k \right) = \frac{1}{\tau}$$

Подставляя (2) в (1) и меняя порядок суммирования и интегрирования, получим:

$$F_s(\omega) = \frac{1}{\tau} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp \left(-j \left[\omega - \frac{2\pi}{\tau} k \right] t \right) dt$$

Выражение под интегралом представляет собой ни что иное, как спектральную плотность сигнала $x(t)$ на частоте $\omega - \frac{2\pi}{\tau} k$. Поэтому, окончательно получаем:

$$F_s(\omega) = \frac{1}{\tau} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F \left(\omega - \frac{2\pi}{\tau} k \right) \quad (5)$$

Таким образом, из (5) видно, что спектр дискретизованного с равномерным шагом τ сигнала представляет собой “наложение” на спектр аналогового сигнала $F(\omega)$ его копий, сдвинутых на частоты, кратные частоте дискретизации $\omega_d = 2\pi/\tau$. Отсюда можно сделать несколько важных для практического приложения выводов:

1. Спектр дискретного сигнала - есть периодическая функция частоты с периодом, равным частоте дискретизации. Поэтому такой спектр имеет смысл измерять в полосе частот от 0 до ω_d : на других частотах он повторяется.
2. Если спектр аналогового сигнала ограничен сверху частотой ω_h , причем $2\omega_h \leq \omega_d$, то спектр дискретизованного сигнала будет представлять собой периодическое продолжение спектра аналогового сигнала (рис.5b).
3. Если спектр аналогового сигнала имеет сколь угодно высокие частоты или же он ограничен сверху частотой ω_h , но при этом частота дискретизации меньше удвоенной граничной частоты спектра $2\omega_h > \omega_d$, спектр периодического сигнала буде представлять собой наложение на спектр $F(\omega)$ его копий; при этом будет происходить перекрытие частей спектра как это показано на рис. 5с.

Из второго и третьего пунктов можно сделать важный вывод: для того, чтобы спектр дискретизованного сигнала не искажался за счет наложения, необходимо, чтобы *частота дискретизации была как минимум вдвое выше максимальной частоты в спектре аналогового сигнала*. Данное правило называют *критерием Котельникова* (а в англоязычной литературе - *критерием Найквиста*).

Итак, рассмотрев свойства спектра дискретизованного сигнала, мы определили условие для шага дискретизации, то есть нашли значение минимальной частоты выборки АЦП, которое достаточно для обработки сигналов с определенным характером спектра. Что произойдет, если данный

