

Министерство образования и науки Российской Федерации  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ «САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО» (САРАТОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

УДК 621.373

№ госрегистрации 01201064326

Инв.№

УТВЕРЖДАЮ

Проректор Саратовского университета  
по научно-исследовательской работе

профессор \_\_\_\_\_ Д.А. Усанов

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2012 г.

ОТЧЕТ О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

по государственному контракту от 06 сентября 2010 г. № 14.740.11.0074

В рамках федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры  
инновационной России» на 2009-2013 годы  
по теме: НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ, ВОЗДЕЙСТВИЕ ФЛУКТУАЦИЙ,  
МУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТЬ И СИНХРОНИЗАЦИЯ В СОСРЕДОТОЧЕННЫХ И  
РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМАХ РАДИОФИЗИКИ

(промежуточный, этап № 4)

Наименование этапа: «Защита информации, синхронизация и мультистабильность»

Руководитель НИР,  
д-р физ.-мат. наук, проф.

\_\_\_\_\_  
подпись, дата В. С. Анищенко

Саратов 2012

## СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Профессор, д.ф.-м.н.	_____	Анищенко В.С. (разд. 1)
	подпись, дата	
Студент	_____	Боев Я.И. (разд. 1)
	подпись, дата	
Профессор, д.ф.-м.н.	_____	Четвериков А.П. (разд. 3)
	подпись, дата	
Профессор, д.ф.-м.н.	_____	Шабунин А.В. (разд. 4)
	подпись, дата	
Аспирант	_____	Слепнев А.В. (разд. 2)
	подпись, дата	
Профессор, д.ф.-м.н.	_____	Вадивасова Т.Е. (разд. 2)
	подпись, дата	
Зав. уч. лабораторией	_____	Маляев В.С. (разд. 6)
	подпись, дата	
Доцент, к.ф.-м.н.	_____	Астахов С.В. (разд. 1)
	подпись, дата	
Студент	_____	Семенов В.В. (разд. 6)
	подпись, дата	
Доцент, к.ф.-м.н.	_____	Стрелкова Г.И. (разд. 1)
	подпись, дата	
Аспирант	_____	Феоктистов А.В. (разд. 1)
	подпись, дата	
Профессор, д.ф.-м.н.	_____	Павлов А.Н. (разд. 5, 6)
	подпись, дата	

Доцент, к.ф.-м.н.	_____	Павлова О.Н. (разд. 5)
	подпись, дата	
Доцент, к.б.н.	_____	Семячкина-Глушковская О.В. (разд. 5)
	подпись, дата	
Доцент, к.б.н.	_____	Бердникова В.А. (разд. 5)
	подпись, дата	
Аспирант	_____	Назимов И.А. (разд. 5)
	подпись, дата	
Студент	_____	Бирюкова Н.И. (разд. 1)
	подпись, дата	
Нормоконтролер	_____	Шакина Е.О.
	подпись, дата	

## РЕФЕРАТ

Отчет 79 с., 45 рис., 58 источников.

### ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС, СИНХРОНИЗАЦИЯ ХАОСА, ФЛУКТУАЦИИ, НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ, ХАОС И СТРУКТУРЫ

Объектом исследования являются фундаментальные научные проблемы современной радиофизики и нелинейной динамики. Цель работы - выявление закономерностей и свойств волновых и колебательных процессов в нелинейных системах и средах в присутствии внешних регулярных и шумовых воздействий. Разработка новых методов диагностики сложных сигналов и защиты информации

Создание единой концепции стохастических автоколебаний в неавтономных нелинейных системах с шумовым возбуждением. Анализ характеристик и бифуркаций стохастических систем в условиях аддитивного и мультипликативного воздействия шумом различной статистики. Разработка теории взаимодействия заряженных частиц с солитонами в решетке связанных нелинейных осцилляторов. Исследование синхронизации и мультистабильности в ансамблях связанных осцилляторов в условиях спонтанных дальних связей между парциальными элементами. Разработка пакета алгоритмов и прикладных программ для реализации анализатора спектров на основе концепции вейвлетов, предусматривающего автоподстройку частотно-временного разрешения. Разработка структурных схем защищенной передачи информации в виде аналоговых и цифровых сигналов.

