

Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ «САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

УДК 621.373

№ госрегистрации 01201064326

Инв. № _____

УТВЕРЖДАЮ

Проректор Саратовского университета
по научно-исследовательской работе

профессор _____ Д.А. Усанов

« ____ » ноября 2012 г.

ОТЧЕТ

О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

по государственному контракту № 14.740.11.0074 от 06 сентября 2010 г.

Шифр заявки «2010-1.1-123-085-004»

В рамках федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры
инновационной России» на 2009-2013 годы

по теме:

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ, ВОЗДЕЙСТВИЕ ФЛУКТУАЦИЙ,
МУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТЬ И СИНХРОНИЗАЦИЯ В СОСРЕДОТОЧЕННЫХ И
РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМАХ РАДИОФИЗИКИ

(итоговый, этап № 5)

Наименование этапа: «Синхронизация»

Руководитель НИР,
д-р физ.-мат. наук, профессор

_____ В. С. Анищенко
подпись, дата

Саратов 2012

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководитель темы, д.ф.-м.н.	В.С. Анищенко	Общее редактирование

подпись, дата		
Исполнители темы	Я.И. Боев	Раздел 2, список использованных источников

подпись, дата		
	А.П. Четвериков	Раздел 2, список использованных источников

подпись, дата		
	А.В. Шабунин	Введение, заключение, реферат

подпись, дата		
	А.В. Слепнев	Раздел 3, список использованных источников

подпись, дата		
	Т.Е. Вадивасова	Раздел 3, список использованных источников

подпись, дата		
	В.С. Маляев	Раздел 3, список использованных источников

подпись, дата		
	С.В. Астахов	Раздел 1, список использованных источников

подпись, дата		
	Г.И. Стрелкова	Раздел 1, список использованных источников

подпись, дата		
	А.В. Феоктистов	Раздел 2, список использованных источников

подпись, дата		
	А.Н. Павлов	Раздел 1, список использованных источников

подпись, дата		
	О.Н. Павлова	Раздел 1, список использованных источников

подпись, дата		

Нормоконтролер

М.К. Данилова

подпись, дата

РЕФЕРАТ

Отчет 62 с., 1ч., 38 рис., 59 источников.

ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС, СИНХРОНИЗАЦИЯ ХАОСА, ФЛУКТУАЦИИ, НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ, ХАОС И СТРУКТУРЫ

Объектом исследования НИР являются фундаментальные научные проблемы современной радиофизики и нелинейной динамики. Цель работы - выявление закономерностей и свойств волновых и колебательных процессов в нелинейных системах и средах в присутствии внешних регулярных и шумовых воздействий. Разработка новых методов диагностики сложных сигналов и защиты информации

В соответствии с требованиями Технического задания (ТЗ) на данную научно - исследовательскую работу (НИР) объектом исследования и разработки отчетного 5 этапа НИР являются:

- Разработка обобщенного количественного критерия эффекта синхронизации хаотических и стохастических систем.
- Анализ механизмов фазовой синхронизации квазипериодических автоколебаний с двумя и более независимыми частотами.
- Анализ влияния локальных и распределенных по случайному закону неоднородностей на пространственно - временную динамику мультистабильной автоколебательной среды с регулярной и хаотической динамикой.

В процессе выполнения 1 этапа НИР были осуществлены следующие мероприятия:

- разработан диагностический критерий хаотической и стохастической синхронизации, основанный на использовании относительной метрической энтропии, проведены исследования по его применимости для разных видов синхронизации хаоса;
- проведены исследования фазовой синхронизации при многочастотном внешнем воздействии, выявлены механизмы синхронизации;
- проведены исследования динамики пространственно - распределенных систем с фазовой мультистабильностью, выявлено влияние локальных неоднородностей среды на пространственно - временную динамику.

В результате проведения работ по проекту существенным образом расширены знания о регулярной и хаотической синхронизации сложных автоколебательных систем различной природы. Выявлены и проанализированы теоретические сведения и экспериментальные факты о синхронизации сложных колебательных процессов в системах различного уровня сложности, что вносит значительный вклад в разработку общей теории синхронизации. Проведенные исследования связаны с решением прикладной задачи, состоящей в создании систем защищенной

передачи информации, предусматривающих использование широкополосных хаотических колебаний в канале связи для защиты информационных сообщений от несанкционированного доступа.

Полученные в результате выполнения НИР результаты уже могут быть использованы в следующих областях:

- современная фундаментальная радиофизика, в части касающейся теории нелинейных колебаний и волн, статистической радиофизики, нелинейной динамики и теории динамического хаоса;
- методы обработки и анализа сложных сигналов, применительно к задачам диагностики радиофизических и биофизических систем, радиоизмерений;
- современная радиоэлектроника, применительно к задачам скрытой передачи информации с использованием динамического хаоса;
- методы радиоизмерений.

Результаты 5 этапа НИР могут быть востребованы:

- коллективами разработчиков радиоэлектронной аппаратуры;
- коллективами разработчиков специального программного обеспечения автоматизированных систем обработки экспериментальных данных и цифровых измерительных систем;
- научными и научно - педагогическими коллективами в области радиофизики и радиоэлектроники, физики колебаний и волн, статистической физики и информационных технологий.

Результаты 5 этапа НИР внедрены в образовательный процесс.

Структуру основной части отчета о НИР 5 этапа составляют разделы 1 - 3. В каждом из разделов приведены результаты выполнения исследований по теме соответствующего пункта технического задания. В каждом из разделов проведен анализ имеющихся к настоящему моменту научных результатов исследований и практических работ, основанный на публикациях, приведенных в структурном элементе отчета о НИР «Список использованных источников».

СОДЕРЖАНИЕ

Обозначения и сокращения	8
ВВЕДЕНИЕ	9
1 Разработка обобщенного количественного критерия эффекта синхронизации хаотических и стохастических систем	10
1.1 Введение	10
1.2 Концепция относительной метрической энтропии	11
1.2.1 Энтропия Колмогорова-Синяя	11
1.2.2 Метод оценки метрической энтропии	12
1.2.3 Относительная метрическая энтропия	14
1.3 Влияние эффекта синхронизации регулярных колебаний на перемешивание в зашумленной системе	16
1.4 Влияние полной синхронизации хаоса на перемешивание в фазовом пространстве взаимодействующих хаотических систем	22
1.4.1 Связанные идентичные осцилляторы Ресслера	22
1.4.2 Связанные генераторы с инерционной нелинейностью	24
1.5 Влияние фазовой синхронизации хаоса на перемешивание в фазовом пространстве взаимодействующих систем	25
1.5.1 Фазовая синхронизация хаоса в системе связанных осцилляторов Ресслера.	25
1.5.2 Фазовая синхронизация в системе связанных генераторов с инерционной нелинейностью	27
1.6 Выводы	28
2 Анализ механизмов фазовой синхронизации квазипериодических автоколебаний с двумя и более независимыми частотами	29
2.1 Введение	29
2.2 Теория синхронизации квазипериодических автоколебаний в фазовом приближении	29
2.2.1 Бифуркации состояния равновесия	31
2.2.2 Бифуркации инвариантных замкнутых кривых	35
2.3 Синхронизация в цепочке связанных генераторов Ван дер Поля	37
2.3.1 Уравнения системы в фазовом приближении	37
2.3.2 Захват средних частот в цепочке фазовых осцилляторов	39
2.4 Синхронизация индуцированных шумом когерентных колебаний в модели возбудимой системы.	41
2.5 Исследования в радиофизическом эксперименте	43
2.6 Синхронизация в ансамбле взаимодействующих возбудимых систем	45
2.7 Выводы	46

3 Анализ влияния локальных и распределенных по случайному закону неоднородностей на пространственно - временную динамику мультистабильной автоколебательной среды с регулярной и хаотической динамикой	47
3.1 Введение	47
3.2 Эволюция пространственно-временных режимов при увеличении неоднородности среды моды $n = 0$	49
3.3 Эволюция пространственно-временных режимов при увеличении неоднородности среды моды $n = 1$	51
3.4 Выводы	52
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	54
ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ НИР.....	55
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	58

Обозначения и сокращения

ГИН - генератор с инерционной нелинейностью

НЧ - низкочастотный

ВЧ - высокочастотный

ФС - фазовая синхронизация

ЧС - частотная синхронизация

ФМ - фазовая мультистабильность

ФХН - ФитцХью-Нагумо

РАС - распределенные автоколебательные системы

ВВЕДЕНИЕ

Данный научный отчет включает информацию о научных результатах, полученных сотрудниками научно-образовательного центра по нелинейной динамике и биофизике Саратовского государственного университета в период с 1.07.12 по 15.11.12 в ходе выполнения государственного контракта 14.740.11.0074 по программе Министерства образования и науки РФ «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009 – 2013 годы». В отчете также приводятся основные результаты, полученные в ходе выполнения НИР в целом. Основной задачей является проведение фундаментальных исследований по нелинейной динамике и биофизике с целью выявления закономерностей и свойств волновых и колебательных процессов в нелинейных системах и средах в присутствии внешних регулярных и шумовых воздействий; разработка новых методов диагностики сложных сигналов и защиты информации. Выполнение НИР должно обеспечить закрепление в сфере науки и образования научных и научно-педагогических кадров в процессе подготовки студентов, аспирантов и докторантов в Саратовском университете. За отчетный период исследования проводились в соответствии с техническим заданием на второй этап 2012 года. Работы выполнялись в соответствии с календарным планом работ по контракту. Отчет включает краткую информацию об основных научных результатах, полученных исполнителями проекта на 5 этапе работы по теме «Синхронизация».

1 Разработка обобщенного количественного критерия эффекта синхронизации хаотических и стохастических систем

1.1 Введение

Синхронизация динамических и стохастических систем играет важнейшую роль в нашей жизни [1, 2]. Синхронизация периодических колебаний исследуется со времен Гюйгенса и на сегодняшний день разработана стройная теория, объясняющая данное явление. Синхронизация квазипериодических автоколебаний также находится в зоне внимания исследователей, однако фазовая теория синхронизации колебаний такого типа была построена относительно недавно [3].

Явление синхронизации хаоса — один из фундаментальных эффектов нелинейной динамики. На сегодняшний день синхронизация хаоса достаточно хорошо изучена [4]. Известны различные виды синхронизации хаоса: полная синхронизация [5], фазовая синхронизация [6, 7] и обобщенная синхронизация [8]. Полная синхронизация представляет собой наиболее простой тип синхронизации хаоса и соответствует случаю полной идентичности значений соответствующих фазовых переменных взаимодействующих систем в течении времени. Фазовая синхронизация представляет собой обобщение теории синхронизации периодических колебаний на случай фазокогерентного хаоса, когда спектр хаотических колебаний имеет выраженный пик на частоте, определяемой параметрами системы.

Синхронизация как регулярных, так и хаотических колебаний интуитивно воспринимается как явление, ведущее к некоторому упорядочиванию в поведении взаимодействующих систем. В этом смысле синхронизированные колебания представляются менее сложными, чем не синхронизированные. На сегодняшний день имеется достаточно большое количество публикаций (см. например, [9–13]), в которых используется идея применения мер сложности для оценки степени синхронизации.

Одной из наиболее естественных мер сложности колебаний в зашумленных и хаотических системах является степень перемешивания. В случае детерминированных систем скорость перемешивания характеризуется энтропией Колмогорова-Синяя [14]. Когда в системе присутствует шум, используется относительная метрическая энтропия [15, 16]. В рамках данной работы мы показываем, что синхронизация периодических и квазипериодических автоколебаний в присутствии шума ведет к уменьшению скорости перемешивания, вызванного шумовым воздействием. Более того, мы показываем, что переход как к полной, так и к фазовой синхронизации хаотических систем (в том числе, находящихся под действием шума), ведет к спаду степени перемешивания в объединенном фазовом пространстве взаимодействующих систем. Таким образом, уменьшение относительной энтропии при взаимодействии колебательных систем может быть использовано для детектирования синхронизации в системе, а величина относительной метрической энтропии — служить мерой синхронизации.

1.2 Концепция относительной метрической энтропии

1.2.1 Энтропия Колмогорова-Синая

Определим метрическую энтропию Колмогорова-Синая [14, 17]. Пусть имеется M различных комбинаций из m символов по n , и пусть на этом множестве определена вероятностная мера. Тогда степень неопределенности, характеризующая среднее количество информации в последовательности, дается энтропией Шеннона [18]:

$$H_n = - \sum_{j=1}^M P_j \ln P_j, \quad \sum_{j=1}^M P_j = 1, \quad (1.1)$$

где P_j — вероятность j -й комбинации.

Произведем разбиение фазового пространства G , включающего в себя аттрактор, на m элементарных непересекающихся ячеек ΔG_j , ($j = 1, 2, \dots, m$). Проведем M измерений, следя за траекторией $\vec{x}(t)$ и, через равные промежутки времени τ , отмечая n последовательных ячеек ΔG_j , в которых побывала траектория. Для каждой i -й реализации получим последовательность ячеек $G_i(n, \Delta t)$. Тогда, в соответствии с (1.1), среднее количество информации на одну реализацию определится по формуле:

$$H_n = - \sum_{i=1}^M P(G_i(n, \Delta t)) \ln P(G_i(n, \Delta t)), \quad \sum_{i=1}^M P(G_i(n, \Delta t)) = 1. \quad (1.2)$$

Полученная величина зависит от времени наблюдения за фазовой траекторией. Введем нормированную характеристику — энтропию на один элемент процесса в единицу времени:

$$H = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H_n}{n\tau}. \quad (1.3)$$

Такая нормированная энтропия будет зависеть от способа разбиения. Метрическую энтропию вводят как верхнюю границу множества возможных значений нормированной энтропии для всех возможных вариантов разбиений фазового пространства G :

$$h_\mu = \sup_G H. \quad (1.4)$$

Если траектория регулярна, то всегда найдется такое $n = n_0$, что для любых измерений последовательность $G_i(n_0, \Delta t)$ идентична, т.е. имеет вероятность, равную 1. Метрическая энтропия в этом случае, очевидно, равна 0. Если траектория случайна, то вероятность повторить бесконечно длинную траекторию стремится к 0 и энтропия Колмогорова-Синая равна бесконечности. Если же траектория в фазовом пространстве лежит на хаотическом аттракторе динамической системы, то величина метрической энтропии положительна и конечна [17]. Более того, для гиперболических систем доказана взаимосвязь между величиной энтропии Колмогорова-

Синая и характеристическими показателями Ляпунова в виде неравенства [19–21]:

$$h_\mu \leq \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i \quad (1.5)$$

1.2.2 Метод оценки метрической энтропии

Поскольку вычислить значение энтропии Колмогорова-Синая по определению (1.4) в общем случае не возможно, существуют различные методы оценки данной величины. Одним из наиболее популярных является алгоритм Грассбергера-Прокаччо [22, 23], производящий оценку метрической энтропии с помощью корреляционного интеграла. На его основе разработан метод оценки, использующий *Recurrence Plots* и дающий ряд преимуществ [24, 25].

Рассмотрим данный метод более подробно. Очевидно, что величина (1.2) будет увеличиваться с уменьшением вероятности $P(G_i)$ (поскольку логарифм убывает значительно быстрее линейной функции), которая, в свою очередь, будет уменьшаться при уменьшении интервалов времени $\tau \rightarrow 0$ и элементов разбиения $\varepsilon \rightarrow 0$. Поэтому можно предположить, что (1.4) будет эквивалентно

$$h_\mu = - \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\tau} \sum_{i=1}^M P(G_i) \ln P(G_i). \quad (1.6)$$

В режиме странного аттрактора метрическая энтропия системы имеет положительное конечное значение. Таким образом, при стремлении $\varepsilon \rightarrow 0$ оценка энтропии асимптотически стремится к конечной величине (чего, очевидно, не происходит для случайного процесса). Именно поэтому возможно рассматривать величину

$$K_q = - \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(q-1)^{-1}}{n\tau} \ln \sum_{i=1}^M P(G_i)^q, \quad (1.7)$$

которая качественно имеет то же поведение, что и h_μ . Полагая $q = 2$, $h_\mu \geq K_q$, легко видеть, что $K_{q'} < K_q$ для любых $q' > q$. Таким образом, K_2 является оценкой снизу энтропии Колмогорова:

$$K_2 = - \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\tau} \ln \sum_{i=1}^M P(G_i)^2. \quad (1.8)$$

Пусть динамическая система представлена *одной* траекторией $\{\vec{x}_k\}$, $k = 1, \dots, N$ в d -мерном фазовом пространстве. Определим матрицу

$$\mathbf{R}_{k,l} = \Theta(\varepsilon - \|\vec{x}_k - \vec{x}_l\|), \quad k, l = 1, \dots, N, \quad (1.9)$$

где ε — определенный порог, а Θ — функция Хэвисайда. Графическое представление матрицы $\mathbf{R}_{k,l}$ на дискретной координатной плоскости (k, l) , образованное путем обозначения каждого элемента матрицы \mathbf{R}_{k_0, l_0} черной точкой с координатами (k_0, l_0) если $\mathbf{R}_{k_0, l_0} = 1$ или белой точкой в случае $\mathbf{R}_{k_0, l_0} = 0$, называется *Recurrence Plot* (RP).

Вероятность обнаружения черной точки на RP равна

$$P_b(\varepsilon) = \frac{1}{N^2} \sum_{k,l=1}^N \mathbf{R}_{k,l}. \quad (1.10)$$

Вероятность обнаружения непрерывной диагонали из черных точек длиной не менее L равна

$$P(\varepsilon, L) = \frac{1}{N^2} \sum_{k,l=1}^N \prod_{m=0}^{L-1} \mathbf{R}_{k+m,l+m}. \quad (1.11)$$

В предположении эргодичности все траектории множества $\{G_i\}$ равновероятны, поэтому $P(G_i) = P(G_0)$, $i = 1, \dots, M$ и

$$K_2 = - \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln M}{n\tau} - \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\tau} \ln P(G_0)^2. \quad (1.12)$$

Первый предел есть неизвестная конечная величина. Можно утверждать, что данная величина равна 0, поскольку для регулярного процесса в системе вероятность $P(G_0) = 1$, а энтропия такого процесса должна быть равна 0. Таким образом:

$$K_2 = - \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\tau} \ln P(G_0)^2. \quad (1.13)$$

Квадрату вероятности $P(G_0)$ попадания на траекторию из n точек в ансамбле фазовых траекторий можно поставить в соответствие вероятность нахождения траектории в собственной ε -окрестности в течении времени $t = n \cdot \tau$, т.е. вероятность (1.11) нахождения непрерывной диагональной линии в RP, состоящей из $L = n$ точек. Таким образом, величину энтропии Колмогорова-Синяя можно оценивать с использованием Recurrence Plot по следующей формуле:

$$K_2(N) = - \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\tau} \ln \left(\frac{1}{N^2} \sum_{k,l=1}^N \prod_{m=0}^{n-1} \mathbf{R}_{k+m,l+m} \right). \quad (1.14)$$

Условие $n \rightarrow \infty$ требует устремления длин диагоналей черных точек в RP до бесконечности, что возможно только для бесконечных длин реализации:

$$K_2 = - \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{n\tau} \ln \left(\frac{1}{N^2} \sum_{k,l=1}^N \prod_{m=0}^{n-1} \mathbf{R}_{k+m,l+m} \right). \quad (1.15)$$

В численном эксперименте для фиксированных значений шага дискретизации ($\tau = \Delta t$) и длины реализации (N) получим:

$$\hat{K}_2(\varepsilon, n) = \frac{1}{n\Delta t} \ln \left(\frac{1}{N^2} \sum_{k,l=1}^N \prod_{m=0}^{n-1} \mathbf{R}_{k+m,l+m} \right). \quad (1.16)$$

Если построить зависимость количества диагональных линий из черных точек в \mathbb{R}^p длиной не менее n от величины n , причем количество диагоналей откладывать в логарифмическом масштабе, то выражение (1.16) определит угловой коэффициент наклона графика такой зависимости для некоторого конкретного значения n . Учитывая пределы в (1.15), оценку энтропии Колмогорова-Синяя даст величина (1.16) при максимальных возможных n (то есть угловой коэффициент правой части графика).

Сравним рассмотренный метод с методом Грассбергера-Прокаччо. В последнем при оценки энтропии Колмогорова-Синяя используется корреляционный интеграл:

$$K_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \ln \frac{C^n(\varepsilon)}{C^{n+1}(\varepsilon)}, \quad (1.17)$$

где

$$C^n(\varepsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{k,l=1}^N \Theta \left(\varepsilon - \left(\sum_{m=0}^{n-1} |\vec{x}_{k+m} - \vec{x}_{l+m}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \quad (1.18)$$

является n -мерным корреляционным интегралом. Таким образом, метрическая энтропия оценивается также по угловому коэффициенту наклона графика, построенного в логарифмическом масштабе, но по оси ординат отложен n -мерный корреляционный интеграл, а по оси абсцисс — его размерность n . Не трудно перейти от корреляционного интеграла к числу диагональных линий на \mathbb{R}^p :

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{k,l=1}^N \Theta \left(\varepsilon - \left(\sum_{m=0}^{n-1} |\vec{x}_{k+m} - \vec{x}_{l+m}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) &\leq \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{k,l=1}^N \Theta \left(\varepsilon - \sqrt{l} \max_m |\vec{x}_{k+m} - \vec{x}_{l+m}| \right) &= \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{k,l=1}^N \prod_{m=0}^{n-1} \Theta(\varepsilon' - |\vec{x}_{k+m} - \vec{x}_{l+m}|), & \end{aligned}$$

где $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\sqrt{l}}$. Поэтому можно считать метод оценки энтропии Колмогорова-Синяя с использованием Recurrence Plots модификацией метода Грассбергера-Прокаччо. Однако, в методе Грассбергера-Прокаччо необходимо производить вычисление n -мерного корреляционного интеграла для каждого значения n , а метод, использующий \mathbb{R}^p , предполагает построение матрицы \mathbf{R} всего лишь один раз, что существенно экономит время вычисления.

1.2.3 Относительная метрическая энтропия

Рассмотрим предельный цикл в уравнениях Ван дер Поля:

$$\ddot{x} - \lambda(1 - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = \sqrt{2D}\xi(t), \quad (1.19)$$

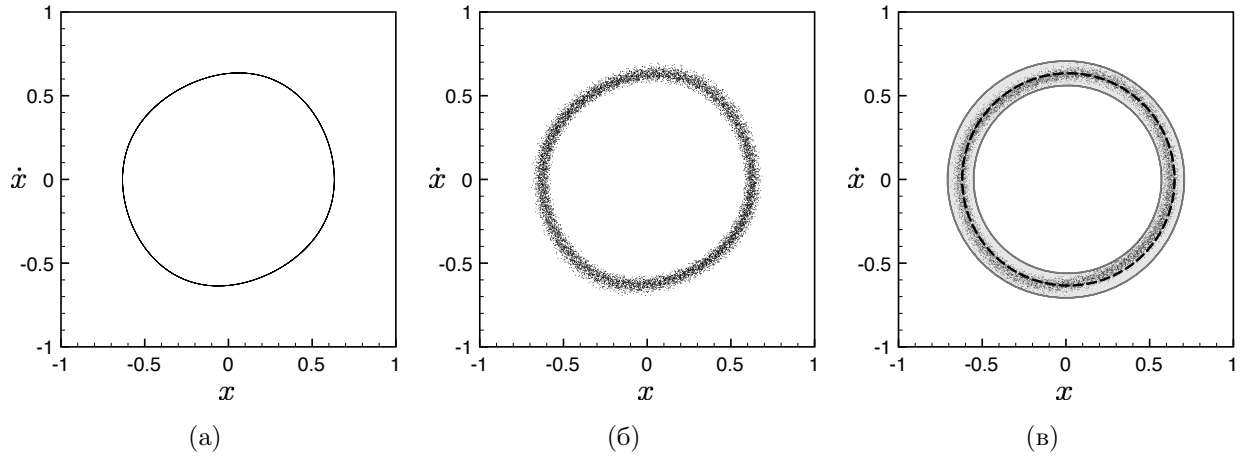


Рисунок 1.1 - Фазовая траектория системы (1.19). (а) — в отсутствие шума ($D = 0$); (б) — под действием белого гауссова шума ($D = 0.0001$); (в) под действием шума, но с конечной точностью регистрации.