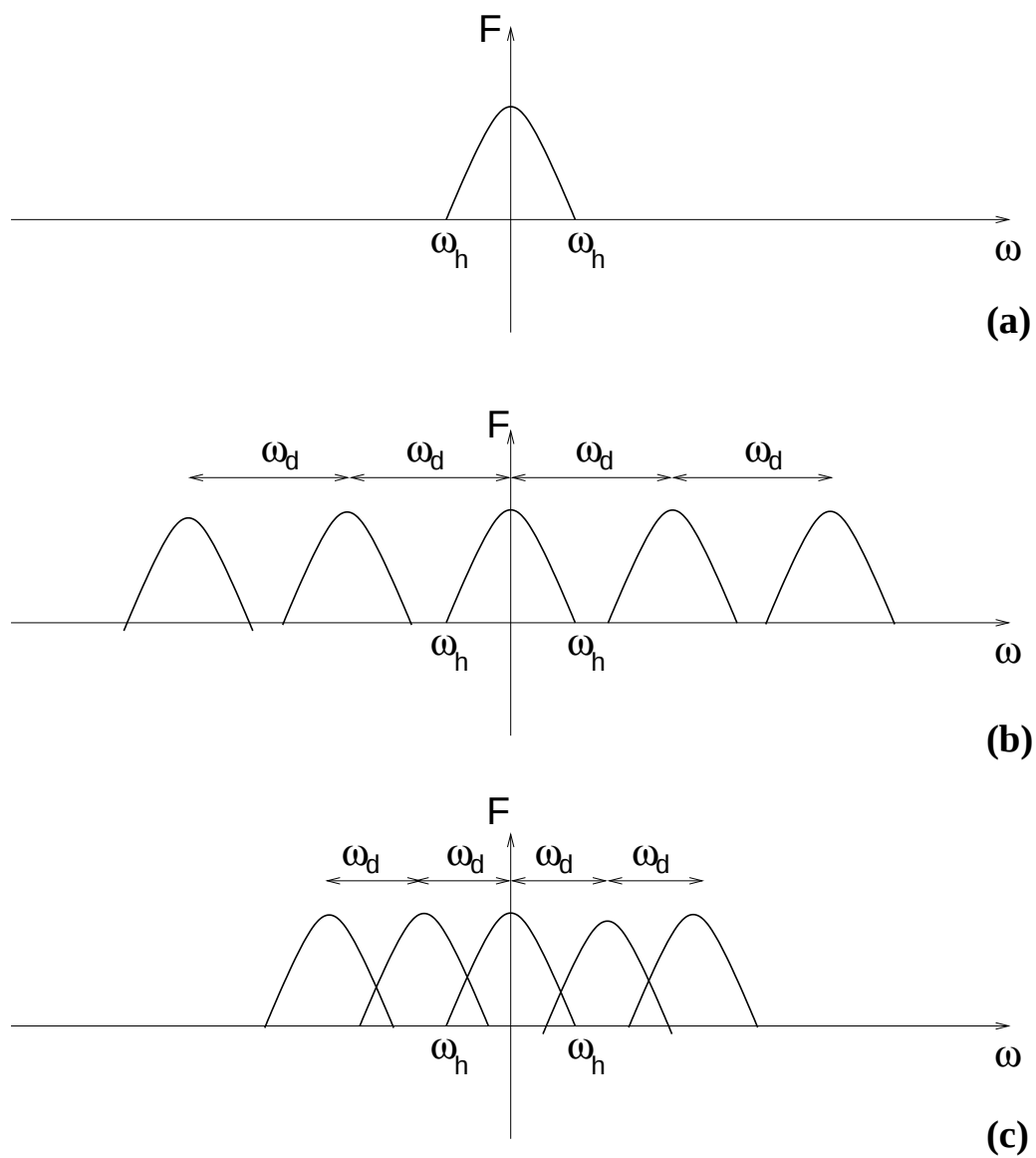


Рис. 5: Спектр аналогового сигнала (а) и спектры дискретизованного сигнала: (b) если $2\omega_h < \omega_d$ и (c) если $2\omega_h > \omega_d$

критерий не будет выполнен? В этом случае, как это следует из рисунка 5с произойдет перекрытие спектра с собственным периодическим продолжением, таким образом, что низкочастотные составляющие спектра накладываются на высокочастотные составляющие. Такое явление называют “просачиванием” высокочастотных компонент спектра в область низких частот (в англоязычной литературе - aliasing). Предположим, что при записи акустического сигнала оркестра в помещении от какого-то устройства присутствует ультразвуковой сигнал с частотой 30 кГц. Частота сигнала находится за границей восприимчивости человеческого уха, поэтому сам сигнал слышен не будет. В спектре аналогового сигнала присутствуют две компоненты: на частоте 30 кГц и на частоте -30 кГц. Запись выполняется с дискретизацией сигнала на выходе микрофона со стандартной частотой 44.1 кГц. При прослушивании такой записи с использованием ЦАП мы услышим данный сигнал на частоте $-30 + 44.1 = 14.1$ кГц. Восстановленный сигнал будет выглядеть так, как если бы частоты, лежащие выше половины частоты дискретизации, отразились в нижнюю часть спектра и сложились с присутствующими там гармониками. Это так называемый эффект *появления ложных (кажущихся) частот*. Эффект аналогичен всем известному эффекту обратного вращения колес автомобиля на экранах кино и телевизоров, когда скорость их вращения начинает превышать частоту смены кадров. Для предотвращения появления ложных частот следует повышать частоту дискретизации или ограничить спектр сигнала перед оцифровкой фильтрами нижних частот, которые пропускают без изменения все частоты ниже частоты среза и подавляют в сигнале частоты выше частоты среза. Частота среза анти-алиасинговых фильтров устанавливается равной половине частоты дискретизации.

1.5 Восстановление аналогового сигнала из его равномерной выборки

Можно ли восстановить аналоговый сигнал из его выборки, произведенной с равномерным шагом? На первый взгляд ответ должен быть отрицательным: ведь при дискретизации необратимо теряется информация о значениях сигнала в моменты времени, промежуточные между точками выборки. Однако, оказывается, что такое восстановление возможно, если шаг дискретизации удовлетворяет критерию Найквиста. Действительно, если мы выберем интервал дискретизации достаточно малым, спектр сигнала в основной полосе² не будет искажаться за счет эффекта наложения. Следовательно, если отфильтровать основную часть спектра, лежащую в полосе частот от 0 до $0.5\omega_d$, мы получим в точности спектр исходного аналогового сигнала. Поскольку процедура расчета спектра и процедура восстановления сигнала из спектра (прямое и обратное преобразование Фурье) - взаимнооднозначны, то и исходный аналоговый сигнал может быть полностью восстановлен. Покажем как можно осуществить процесс восстановления аналогового сигнала из дискретной выборки.