## СОДЕРЖАНИЕ

Обозначения и сокращения . . . . .	7
ВВЕДЕНИЕ . . . . .	8
<b>1 Создание единой концепции стохастических автоколебаний в неавтономных нелинейных системах с шумовым возбуждением . . . . .</b>	<b>9</b>
1.1 Введение . . . . .	9
1.2 Индуцированная шумом параметрическая неустойчивость и свойства параметрических стохастических осцилляторов . . . . .	10
1.3 Накачка белым шумом . . . . .	12
1.4 Накачка цветным шумом. Влияние спектральных характеристик шума на порог параметрической неустойчивости и свойства стохастических колебаний . . . . .	14
1.5 Внешнее гармоническое воздействие на параметрические стохастические осцилляторы . . . . .	17
1.6 Выводы . . . . .	19
<b>2 Анализ характеристик и бифуркаций стохастических систем в условиях аддитивного и мультипликативного воздействия шумом различной статистики . . . . .</b>	<b>20</b>
2.1 Введение . . . . .	20
2.2 Модели генератора с параметрическим шумом и вывод укороченных стохастических уравнений . . . . .	21
2.3 Теоретический анализ стохастических бифуркаций в рамках квазигармонического приближения . . . . .	26
2.4 Численное исследование системы стохастических уравнений . . . . .	29
2.5 Выводы . . . . .	31
<b>3 Разработка теории взаимодействия заряженных частиц с солитонами в решетке связанных нелинейных осцилляторов . . . . .</b>	<b>32</b>
3.1 Введение . . . . .	32
3.2 Двумерная модель сильной связи для описания транспорта заряда в ансамбле взаимодействующих частиц . . . . .	33
3.3 Захват и транспорт частиц солитон-подобными квазиодномерными возбуждениями в треугольной решетке с Морзе потенциалом . . . . .	35
3.4 Факторы, ограничивающие формирование эффективных солитонов . . . . .	39
3.5 Выводы . . . . .	42
<b>4 Исследование синхронизации и мультистабильности в ансамблях связанных осцилляторов в условиях спонтанных дальних связей между парциальными подсистемами . . . . .</b>	<b>42</b>
4.1 Введение . . . . .	42

4.2	Фазовая мультистабильность в ансамбле осцилляторов Ресслера . . . . .	44
4.3	Переход к пространственно-однородным колебаниям под действием “дальних” связей . . . . .	48
4.4	Влияние дальних связей на режимы с более сложными пространственными структурами . . . . .	52
4.5	Влияние далекодействующих связей на мультистабильность хаотических аттракторов . . . . .	53
4.6	Выводы . . . . .	56
<b>5</b>	<b>Разработка пакета алгоритмов и прикладных программ для реализации анализатора спектров на основе концепции вейвлетов, предусматривающего автоподстройку частотно-временного разрешения</b>	<b>56</b>
5.1	Введение . . . . .	56
5.2	Описание особенностей и основных возможностей разработанного пакета алгоритмов и прикладных программ . . . . .	58
5.3	Применение разработанного пакета алгоритмов и прикладных программ для проведения спектрального анализа нестационарных физиологических процессов . . . . .	60
5.4	Выводы . . . . .	61
<b>6</b>	<b>Разработка структурных схем защищенной передачи информации в виде аналоговых и цифровых сигналов</b>	<b>62</b>
6.1	Введение . . . . .	62
6.2	Оценка параметров генератора хаотических колебаний в численном эксперименте . . . . .	63
6.3	Оценка параметров генератора хаотических колебаний в радиофизическом эксперименте . . . . .	64
6.4	Передача сигнала с использованием модуляции параметра генератора хаотических колебаний . . . . .	68
6.5	Выводы . . . . .	72
	<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ</b> . . . . .	<b>74</b>
	<b>СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ</b> . . . . .	<b>75</b>

## Обозначения и сокращения

ГИН - генератор с инерционной нелинейностью

НЧ - низкочастотный

ВЧ - высокочастотный

ФС - фазовая синхронизация

ЧС - частотная синхронизация

ФМ - фазовая мультистабильность

ФХН - ФитцХью-Нагумо

## ВВЕДЕНИЕ

Данный научный отчет включает информацию о научных результатах, полученных сотрудниками научно-образовательного центра по нелинейной динамике и биофизике Саратовского государственного университета в период с 1.01.12 по 30.06.12 в ходе выполнения государственного контракта 14.740.11.0074 по программе Министерства образования и науки РФ «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009 – 2013 годы». Основной задачей является проведение фундаментальных исследований по нелинейной динамике и биофизике с целью выявления закономерностей и свойств волновых и колебательных процессов в нелинейных системах и средах в присутствии внешних регулярных и шумовых воздействий; разработка новых методов диагностики сложных сигналов и защиты информации. Выполнение НИР должно обеспечить закрепление в сфере науки и образования научных и научно-педагогических кадров в процессе подготовки студентов, аспирантов и докторантов в Саратовском университете. За отчетный период исследования проводились в соответствии с техническим заданием на первый этап 2012 года. Работы выполнялись в соответствии с календарным планом работ по контракту. Отчет включает краткую информацию об основных научных результатах, полученных исполнителями проекта на 4 этапе работы по теме «Защита информации, синхронизация и мультистабильность».