где λ — параметр нелинейности или возбуждения, $\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0}$, $f_0 = \frac{1}{T_0}$ — частота колебаний, $\xi(t)$ — белый δ -коррелированный шум интенсивности D . В отсутствие шума ($D = 0$) для $0 < \lambda < 1$ система (1.19) имеет решение в виде устойчивого квазигармонического колебания частоты ω_0 и амплитуды $A \sim \sqrt{\lambda}$, что соответствует предельному циклу в фазовом пространстве системы (см. рисунок 1.1, а). Добавление шума переводит систему (1.19) в класс стохастических и решению в этом случае отвечает “зашумленный предельный цикл”, изображенный на рисунке 1.1, б. В первом случае решение $x(t) \simeq A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$ характеризуется полной предсказуемостью и имеет соответственно нулевую метрическую энтропию. Во втором случае система стохастическая и теоретически характеризуется бесконечным значением энтропии Колмогорова-Синая. Это означает, что точное предсказание $x(t)$ для $t > t_0$ отсутствует. Однако, если нас интересует предсказание с конечной точностью, обусловленной точностью экспериментальных измерений, то положение дел меняется. Предположим, что нас не интересуют различия $x(t)$ и $x(t) + \Delta$, где Δ — точность регистрации. Усреднив “зашумленный предельный цикл” в пределах заданной точности (см. рисунок 1.1, в), мы получим предельный цикл, эволюцию траекторий на котором на некоторое время мы сможем предсказать с некоторой точностью. Другими словами, степень предсказуемости становится конечной, и в этом смысле энтропия Колмогорова-Синая также должна стать конечной. Ясно, что здесь речь идет о другом понимании и другом определении метрической энтропии, которую мы будем называть относительной метрической энтропией [26].

Произведем расчеты $\hat{K}_2(\varepsilon)$ в соответствии с алгоритмом (1.16) для уравнений Ван дер Поля (1.19). Результаты приведены на рисунке 1.2. В отсутствие шума относительная метрическая энтропия системы (1.19) равна нулю. При $D \neq 0$ результаты рисунка 1.2 свидетельствуют о двух эффектах. Первый отражает ожидаемый факт: $\hat{K}_2(\varepsilon)$ стремится к бесконечности при $\varepsilon \rightarrow 0$. С уменьшением масштаба разрешения поведение зашумленной системы становится непредсказуемым и характеризуется сколь угодно большими значениями \hat{K}_2 . Второй эффект имеет место в

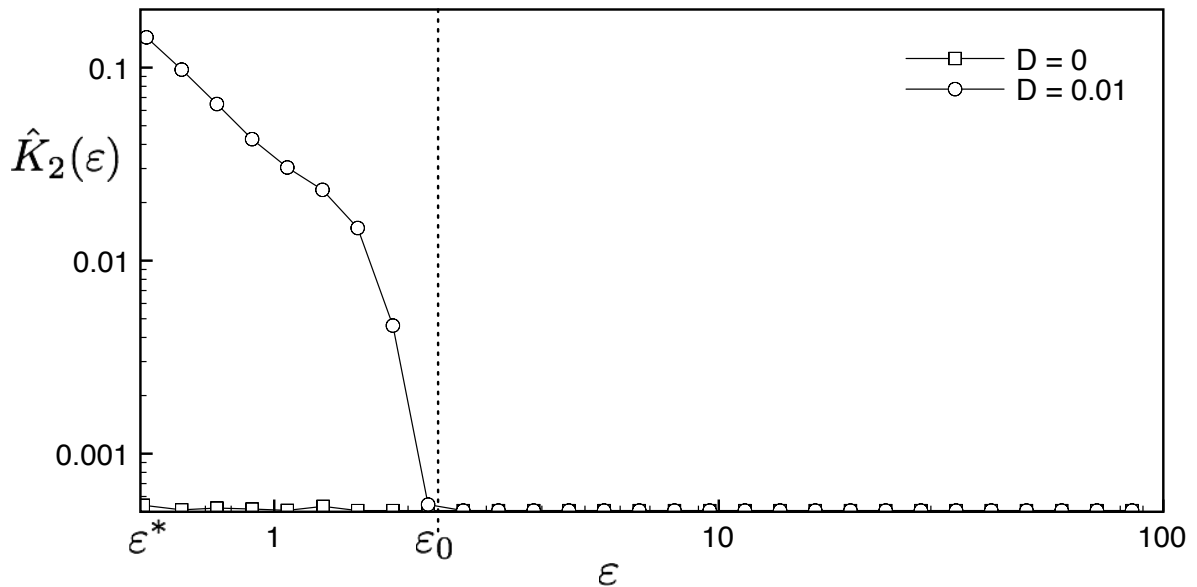


Рисунок 1.2 - Величина относительной метрической энтропии $\hat{K}_2(\varepsilon)$ системы (1.19) в зависимости от характерного размера разбиения ε в отсутствие шума ($D = 0$) и под действием белого гауссова шума ($D = 0.01$).

области $\varepsilon > \varepsilon^*$ и свидетельствует о том, что, во-первых, энтропия зашумленной системы имеет конечную величину и, во-вторых, при стремлении $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$ энтропия зашумленной системы стремится к нулевому уровню. Это можно объяснить следующим образом. В области $\varepsilon^* < \varepsilon < \varepsilon_0$ разрешающая способность оценки энтропии достаточно высока, но конечна. Алгоритм (1.16) позволяет в этой области диагностировать наличие положительной, но конечной величины энтропии. Граничное значение $\varepsilon = \varepsilon_0$ является максимальной величиной ε , при достижении которой алгоритм (1.16) не фиксирует наличие перемешивания. Действительно, при достаточно больших ε масштаб разрешения, по сути дела, не дает возможности наблюдать перемешивание, которое осуществляется только внутри элементов фазового объема с характерным размером ε_0 .

1.3 Влияние эффекта синхронизации регулярных колебаний на перемешивание в зашумленной системе

Введенное понятие относительной метрической энтропии позволяет сравнить степени перемешивания в системах, находящихся под действием шума, с фиксированной точностью измерений. В регулярных автоколебательных системах перемешивание может быть внесено только внешним стохастическим или хаотическим воздействием. Однако степень влияния на систему воздействия одинаковой интенсивности может быть различной.

Рассмотрим два взаимодействующих регулярных осциллятора, каждый из которых генерирует автоколебания на определенной частоте. Если связь между ними достаточно сильна, а их собственные частоты достаточно близки, в такой системе может наблюдаться явление синхро-

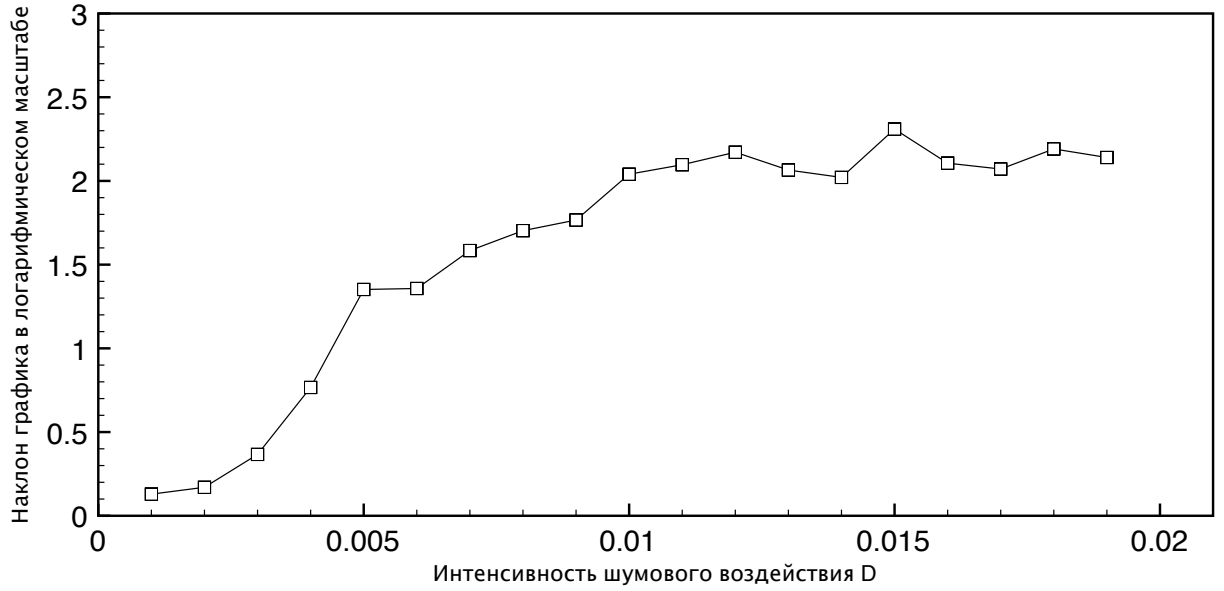


Рисунок 1.3 - Зависимость наклона графика $\hat{K}_2(\varepsilon)$ в логарифмическом масштабе от интенсивности шумового воздействия в системе (1.19).

низации. В отсутствие синхронизации динамика системы характеризуется двумя временными масштабами и соответствует эргодическому двумерному тору в фазовом пространстве. При синхронизации остается единственный временной масштаб, что соответствует предельному циклу. Интуитивно последний случай кажется менее сложным, однако энтропия в регулярных системах (в том числе и относительная) остается неизменной при переходе из асинхронного режима в режим синхронизации и обратно.

Добавим шумовое воздействие определенной интенсивности на один из осцилляторов. Как было показано выше, относительная метрическая энтропия системы будет монотонно увеличиваться с увеличением точности наблюдений. Мы предполагаем, что, при фиксированной точности наблюдения, система будет демонстрировать уменьшение величины относительной энтропии при синхронизации автоколебаний в системе под действием шума. Для проверки данного предположения рассмотрим систему из двух взаимодействующих осцилляторов Ван дер Поля, первый из которых находится под действием белого гауссова шума:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1, \\ \dot{y}_1 = -\omega_1^2 x_1 + (\alpha - x_1^2) y_1 + \gamma (y_2 - y_1) + \sqrt{2D}\xi(t), \\ \dot{x}_2 = y_2, \\ \dot{y}_2 = -\omega_2^2 x_2 + (\alpha - x_2^2) y_2 + \gamma (y_1 - y_2), \end{cases} \quad (1.20)$$

где $x_{1,2}$, $y_{1,2}$ — динамические переменные, $\omega_{1,2}$ — собственные частоты первого и второго осцилляторов соответственно, α — параметр нелинейности, γ — коэффициент связи, $\xi(t)$ — белый, δ -коррелированный шум интенсивности D . В такой системе реализуется эффект взаимной синхронизации через захват частоты в области параметров, изображенной на рисунке 1.4.

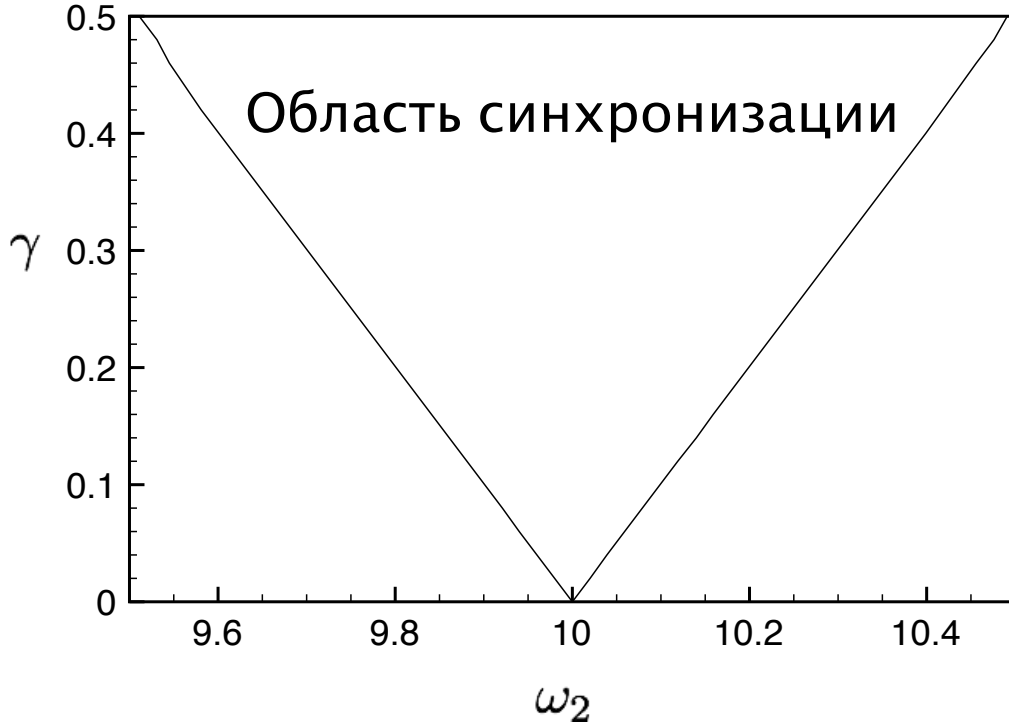


Рисунок 1.4 - Область взаимной синхронизации в системе (1.20) при $\omega_1 = 10$, $\alpha = 0.45$, $D = 0.001$.

Проследим за изменением величины относительной метрической энтропии при движении по плоскости параметров через область синхронизации.

на рисунке 1.5 представлена зависимость величины относительной метрической энтропии от собственной частоты второго осциллятора ω_2 . Как мы и предполагали, в области синхронизации \hat{K}_2 имеет величину, значительно меньшую, чем в отсутствие эффекта синхронизации.

Рассмотрим более сложный случай синхронизации. Для этого добавим внешнее гармоническое воздействие с амплитудой C_0 и частотой ω_{ex} на первый осциллятор системы (1.20):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1, \\ \dot{y}_1 = -\omega_1^2 x_1 + (\alpha - x_1^2) y_1 + \gamma (y_2 - y_1) + C_0 \cos(\omega_{ex} t) + \sqrt{2D} \xi(t), \\ \dot{x}_2 = y_2, \\ \dot{y}_2 = -\omega_2^2 x_2 + (\alpha - x_2^2) y_2 + \gamma (y_1 - y_2). \end{cases} \quad (1.21)$$

Бифуркационный анализ явления синхронизации в такой системе при $D = 0$ был проведен в работах [3, 27] с использованием фазового приближения. Два осциллятора Ван дер Поля, имеющие расстройку по частоте, были синхронизированы между собой, в результате в объединенном фазовом пространстве образовался предельный цикл. Затем было подано внешнее гармоническое воздействие, которое синхронизировало предельный цикл через захват частоты. Было показано, что потеря синхронизации в такой системе происходит через следующую последовательность седло-узловых бифуркаций. Предельный цикл, соответствующий синхронизированным движениям, претерпевает касательную бифуркацию с седловым циклом, в результате

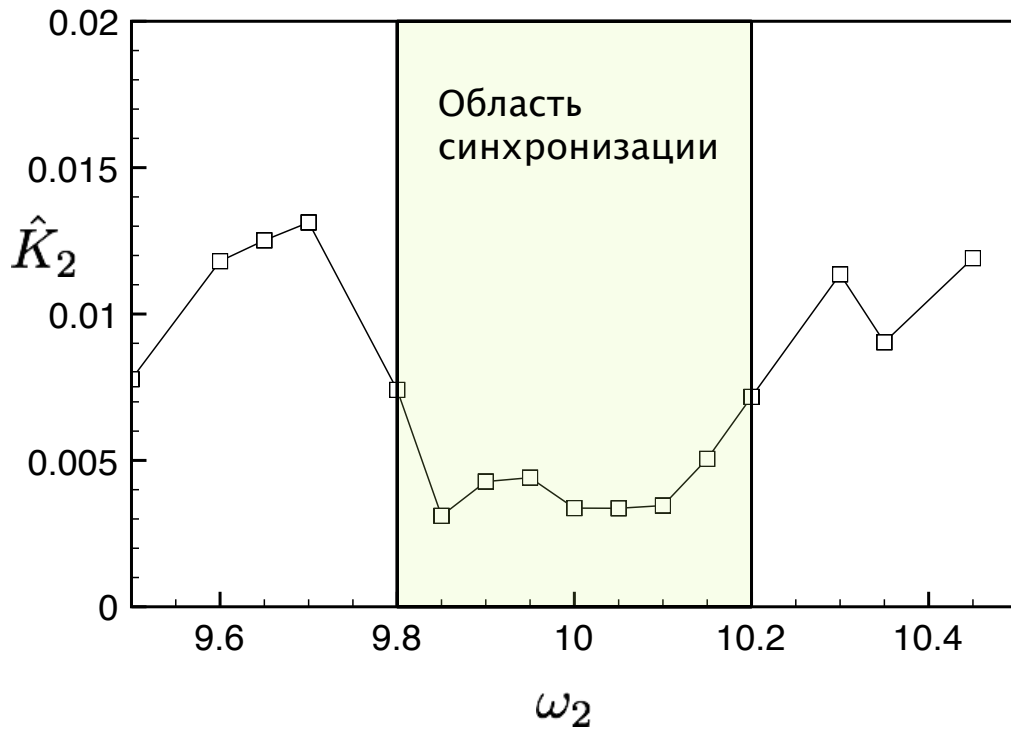


Рисунок 1.5 - Зависимость относительной метрической энтропии системы (1.20) от собственной частоты второго осциллятора.

чего в фазовом пространстве формируется двухмерный тор, лежащий на поверхности трехмерного тора. В спектре это соответствует появлению второго пика. Одновременно происходит касательная седло-репеллерная бифуркация с образованием седлового тора на поверхности все того же трехмерного тора. Дальнейшее изменение частоты внешнего воздействия ведет к сближению двухмерных торов и их касательной бифуркации с образованием устойчивого трехмерного тора. В спектре этой бифуркации соответствует появление третьего пика. При изменении частоты внешнего воздействия в обратном направлении в спектре наблюдается захват вначале одной частоты, а затем и второй внешним воздействием.

Бифуркационная диаграмма, полученная в работе [3], представлена на рисунке 1.6. Связывая седло-узловую бифуркацию с захватом частоты, можно построить аналогичную диаграмму для системы (1.21) (рисунок 1.7). На плоскости параметров можно выделить три области. Область B : в спектре представлены 3 основных пика, соответствующих собственным частотам связанных осцилляторов и частоте внешнего воздействия. Область C : в спектре представлены 2 пика, что соответствует захвату одной из собственных частот внешним воздействием, либо взаимной синхронизации осцилляторов. Область D : оба осциллятора синхронизированы между собой и с внешним воздействием — в спектре единственный основной пик.

Если наши предположения верны, то, изменяя частоту внешнего воздействия от 9.9 до 10.1, мы будем наблюдать увеличение ($C \rightarrow B$) относительной энтропии, затем ее уменьшение ($B \rightarrow C$), дальнейшее уменьшение до минимума ($C \rightarrow D$), последующее возрастание ($D \rightarrow C$), увеличение до максимума ($C \rightarrow B$) и уменьшение ($B \rightarrow C$). Результаты исследования отно-

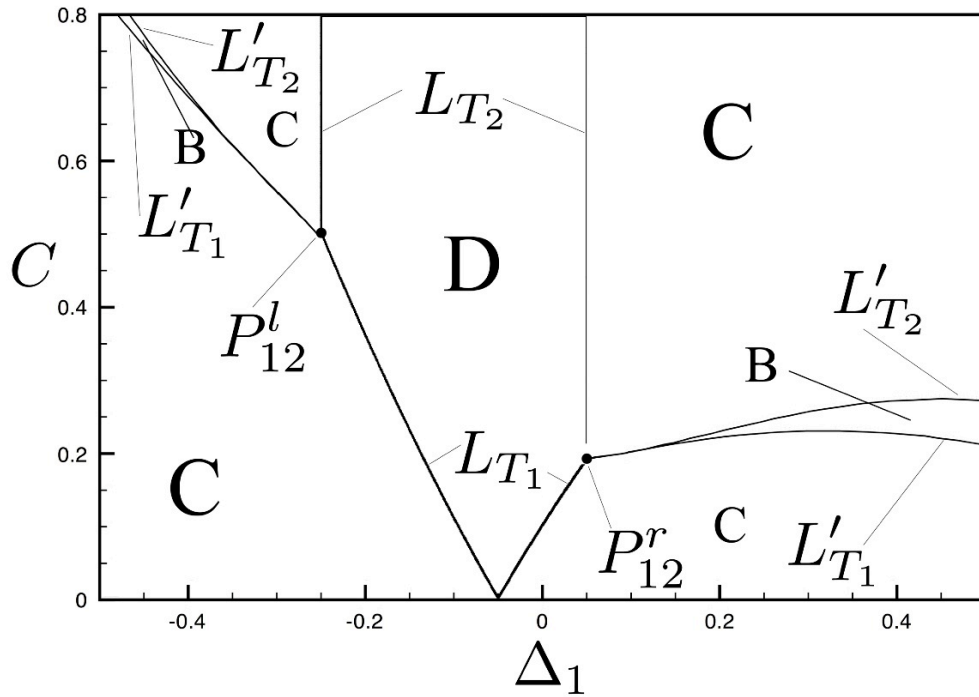


Рисунок 1.6 - Бифуркационная диаграмма, полученная в работе [3] для уравнений (1.21) при $D = 0$ в фазовом приближении. Область D — синхронизация между осцилляторами Ван дер Поля и внешним воздействием; $L_{T_{1,2}}$ — линии седло-узловых бифуркаций предельных циклов, лежащих на поверхности двухмерного тора; область C — синхронизация между осцилляторами Ван дер Поля при несинхронном внешнем воздействии, либо синхронизация одного из осцилляторов Ван дер Поля внешним сигналом при несинхронных колебаниях другого осциллятора; $L'_{T_{1,2}}$ — касательная бифуркация устойчивого и седлового двухмерных торов, лежащих на поверхности трехмерного тора; области B — отсутствие синхронизации в системе.

сительной метрической энтропии представлены на рисунке 1.8. Действительно, наибольшие ее значения наблюдаются в областях B , а наименьшие — в области D .