Пусть $x(t)$ - сигнал с ограниченным спектром: его спектр содержится в полосе частот от нуля до ω_h . Пусть, также $x_d(n)$ - его выборка с шагом дискретизации τ , которому соответствует частота дискретизации $\omega_d = 2\pi/\tau$. Предположим также, что выбор шага дискретизации соответствует критерию Найквиста: $\omega_d \geq 2\omega_h$. Запишем выражение сигнала через обратное преобразование Фурье от функции спектральной плотности:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(j\omega t) d\omega$$

²Основной полосой будем называть диапазон частот от $-\omega_d/2$ до $\omega_d/2$

Поскольку, в силу критерия Найквиста, весь спектр сигнала содержится в полосе от $-0.5\omega_d$ до $0.5\omega_d$, пределы в интеграле можно заменить:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-0.5\omega_d}^{0.5\omega_d} F(\omega) \exp(j\omega t) d\omega \quad (6)$$

Теперь, пойдем на небольшую хитрость - заменим в формуле (6) функцию $F(\omega)$ на ее периодическое продолжение $F_1(\omega) = F(\omega)$ если $\omega \in [-0.5\omega_d; 0.5\omega_d]$ и $F_1(\omega + \omega_d) = F_1(\omega)$:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-0.5\omega_d}^{0.5\omega_d} F_1(\omega) \exp(j\omega t) d\omega \quad (7)$$

Данная замена правомерна, поскольку на интервале интегрирования обе функции совпадают. С другой стороны, $F_1(\omega)$, в отличие от $F(\omega)$ - периодическая функция частоты, с периодом, равным ω_d . Следовательно, ее можно разложить в ряд Фурье:

$$F_1(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \exp\left(j \frac{2\pi k}{\omega_d} \omega\right) \quad (8)$$

Теперь подставим (8) в (7) и поменяем местами последовательность суммирования и интегрирования:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \int_{-0.5\omega_d}^{0.5\omega_d} \exp\left(j\omega \left[t + \frac{2\pi k}{\omega_d}\right]\right) d\omega \quad (9)$$

Интеграл в (9) легко берется:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \omega_d \text{Sinc}(0.5t\omega_d + \pi k) \quad (10)$$

Здесь $\text{Sinc}(x) = \sin(x)/x$. Чтобы найти неизвестные коэффициенты C_k подставим в (10) $t = -\frac{2\pi n}{\omega_d}$:

$$x\left(-\frac{2\pi n}{\omega_d}\right) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \omega_d \text{Sinc}(\pi k - \pi n) \quad (11)$$

Так как функция $\text{Sinc}(\pi k - \pi n)$ отлична от нуля только при $n = k$ и равна в этом случае единице, то:

$$C_k = 2\pi x(-k\tau)$$

и

$$x(t) = \frac{2\pi}{\tau} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\tau) \text{Sinc}\left(\frac{\pi t}{\tau} - \pi k\right) \quad (12)$$

Правая часть формулы (12) называется *рядом Котельникова*. В соответствии с ней, значение аналогового сигнала в любой момент времени t можно восстановить по значениям, выбранным с равномерным шагом τ , если шаг дискретизации удовлетворяет критерию Найквиста. Данное утверждение носит название *теоремы Котельникова*.