# 1 Создание единой концепции стохастических автоколебаний в неавтономных нелинейных системах с шумовым возбуждением

## 1.1 Введение

За последние 15 лет в исследовании эффектов шумового воздействия на ДС был замечен значительный прогресс. Появилось большое количество работ, как теоретических так и экспериментальных, развивающих данное направление. Появились работы, в которых исследуются бифуркации зашумленных систем (стохастические бифуркации) и индуцированные шумом переходы (новые виды поведения, возникающие только при воздействии шума). Были установлены такие фундаментальные явления, связанные с шумом в нелинейных системах, как стохастический резонанс (СР), когерентный резонанс (КР), стохастическая синхронизация (СС).

Можно выделить в отдельный класс нелинейные ДС, в которых стохастические колебания возникают в результате случайного воздействия (шума). Если же воздействие отсутствует, то система находится в состоянии устойчивого равновесия. Такие системы принято называть стохастическими осцилляторами. Именно с ними связаны отмеченные выше эффекты СР, КР и СС. Можно ли разделить все стохастические осцилляторы на группы с определенными свойствами? Попробуем подойти к этому вопросу с самой общей точки зрения.

Как известно, детерминированные диссипативные колебательные системы принято разделять на неавтономные осцилляторы с вынужденными колебаниями, параметрические осцилляторы и автоколебательные системы. Вынужденные колебания совершаются под действием вынуждающей силы, которая задает независимые частоты колебаний. Амплитуда вынужденных колебаний определяется как внешней силой, так и параметрами системы. При этом система играет роль пассивного инерционного преобразователя. Параметрические колебания возникают в результате внешней модуляции одного из параметров осциллятора, что приводит к подкачке энергии и росту амплитуды колебаний (параметрическая неустойчивость). Автоколебания также могут порождаться автономной системой (без внешнего сигнала), восполняющей расход энергии на диссипацию с помощью источника. Параметры автоколебаний определяются параметрами системы.

Для стохастических колебаний во многом применима та же классификация. Можно выделить вынужденные стохастические колебания, подобные тем, что наблюдаются, например, в диссипативном линейном контуре с аддитивным шумом. Известно также, что параметрический шум в колебательной системе может привести к эффекту параметрической неустойчивости. Возможна и обратная ситуация, когда параметрический шум стабилизирует точку равновесия. Примером может служить маятник Капицы. В случае вызванной шумом параметрической неустойчивости можно говорить о параметрических стохастических колебаниях. Наиболее проблематичным является определение стохастиче-

ских автоколебаний. Стохастический генератор не является автономной системой – присутствие случайного воздействия, как и для других типов стохастических осцилляторов, есть необходимое условие возникновения колебаний. Однако, в отличие от вынужденных и параметрических стохастических систем, в режиме стохастических автоколебаний характеристики колебательного процесса должны определяться параметрами системы, а свойства шумового сигнала при этом не должны иметь существенного значения. Кроме того, стохастический генератор должен обладать фундаментальным свойством автоколебательных систем – способностью к синхронизации.

В настоящем разделе мы исследуем параметрические стохастические осцилляторы. Результаты, излагаемые в настоящем разделе, являются существенным расширением и дополнением результатов, представленных в разделе 1.1 отчета за 2-й этап выполнения научно-исследовательских работ.

## 1.2 Индуцированная шумом параметрическая неустойчивость и свойства параметрических стохастических осцилляторов

Индуцированная шумом параметрическая неустойчивость достаточно хорошо известна. Однако, на наш взгляд, в литературе отсутствует достаточно последовательное сравнение эффекта параметрической неустойчивости, наблюдаемого для различных, по своим характеристикам, источников шума. Не достаточно исследован вопрос о свойствах стохастических параметрических колебаний в нелинейных осцилляторах с различным типом нелинейности. Кроме того, вопрос о том, являются ли индуцированные параметрическим шумом колебания действительно особым типом параметрических колебаний или, возможно, обладают определенными свойствами автоколебательного режима, хотя и поднимался в литературе, но все еще остается не до конца решенным.

Мы исследовали две динамические модели нелинейных диссипативных осцилляторов при различных характеристиках шумового параметрического воздействия. Первая из них представляет собой осциллятор Дуффинга с одноямычным потенциалом

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \omega_0^2 [1 + K\xi(t)]x + x^3 = 0, \quad (1)$$

а вторая – осциллятор с нелинейным трением вида

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \dot{x}^3 + \omega_0^2 [1 + K\xi(t)]x = 0. \quad (2)$$

Обе модели записаны для безразмерной переменной  $x$  и безразмерного времени  $t$ . В обеих моделях случайный сигнал  $\xi(t)$  модулирует параметр, управляющий собственной частотой системы,  $\omega_0$  – невозмущенная собственная частота (в проведенных исследованиях полагалось, что  $\omega_0 = 1$ ),  $K$  задает глубину модуляции (интенсивность шумовой накачки), параметр  $\alpha$  определяет линейную диссипацию. Системы (1) и (2) различаются характером нелинейности, причем в случае (1) нелинейность приводит к неизохронности колебаний,

в то время как в (2) колебания являются изохронными.