Таким образом, с использованием относительной метрической энтропии мы показали, что перемешивающее влияние внешнего шумового воздействия на регулярные системы зависит от размерности соответствующего предельного множества в фазовом пространстве в отсутствие шума (чем выше размерность — тем сильнее влияние). Кроме того, сравнение результатов на рисунках 1.5 и 1.8 позволяет сделать вывод о том, что на цикл, лежащий на поверхности двухмерного тора, который, в свою очередь, лежит на поверхности трехмерного тора (рисунок 1.8, область D), шум оказывает значительно большее перемешивающее воздействие, чем в случае, когда цикл лежит на поверхности двухмерного тора, лежащего на плоскости (рисунок 1.5, область синхронизации). Аналогичная ситуация наблюдается и с торами: в случае двухмерного тора, лежащего на поверхности трехмерного (рисунок 1.8, область C), шум вносит значительно большее перемешивание, чем в случае двухмерного тора, лежащего на плоскости (рисунок 1.5, вне области синхронизации).

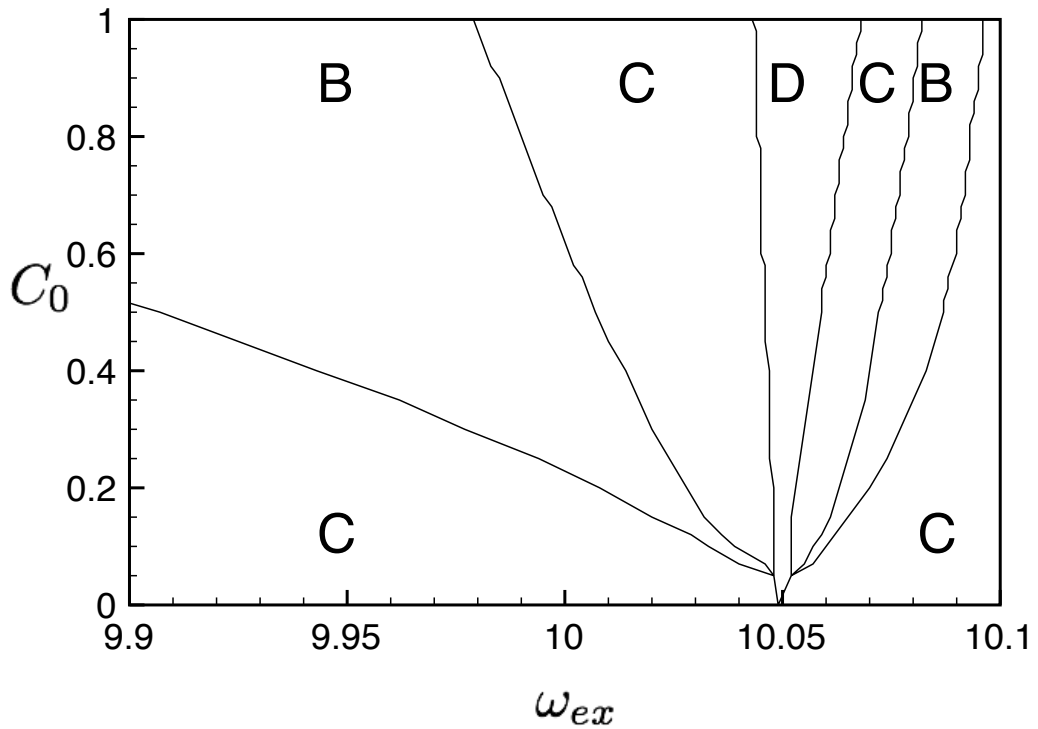


Рисунок 1.7 - Синхронизация в системе (1.21): области B — трехчастотные колебания; области C — собственная частота одного из осцилляторов захвачена внешним гармоническим воздействием, либо оба осциллятора взаимно синхронизированы, но не синхронны с внешним воздействием, в спектре два основных пика; область D — осцилляторы синхронизированы между собой и с внешним воздействием, одночастотные колебания.

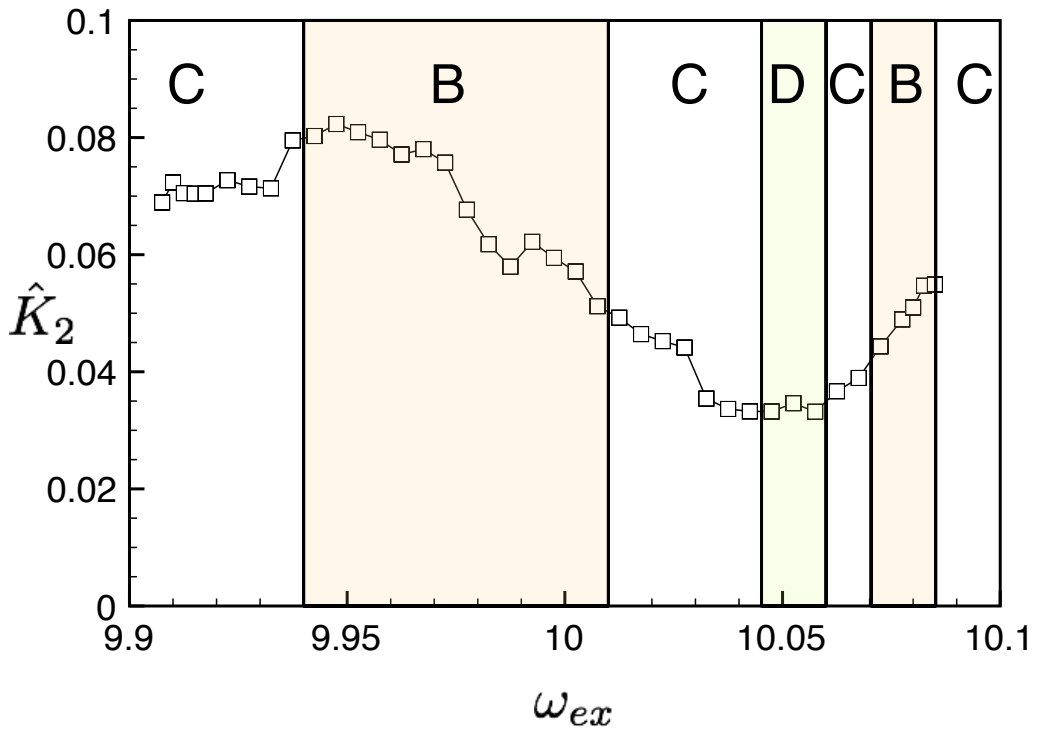


Рисунок 1.8 - Зависимость величины относительной метрической энтропии в системе (1.21) от частоты внешнего гармонического воздействия ω_{ex} при $D = 0.001$.

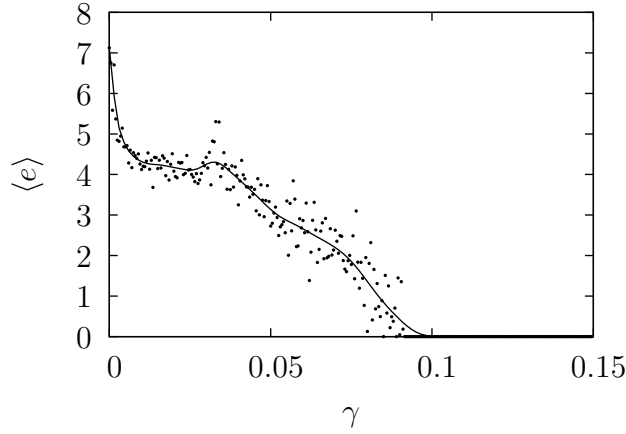


Рисунок 1.9 - Средняя ошибка полной синхронизации $\langle e \rangle$ в зависимости от коэффициента связи γ в системе (1.22) при $a = b = 0.2$, $c = 6.5$. Для $\gamma > 0.092$ наблюдается полная синхронизация хаоса. Вставки на рисунке демонстрируют проекции фазового пространства системы (1.22) на плоскость (x_1, x_2) .

1.4 Влияние полной синхронизации хаоса на переименование в фазовом пространстве взаимодействующих хаотических систем

Синхронизацию хаоса определяют различным образом и одним из простейших способов является понятие полной синхронизации хаоса. При полной синхронизации взаимодействующие идентичные хаотические системы, описываемые фазовыми переменными \mathbf{x}_1 и \mathbf{x}_2 демонстрируют идентичные колебания, то есть $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$ в каждый момент времени. Начнем наше рассмотрение полной синхронизации хаоса с системы связанных осцилляторов Ресслера.

1.4.1 Связанные идентичные осцилляторы Ресслера

Итак, полную синхронизацию хаоса можно наблюдать в следующей системе связанных осцилляторов Ресслера:

$$\begin{cases} \dot{x}_{1,2} = -y_{1,2} - z_{1,2} + \gamma(x_{2,1} - x_{1,2}), \\ \dot{y}_{1,2} = x_{1,2} + ay_{1,2}, \\ \dot{z}_{1,2} = b + z_{1,2}(x_{1,2} - c). \end{cases} \quad (1.22)$$

Здесь $x_{1,2}$, $y_{1,2}$ и $z_{1,2}$ — фазовые переменные, a , b и c — управляющие параметры, γ — коэффициент связи. Установим следующие значения управляющих параметров $a = b = 0.2$ и $c = 6.5$, при которых системы находятся в режиме хаотического аттрактора. На рисунке 1.9 представлена средняя ошибка полной синхронизации:

$$\langle e \rangle = \langle \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \rangle$$

Из него легко видеть, что полная синхронизация возникает при $\gamma \geq 0.092$. Относительная метрическая энтропия системы (1.22) представлена на рисунке 1.10 в зависимости от коэффициента связи. Легко видеть, что увеличение коэффициента связи ведет к уменьшению величины

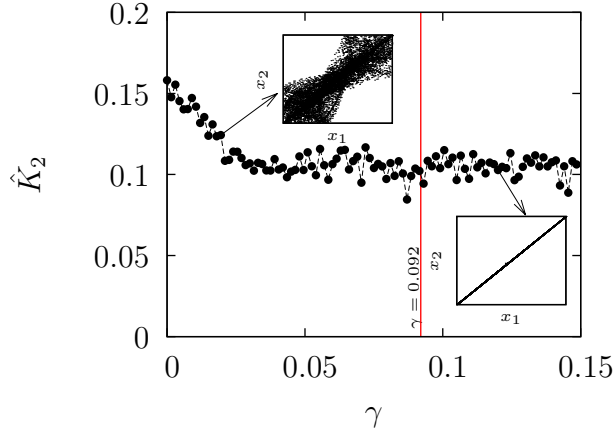


Рисунок 1.10 - Относительная метрическая энтропия системы (1.22) при $a = b = 0.2$, $c = 6.5$ в зависимости от коэффициента связи. Полная синхронизация хаоса наблюдается при $\gamma > 0.092$.

относительной метрической энтропии (\hat{K}_2) до тех пор, пока γ не достигнет определенного значения, близкого к 0.05, при котором относительная энтропия выходит на плато. Дальнейшее увеличение коэффициента связи вызывает небольшие флуктуации \hat{K}_2 в окрестности среднего значения, близкого к значению относительной метрической энтропии одиночного осциллятора Ресслера при тех же значениях управляющих параметров [15]. Следует отметить, что плато начинается раньше, чем возникает режим полной синхронизации хаоса, что может быть связано с конечностью величины ε , используемой при расчетах относительной метрической энтропии.

Представленные результаты для системы (1.22) позволяют сделать вывод о том, что полная синхронизация хаоса характеризуется меньшими значениями относительной метрической энтропии и, следовательно, меньшей степенью перемешивания в фазовом пространстве.

Для реальных систем является типичной ситуация, при которой система находится под влиянием шумового воздействия. Таким образом, возникает закономерный вопрос: влияет ли синхронизация хаоса на перемешивание в зашумленной хаотической системе? Для ответа на него мы добавили источник шума в (1.22):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -y_1 - z_1 + \gamma(x_2 - x_1) + \sqrt{2D}n(t), \\ \dot{y}_1 = x_1 + ay_1, \\ \dot{z}_1 = b + z_1(x_1 - c), \\ \dot{x}_2 = -y_2 - z_2 + \gamma(x_1 - x_2), \\ \dot{y}_2 = x_2 + ay_2, \\ \dot{z}_2 = b + z_2(x_2 - c). \end{cases} \quad (1.23)$$

Здесь $n(t)$ — источник белого гауссова шума интенсивности D . Значения управляющих параметров были оставлены прежними: $a = b = 0.2$, $c = 6.5$. Результаты представлены на рисунке 1.11 для трех различных интенсивностей шума D . Легко видеть, что эффект снижения степени перемешивания, наблюдаемый для детерминированной системы, сохраняется и в случае стохастической системы.

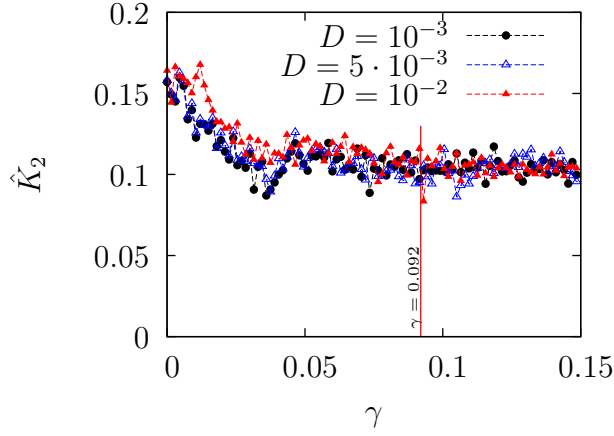


Рисунок 1.11 - Относительная метрическая энтропия в зависимости от коэффициента связи в системе (1.23) при $a = b = 0.2$, $c = 6.5$ и различных величинах интенсивности шума D . В отсутствие шума, полная синхронизация наблюдается при $\gamma > 0.092$.

1.4.2 Связанные генераторы с инерционной нелинейностью

Чтобы продемонстрировать общность обнаруженного эффекта, рассмотрим другую базовую систему теории детерминированного хаоса — модифицированный генератор с инерционной нелинейностью. Итак, запишем систему связанных генераторов с инерционной нелинейностью под действием белого шума:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (m - z_1)x_1 + y_1 + \gamma(x_2 - x_1) + \sqrt{2D}n(t), \\ \dot{y}_1 = -x_1, \\ \dot{z}_1 = g(f(x_1) - z_1), \\ \dot{x}_2 = (m - z_2)x_2 + y_2 + \gamma(x_1 - x_2), \\ \dot{y}_2 = -x_2, \\ \dot{z}_2 = g(f(x_2) - z_2). \end{cases} \quad (1.24)$$

Здесь $x_{1,2}$, $y_{1,2}$ и $z_{1,2}$ — фазовые переменные, m и g — управляющие параметры, $f(x)$ принимает значение 0 при $x < 0$ и x^2 при $x \geq 0$, γ — коэффициент связи, $n(t)$ — источник белого гауссова шума интенсивности D . Мы установили следующие значения управляющих параметров: $m = 1.42$, $g = 0.2$, соответствующие режиму хаотического аттрактора в парциальной системе. В отсутствие шума ($D = 0$) система переходит к полной синхронизации хаоса при $\gamma \geq 0.125$.

На рисунке 1.12 представлена величина относительной метрической энтропии в зависимости от коэффициента связи в отсутствие шума, а на рисунке 1.13 — та же величина под действием белого гауссова шума. Надо отметить, что есть интервал значений γ , при которых система оказывается в регулярном режиме и значение относительной энтропии близко к нулю. Тем не менее, как без шума, так и под влиянием шумового воздействия, существует плато, соответствующее синхронизации хаоса в системе (1.24).

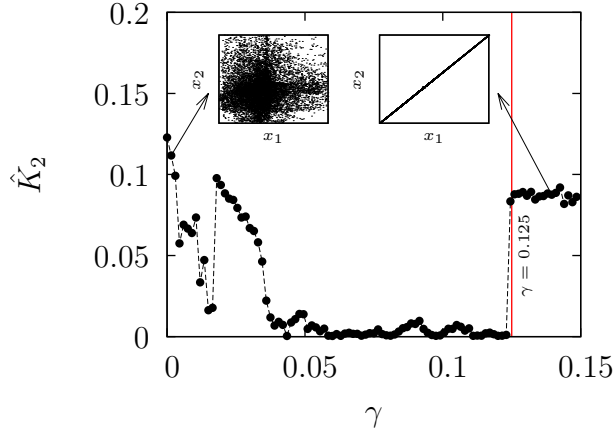


Рисунок 1.12 - Относительная метрическая энтропия в зависимости от коэффициента связи в системе (1.24) при $m = 1.42$, $g = 0.2$, и $D = 0$. Полная синхронизация хаоса наблюдается при $\gamma > 0.125$. Вставки демонстрируют проекции фазового пространства системы (1.24) на плоскость (x_1, x_2) .

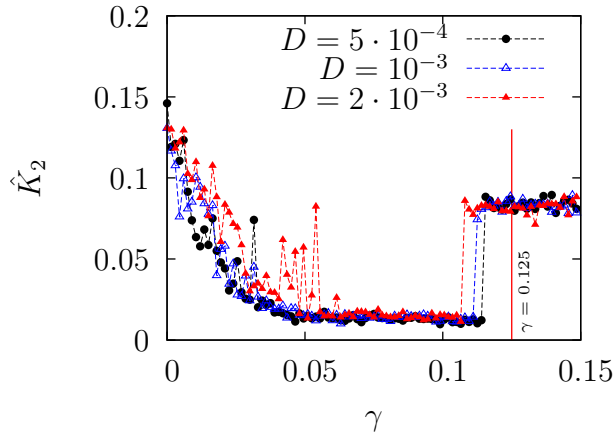


Рисунок 1.13 - Относительная метрическая энтропия в зависимости от коэффициента связи в системе (1.24) при $m = 1.42$, $g = 0.2$ и трех различных значениях интенсивности шума D . В отсутствие шума полная синхронизация наблюдается при $\gamma > 0.125$.

1.5 Влияние фазовой синхронизации хаоса на перемешивание в фазовом пространстве взаимодействующих систем

1.5.1 Фазовая синхронизация хаоса в системе связанных осцилляторов Ресслера.

Итак, рассмотрим систему связанных осцилляторов Ресслера

$$\begin{cases} \dot{x}_{1,2} = -\omega_{1,2}y_{1,2} - z_{1,2} + \gamma(x_{2,1} - x_{1,2}), \\ \dot{y}_{1,2} = \omega_{1,2}x_{1,2} + ay_{1,2}, \\ \dot{z}_{1,2} = b + z_{1,2}(x_{1,2} - c) \end{cases} \quad (1.25)$$

с малой расстройкой по параметру: $\omega_{1,2} = 0.97 \pm \Delta\omega$ и значениями остальных управляющих параметров $a = 0.165$, $b = 0.2$, $c = 10$. Оба парциальных осциллятора демонстрируют когерентную фазовую динамику, но имеют различные средние частоты из-за расстройки параметров

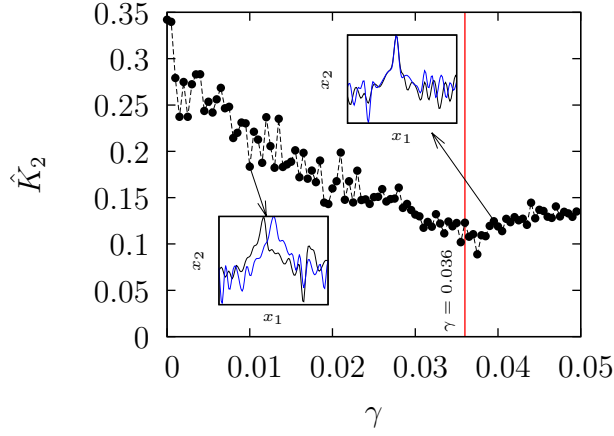


Рисунок 1.14 - Относительная метрическая энтропия \hat{K}_2 системы (1.25) при $\omega_{1,2} = 0.97 \pm \Delta\omega$ и $a = 0.165$, $b = 0.2$, $c = 10$ в зависимости от коэффициента связи $\gamma \in [0, 0.05]$. Фазовая синхронизация хаоса наблюдается при $\gamma > 0.036$. Вставки демонстрируют спектры мощности колебаний переменных x_1 (черного цвета) и x_2 (синего цвета) в системе (1.25).

$\Delta\omega$.

Учитывая, что фазовая синхронизация возникает при $\gamma = 0.036$, результаты, представленные на рисунке 1.14 позволяют сделать вывод, что явление фазовой синхронизации снижает степень перемешивания в фазовом пространстве детерминированной хаотической системы.

Теперь покажем, что обнаруженный эффект сохраняется и в зашумленной системе. Система двух связанных осцилляторов Ресслера под действием белого гауссова шума описывается следующими уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\omega_1 y_1 - z_1 + \gamma(x_2 - x_1) + \sqrt{2D}n(t), \\ \dot{y}_1 = \omega_1 x_1 + \alpha y_1, \\ \dot{z}_1 = \beta + z_1(x_1 - \mu), \\ \dot{x}_2 = -\omega_2 y_2 - z_2 + \gamma(x_1 - x_2), \\ \dot{y}_2 = \omega_2 x_2 + \alpha y_2, \\ \dot{z}_2 = \beta + z_2(x_2 - \mu). \end{cases} \quad (1.26)$$

Здесь $n(t)$ — источник белого гауссова шума интенсивности D .

На рисунке 1.15 представлена относительная метрическая энтропия системы (1.26) в зависимости от коэффициента связи для различных значений интенсивности шума. Легко видеть, что эффект спада относительной метрической энтропии справедлив и для зашумленной системы.

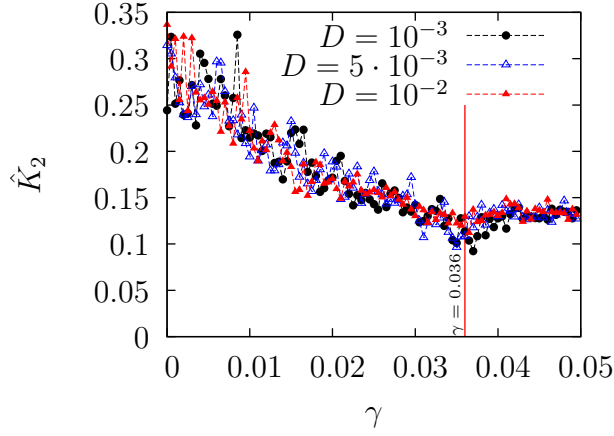


Рисунок 1.15 - Относительная метрическая энтропия \hat{K}_2 системы (1.26) при $\omega_{1,2} = 0.97 \pm \Delta\omega$ и $a = 0.165$, $b = 0.2$, $c = 10$ в зависимости от коэффициента связи $\gamma \in [0, 0.05]$ при различных интенсивностях шума. В отсутствие шума фазовая синхронизация наблюдается при $\gamma > 0.036$.