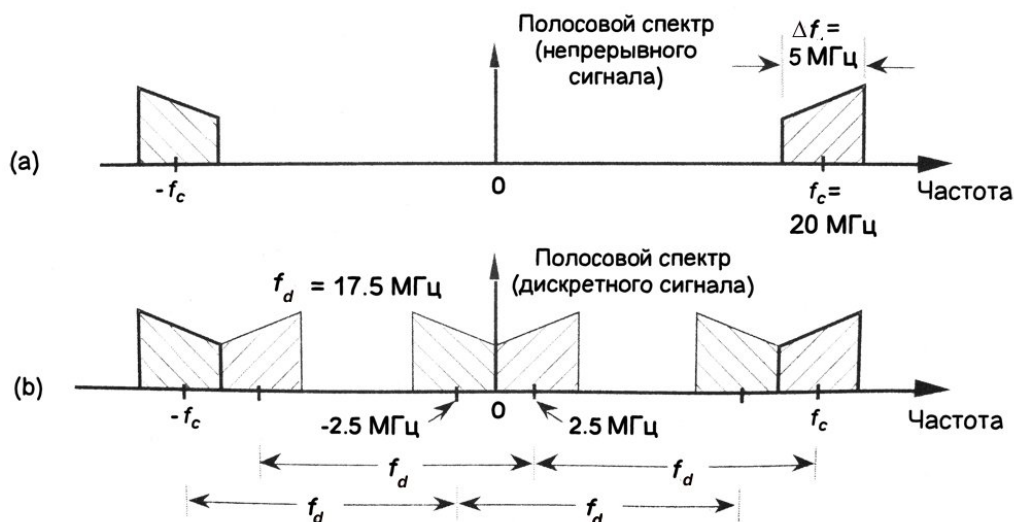


Рис. 6: Пример полосовой дискретизации

1.6 Дискретизация полосовых сигналов.

В разделе 1.4 было показано, что для устранения искажений, связанных с появлением ложных частот необходимо выбирать частоту дискретизации как минимум вдвое выше самой высокой частоты в спектре аналогового сигнала. Существуют ли исключения из этого правила? Да, оказывается для некоторых случаев можно выбирать частоту дискретизации существенно меньшей, чем это определено критерием Найквиста. Это возможно для сигналов с полосовым спектром, то есть таких, спектр которых находится в полосе частот от $f_1 > 0$ до f_2 . Для дискретизации непрерывных полосовых сигналов, нижняя частота спектра которых отлична от нуля, можно использовать метод, известный как *полосовая дискретизация*. Полосовая дискретизация в литературе упоминается под различными другими названиями, такими как дискретизация ПЧ, гармоническая дискретизация, суб-найквистовская дискретизация и дискретизация с пониженной частотой. Когда ширина спектра и центральная частота непрерывного входного сигнала позволяют, полосовая дискретизация не только дает возможность снизить требуемое быстродействие АЦП по сравнению с традиционной низкочастотной дискретизацией, но и уменьшает объем памяти, необходимый для хранения сигнала на заданном интервале.

В качестве примера рассмотрим дискретизацию сигнала с ограниченным спектром, показанного на рисунке 6а, у которого спектр сигнала находится в полосе частот шириной $\Delta f = 5$ МГц и локализован в окрестности центральной частоты спектра $f_c = 20$ МГц (рис.6а). Заметим, полный спектр сигнала, как это следует из свойств спектра вещественных сигналов, состоит из гармоник на положительных частотах и зеркально симметричных им гармоник на отрицательных частотах. Для дискретизации такого сигнала, в соответствии с критерием Найквиста (дискретизация с частотой, превышающей в 2 раза наивысшую частоту в спектре сигнала), нам нужно АЦП с частотой выборки более 45 МГц. Оказывается, однако, что для полосовых сигналов можно использовать АЦП и с меньшей частотой дискретизации. Рассмотрим, что произойдет, если частота

дискретизации будет равна $f_d = 17.5$ МГц, как показано на рисунке 6b. Из рисунка хорошо видно, за счет чего удается избежать наложения - копии основной части спектра “промахиваются” относительно нее, попадая в те частотные области, где спектральные компоненты аналогового сигнала отсутствуют. Действительно, область основной части спектра, располагающаяся в полосе частот около частоты $-f_c$ “копируется” в области, располагающиеся около частот $f_d - f_c = 2.5$ МГц и $2f_d - f_c = 15$ МГц. Аналогично этому, область основной части спектра, располагающаяся в полосе частот около частоты f_c “копируется” в области около частот $f_c - f_d = -2.5$ МГц и $f_c - 2f_d = -15$ МГц. Дискретизация не приводит к наложению, но переносит спектр сигнала в область низких частот и зеркально отражает его.

Из рассмотренного примера ясно, что можно выбрать такую частоту дискретизации, не удовлетворяющую критерию Найквиста, что наложения спектра на произойдет. В то же время, понятно, что при других частотах (к примеру $f_d = 14$ МГц) наложение будет иметь место. Каким образом следует выбирать частоту полосовой дискретизации? Проведем формальное рассмотрение этого вопроса.

Пусть спектр аналогового сигнала является полосовым, то есть заключен в области положительных частот между $f_A > 0$ и $f_B > f_A$. Обозначим центральную частоту спектра $f_c = (f_B + f_A)/2$ и его ширину $\Delta f = f_B - f_A$. В области отрицательных частот соответственно будет находиться зеркальное отражение “положительного” спектра в диапазоне частот $-f_B \leq f \leq -f_A$. Рассмотрим “клонирование” отрицательной полосы спектра при дискретизации с частотой f_d (клонирование положительной полосы будет происходить симметричным образом). За счет дискретизации в спектре появятся копии отрицательной полосы спектра на частотах $-f_B + f_d \leq f \leq -f_A + f_d$, $-f_B + 2f_d \leq f \leq -f_A + 2f_d$, $-f_B + 3f_d \leq f \leq -f_A + 3f_d$ Предположим, внутри диапазона частот, занимаемого спектром аналогового сигнала $-f_B \leq f \leq f_B$ помещается k копий отрицательной полосы спектра. Это значит, что k -ая копия располагается в диапазоне частот $-f_B + kf_d \leq f \leq -f_A + kf_d$. Чтобы не было перекрытия с положительной полосой спектра ($f_A \leq f \leq f_B$), нужно, чтобы верхняя частота копии $-f_A + kf_d$ была меньше нижней частоты основной полосы f_A :

$$-f_A + kf_d \leq f_A \quad (13)$$

С другой стороны, следующая копия с номером $k + 1$ должна “перескочить” через основную полосу, не пересекаясь с ней. Это означает, что нижняя граница диапазона частот этой копии $-f_B + (k + 1)f_d$ должна быть выше, чем верхняя граница диапазона частот основной полосы f_B :

$$-f_B + (k + 1)f_d \geq f_B \quad (14)$$

Подставляя в неравенства (13) и (14) значения $f_A = f_c - \Delta f/2$ и $f_B = f_c + \Delta f/2$, и объединяя их в одно, получим критерий “правильности” выбора частоты полосовой дискретизации:

$$\frac{2f_c + \Delta f}{k + 1} \leq f_d \leq \frac{2f_c - \Delta f}{k}, \quad (15)$$

где k - некоторое целое положительное число. Из (15) легко получить условие для максимального значения k :

$$\frac{2f_c + \Delta f}{k_{max} + 1} \leq \frac{2f_c - \Delta f}{k_{max}},$$

или:

$$0 < k_{max} \leq \frac{f_c}{\Delta f} - \frac{1}{2} \quad (16)$$

Неравенства (15) и (16) дают возможность подобрать нужную частоту дискретизации. Вначале, из (16) находим максимальное значение k_{max} , затем - выбираем некоторое $k \leq k_{max}$. После этого, используя (15), определяем подходящее значение частоты дискретизации f_d . Так, например, для рассмотренного нами случая на рис.6а, максимальное значение k составляет целую часть от $20 \text{ МГц}/5 \text{ МГц} - 0.5$ и равняется трем. Поэтому возможные значения k для полосовой дискретизации $k = \{1, 2, 3\}$. В первом случае ($k = 1$) частота дискретизации должна лежать в диапазоне $22.5 \leq f_d \leq 35 \text{ МГц}$, во втором случае ($k = 2$) - $15 \leq f_d \leq 20 \text{ МГц}$, а в третьем ($k = 3$) - $11.25 \leq f_d \leq 13.33 \text{ МГц}$.

Спектр дискретных вещественных сигналов принято анализировать в диапазоне частот от 0 до $0.5f_d$. Это связано со свойствами симметрии спектров дискретных сигналов. Поэтому, при полосовой дискретизации, вместо набора “копий” основной полосы спектра, цифровой анализатор спектра покажет нам только те его области, которые лежат в данной полосе частот. Возвращаясь к рисунку 6b, мы увидим из всей картинке только ту часть спектра, которая лежит в полосе частот шириной 8.75 МГц : то есть копию спектра аналогового сигнала, перенесенную в окрестность частоты 2.5 МГц . Таким образом, полосовая дискретизация приводит к переносу спектра в область низких частот, а также, к его возможному зеркальному отражению.