1.5.2 Фазовая синхронизация в системе связанных генераторов с инерционной нелинейностью

Аналогичные численные эксперименты были проведены и для системы связанных модифицированных генераторов с инерционной нелинейностью:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (m - z_1)x_1 + y_1 + \gamma(x_2 - x_1) + \sqrt{2D}n(t), \\ \dot{y}_1 = -x_1, \\ \dot{z}_1 = g(f(x_1) - z_1), \\ \dot{x}_2/p = (m - z_2)x_2 + y_2 + \gamma(x_1 - x_2), \\ \dot{y}_2/p = -x_2, \\ \dot{z}_2/p = g(f(x_2) - z_2). \end{cases} \quad (1.27)$$

Здесь p определяет расстройку по средней частоте между парциальными генераторами, $n(t)$ — источник белого гауссова шума интенсивности D . Были установлены следующие значения управляющих параметров: $m = 1.42$, $g = 0.2$ и $p = 1.05$. При данных значениях параметров фазовая синхронизация возникает при $\gamma = 0.019$.

На рисунке 1.16 представлена величина относительной метрической энтропии в системе (1.27) в зависимости от коэффициента связи в отсутствие шума и под действием шума различной интенсивности — на рисунке 1.17. Легко видеть, что в режиме фазовой синхронизации степень перемешивания спадает во всех рассмотренных случаях.

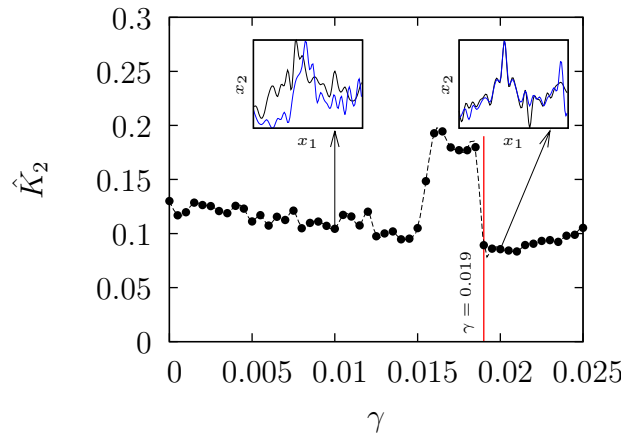


Рисунок 1.16 - Относительная метрическая энтропия \hat{K}_2 системы (1.27) при $m = 1.42$, $g = 0.2$ и $p = 1.05$ в зависимости от коэффициента связи $\gamma \in [0, 0.025]$ (1.27) при $D = 0$. Фазовая синхронизация наблюдается для $\gamma > 0.019$. На вставках изображены спектры мощности фазовых переменных x_1 (черный) и x_2 (синий) системы (1.25).

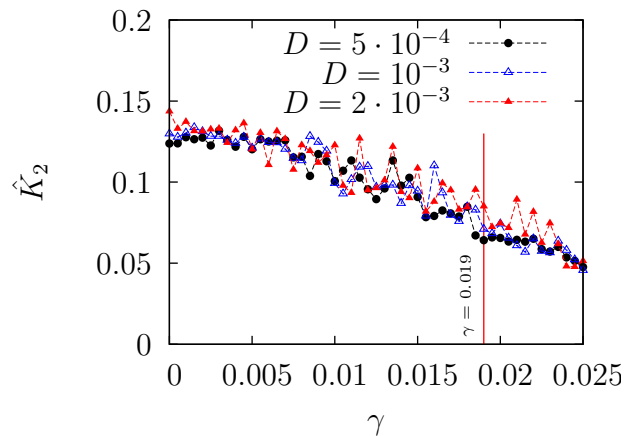


Рисунок 1.17 - Относительная метрическая энтропия \hat{K}_2 системы (1.27) при $m = 1.42$, $g = 0.2$ и $p = 1.05$ в зависимости от коэффициента связи $\gamma \in [0, 0.025]$ (1.27) для трех значений интенсивности шума. В отсутствие шума, фазовая синхронизация наблюдается при $\gamma > 0.019$.

1.6 Выводы

В результате исследования был разработан алгоритм расчета меры хаотической и стохастической синхронизации, основанный на относительной метрической энтропии. Метод был протестирован для случаев фазовой и полной синхронизации хаоса, а также, для стохастической синхронизации под действием внешней случайной силы. В данной работе было также обнаружено, что во взаимодействующих системах с перемешиванием явление синхронизации ведет к снижению степени перемешивания. Данный эффект наблюдается как для регулярных систем под действием шума, так и для хаотических (и детерминированных и зашумленных). Таким образом, уменьшение относительной метрической энтропии, являющейся мерой перемешивания в регулярных и зашумленных системах, может использоваться в качестве универсального

индикатора синхронизации, а количественное изменение данной величины — в качестве универсальной меры синхронизации взаимодействующих систем.

2 Анализ механизмов фазовой синхронизации квазипериодических автоколебаний с двумя и более независимыми частотами

2.1 Введение

Синхронизация, как фундаментальное нелинейное явление, детально исследованное в рамках классической теории колебаний, продолжает оставаться актуальной научной проблемой междисциплинарного характера. В настоящем разделе исследуются эффекты синхронизации квазипериодических и индуцированных шумом колебаний с двумя и более основными частотами в спектре. Анализируется бифуркационный механизм, лежащий в основе явления синхронизации квазипериодических колебаний с двумя частотами внешним гармоническим воздействием, а также в цепочке взаимодействующих квазигармонических осцилляторов.

Поскольку явление фазовой синхронизации наблюдается не только в детерминированных системах с предельным циклом, но и в случае индуцированных шумом колебаний в возбудимых системах, мы проводим детальный анализ данного явления в случае когерентного резонанса взаимодействующих возбудимых систем, демонстрирующих два и более основных пиков в спектре колебаний. Мы показываем, что сценарий перехода к синхронизации в таких системах содержит последовательность захватов частот, наблюдаемую при рассмотрении детерминированных систем.

2.2 Теория синхронизации квазипериодических автоколебаний в фазовом приближении

Рассмотрим систему двух симметрично связанных генераторов Ван дер Поля при условии, что внешний гармонический сигнал подается на первый генератор (рисунок 2.1).

Дифференциальные уравнения системы рисунок 2.1, исследованные в работах [28,29], имеют вид:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = (\varepsilon - x_1^2) \dot{x}_1 + \gamma (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + C_0 \cos(\omega_{ex} t), \\ \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 = (\varepsilon - x_2^2) \dot{x}_2 + \gamma (\dot{x}_1 - \dot{x}_2). \end{cases} \quad (2.1)$$

В уравнениях (2.1) ε – параметр возбуждения, одинаковый для первого и второго генераторов, $F(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = \gamma(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$ – функция связи, γ – коэффициент связи, C_0 и ω_{ex} – амплитуда и частота внешнего сигнала соответственно.

Как видно из (2.1), взаимодействие генераторов осуществляется через производные $\dot{x}_{1,2}$, что в эксперименте соответствует резистивной связи.

Будем искать решение уравнений (2.1) в виде $x_{1,2} = a_{1,2}(t) \cos \Psi_{1,2}(t)$, где $\Psi_{1,2}(t) = \omega_{ex}t + \varphi_{1,2}(t)$, полагая (в полном соответствии с классическим описанием динамики генератора Ван дер Поля в квазипериодическом приближении) $a_{1,2}(t)$ и $\varphi_{1,2}(t)$ медленно меняющимися во времени функциями. Это означает, что $\dot{a}_{1,2}(t) \ll a_{1,2}(t)$ и $\dot{\varphi}_{1,2}(t) \ll \varphi_{1,2}(t)$.

Перепишем уравнения (2.1) в виде динамической системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1, \\ \dot{y}_1 = (\varepsilon - x_1^2) y_1 - \omega_1^2 x_1 + \gamma (y_2 - y_1) + C_0 \cos(\omega_{ex}t), \\ \dot{x}_2 = y_2, \\ \dot{y}_2 = (\varepsilon - x_2^2) y_2 - \omega_2^2 x_2 + \gamma (y_1 - y_2) \end{cases} \quad (2.2)$$

и, в соответствии с вышесказанным, введем замену переменных:

$$\begin{cases} x_1 = a_1(t) \cos(\omega_{ex}t + \varphi_1(t)), \\ y_1 = \dot{a}_1(t) \cos(\omega_{ex}t + \varphi_1(t)) - \\ - a_1(t) \dot{\varphi}_1(t) \sin(\omega_{ex}t + \varphi_1(t)) - \\ - a_1(t) \omega_{ex} \sin(\omega_{ex}t + \varphi_1(t)), \\ x_2 = a_2(t) \cos(\omega_{ex}t + \varphi_2(t)), \\ y_2 = \dot{a}_2(t) \cos(\omega_{ex}t + \varphi_2(t)) - \\ - a_2(t) \dot{\varphi}_2(t) \sin(\omega_{ex}t + \varphi_2(t)) - \\ - a_2(t) \omega_{ex} \sin(\omega_{ex}t + \varphi_2(t)). \end{cases} \quad (2.3)$$

Используя стандартное условие

$$\begin{aligned} & \dot{a}_{1,2}(t) \cos(\omega_{ex}t + \varphi_{1,2}(t)) - \\ & - a_{1,2}(t) \dot{\varphi}_{1,2}(t) \sin(\omega_{ex}t + \varphi_{1,2}(t)) = 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

и произведя усреднение за период внешней силы, получим уравнения первого приближения для амплитуд колебаний $a_{1,2}(t)$:

$$\begin{cases} \dot{a}_1 = a_1 \left(\frac{\varepsilon}{2} - \frac{a_1^2}{8} \right) + \frac{\gamma}{2} [a_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - a_1] - \\ - \frac{C_0}{2\omega_{ex}} \sin \varphi_1, \\ \dot{a}_2 = a_2 \left(\frac{\varepsilon}{2} - \frac{a_2^2}{8} \right) + \frac{\gamma}{2} [a_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - a_2] \end{cases} \quad (2.5)$$

и фаз колебаний в первом и втором генераторах $\varphi_{1,2}(t)$:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 = \Delta_1 + \frac{\gamma}{2} \sin(\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{C}{\omega_{ex}} \cos \varphi_1, \\ \dot{\varphi}_2 = \Delta_2 - \frac{\gamma}{2} \sin(\varphi_2 - \varphi_1), \end{cases} \quad (2.6)$$

где $\Delta_{1,2} = \frac{\omega_{1,2}^2 - \omega_{ex}^2}{2\omega_{ex}}$, $C = \frac{C_0}{2a_1}$.

Будем предполагать, что расстройка базовых частот генераторов $\omega_2 - \omega_1 = \delta \ll 1$, а также близость частоты внешнего воздействия к значениям базовых частот $\omega_{1,2}$, т.е. $\Delta_{1,2} \simeq \omega_{1,2} - \omega_{ex}$. В этом приближении справедливо:

$$\Delta_2 \simeq \Delta_1 + \delta. \quad (2.7)$$

Из уравнений для амплитуд (2.5) следует, что при малой связи $\gamma \ll 1$ и малой амплитуде воздействия $C_0 \ll 1$ можно считать, что

$$a_1 \simeq a_2 \simeq 2\sqrt{\varepsilon}. \quad (2.8)$$

Амплитуды предельных циклов в генераторах будут постоянными и равными друг другу. В этом приближении динамика системы может быть исследована на основе уравнений для фаз колебаний $\varphi_{1,2}(t)$ (2.6):

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 = \Delta_1 + g \sin(\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{C}{\omega_1 - \Delta_1} \cos \varphi_1, \\ \dot{\varphi}_2 = \Delta_1 + \delta - g \sin(\varphi_2 - \varphi_1), \end{cases} \quad (2.9)$$

где $g = \frac{\gamma}{2}$, $C = \frac{C_0}{2\omega_{ex}\sqrt{\varepsilon}}$, $\Delta_1 = \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2\omega_{ex}} \simeq \omega_1 - \omega_{ex}$, $\delta = \omega_2 - \omega_1$. Далее везде полагаем $\omega_1 = 1$.

Уравнения (2.9) описывают фазовую динамику исходной системы (2.1) и дают возможность бифуркационного анализа эффектов фазовой синхронизации при вариации амплитуды C и частоты ω_{ex} внешней силы для выбранных значений связи g и расстройки генераторов по частотам δ .

2.2.1 Бифуркации состояния равновесия

Координаты состояния равновесия системы (2.9) определяются из условий $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 = 0$, т.е. из уравнений

$$\begin{cases} 0 = \Delta_1 + g \sin(\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{C}{1 - \Delta_1} \cos \varphi_1, \\ 0 = \Delta_1 + \delta - g \sin(\varphi_2 - \varphi_1). \end{cases} \quad (2.10)$$

Условия существования действительных решений имеют вид:

$$\begin{cases} \left| \frac{\Delta_1 + \delta}{g} \right| \leq 1, \\ \left| \frac{(1 - \Delta_1)(2\Delta_1 + \delta)}{C} \right| \leq 1. \end{cases} \quad (2.11)$$

При этих условиях уравнения (2.10) имеют четыре решения, которым отвечают следующие четыре пары координат неподвижных точек:

$$\begin{cases} \varphi_1^{(1)} = \arccos\left(\frac{(1-\Delta_1)(2\Delta_1+\delta)}{C}\right), \\ \varphi_2^{(1)} = \varphi_1^{(1)} + \arcsin\left(\frac{\Delta_1+\delta}{g}\right), \\ \varphi_1^{(3)} = \arccos\left(\frac{(1-\Delta_1)(2\Delta_1+\delta)}{C}\right), \\ \varphi_2^{(3)} = \varphi_1^{(3)} - \arcsin\left(\frac{\Delta_1+\delta}{g}\right) + \pi, \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi_1^{(2)} = -\arccos\left(\frac{(1-\Delta_1)(2\Delta_1+\delta)}{C}\right), \\ \varphi_2^{(2)} = \varphi_1^{(2)} + \arcsin\left(\frac{\Delta_1+\delta}{g}\right), \\ \varphi_1^{(4)} = -\arccos\left(\frac{(1-\Delta_1)(2\Delta_1+\delta)}{C}\right), \\ \varphi_2^{(4)} = \varphi_1^{(4)} - \arcsin\left(\frac{\Delta_1+\delta}{g}\right) + \pi. \end{cases} \quad (2.12)$$

Система (2.9) характеризуется четырьмя состояниями равновесия, устойчивость и бифуркации которых необходимо исследовать. Решение характеристического уравнения матрицы линеаризации системы (2.9) дает следующие собственные значения для состояний равновесия:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} & \left\{ - \left[2g \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{C}{1-\Delta_1} \sin \varphi_1 \right] \pm \right. \\ & \pm \left[\left[2g \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{C}{1-\Delta_1} \sin \varphi_1 \right]^2 + \right. \\ & \left. \left. + 4g \frac{C}{1-\Delta_1} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \sin \varphi_1 \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \end{aligned} \quad (2.13)$$

На рисунке 2.2 представлена бифуркационная диаграмма системы (2.9). В области D , ограниченной бифуркационными линиями L_{T_1} и L_{T_2} , существуют 4 состояния равновесия, из которых одно является устойчивым узлом, два — седла и одно — неустойчивый узел (репеллер). При выходе из области D с пересечением линий L_{T_1} и L_{T_2} имеют место седло-узловые бифуркации состояний равновесия. Обсудим это более детально. На рисунке 2.3 представлены фазовые портреты состояний равновесия на 2π -периодической фазовой плоскости координат (φ_1, φ_2) до пересечения линий L_{T_1} (рисунок 2.3, а) и на бифуркационной линии L_{T_1} (рисунок 2.3, б). Как видно из рисунка 2.3, б, на линии L_{T_1} состояния равновесия попарно сливаются в негрубые состояния равновесия типа седло-узел и затем исчезают. В момент бифуркации (на линии L_{T_1}) собственные значения соответствующих пар неподвижных точек $\lambda_1^{(1)}$, $\lambda_1^{(2)}$ и $\lambda_2^{(3)}$, $\lambda_2^{(4)}$ обращаются в нуль, свидетельствуя о седло-узловой бифуркации.

Качественно эквивалентная картина реализуется при пересечении бифуркационных линий L_{T_2} , что иллюстрирует рисунок 2.4.

Отличия рисунка 2.3 и рисунка 2.4 в том, что в первом случае седло-узловая бифуркация реализуется для точек 1, 2 и 3, 4, а во втором — для точек 3, 1 и 4, 2.

Как видно из рисунка 2.3, 2.4, в результате седло-узловых бифуркаций состояния равновесия исчезают и вне области D (в областях C) рождаются соответствующие пары устойчивых (l_1) и неустойчивых (l_2) инвариантных кривых.

С точки зрения полной системы уравнений (2.1) область D на рисунке 2.2, в которой существует одна устойчивая неподвижная точка, отвечает устойчивому предельному циклу режима

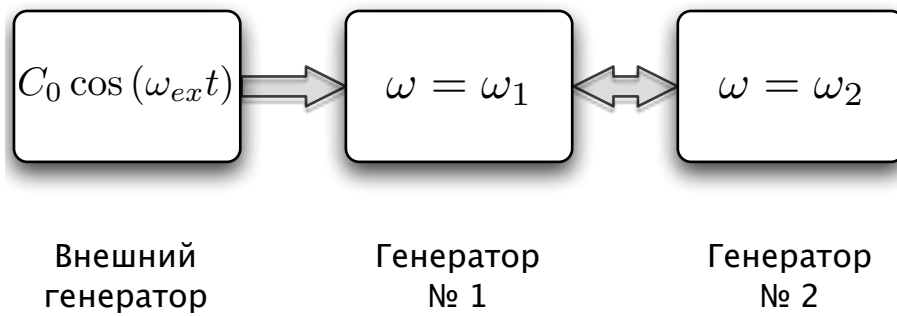


Рисунок 2.1 - Блок-схема исследуемой системы.

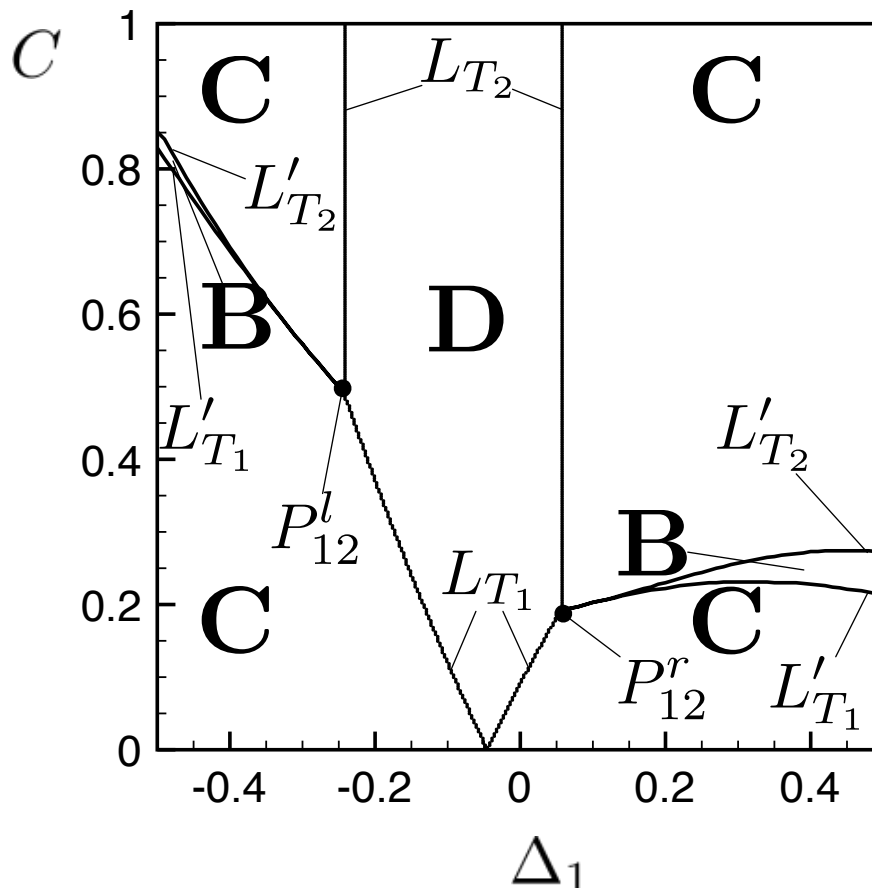
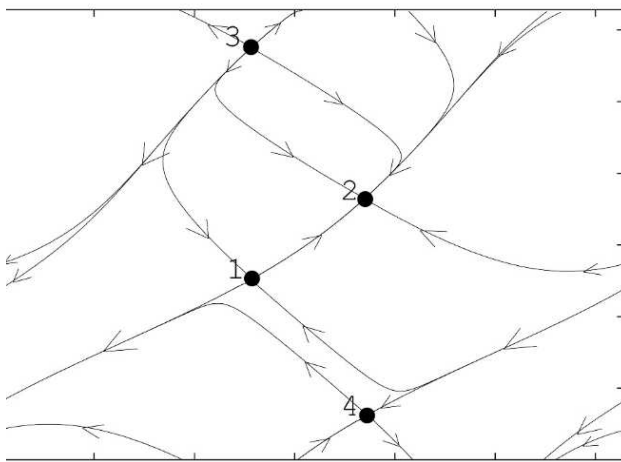
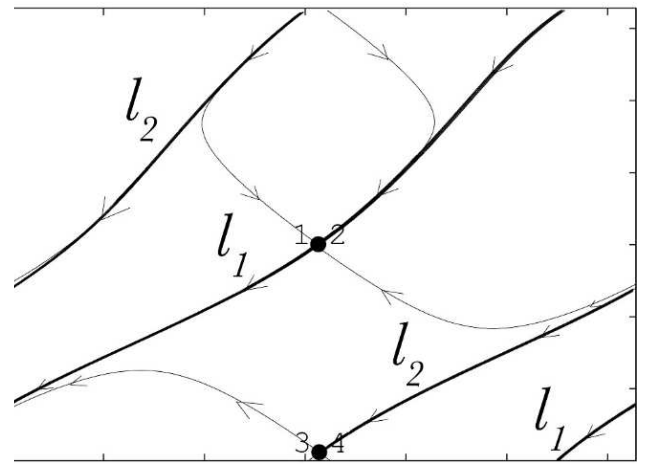


Рисунок 2.2 - Линии бифуркации коразмерности 1 системы (2.9) на плоскости параметров (Δ_1, C) при фиксированных значениях $g = 0.15, \delta = 0.1$. L_{T_1} — линии седло-узловых бифуркаций состояний равновесия $\varphi^{(1)} \leftrightarrow \varphi^{(2)}$ и $\varphi^{(3)} \leftrightarrow \varphi^{(4)}$; L_{T_2} — линии седло-узловых бифуркаций состояний равновесия $\varphi^{(1)} \leftrightarrow \varphi^{(3)}$ и $\varphi^{(2)} \leftrightarrow \varphi^{(4)}$; L'_{T_1} и L'_{T_2} — линии касательных бифуркаций устойчивых и седловых инвариантных замкнутых кривых.