2 Практическая часть

В ходе эксперимента проводится дискретизация различных типовых радиосигналов (гармонические, прямоугольные, треугольные, пилообразные периодические колебания, амплитудно - модулированные колебания, шумовые колебания) с заданным шагом дискретизации и строятся спектры мощности исходного и дискретизованного сигнала. Кроме того, решается задача восстановления аналогового сигнала из дискретного при помощи ряда Котельникова.

2.1 Экспериментальная установка

Экспериментальная установка представляет собой компьютерную программу, созданную в среде программирования LabView, которая позволяет моделировать регулярные и шумовые радиосигналы, проводить их дискретизацию по времени с заданным равномерным шагом, строить спектры мощности аналогового и дискретизованного сигналов, восстанавливать аналоговый сигнал из его дискретной выборки, в соответствии с теоремой Котельникова. Функциональная схема изображена на рис. 7 В установку входит генератор сигналов, позволяющий генерировать амплитудно - модулированные колебания с гармонической огибающей:

$$x(t) = [1 + mA_2(t)] A_1(t) \quad (17)$$

где $A_{1,2}$ - сигналы несущей и огибающей: $A_1(t) = a\Phi(t) + b\xi(t)$, $\Phi(t)$ - радиосигнал единичной амплитуды с базовой частотой f_0 , форма сигнала выбирается из следующего набора:

- гармонический сигнал,

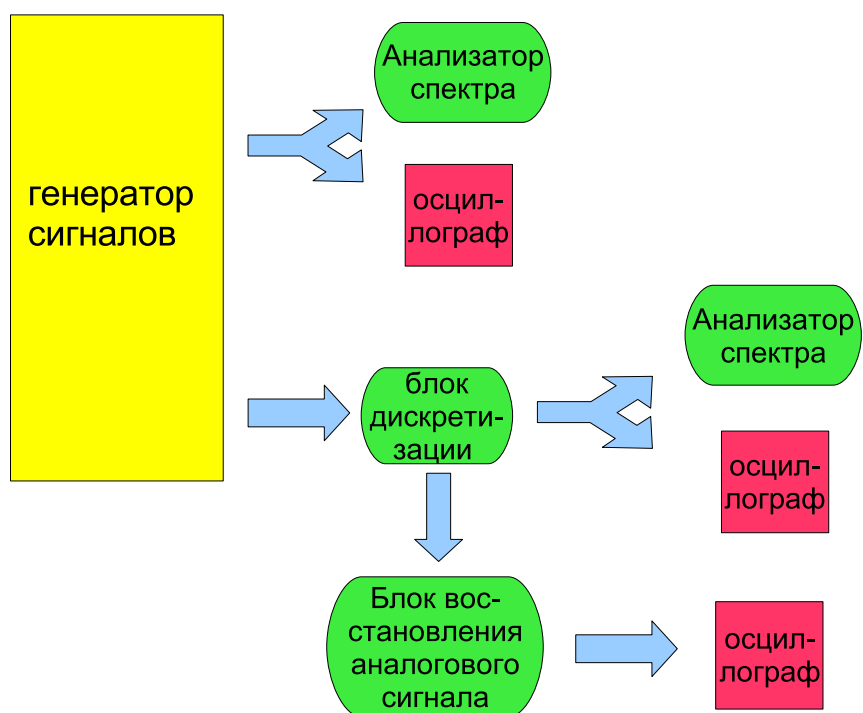


Рис. 7: Функциональная схема установки для анализа процессов дискретизации

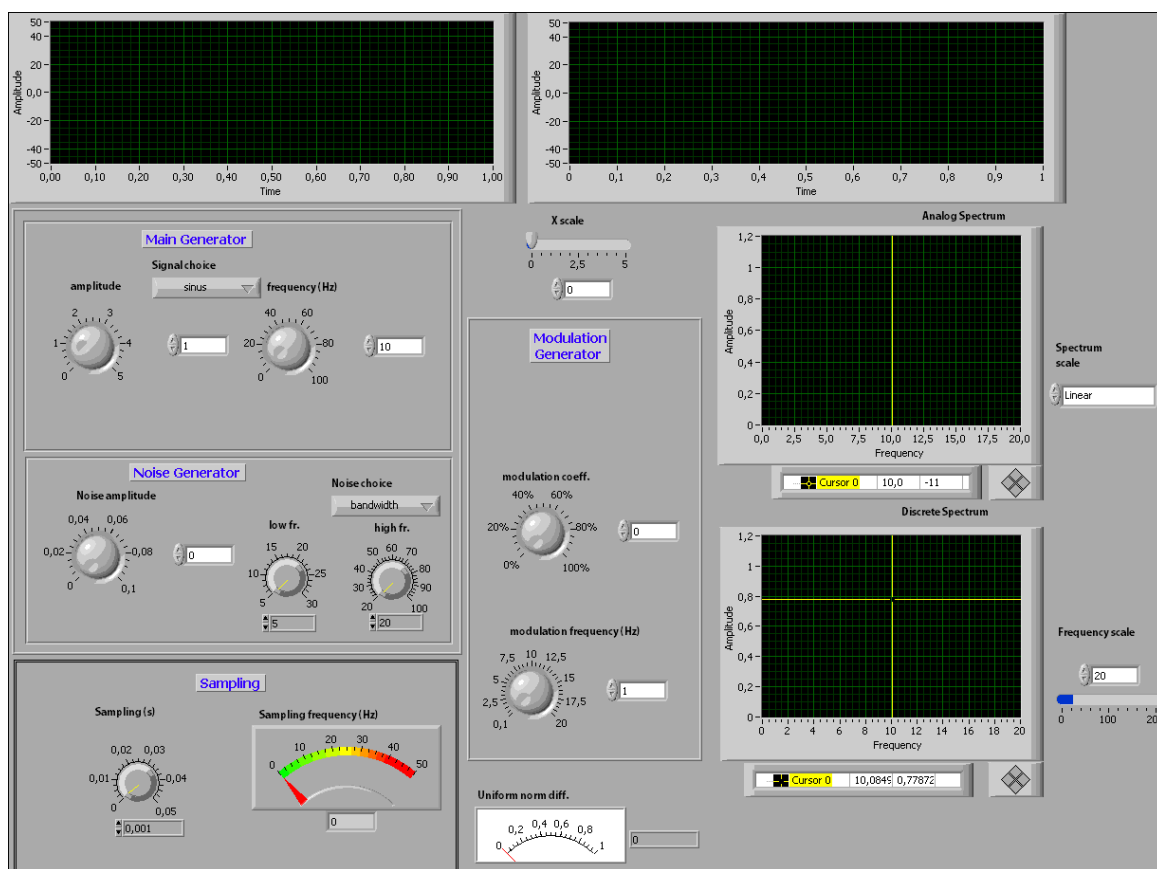


Рис. 8: Вид передней панели установки для исследования дискретизации сигналов

- периодическая последовательность прямоугольных импульсов,
- периодическая последовательность треугольных импульсов,
- периодическая последовательность пилообразных импульсов;

$b\xi(t)$ - полосовой шум с интенсивностью b , спектр которого расположен в полосе частот от f_1 до f_2 ; $A_2(t) = \cos Ft$. Сигнал от генератора подается на устройство дискретной выборки, проводящей выборку сигнала с шагом τ : $x_d(n) = x(n\tau)$. Спектр обоих сигналов (аналогового и дискретного) рассчитывается посредством алгоритма ДПФ и отображается на анализаторах спектра. Форма сигналов отображается на экранах осциллографов. Устройство восстановления производит восстановление аналогового сигнала из дискретной выборки. Результат восстановления отображается на экране осциллографа. Кроме того, рассчитывается относительная погрешность восстановленного сигнала по сравнению с исходным, которая отображается на цифровом индикаторе.

На рис.8 приведена передняя панель установки. На ней располагаются:

1. Основной генератор (Main Generator) - многофункциональный генератор, который формирует четыре формы сигнала. Он содержит следующие элементы управления:

- (a) **Signal choice** – переключатель формы выходного сигнала. Нажатием на кнопку форма сигнала изменяется в последовательности синус – прямоугольник – треугольник – пилообразный сигнал.
 - (b) **Frequency** – регулятор частоты в пределах выбранного диапазона от 0 – 100 Гц. При вращении ручки по часовой стрелке происходит увеличение частоты, против часовой стрелки – уменьшение.
 - (c) **Amplitude** – регулятор амплитуды выходного сигнала от 0-5.
2. **Генератор Шума (Noise Generator)** - генерирует шумовой сигнал. Увеличивая амплитуду шума генератор начинает работать, при положении ручки в крайнем левом положении – генератор выключен.
- (a) Ручка **Noise choice** изменяет тип шума: случайный белый шум (uniform) и полосовой (bandwidth).
 - (b) Ручки **low fr.** и **high fr.** задают полосу частот для полосового шума, диапазон изменения нижней частоты от 0 – 30 Гц, верхней от 20 – 100 Гц.
 - (c) **Noise amplitude** – регулятор амплитуды шума от 0 – 0.1.
3. **Блок выбор шага дискретизации (Sampling)** Данный блок осуществляет выбор шага дискретизации аналогового сигнала. При вращении ручки **Sampling** по часовой стрелке мы увеличиваем шаг дискретизации от 0 до 0.05 и выше, что приводит к уменьшению частоты дискретизации. Частота дискретизации отображается стрелочным индикатором **Sampling Frequency**
4. **Генератор огибающей амплитудной модуляции (Modulation Generator)**
- (a) **modulation coeff.** – регулятор изменения коэффициента модуляции от 0 до 100%.
 - (b) **modulation frequency** – регулятор изменения частоты модуляции от 0.1 до 20 Гц.
5. **Анализатор спектра аналогового сигнала (Analog Spectrum)**
6. **Анализатор спектра дискретного сигнала (Discrete Spectrum)**
- (a) Регулятор **Frequency** позволяет задавать полосу частот для обзора на экране анализаторов спектров.
 - (b) Ручки **Spectrum scale** – выбирает масштаб расчета спектра: логарифмический или линейный.
 - (c) Метка белого цвета на экране анализатора отмечает положение критической частоты Найквиста (половина частоты дискретизации).
 - (d) Горизонтальный и вертикальный курсоры (желтого цвета) на экране анализатора позволяют проводить курсорные измерения.
7. **Осциллограф 1** строит исходный сигнал (зеленая кривая) и дискретную выборку (красные импульсы).

8. **Осциллограф 2** строит дискретный сигнал (зелёная огибающая) и восстановленный сигнал (огибающая ярко-синего цвета).
 - (a) Ручка **X scale** изменяет временной масштаб по оси абсцисс на первом и втором осциллографе.
9. Стрелочный индикатор **Uniform norm diff.** показывает среднеквадратичную относительную погрешность восстановленного сигнала из дискретного.

2.2 Ход работы

1. Исследование дискретизации низкочастотных сигналов.
 - (a) Рассмотрите дискретизацию последовательности прямоугольных, треугольных, пилообразных импульсов. Установите амплитуду и частоту сигнала. Увеличивая шаг дискретизации, следите за изменениями в спектре дискретизованных колебаний, а также за их формой. Постройте характерные виды спектров и сигналов. Экспериментально определите значение минимальной частоты дискретизации.
 - (b) Рассмотрите дискретизацию смеси гармонического сигнала и белого шума, смеси гармонического сигнала и полосового шума, выбрав диапазон частот шума так, чтобы он не перекрывался с основным сигналом. Проиллюстрируйте эффект наложения спектральных компонент шума на компоненты сигнала при дискретизации.
2. Исследование восстановления сигнала из его дискретной выборки
 - (a) Проведите исследование восстановления сигналов из дискретной выборки последовательности прямоугольных и треугольных импульсов в зависимости от шага дискретизации. Постройте характерные графики дискретизованного и восстановленного сигналов для нескольких значений частоты дискретизации. Постройте зависимость относительной погрешности восстановления от частоты дискретизации.
 - (b) Проведите исследование восстановления сигналов из дискретной выборки амплитудно-модулированных колебаний в зависимости от шага дискретизации. Постройте характерные графики дискретизованного и восстановленного сигналов для нескольких значений частоты дискретизации. Постройте зависимость относительной погрешности восстановления от частоты дискретизации.
 - (c) Проведите исследование восстановления сигналов из дискретной выборки белого и полосового шума. Постройте характерные графики дискретизованного и восстановленного сигналов для нескольких значений частоты дискретизации. Постройте зависимость относительной погрешности восстановления от частоты дискретизации.
3. Исследование полосовой дискретизации.
 - (a) Проведите исследование дискретизации гармонического сигнала от частоты дискретизации. Постройте характерные спектры и графики колебаний для дискретизации,

удовлетворяющей критерию Найквиста и не удовлетворяющей этому критерию. Постройте зависимость частоты дискретизованного сигнала (по его спектру) от частоты дискретизации.

- (b) Проведите исследование дискретизации амплитудно-модулированного сигнала от частоты дискретизации. Постройте характерные спектры и графики колебаний для дискретизации, удовлетворяющей критерию Найквиста и не удовлетворяющей этому критерию. Постройте зависимость частоты дискретизованного сигнала (по его спектру) от частоты дискретизации.