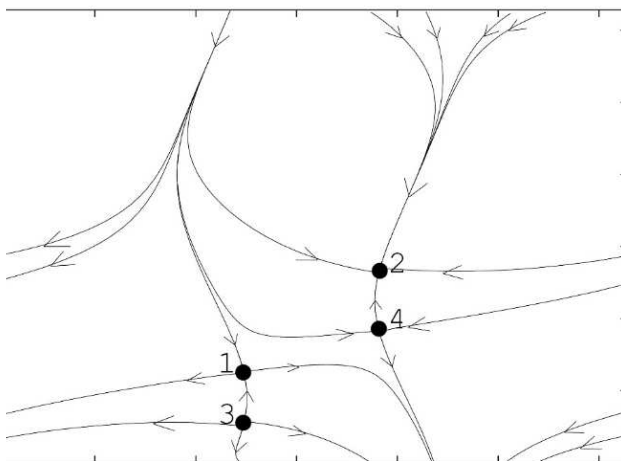


(a)

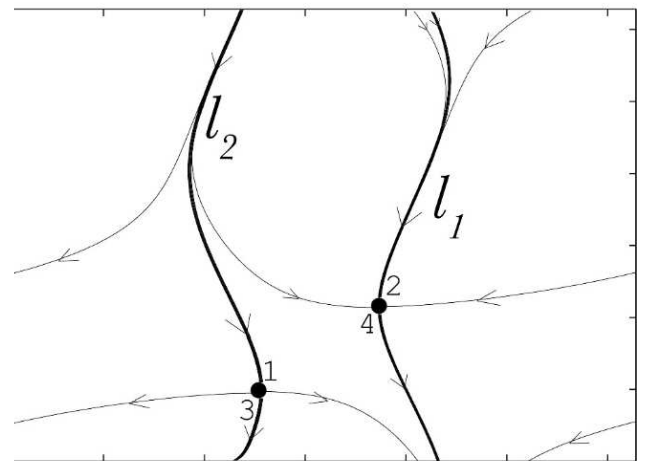


(б)

Рисунок 2.3 - Седло-узловые бифуркации состояний равновесия при пересечении кривой L_{T_1} на плоскости параметров (рисунок 2.2): (а) — состояния равновесия и их инвариантные многообразия до бифуркации; (б) — негрубое состояние “седло-узел” в момент бифуркации. $\lambda_i^{(j)}$ — i -е собственное значение j -го состояния равновесия.



(a)



(б)

Рисунок 2.4 - Седло-узловые бифуркации состояний равновесия при пересечении кривой L_{T_2} на плоскости параметров (рисунок 2.2): (а) — состояния равновесия и их инвариантные многообразия до бифуркации; (б) — негрубое состояние “седло-узел” в момент бифуркации. $\lambda_i^{(j)}$ — i -е собственное значение j -го состояния равновесия.

полной синхронизации. При этом обе частоты генераторов ω_1 и ω_2 захвачены сигналом внешнего воздействия и выполняется равенство $\omega_1 = \omega_2 = \omega_{ex}$. При выходе из области D возникают биения, т.е. двухчастотные колебания, образом которых в фазовом приближении является устойчивая инвариантная кривая l_1 .

2.2.2 Бифуркации инвариантных замкнутых кривых

Бифуркации состояний равновесия при выходе из области D в области C исследованы аналитически с использованием выражений (2.12) и (2.13). Для анализа бифуркаций инвариантных кривых l_1, l_2 применим метод численного моделирования. Результаты расчетов представлены на рисунке 2.5 (для инвариантных кривых рисунка 2.3, б).

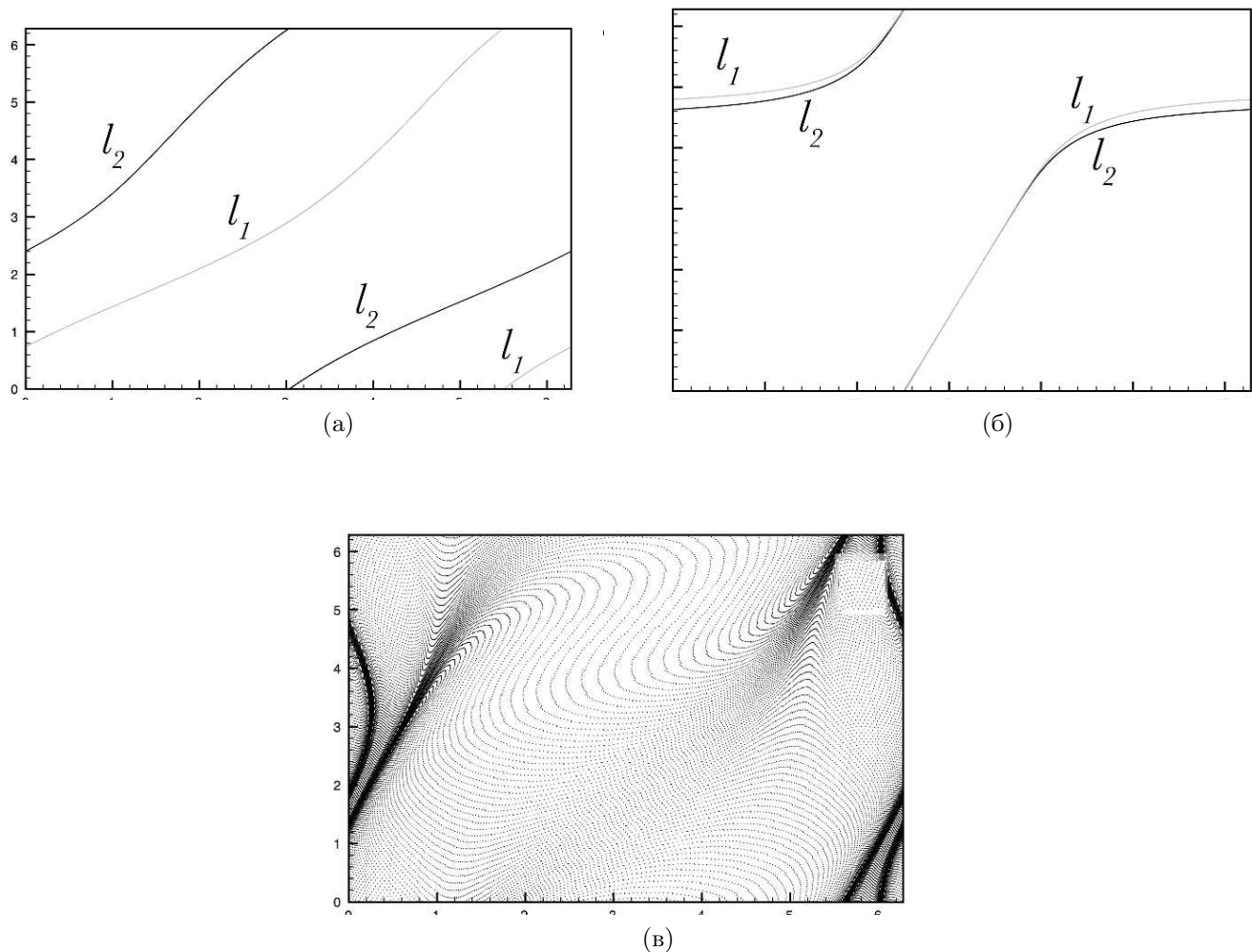


Рисунок 2.5 - Трансформации фазового портрета в результате седло-узловой бифуркации инвариантных кривых (переход из области C в область B диаграммы рисунка 2.2).

Если двигаться в пространстве параметров диаграммы рисунка 2.2 из области C в область B , то наблюдается следующая картина. Инвариантные кривые l_1 и l_2 приближаются друг к

другу, на бифуркационных линиях L'_{T_1} они сливаются в единую седло-узловую инвариантную кривую, а с пересечением линии L'_{T_1} кривые $l_{1,2}$ исчезают. После точки бифуркации в областях B траектории всюду плотно покрывают всю фазовую плоскость, что иллюстрирует рис. 2.5, с. Таким образом имеет место бифуркация, которую можно называть седло-узловой бифуркацией инвариантных замкнутых кривых по аналогии с седло-узловой бифуркацией состояний равновесия. Для инвариантных кривых рисунка 2.4, б аналогичная бифуркация реализуется при пересечении линий L_{T_2} из областей C в область B . С точки зрения динамики исходной дифференциальной системы (2.1), описанной бифуркации отвечает переход от режима двухчастотных колебаний к режиму трехчастотных колебаний, когда все три частоты системы рационально не связаны ($\omega_1 \neq \omega_2 \neq \omega_{ex}$) [29].

Седло-узловую бифуркацию инвариантных кривых удобно иллюстрировать следующим образом. Введем определение средней частоты фазовых осцилляторов (2.9) [30]:

$$\langle \omega_{1,2} \rangle = \langle \dot{\varphi}_{1,2} \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \dot{\varphi}_{1,2}(t) dt \quad (2.14)$$

Заметим, что введенные величины определяют среднюю разность собственных частот осцилляторов и внешнего воздействия. Используя систему уравнений (2.9), произведем расчет зависимости средних частот $\langle \omega_{1,2} \rangle$ от параметров. Зафиксируем значения параметров $C = 0.25$, $\delta = 0.1$, $g = 0.15$ и будем двигаться по плоскости бифуркационной диаграммы рисунка 2.2, изменяя параметр Δ_1 . С увеличением Δ_1 мы последовательно пересечем области D , C и B бифуркационной диаграммы рисунка 2.2. Результаты представлены на рисунке 2.6.

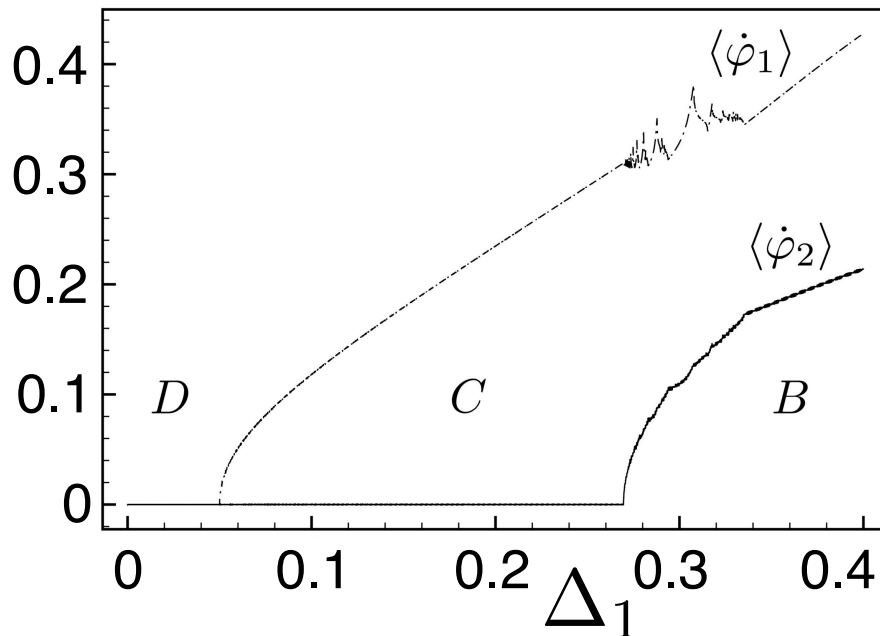


Рисунок 2.6 - Зависимости средних частот $\langle \omega_{1,2} \rangle$ от параметра Δ_1 , рассчитанные по уравнениям (2.9) при значениях $C = 0.25$, $\delta = 0.1$, $g = 0.15$

В области D ($\Delta_1 \leq 0.05$) имеем $\langle \omega_1 \rangle = \langle \omega_2 \rangle = 0$, что соответствует устойчивой неподвиж-

ной точке в области синхронизации D . С пересечением линии L_{T_2} (переход из области D в область C) имеет место бифуркация рождения инвариантных кривых l_1 и l_2 . На рисунке 2.6 этой бифуркации отвечает появление отличной от нуля частоты $\langle \omega_2 \rangle \neq 0$. При этом другая частота $\langle \omega_1 \rangle = 0$. Далее, при пересечении бифуркационной линии L'_{T_2} (переход в область B), имеет место седло-узловая бифуркация инвариантных кривых l_1 и l_2 , в результате которой рождается двумерный тор. На рис 2.6 этой бифуркации отвечает появление отличной от нуля второй частоты $\langle \omega_1 \rangle$ при $\Delta_1 = 0.27$. Таким образом в области B диаграммы рисунка 2.2 имеют место колебания с двумя независимыми частотами $\langle \omega_1 \rangle \neq 0$ и $\langle \omega_2 \rangle \neq 0$, которые возникают в результате седло-узловой бифуркации инвариантных кривых l_1, l_2 .

Отметим важный результат. Существование в системе (2.9) четырех состояний равновесия является следствием того, что система (2.9) описывает фазовую динамику двух взаимодействующих осцилляторов (2.1). Попарное слияние неподвижных точек 1, 2 и 2, 4 (рисунок 2.3) в результате седло-узловой бифуркации порождает две инвариантные замкнутые кривые (устойчивую l_1 и неустойчивую l_2 соответственно). В результате становится возможной седло-узловая бифуркация инвариантных кривых, представляющая собой следующий по уровню сложности тип бифуркации в сравнении с классической седло-узловой бифуркацией состояний равновесия.

2.3 Синхронизация в цепочке связанных генераторов Ван дер Поля

2.3.1 Уравнения системы в фазовом приближении

Рассмотрим цепочку связанных генераторов квазигармонических автоколебаний, получивших в литературе название генераторов Ван-дер-Поля:

$$\ddot{x}_i + x_i = \varepsilon (1 - x_i^2) \dot{x}_i + \gamma ((\dot{x}_i - \dot{x}_{i-1}) + (\dot{x}_i - \dot{x}_{i+1})). \quad (2.15)$$

Очевидно, идентичные элементы цепочки будут характеризоваться идентичными значениями собственной частоты. В таком случае нельзя говорить о явлении синхронизации. Поэтому мы введем расстройку по частоте между генераторами цепочки:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_i + \omega_i^2 x_i &= (\varepsilon - x_i^2) \dot{x}_i + \gamma (\dot{x}_{i-1} - \dot{x}_i) - \gamma (\dot{x}_i - \dot{x}_{i+1}), \\ \ddot{x}_i + \omega_i^2 x_i &= (\varepsilon - x_i^2) \dot{x}_i + \gamma (\dot{x}_{i-1} - 2\dot{x}_i + \dot{x}_{i+1}), \end{aligned} \quad (2.16)$$

где ω_i – это отношение частоты i -го осциллятора к собственной частоте первого осциллятора в цепочке.

По аналогии со случаем синхронизации трехчастотных колебаний, получим уравнения цепочки в фазовом приближении. Будем искать решение в виде:

$$x_i = a_i(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_i(t))$$

и потребуем выполнения условия

$$\dot{a}_i \cos(\omega_0 t + \varphi_i(t)) - \dot{\varphi}_i a_i \sin(\omega_0 t + \varphi_i(t)) = 0. \quad (2.17)$$

Тогда

$$\dot{x}_i = -a_i \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_i), \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}_i = & -\dot{a}_i(t) \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_i(t)) - a_i(t) \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_i(t)) - \\ & - a_i(t) \omega_0 \dot{\varphi}_i(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_i(t)). \end{aligned} \quad (2.19)$$

подставим (2.18) и (2.19) в (2.16):

$$\begin{aligned} \ddot{x}_i = & -\dot{a}_i \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_i) - a_i \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_i) - \\ & - a_i \omega_0 \dot{\varphi}_i \cos(\omega_0 t + \varphi_i) - \dot{a}_i \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_i) - \\ & - a_i \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_i) - a_i \omega_0 \dot{\varphi}_i \cos(\omega_0 t + \varphi_i) + a_i \omega_i^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_i) = \\ & = -\varepsilon (1 - a_i^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_i)) a_i \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_i) + \\ & + \gamma \{ [-a_i \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_i) + a_{i-1} \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_{i-1})] + \\ & + [-a_i \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_i) + a_{i+1} \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_{i+1})] \}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Домножим последнее уравнение на $-\cos(\omega_0 t + \varphi_i)$ и вычтем из результата левую часть условия (2.17), домноженную на $\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_i)$:

$$\begin{aligned} & \dot{a}_i \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_i) \cos(\omega_0 t + \varphi_i) + a_i \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_i) + \\ & + a_i \omega_0 \dot{\varphi}_i \cos^2(\omega_0 t + \varphi_i) - a_i \omega_i^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_i) - \\ & - \dot{a}_i \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_i) \cos(\omega_0 t + \varphi_i) + a_i \omega_0 \dot{\varphi}_i \sin^2(\omega_0 t + \varphi_i) = \\ & = a_i \omega_0 \varepsilon \left[1 - \frac{a_i^2}{2} - \frac{a_i^2}{2} \cos(2(\omega_0 t + \varphi_i)) \right] \cdot \frac{1}{2} \sin(2(\omega_0 t + \varphi_i)) + \\ & + a_i \omega_0 \gamma \left\{ \left[\frac{1}{2} \sin(2(\omega_0 t + \varphi_i)) - \frac{1}{2} \frac{a_{i-1}}{a_i} \sin(2\omega_0 t + \varphi_{i-1} + \varphi_i) - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{1}{2} \frac{a_{i-1}}{a_i} \sin(\varphi_{i-1} - \varphi_i) \right] + \left[\frac{1}{2} \sin(2(\omega_0 t + \varphi_i)) - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{1}{2} \frac{a_{i+1}}{a_i} \sin(2\omega_0 t + \varphi_{i+1} + \varphi_i) - \frac{1}{2} \frac{a_{i+1}}{a_i} \sin(\varphi_{i+1} - \varphi_i) \right] \right\} \end{aligned}$$

Усредняя полученное уравнение за период, соответствующий частоте ω_0 и считая, что амплитуда — это медленно меняющаяся величина, получим фазовые уравнения элементов цепочки:

$$\dot{\varphi}_i + \frac{\omega_0^2 - \omega_i^2}{\omega_0} = -\frac{\gamma}{2} \left[\frac{a_{i-1}}{a_i} \sin(\varphi_{i-1} - \varphi_i) + \frac{a_{i+1}}{a_i} \sin(\varphi_{i+1} - \varphi_i) \right]$$

Считая, что амплитуды колебаний соседних осцилляторов цепочки практически не отличаются и вводя обозначение

$$\Delta_i = \frac{\omega_i^2 - \omega_0^2}{\omega_0},$$

получим окончательное уравнение для элемента цепочки в фазовом приближении:

$$\dot{\varphi}_i = \Delta_i + \frac{\gamma}{2} [\sin(\varphi_i - \varphi_{i-1}) + \sin(\varphi_i - \varphi_{i+1})]. \quad (2.21)$$

2.3.2 Захват средних частот в цепочке фазовых осцилляторов

В предыдущем разделе было показано, что механизмы синхронизации двухчастотных квазипериодических автоколебаний внешним гармоническим воздействием могут быть проиллюстрированы в фазовом приближении. При этом было показано, что последовательному захвату вначале одной, а потом и другой независимой частоты соответствуют обратные касательные бифуркации вначале двумерных торов, а затем – предельных циклов в полной системе. Исследование захвата средних частот, полученных по формуле (2.14) для модели в фазовом приближении также показало соответствие между захватами средних частот и седло-узловыми бифуркациями.

Предполагая, что выявленная закономерность будет справедлива для системы, демонстрирующей квазипериодические автоколебания с произвольным набором частот, покажем, что в цепочке квазигармонических осцилляторов синхронизация будет осуществляться через обратную последовательность седло-узловых бифуркаций инвариантных торов, размерность которых в объединенном фазовом пространстве такой системы будет уменьшаться на 1 от бифуркации к бифуркации. Поскольку инвариантному n -мерному тору в фазовом пространстве системы соответствуют автоколебания с n независимыми частотами, будем исследовать изменение спектра средних частот, полученных по формуле:

$$\langle \omega_i \rangle = \langle \dot{\varphi}_i \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \dot{\varphi}_i(t) dt, \quad (2.22)$$

изменяя коэффициент связи γ между элементами цепочки.

В качестве примера рассмотрим цепочку из 5 осцилляторов и будем увеличивать значение коэффициента γ от 0 до 1. Спектр средних частот системы (2.21) при $i = 1, \dots, 5$ в зависимости от коэффициента связи представлен на рисунке 2.7. Из рисунка легко видеть, что в отсутствие связи каждый осциллятор цепочки совершает колебания на своей частоте, отличной от частот остальных осцилляторов. С увеличением параметра связи происходит последовательный захват всех частот.

Связывая захват средней частоты в фазовом приближении с седло-узловой бифуркацией инвариантных торов в фазовом пространстве полной системы, можно утверждать, что потеря синхронизации при уменьшении параметра связи до 0 происходит по следующему сценарию. В объединенном 10-мерном фазовом пространстве системы при полной синхронизации (т.е. когда

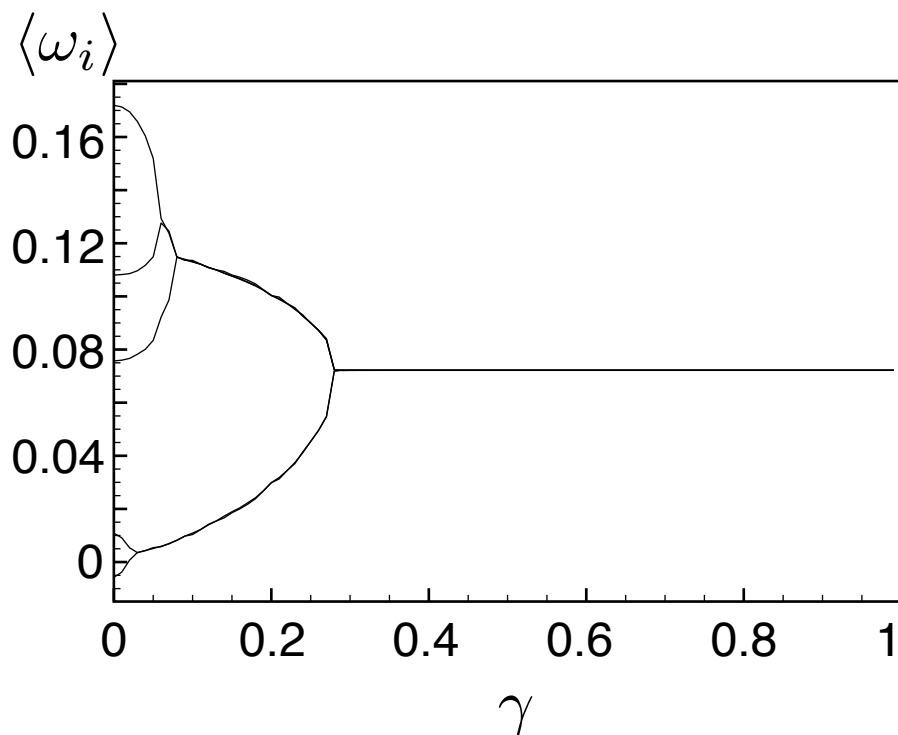


Рисунок 2.7 - Спектр средних частот $\langle \omega_i \rangle$ системы (2.21) при $i = 1, \dots, 5$ в зависимости от коэффициента связи γ .

система демонстрирует автоколебания на одной частоте) сосуществуют 16 предельных циклов. Они лежат попарно на 8-и образах инвариантных торов. При этом один цикл является устойчивым, один – репеллером, а остальные – седловыми. В момент первой бифуркации происходит одновременное попарное касание циклов, лежащих на одном образе тора, в результате чего в фазовом пространстве образуются 8 инвариантных двумерных торов, попарно лежащих на 4-х образах трехмерных торов. Причем на одном образе тора лежат устойчивый двумерный тор и седловой с одним неустойчивым направлением, на другом – неустойчивый двумерный тор и седловой с одним устойчивым направлением, а на остальных – двумерные седловые торы с различными устойчивыми и неустойчивыми направлениями. При следующей бифуркации происходит попарное касание инвариантных двумерных торов, лежащих на одном образе трехмерного тора, в результате чего образуются 4 инвариантных трехмерных тора, попарно лежащие на двух образах 4-мерных торов. Ситуация с устойчивостью полученных инвариантных торов полностью повторяется: на одном образе 4-мерного тора лежат устойчивый трехмерный тор и седловой трехмерный тор с одним неустойчивым направлением, на одном – неустойчивый тор и седловой с одним устойчивым направлением, на остальных – седла. Очевидно, при этом образом автоколебаний в системе является устойчивый трехмерный тор, а в спектре колебаний присутствуют три независимые частоты. Дальнейшее уменьшение величины коэффициента

связи ведет к попарному одновременному касанию трехмерных торов с образованием двух четырехмерных торов, лежащих на пятимерном торе, один из которых является устойчивым, а второй – седловым. Далее эти торы претерпевают касательную бифуркацию, в результате которой фазовая траектория оказывается на инвариантном устойчивом пятимерном торе.

2.4 Синхронизация индуцированных шумом когерентных колебаний в модели возбудимой системы.

Рассмотрим осциллятор ФитцХью-Нагумо [31] под действием белого гауссова шума:

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{dx}{dt} = x - \frac{x^3}{3} - y, \\ \frac{dy}{dt} = x + a + D\xi(t). \end{cases} \quad (2.23)$$

Установим следующие значения управляющих параметров: $\varepsilon = 0.01$, $a = 1.05$, при которых систем (2.23) находится в возбудимом состоянии. Ранее было показано [32], что существует определенное значение интенсивности шума D , при котором система (2.23) генерирует наиболее когерентные колебания (т.е., отношение высоты основного пика в спектре мощности к его ширине максимально). Данное явление называется “Когерентный Резонанс” (КР). В режиме КР колебания системы (2.23) очень схожи с колебаниями зашумленного квазигармонического осциллятора (например, осциллятора Ван дер Поля под действием белого гауссова шума). Однако существует важное качественное отличие в структурах фазового пространства этих систем. Осциллятор ФитцХью-Нагумо в возбудимом режиме не имеет устойчивого предельного цикла (только устойчивый фокус), в то время как генераторы квазигармонических автоколебаний характеризуются как раз наличием устойчивого предельного цикла.

Тем не менее, колебания системы (2.23) в режиме КР могут быть синхронизированы (как внешним воздействием, так и взаимно) через захват частоты. Таким образом, режим когерентного резонанса демонстрирует основные свойства предельного цикла (траектории, стартовые из окрестности установившегося режима со временем сходятся к нему, а также колебания в установившемся режиме могут быть синхронизированы) и мы будем его называть *индуцированным шумом предельным циклом*. Таким образом, мы попытаемся распространить соответствие между захватом частоты и седло-узловой бифуркацией на случай синхронизации индуцированных шумом колебаний через захват частоты. Если такое соответствие справедливо, то синхронизация индуцированных шумом колебаний с двумя и более основными частотами в спектре должна подчиняться тому же сценарию, что и в случае детерминированных квазипериодических колебаний.

Рассмотрим систему двух связанных осцилляторов типа ФитцХью-Нагумо в возбудимом режиме под действием белого гауссова шума и внешней гармонической силы, приложенной к

одному из осцилляторов:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(b - cx_1 - y_1) + C(x_2 - x_1) + \sqrt{2D}\xi(t) + A_{ex} \cos(\omega_{ex}t), \\ \dot{y}_1 = d(x_1 - F(y_1)), \\ \dot{x}_2 = a_2(b - cx_2 - y_2) + C(x_1 - x_2) + \sqrt{2D}\xi(t), \\ \dot{y}_2 = d(x_2 - F(y_2)), \\ F(y) = \alpha y^3 + \gamma y, \end{cases} \quad (2.24)$$

где $a_{1,2}$, b , c , d , α , γ — управляющие параметры, C — коэффициент связи, $\xi(t)$ — источник белого гауссова шума интенсивности D , A_{ex} и ω_{ex} — соответственно амплитуда и частота внешней силы. Мы установили следующие значения управляющих параметров: $a_1 = 10^{-4}$, $a_2 = 1.25 \cdot 10^{-4}$, $b = 4.395$, $c = 100$, $d = 10^4$, $\alpha = 2.22 \cdot 10^{-5}$, $\gamma = -1.61 \cdot 10^{-3}$, $D = 10^{-9}$ и варьировали амплитуду A_{ex} и частоту ω_{ex} внешнего воздействия. Установленная величина интенсивности шума соответствует режиму КР в каждом из взаимодействующих осцилляторов (2.24).

Спектры колебаний системы (2.24) представлены на рисунке 2.8.

Из рисунка 2.8 легко видеть, что и в случае трех основных частот реализуется тот же механизм захвата частоты. Увеличение A_{ex} ведет к отрыву частоты первого осциллятора, захваченного вторым, а затем внешнее воздействие захватывает частоту первого осциллятора. В результате исследований мы получили бифуркационную диаграмму, представленную на рисунке 2.9.

Легко видеть, что данная бифуркационная диаграмма топологически эквивалентна полученной для детерминированных осцилляторов Ван дер Поля в фазовом приближении [3]. Используя аналогию между автогенераторами и возбудимыми системами в режиме когерентного резонанса и связывая захват частоты с касательной бифуркацией инвариантных предельных множеств, переход из \mathbf{C} в \mathbf{T}^3 на рисунке 2.9 может быть объяснен следующим образом. В области \mathbf{C} фазовое пространство системы (2.24) содержит четыре индуцированных шумом предельных цикла: два седловых, один устойчивый и один — репеллер. Переход из области \mathbf{C} в область \mathbf{T}^2 соответствует одновременным касательным бифуркациям между седловым и устойчивым и между седловым и неустойчивым (репеллером) предельными циклами. В результате образуются два индуцированных шумом двумерных тора: устойчивый и седловой. Колебания на устойчивом индуцированном шумом двумерном торе характеризуются двумя частотами и двумя основными пиками в спектре (рисунок 2.8, а). Приближение к границе между \mathbf{T}^2 и \mathbf{T}^3 ведет к взаимному сближению индуцированных шумом торов, а переход из \mathbf{T}^2 в \mathbf{T}^3 отвечает их касательной бифуркации, в результате которой в фазовом пространстве формируется индуцированный шумом трехмерный тор, характеризующийся тремя основными частотами в спектре (рисунок 2.8, б).

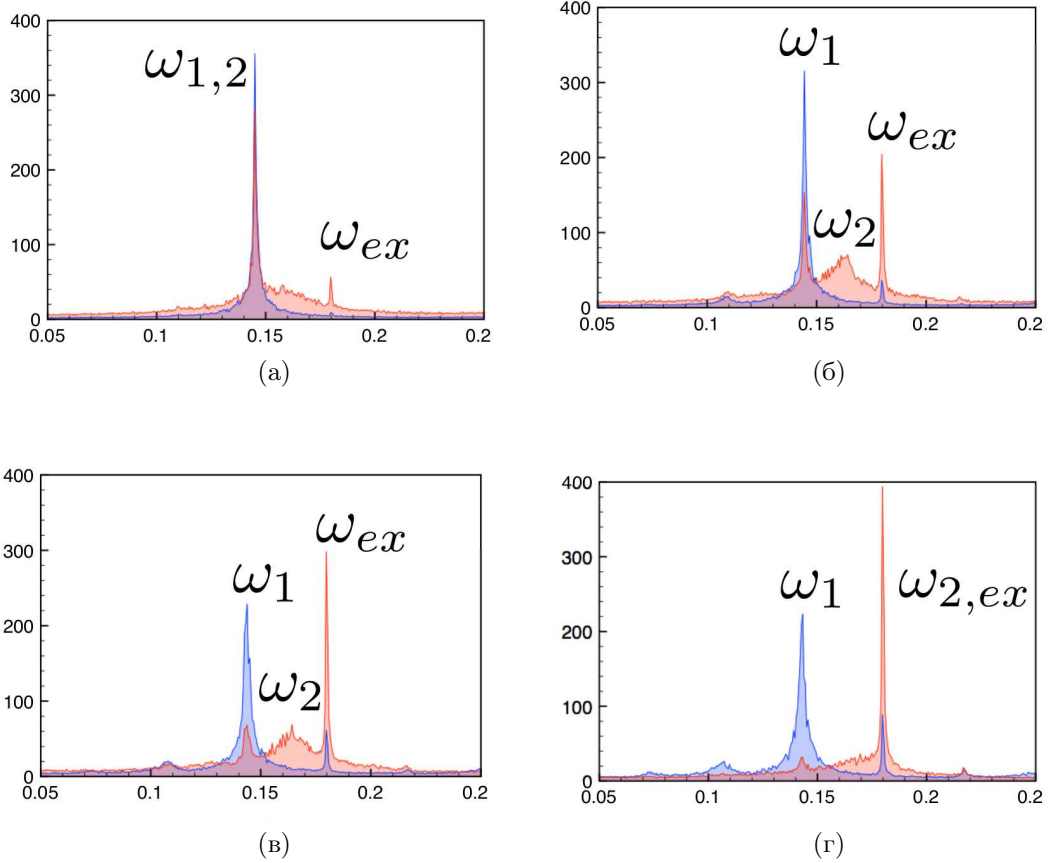


Рисунок 2.8 - Эволюция спектра амплитуд колебаний системы (2.24), рассчитанные для переменных x_1 (синий) и x_2 (красный). Здесь $\omega_{1,2}$ — средние частоты первого и второго осцилляторов; ω_{ex} частота внешнего воздействия; A_{ex} — амплитуда внешнего воздействия: а) $A_{ex} = 10^{-5}$ (нижняя область \mathbf{T}^2 на Рис. 2.9); б) $A_{ex} = 4 \cdot 10^{-5}$ (область \mathbf{T}^3 на рисунке 2.9); в) $A_{ex} = 6 \cdot 10^{-5}$ (область \mathbf{T}^3 на рисунке 2.9); г) $A_{ex} = 8 \cdot 10^{-5}$ (верхняя область \mathbf{T}^2 на рисунке 2.9).

2.5 Исследования в радиофизическом эксперименте

Полученные в компьютерных вычислениях результаты были экспериментально подтверждены в ходе исследований, проведенных с помощью электронной установки, принципиальная схема которой изображена на рисунке 2.10.

Данная экспериментальная установка представляла собой две связанные подсистемы. Каждая подсистема основана на оригинальной схеме, предложенной ФитцХью и Нагумо [31]. Однако, для формирования N-характеристики нелинейного элемента, мы использовали операционный усилитель. Итак, каждая подсистема состоит из конденсаторов C , $C1$, индуктивности L , резистора R , нелинейного элемента с N-характеристикой и сумматора на базе операционного усилителя LF412. Напряжение V_c и шум подавались на сумматор. Нелинейный элемент также построен на базе операционного усилителя LF412.

Из рисунка 2.10 легко видеть, что схема симметрична, так как представлена двумя почти идентичными связанными подсистемами. Единственное различие между подсистемами заклю-

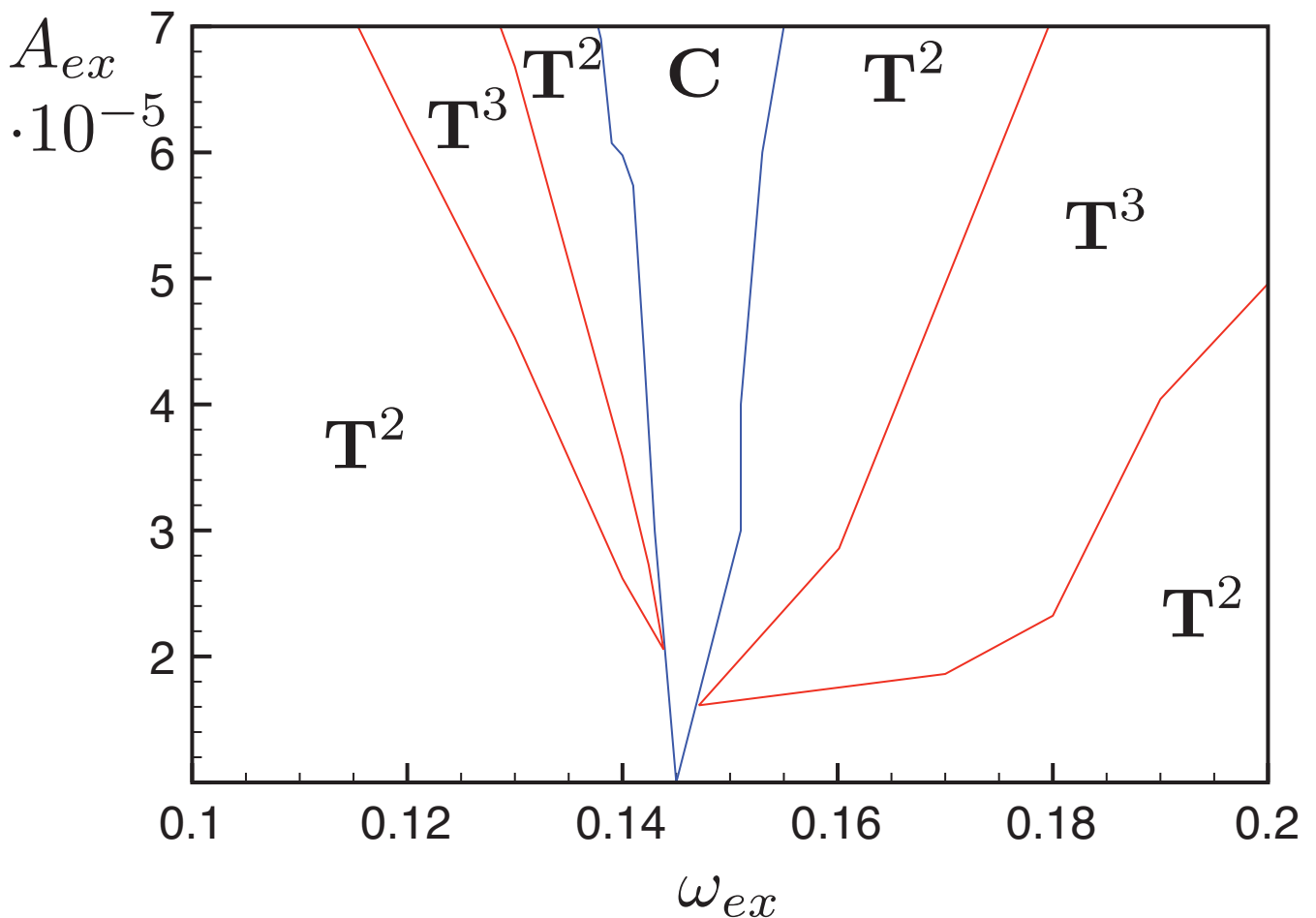


Рисунок 2.9 - Бифуркационная диаграмма системы (2.24). Область **C**: одна основная частота в спектре, обе частоты индуцированных шумом колебаний захвачены внешней гармонической силой. Области **T²**: Две основные частоты в спектре — либо один осциллятор синхронизирован внешним воздействием на частоте, отличной от частоты второго осциллятора, либо реализована взаимная синхронизация парциальных осцилляторов на частоте, отличной от частоты внешнего воздействия. Области **T³**: три основные частоты в спектре, в системе не реализуется синхронизация.

чается в величине индуктивности L : $L = 9 \text{ мН}$ для первой подсистемы и $L = 11 \text{ мН}$ — для второй. Внешний гармонический сигнал подавался на сумматор первой подсистемы. Связь между подсистемами была реализована с помощью конденсатора C_c с переменной емкостью. Сигналы с каждой подсистемы подавались на отдельные входные каналы спектроанализатора.

Мы зафиксировали значения напряжений $V_{c1} = 2.39 \text{ В}$, $V_{c2} = 2.84 \text{ В}$ и емкости связи: $C_c = 42.37 \text{ пФ}$. Затем мы начали менять амплитуду и частоту внешнего гармонического сигнала, наблюдая захваты частот на экране спектроанализатора. Экспериментально полученная бифуркационная диаграмма представлена на рисунке 2.11.

Легко видеть, что наш электронный эксперимент полностью подтверждает результаты, полученные при численном исследовании математических моделей.

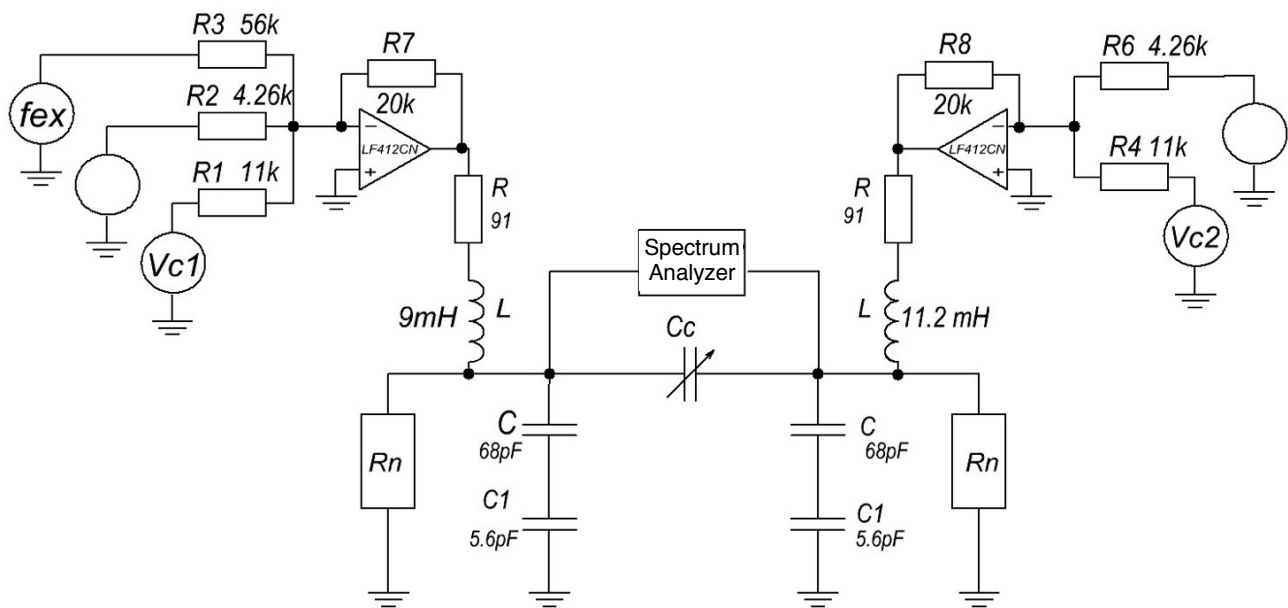


Рисунок 2.10 - Экспериментальная установка, моделирующая динамику системы (2.24).

2.6 Синхронизация в ансамбле взаимодействующих возбудимых систем

Если наше предположение о том, что индуцированные шумом предельные циклы и торы демонстрируют бифуркации, схожие с бифуркациями детерминированных предельных множеств, то аналогичные последовательности захватов частот можно ожидать и в ансамбле пяти не идентичных (по a_i) возбудимых систем под действием внешнего шума в окрестности когерентного резонанса. Чтобы это проверить, рассмотрим следующую систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = a_i(b - cx_i - y_i) + C \left(x_i - \sum_{j=1}^5 x_j \right) + \sqrt{2D}\xi(t), \\ \dot{y}_i = d(x_i - F(y_i)), \\ F(y) = \alpha y^3 + \gamma y. \end{cases} \quad (2.25)$$

Зафиксируем следующие значения управляющих параметров: $a_1 = 10^{-4}$, $a_2 = 1.1 \cdot 10^{-4}$, $a_3 = 1.25 \cdot 10^{-4}$, $a_4 = 1.35 \cdot 10^{-4}$, $a_5 = 1.5 \cdot 10^{-4}$, $b = 4.395$, $c = 100$, $d = 10^4$, $\alpha = 2.22 \cdot 10^{-5}$, $\gamma = -1.61 \cdot 10^{-3}$, $D = 10^{-9}$. Здесь уровень шума D отвечает режиму КР в каждой подсистеме. Далее мы будем увеличивать значение коэффициента связи C . Диаграмма древовидной формы, схожая с представленной на рисунке 2.7, представлена на рисунке 2.12.

Данная схожесть позволяет нам предположить, что действительно, реализуется последовательность касательных бифуркаций индуцированных шумом торов, обеспечивающая переход от одной основной частоты к 5 основным частотам в спектре.

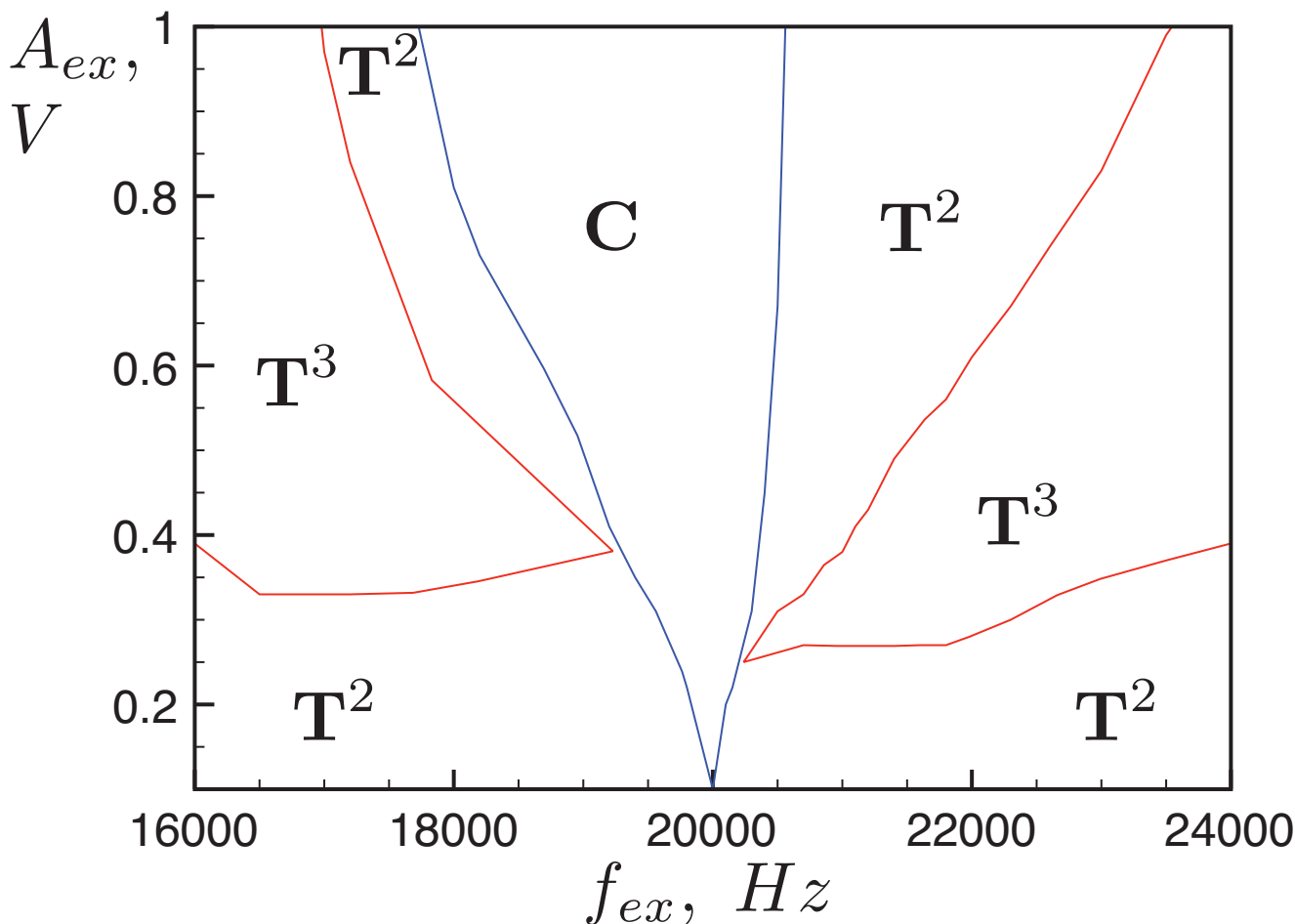


Рисунок 2.11 - Бифуркационная диаграмма, полученная в электронном эксперименте. Область **C**: одна основная частота в спектре, обе частоты индуцированных шумом колебаний захвачены внешней гармонической силой. Области **T²**: две основные частоты в спектре, — либо один осциллятор синхронизирован внешней силой на частоте, отличной от частоты второго осциллятора, либо оба осциллятора взаимно синхронизированы на частоте, отличной от частоты внешней силы. Области **T³**: три основных частоты в спектре, в системе не наблюдается синхронизация.

2.7 Выводы

В результате проведенных исследований был выявлен механизм фазовой синхронизации квазипериодических колебаний в системах с двумя независимыми частотами. Показано, что индуцированные шумом колебаний в возбудимых системах с двумя и более основными пиками в спектре колебаний демонстрируют переход к синхронизации через захваты частот, такие же, как и в случае детерминированных квазипериодических колебаний. Соответственно, в фазовом пространстве возбудимых систем существуют устойчивые и неустойчивые индуцированные шумом предельные циклы и инвариантные торы, претерпевающие такую же последовательность касательных бифуркаций, как и в случае квазипериодических колебаний, когда последовательность касательных бифуркаций циклов и торов лежит в основе сценария фазовой синхронизации. Исходя из представленных выше результатов бифуркационного анализа явления синхронизации системы двух связанных осцилляторов Ван дер Поля внешним гармо-

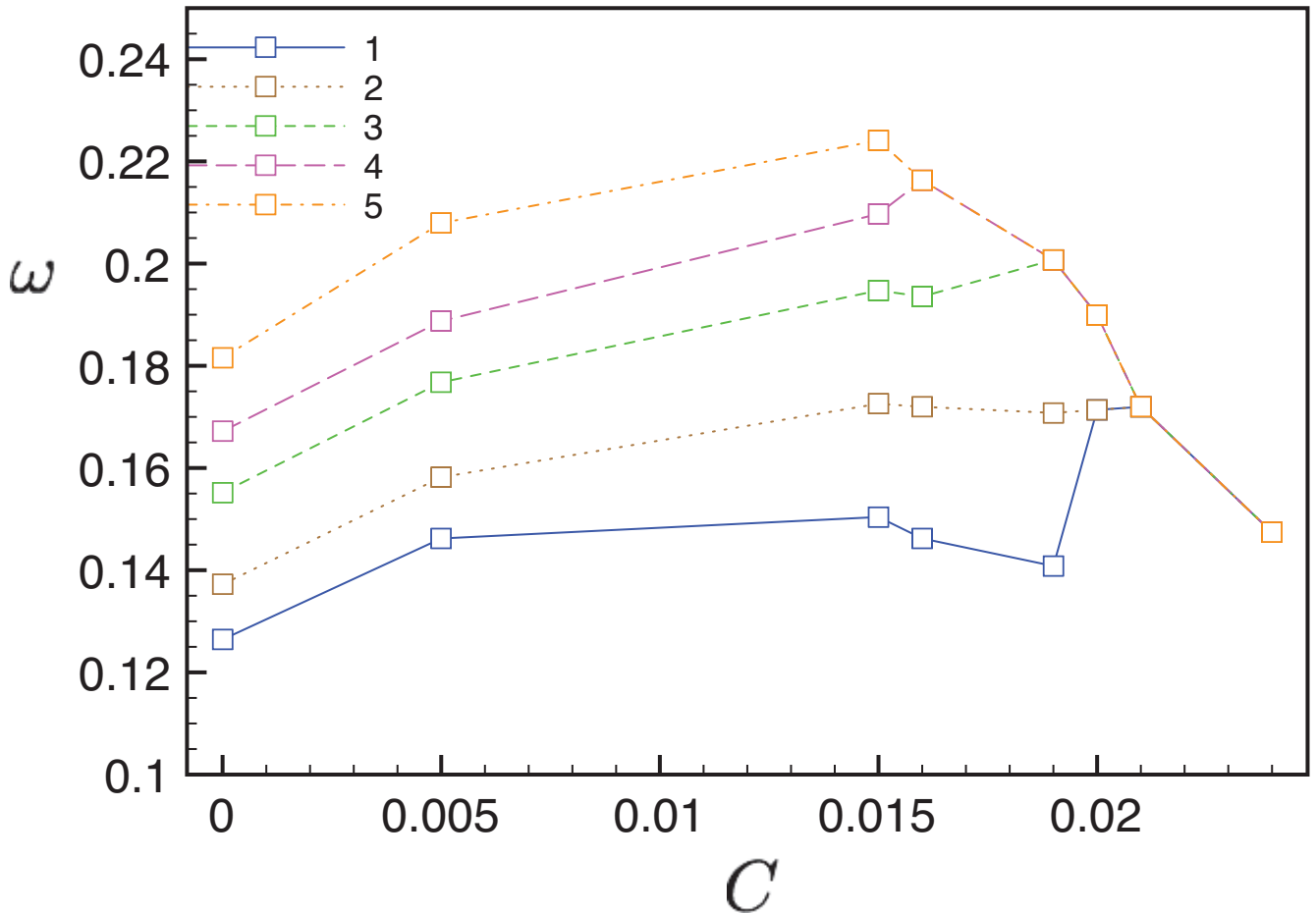


Рисунок 2.12 - Значения основных частот в спектре в зависимости от коэффициента связи в системе (2.25).

ническим воздействием, показано, что в цепочке осцилляторов явление фазовой синхронизации обусловлено аналогичными бифуркационными механизмами.

3 Анализ влияния локальных и распределенных по случайному закону неоднородностей на пространственно - временную динамику мультистабильной автоколебательной среды с регулярной и хаотической динамикой

3.1 Введение

Распределенные автоколебательные системы (РАС) распространены в природе и технике [33, 34]. К ним относятся многие гидродинамические и аэродинамические неравновесные системы, некоторые химические реакции, функциональные системы живых организмов, генераторы электромагнитных колебаний микроволнового и оптического диапазонов, музыкальные

духовые и струнные инструменты и т.д. Развитие неустойчивости и возникновение автоколебаний в РАС связано с наличием отрицательной диссипации. Форма колебаний определяется нелинейностью системы. В литературе имеется множество исследований как автоколебательных сред, задаваемых дифференциальными уравнениями в частных производных [35–37], так и распределенных пространственно - дискретных автоколебательных систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями [39–42].

Важным и малоисследованным является вопрос о влиянии неоднородности на пространственно - временную динамику РАС. Линейная и случайная пространственная неоднородность были рассмотрены для квазигармонических моделей в [43–46] и для цепочки хаотических генераторов в [47]. Основное внимание уделялось проблеме синхронизации элементов системы. Пространственная неоднородность среды со сложной динамикой может означать, что часть элементов среды находится в режиме генерации, существенно отличном от режима остальной среды. Благодаря взаимной связи элементов автоколебания в любой точке среды теоретически должны иметь один характер (простые периодические, удвоенного периода, квазипериодические, хаотические), однако экспериментально наблюдаемые колебания в удаленных друг от друга точках пространства могут оказаться существенно различными. Кроме того неоднородность может вызвать качественное изменение пространственно-временного режима в целом. В данной работе исследуется модель нелинейной автоколебательной диффузионной среды, задаваемой системой дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial t} &= mx + y - xz + \gamma \frac{\partial^2(x - y)}{\partial s^2} \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= -y \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= -gz + 0.5gx(x + |x|)\end{aligned}\tag{3.1}$$

где $x = x(s, t)$, $y = y(s, t)$, $z = z(s, t)$ – динамические переменные, являющиеся функциями пространственной координаты s и времени t , m и g – управляющие параметры системы, γ – коэффициент диффузии. Колебания точек среды во времени могут, в зависимости от параметров, меняться от квазигармонических до хаотических. Используются периодические граничные условия:

$$\begin{aligned}x(0, t) = x(L, t), \quad y(0, t) = y(L, t), \quad z(0, t) = z(L, t); \\ \left. \frac{\partial x(s, t)}{\partial s} \right|_{s=0} = \left. \frac{\partial x(s, t)}{\partial s} \right|_{s=L}, \quad \left. \frac{\partial y(s, t)}{\partial s} \right|_{s=0} = \left. \frac{\partial y(s, t)}{\partial s} \right|_{s=L}, \\ \left. \frac{\partial z(s, t)}{\partial s} \right|_{s=0} = \left. \frac{\partial z(s, t)}{\partial s} \right|_{s=L},\end{aligned}\tag{3.2}$$

где L – длина системы, обеспечивают сосуществование устойчивых бегущих волн с разными волновыми числами. Целью работы являлось исследование влияния пространственной неоднородности, заложенной в зависимость $m = m(s)$, на поведение мультистабильной среды.

3.2 Эволюция пространственно-временных режимов при увеличении неоднородности среды моды $n = 0$

Рассмотрим влияние пространственной неоднородности, вид которой представлен на рисунке 3.1, на среду (3.1).

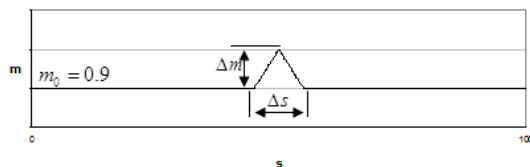


Рисунок 3.1 - Вид пространственной неоднородности

В случае однородной среды ($m = const$) в режиме периодических колебаний во времени в среде существует устойчивый пространственно-однородный режим, соответствующий колебаниям всех точек среды в одной фазе. То есть набег фазы за длину системы $Ph(L)$ и волновое число k равны нулю [48].

Зафиксируем $\Delta s = 10$ и будем менять степень неоднородности Δm . При увеличении Δm сначала происходит искажение пространственного профиля (рисунок 3.2), а затем, при $\Delta m = 0.1$, удвоение периода колебаний во времени, в то время как в других точках среды колебания на вид по-прежнему остаются близкими к гармоническим. Однако при дальнейшем увеличении Δm растет только амплитуда колебаний, режим колебаний при этом не меняется вплоть до значения $\Delta m = 0.64$ (рисунок 3.3), хотя в одиночном генераторе при этих значениях наблюдается переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода. Таким образом, невозмущенная область среды навязывает регулярную динамику возмущенной при небольшой ширине области неоднородности.

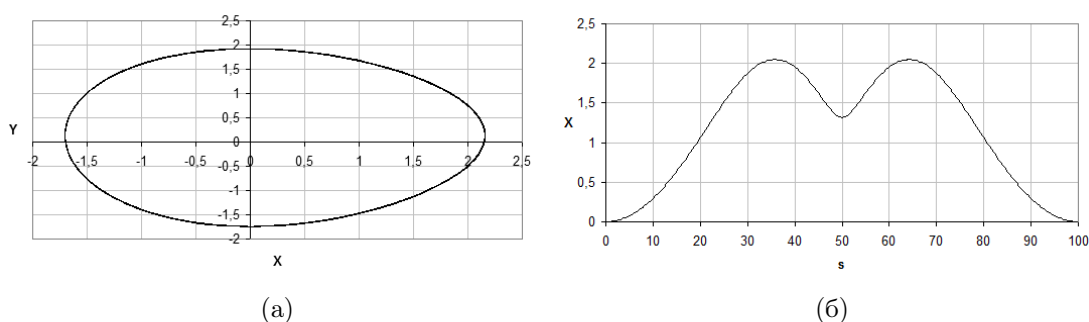


Рисунок 3.2 - Характерная проекция фазового портрета в области неоднородности (а) и пространственный профиль (б) моды $n = 0$ при $\Delta s = 10$ и $\Delta m = 0.09$.

Зафиксируем теперь $\Delta m = 0.64$ и будем увеличивать ширину области неоднородности Δs . При $\Delta s = 12$ происходит еще одно удвоение периода колебаний во времени (рисунок 3.4), а затем – чередование квазипериодического и хаотического режимов, а также резонансов высокого

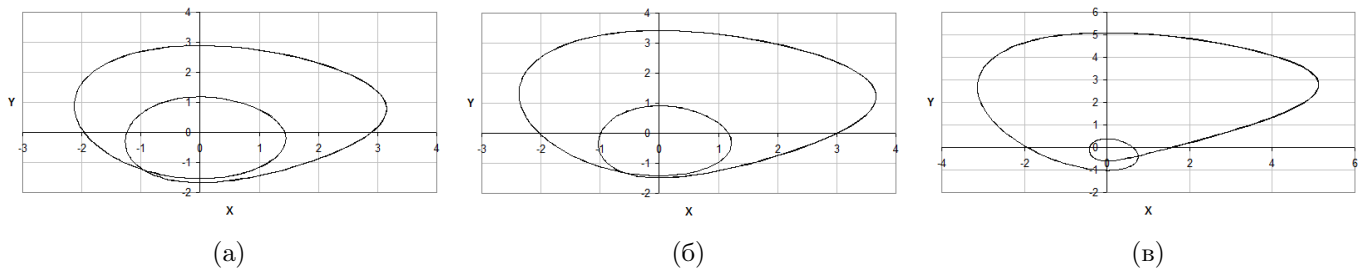


Рисунок 3.3 - Характерные проекции фазового портрета в области неоднородности моды $n = 0$ при $\Delta s = 10$ и $\Delta m = 0.20$ (а), $\Delta m = 0.30$ (б) и $\Delta m = 0.64$ (в).

порядка (рисунок 3.5) вплоть до полного перехода в области неоднородности к хаотической динамике при $\Delta s = 32$. То есть, ширина области неоднородности Δs выступает в данном случае в роли управляющего параметра.

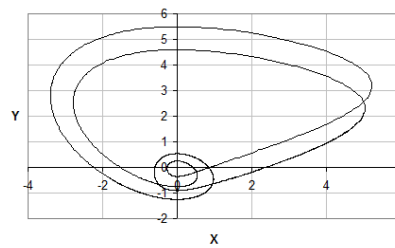


Рисунок 3.4 - Характерная проекция фазового портрета в области неоднородности моды $n = 0$ при $\Delta s = 12$ и $\Delta m = 0.64$.

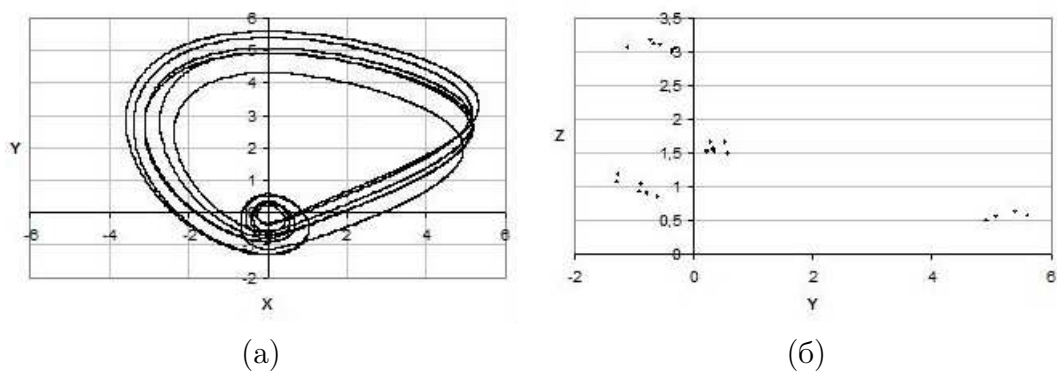


Рисунок 3.5 - Характерные проекция фазового портрета в области неоднородности (а) и сечение плоскостью $x = 0$ (б) моды $n = 0$ при $\Delta m = 0.64$ и $\Delta s = 28$.

Таким образом, проведенные исследования показали, что пространственно-однородный режим ($n = 0$) является устойчивым к неоднородности в широкой области значений параметров.

3.3 Эволюция пространственно-временных режимов при увеличении неоднородности среды моды $n = 1$

Зафиксируем $\Delta s = 10$ и будем менять степень неоднородности Δm . Увеличение Δm приводит к бифуркации удвоения периода колебаний во времени (рисунок 3.6). Изменение характера колебаний хорошо заметно в области неоднородности, в то время как в других точках среды колебания по-прежнему остаются близкими к гармоническим. Необходимо отметить, что первое удвоение периода колебаний наступает позже, чем для моды $n = 0$ (при $\Delta m = 0.11$ вместо 0.1 соответственно). При дальнейшем увеличении Δm второго удвоения периода колебаний во времени не наблюдается, а при $\Delta m = 0.54$ происходит переход к квазипериодическому режиму (рисунок 3.7). Подобные результаты были получены в [48]. При $\Delta m \in [0.54; 0.61]$ наблюдается чередование квазипериодических режимов и резонансов на торах (рисунок 3.8).

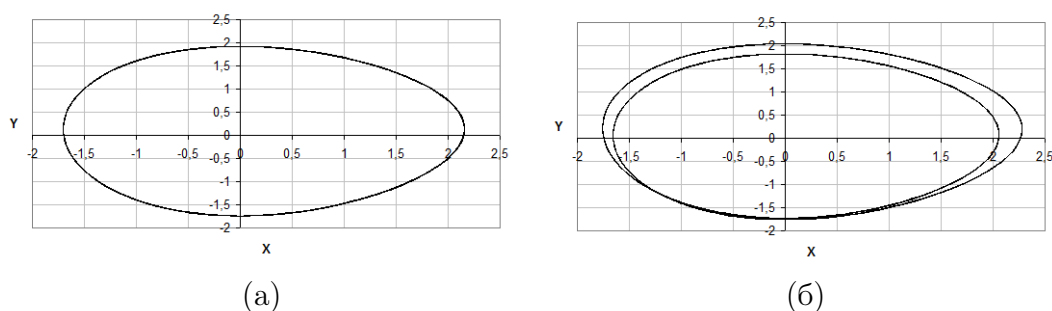


Рисунок 3.6 - Характерные проекции фазовых портретов в области неоднородности моды $n = 1$ при $\Delta s = 10$ и $\Delta m = 0.09$ (а), $\Delta m = 0.11$ (б).

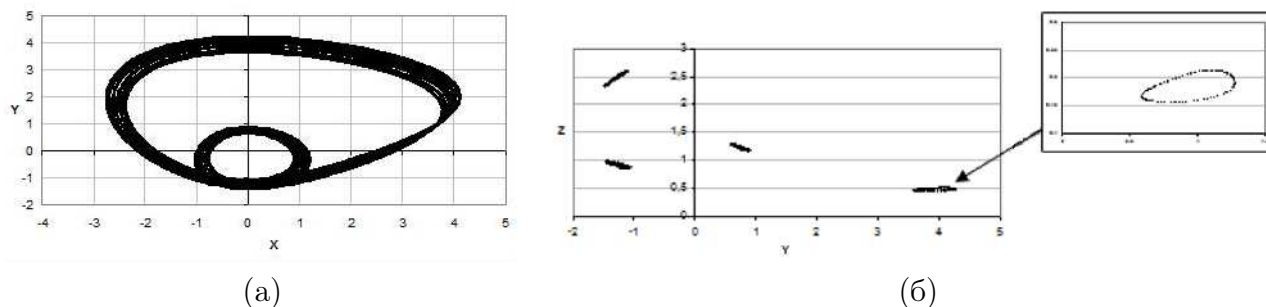


Рисунок 3.7 - Характерная проекция фазового портрета в области неоднородности (а) и сечение плоскостью $x = 0$ (б) моды $n = 1$ при $\Delta m = 0.54$ и $\Delta s = 10$.

Для дальнейшего анализа зафиксируем $\Delta m = 0.64$ и будем менять ширину области неоднородности Δs . Уже при $\Delta s = 12$ происходит резонанс высокого порядка (рисунок 3.9). В дальнейшем, при значениях $\Delta s \in [12; 18]$, также, как описано выше, чередуются квазипериодический режим и резонансы на торе высокого порядка. При $\Delta s = 20$ рождается тор удвоенного периода, а затем, при $\Delta s = 28$ среда переходит в режим хаотической динамики. Замкнутые кривые в сечении Пуанкаре разрушаются. Необходимо также отметить, что в среде без неоднородности механизм перехода к хаосу отличается от описанного выше [49].

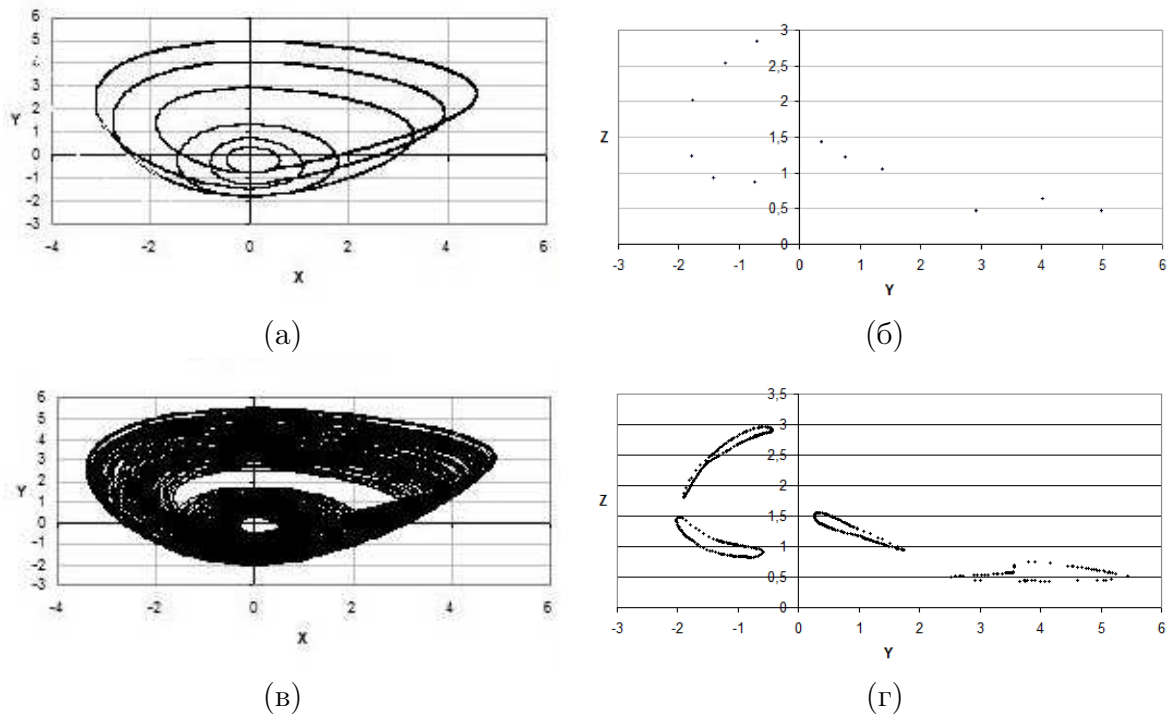


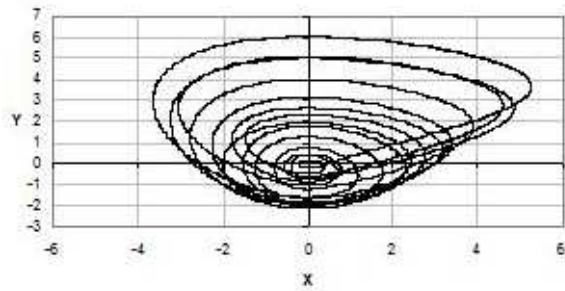
Рисунок 3.8 - Характерные проекция фазового портрета в области неоднородности (слева) и сечение плоскостью $x = 0$ (справа) моды $n = 1$ при $\Delta s = 10$ и $\Delta m = 0.58$ (а, б), $\Delta m = 0.61$ (в, г).

Как показали исследования, колебательные режимы, соответствующие пространственной моде с $n = 1$, эволюционируют значительно “быстрее”, чем аналогичные режимы для $n = 0$. Однако, сама мода с $n = 1$ также оказывается устойчивой к неоднородности по параметру в широкой области значений ее ширины. Об этом говорит набег фазы за длину системы, остающийся постоянной величиной $Ph(L) = 2\pi$.

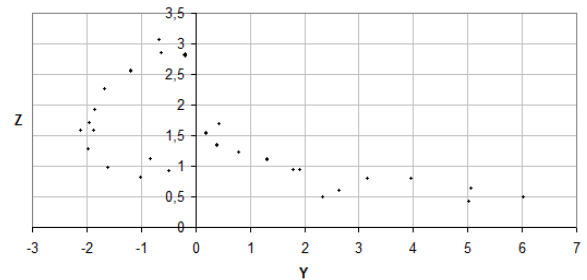
3.4 Выводы

В результате проведенных исследований получены результаты, выявляющие динамику автоволновых режимов в распределенной среде с локальной неоднородностью. В однородной системе (3.1) при $\gamma = 0.1$ в широкой области изменения параметра t были обнаружены несколько сосуществующих волновых режимов [48]. Все сосуществующие режимы оказались устойчивы по отношению к введению локальной неоднородности. Было показано, что набег фазы на длине системы остается постоянным для каждой моды: $\varphi(L) = 0$ для $n = 0$ и $\varphi(L) = 2\pi$ для $n = 1$.

С ростом степени неоднородности в области ее локализации наблюдалась эволюция колебаний во времени от квазигармонических к хаотическим. В точках, далеких от области неоднородности, сложный характер колебаний был практически незаметен. Для мод с волновыми числами $n = 0$ и $n = 1$ была детально исследована эволюция режимов. Для обеих мод наблюдается переход от квазигармонического режима к колебаниям удвоенного периода, причем этот переход происходит при разных значениях параметров неоднородности для двух исследован-



(а)



(б)

Рисунок 3.9 - Характерные проекция фазового портрета в области неоднородности (а) и сечение плоскостью $x = 0$ (б) моды $n = 1$ при $\Delta m = 0.64$ и $\Delta s = 12$.

ных мод. Далее сценарии развития хаоса при увеличении параметров неоднородности Δs и Δm для двух исследованных мод несколько отличаются. Для $n = 0$ наблюдаются следующие переходы: колебания удвоенного периода \rightarrow колебания периода-4 \rightarrow квазипериодический режим \rightarrow резонанс \rightarrow разрушение квазипериодического режима \rightarrow хаос. Для $n = 1$: колебания удвоенного периода \rightarrow резонанс \rightarrow квазипериодические колебания удвоенного периода \rightarrow разрушение квазипериодического режима \rightarrow хаос.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведения научных исследований получены следующие принципиальные научные результаты:

1. Разработан метод расчета обобщенного количественного критерия эффекта синхронизации хаотических и стохастических систем, который протестирован для разных видов синхронизации хаоса: полная синхронизация и фазовая синхронизация.
2. Определены механизмы фазовой синхронизации квазипериодических автоколебаний с двумя и более независимыми частотами.
3. Проанализировано влияния локальных и распределенных по случайному закону неоднородностей на пространственно - временную динамику мультистабильной автоколебательной среды с регулярной и хаотической динамикой.

По материалам исследований подготовлены и изданы научные публикации [50–59], в том числе: учебное пособие [54], статьи в реферируемых журналах [50–53, 55–59]. Результаты исследований могут быть и будут использованы для подготовки студентов, магистров, молодых кандидатов и докторов наук по специальностям «радиофизика и электроника», «физика» и «медицинская физика» на физическом факультете СГУ; модернизации существующих учебных курсов «Основы теории колебаний», «Статистическая радиофизика», «Введение в нелинейную динамику», «Методы численного анализа экспериментальных данных», «Теория дискретных систем», «Детерминированный хаос», «Синхронизация колебаний», «Основы теории распределенных систем», «Анализ временных рядов» и лабораторного практикума «Электронное моделирование сложных систем и процессов».

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ НИР

В результате проведения работ по контракту получены следующие принципиальные научные результаты:

1. Выявлены основные свойства стохастических колебаний нелинейного осциллятора, возникающих при шумовом параметрическом воздействии. Установлена существенная зависимость статистических характеристик колебаний от вида и параметров шумовой накачки.
2. Разработана тематическая модель для исследования нелинейных локализованных волн в двумерных решетках потенциально взаимодействующих частиц, основанная на представлении решетки в виде ансамбля частиц с конечным эффективным радиусом взаимодействия.
3. Разработана методика численного интегрирования уравнений модели нелинейных локализованных волн в двумерных решетках потенциально взаимодействующих частиц. Установлены стохастические бифуркации связанности, наблюдающиеся при воздействии шума на автоколебательную среду в режиме удвоения периода колебаний для различных волновых мод.
4. Разработан метод подавления мультистабильности посредством шумового воздействия на автоколебательную среду. - Разработана методика и созданы численные алгоритмы корректной оценки параметров динамической системы, содержащей внутренние источники шума, на основании численной обработки реализаций колебаний.
5. Создан экспериментальный образец системы двух связанных возбуждаемых осцилляторов.
6. Описано явление стохастической синхронизации.
7. Разработана модель движения потенциально взаимодействующих частиц двумерной решетки, находящейся под действием стохастической силы.
8. Разработан способ визуализации локализованных волн плотности солитонного типа в двумерной решетке.
9. Выявлены условия возбуждения солитоно-подобных волн в двумерных нелинейных решетках потенциально взаимодействующих частиц.
10. Разработан новый метод управления фазовой мультистабильностью в двух связанных генераторах, основанный на затягивании колебаний в нужный режим при помощи внешних гармонических сигналов на частоте суб-гармоники, прикладываемых к подсистемам.
11. Получены закономерности синхронизации автоколебаний при би-фазном гармоническом воздействии.

12. Разработан метод управления переходом к хаосу в автоколебательной среде с помощью шумового воздействия.
13. Получен комплекс данных о динамике локализованных двумерных волн, включающий оценки их скорости, энергии, времени жизни в широком диапазоне параметров модели способ визуализации локализованных волн плотности солитонного типа в двумерной решетке.
14. Создан экспериментальный образец автоколебательных систем с развитой фазовой мультистабильностью.
15. Разработан метод управления характеристиками стохастических колебаний путем изменения статистических свойств шумовой накачки.
16. Разработан метод защиты передаваемой информации с использованием хаотических сигналов и специальных способов детектирования.
17. Получен комплекс свойств стохастических осцилляторов, определяющий автоколебательный характер индуцированных шумом процессов.
18. Исследована модель стохастической автоколебательной системы.
19. Разработана методика проведения компьютерных экспериментов для изучения взаимодействия заряженных частиц с локализованными волнами в решетке заряженных частиц.
20. Разработан метод управления мультистабильностью в ансамблях автоколебательных систем со сложной динамикой.
21. Разработана программа ЭВМ для реализации анализатора спектров на основе концепции вейвлетов, предусматривающего автоподстройку частотно-временного разрешения.
22. Разработана программа ЭВМ для реализации процедуры детектирования сигналов, передаваемых путем модуляции параметров хаотического несущего сигнала.

Результаты, полученные в ходе НИР, опубликованы в научной печати, включая российские и международные журналы с высоким рейтингом. Всего по теме НИР опубликовано 40 работ, включая 2 монографии, 3 учебных пособия, 26 статей в научных журналах и 9 статей в сборниках. В ходе НИР получено 2 авторских свидетельства и подготовлена и направлена заявка на авторское свидетельство, находящаяся на рассмотрении. Результаты НИР нашли свое отражение в материалах 6 кандидатских диссертаций, защищенных или представленных в ходе выполнения работ по контракту, а также в материалах 1 докторской диссертации. Все полученные результаты внедрены в учебный процесс.

Созданная научная продукция представляет собой комплекс сведений и фундаментальных закономерностей по теории нелинейных колебаний и волн, нелинейной динамике и теории динамического хаоса, синхронизации и самоорганизации в ансамблях взаимодействующих систем, а

также — прикладных методов для анализа и обработки сигналов сложной формы, диагностике динамических систем и методов скрытной передачи информации. Вышеперечисленные результаты получены впервые, являются принципиально новыми, что подтверждается публикациями результатов в ведущих научных журналах и обсуждением на международных конференциях. Результаты исследований соответствуют техническому заданию. Все полученные результаты удовлетворяют мировому уровню. Подтверждением этому является публикация в международных научных журналах с высоким рейтингом и обсуждение на международных научных конференциях.

Результаты исследований по проекту использованы для:

- подготовки студентов, магистров, молодых кандидатов и докторов наук по специальностям «радиофизика и электроника», «физика» и «медицинская физика» на физическом факультете СГУ;

- модернизации существующих учебных курсов «Основы теории колебаний», «Статистическая радиофизика», «Введение в нелинейную динамику», «Методы численного анализа экспериментальных данных», «Теория дискретных систем», «Детерминированный хаос», «Синхронизация колебаний», «Основы теории распределенных систем», «Анализ временных рядов» и лабораторного практикума «Электронное моделирование сложных систем и процессов»

- создания новых учебных курсов: «Дополнительные главы статистической радиофизики», «Методы обработки сигналов и вопросы реконструкции», «Современные проблемы и методы теории нелинейных колебаний», «Информационное обеспечение и защита информации в кризисных ситуациях»

Полученные результаты способствуют созданию новых методов диагностики сложных радиофизических систем, новых подходов к созданию систем защищенной передачи информации, систем сбора и обработки экспериментальных данных. Проведенные исследования могут помочь усилить позиции Российской Федерации в таких приоритетных направлениях развития науки, технологий и техники, как информационно-телекоммуникационные системы. Результатом выполнения проекта явилось привлечение к научной работе студентов, аспирантов и молодых исследователей, закрепление молодых кадров в области науки и образования.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J. Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Science. Cambridge: Cambridge University Press, –2003.
- 2 Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems. Tutorial and Modern Development / V. Anishchenko, V. Astakhov, A. Neiman et al. Berlin: Springer, –2007.
- 3 Anishchenko V., Astakhov S., Vadivasova T. Phase dynamics of two coupled oscillators under external periodic force // Europhysics Letters. –2009. –V. 86. –P. 30003.
- 4 The synchronization of chaotic systems / S. Boccaletti, J. Kurths, G. Osipov et al. // Physics Reports. –2002. –V. 366. –P. 1–101.
- 5 Fujisaka H., Yamada T. Stability Theory of Synchronized Motion in Coupled-Oscillator Systems // Progress of Theoretical Physics. –1983. –V. 69. –P. 32–47.
- 6 Synchronization of chaos / V. Anishchenko, T. Vadivasova, D. Postnov et al. // International Journal of Bifurcation and Chaos. –1992. –V. 2. –P. 633–644.
- 7 Rosenblum M. G., Pikovsky A. S., Kurths J. Phase Synchronization of Chaotic Oscillators // Phys. Rev. Lett. –1996. –V. 76. –P. 1804–1807.
- 8 Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems / N. F. Rulkov, M. M. Sushchik, L. S. Tsimring et al. // Phys. Rev. E. –1995. –V. 51. –P. 980–994.
- 9 Synchronization: From Simple to Complex / A. Balanov, N. Janson, D. Postnov et al. Springer, –2008.
- 10 Measuring synchronization in coupled model systems: A comparison of different approaches / T. Kreuz, F. Mormann, R. G. Andrzejak et al. // Physica D: Nonlinear Phenomena. –2007. –V. 225. –P. 29 – 42.
- 11 Detection of synchronization for non-phase-coherent and non-stationary data / M. C. Romano, M. Thiel, J. Kurths et al. // Europhysics Letters. –2005. –V. 71. –P. 466.
- 12 Information theoretic approach to quantify complete and phase synchronization of chaos / A. Shabunin, V. Demidov, V. Astakhov et al. // Phys. Rev. E. –2002. –V. 65. –P. 056215.
- 13 Shabunin A., Astakhov V., Kurths J. Quantitative analysis of chaotic synchronization by means of coherence // Phys. Rev. E. –2005. –V. 72. –P. 016218.

14 Kolmogorov A. New Metric Invariant of Transitive Dynamical Systems and Endomorphisms of Lebesgue Spaces // Doklady of Russian Academy of Sciences. –1958. –V. 119 –P. 861–864.

15 Anishchenko V., Astakhov S. Relative Kolmogorov Entropy of a Chaotic System in the Presence of Noise // International Journal of Bifurcation and Chaos. –2008. –V. 18. –P. 2851–2855.

16 Anishchenko V., Astakhov S., Vadivasova T. Diagnostics of the Degree of Noise Influence on a Nonlinear System Using Relative Metric Entropy // Regular and Chaotic Dynamics. –2010. –V. 15. –P. 261–273.

17 Kolmogorov A. Entropy per unit time as a metric invariant of automorphism // Docl. Russ. Acad. Sci. –1959. –V. 124. –P. 754–755.

18 Shannon C. A Mathematical Theory of Communication // The Bell System Technical Journal. –1948. –V. 27. –P. 379–423, 623–656.

19 Bahnmuller J., Bogenschutz T. A Margulis-Ruelle inequality for random dynamical systems // Archiv der Mathematik. –1995. –V. 64. –P. 246–253.

20 Ruelle D. An inequality for the entropy of differentiable maps // Bulletin of the Brazilian Mathematical Society. –1978. –V. 9. –P. 83–87.

21 Pesin Y. Characteristic Lyapunov Exponents and Smooth Ergodic Theory // Russian Math. Surveys. –1977. –V. 32. –P. 55–114.

22 Grassberger P., Procaccia I. Estimation of the Kolmogorov entropy from a chaotic signal // Physical Review A. –1983. –V. 28. –P. 2591–2593.

23 Grassberger P., Procaccia I. Characterization of Strange Attractors // Physical Review Letters. –1983. –V. 50. –P. 346–349.

24 Faure P., Korn H. A new method to estimate the Kolmogorov entropy from recurrence plots: its application to neuronal signals // Physica D. –1998. –V. 122. –P. 265–279.

25 Recurrence plots for the analysis of complex systems / N. Marwan, M. C. Romano, M. Thiel et al. // Physics Reports. –2007. –V. 438. –P. 237–329.

26 Астахов С.В., Анищенко В.С. Относительная метрическая энтропия: мера степени перемешивания в регулярных и хаотических зашумленных системах. Saarbrucken, Germany: LAP LAMBERT Academic Publishing, –2011.

27 Численное и экспериментальное исследование внешней синхронизации двухчастотных колебаний / В.С. Анищенко, С.В. Астахов, Т.Е. Вадивасова [и др.] // Нелинейная динамика. –2009. –Т. 5. –№ 2. –С. 237–252.

- 28 Анищенко В.С., Николаев С.М., Kurths J. Механизмы синхронизации предельного цикла на двумерном торе // Нелинейная динамика. –2008. –Т. 4. –№ 1. –С. 39–56.
- 29 Anishchenko V., Nikolaev S., Kurths J. Bifurcational mechanisms of synchronization of a resonant limit cycle on a two-dimensional torus // Chaos. –2008. –V. 18 –P. 037123.
- 30 Zheng Z., Hu G., Hu B. Phase slips and phase synchronization of coupled oscillators // Physical Review Letters. –1998. –V. 81. –P. 5318.
- 31 FitzHugh R. Mathematical models of threshold phenomena in the nerve membrane // Bulletin of Mathematical Biology. –1955. –V. 17. –P. 257–278.
- 32 Pikovsky A., Kurths J. Coherence Resonance in a Noise-Driven Excitable System // Physical Review Letters. –1997. –V. 78. –P. 775.
- 33 Zhou C., Kurths J., Hu B. Frequency and phase locking of noise-sustained oscillations in coupled excitable systems: Array-enhanced resonances // Physical Review E. –2003. –V. 67. –P. 030101. Ланда П.С. Автоколебания в распределенных системах. – М.: Наука, 1982.
- 34 Рыскин Н.М., Трубецков Д.И. Нелинейные волны. – М.: Наука-Физматлит, 2000.
- 35 Aranson D.G., Ermentrout G.B., Kopell N. Amplitude response of coupled oscillators // Physica D. – 1990. – Vol. 41. – P. 403–449.
- 36 Bozhenov M., Rabinovich M., Rubchinsky L. Time-periodic spatial chaos in the complex Ginzburg-Landau equation // J. of Statistical Physics. – 1996. – Vol. 83. – Nos. 5/6. – P. 1165–1181.
- 37 Shraiman B.I., Pumir A., Saarloos W., Hohenberg P.C., Chate H., Holen M. Spatiotemporal chaos in the one-dimensional complex Ginzburg-Landau equation // Physica D. – 1992. – Vol. 57. – P. 241–248.
- 38 Orzag S. On the resolution requirements on finite-difference schemes // Stud. Appliedmath. – 1971. – Vol. 1(4). – P. 395–397.
- 39 Гапонов-Грехов А.В., Рабинович М.И., Старобинец И.М. Динамическая модель пространственного развития турбулентности // Письма в ЖЭТФ. – 1984. – Т. 39. – №1. – С. 561–564.
- 40 Анищенко В.С., Арансон И.С., Постнов Д.Э., Рабинович М.И. Пространственная синхронизация и бифуркация развития хаоса в цепочке связанных генераторов // ДАН СССР. – 1986. – Т. 286. – №5. – С. 1120–1124.
- 41 Шабунин А.В., Акопов А.А., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е. Бегущие волны в дискретной ангармонической автоколебательной среде // Изв. ВУЗов. Прикладная нелинейная динамика. – 2005. – Т. 13. – №4. – С. 37–54.

42 Shabunin A., Astakhov V., Anishchenko V. Developing chaos on base of traveling waves in a chain of coupled oscillators with period-doubling. Synchronization and hierarchy of multistability formation // *Int. J. Bifurcation and Chaos*. – 2002. – Vol. 12. – No. 8. – P. 1895–1908.

43 Ermentrout G.B., Troy W.C. Phase locking in a reacting-diffusion system with a linear frequency gradient // *SIAM J. Appl. Math.* – 1986. – Vol. 39. – P. 623–660.

44 Осипов Г.В., Сущик М.М. Синхронизация и управление в цепочках связанных автогенераторов // *Вестник ННГУ. Нелинейная динамика – синхронизация и хаос – II*. – 1997. – С. 5–23.

45 Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Okrokhvertsev G.A., Akopov A.A., Strelkova G.I. Chaotic dynamics of a spatio-inhomogeneous medium // *Int. J. Bifurcation and Chaos*. – 2005. – Vol. 15. – P. 3661–3673.

46 Anishchenko V.S., Akopov A.A., Vadivasova T.E., Strelkova G.I. Mechanisms of chaos onset in an inhomogeneous medium under cluster synchronization destruction // *New Journal of Physics*. – 2006. – Vol. 8. – P. 84(1–11).

47 Osipov G.V., Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Kurths J. Phase synchronization effects in a lattice of nonidentical Rossler oscillators // *Phys. Rev. E*. – 1997. – Vol. 55. – P. 2353–2361.

48 Слепнев А.В., Вадивасова Т.Е., Листов А.С. Мультистабильность, удвоения периода и подавление бегущих волн шумовым воздействием в сильно нелинейной автоколебательной среде с периодическими граничными условиями // *Нелинейная Динамика*. – 2010. – Т. 6. – №4. – С. 755–767.

49 Слепнев А.В., Вадивасова Т.Е. Бифуркации удвоения периода и эффекты шумового воздействия в мультистабильной автоколебательной среде // *Известия ВУЗов. Прикладная нелинейная динамика*. – 2011. – Т. 19. – №4. – С. 53–67.

50 Шабунин А.В. Действие случайных дальних связей на систему с фазовой мультистабильностью. // *Нелинейная Динамика*. – 2012 (направлена в печать).

51 Вадивасова Т.Е., Маляев В.С. Бифуркации в генераторе Ван дер Поля с жестким возбуждением в присутствии параметрического шума. Квазигармонический анализ и численный эксперимент. // *Изв. ВУЗов. Прикладная нелинейная динамика*. – 2012 (направлена в печать).

52 Вадивасова Т.Е., Слепнев А.В. Исследование возникновения колебаний в квазигармонической модели автоколебательной среды, находящейся под действием мультипликативного шума – // *Изв. ВУЗов. Прикладная нелинейная динамика*. – 2012 (принята к публикации).

53 Слепнев А.В., Вадивасова Т.Е. Два вида автоколебаний в активной среде с периодическими граничными условиями // *Нелинейная динамика*. – 2012. – Т. 8. – № 3. – С. 1–9.

54 Стрелкова Г.И. Практикум по динамике дискретных систем. Саратов: Наука. Саратов, 2012.

55 Astakhov S., Fujiwara N., Tsukamoto N., Kurths J. Hopf bifurcation and multistability in a system of phase oscillators // Phys. Rev. E. –2012 (направлена в печать).

56 Astakhov S.V., Anishchenko V. S. Afraimovich-Pesin dimension for Poincare recurrences in one- and two-dimensional deterministic and noisy chaotic maps // Phys. Lett. A. –2012 (направлена в печать).

57 Astakhov S.V., Dvorak A., Anishcheko V.S. Influence of chaotic synchronization on mixing in the phase space of interacting systems // Chaos. –2012 (направлена в печать).

58 Velarde M.G., Ebeling W., Chetverikov A. P. Thermal solitons in 1d- and 2d-anharmonic lattices-Solictons and the organization of nonlinear fluctuations in long-living dynamical structures. // International Journal of Bifurcation and Chaos –2012 (направлена в печать).

59 Chetverikov A. P., Ebeling W., Velarde M.G. Controlling fast electron transfer at the nano-scale by solitonic excitations along crystallographic axes. // European Physics Journal B –2012 (направлена в печать).