Как в (1), так и в (2) при слабом шуме и сильной диссипации на плоскости переменных  $x$ ,  $y = \dot{x}$  существует устойчивая неподвижная точка в начале координат  $(0, 0)$  и стохастические колебания отсутствуют. С ростом интенсивности шумовой накачки может произойти стохастическая бифуркация динамического типа, приводящая к потере устойчивости неподвижной точкой. Для определения порога неустойчивости можно ограничиться рассмотрением линейного уравнения для малого возмущения  $u(t)$  переменной  $x$  в окрестности нуля:

$$\ddot{u} + \alpha\dot{u} + \omega_0^2[1 + K\xi(t)]u = 0. \quad (3)$$

Мы будем определять порог параметрической неустойчивости, рассчитывая старший показатель Ляпунова для некоторого решения  $u(t)$ . Таким образом, порог параметрической неустойчивости не зависит от конкретного вида осциллятора (главное – наличие неподвижной точки в нуле координат), но может существенным образом зависеть от характера случайного сигнала  $\xi(t)$ . Что же касается свойств возникающих в результате шумовой параметрической накачки стохастических колебаний, то они, разумеется, зависят от вида нелинейности осциллятора.

Нами использовались три модели случайного сигнала  $\xi(t)$ : белый гауссов шум, одномерный процесс Орнштейна – Уленбека; двумерный процесс Орнштейна – Уленбека. В случае белого шума полагалось  $\xi(t) = \sqrt{2D}n(t)$ , где  $n(t)$  – нормированный гауссов белый шум ( $\langle n(t) \rangle \equiv 0$ ;  $\langle n(t)n(t+\tau) \rangle = \delta(\tau)$  – функция Дирака),  $D$  – константа, определяющая интенсивность шума  $\xi(t)$ .

Одномерный процесс Орнштейна – Уленбека задается уравнением

$$\dot{\xi}(t) + \gamma\xi(t) = \sqrt{2D}n(t), \quad (4)$$

где  $n(t)$  – нормированный гауссов белый шум,  $D = const$  – интенсивность шума,  $\gamma$  – коэффициент диссипации. Он представляет собой гауссов экспоненциально-коррелированный процесс со спектральной плотностью мощности в форме лоренциана:

$$G_\xi(\omega) = \frac{4\sigma_\xi^2\gamma}{\gamma^2 + \omega^2}, \quad \omega > 0.$$

Максимум спектральной плотности мощности располагается на нулевой частоте. Ширина спектра на уровне половинной мощности есть  $\gamma$  (с учетом только неотрицательных частот), а дисперсия определяется как  $\sigma_\xi^2 = D/\gamma$ .

Двумерный процесс Орнштейна – Уленбека задается уравнением второго порядка:

$$\ddot{\xi}(t) + \gamma\dot{\xi}(t) + \omega_1^2\xi(t) = \sqrt{2D}n(t). \quad (5)$$

Здесь также  $n(t)$  – нормированный гауссов белый шум,  $D = const$  – интенсивность шума,  $\gamma$  – коэффициент диссипации. Кроме того имеется собственная частота  $\omega_1$ , определяющая

положение спектрального максимума. При малых потерях ( $\gamma \ll 1$ ) процесс  $\xi(t)$  представляет собой гармонический гауссов шум с экспоненциально-спадающей огибающей автокорреляционной функции и спектром, имеющим форму лоренциана с максимумом на частоте  $\omega_1$ :

$$G_\xi(\omega) = \frac{\sigma_\xi^2 \gamma}{\gamma^2 + (\omega - \omega_1)^2}, \quad \omega > 0.$$

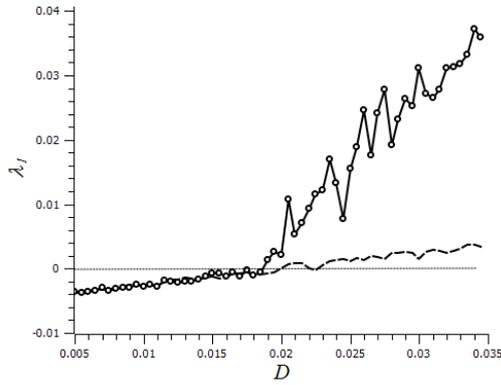
Ширина спектра на уровне половинной мощности есть  $\gamma$ , а дисперсия задается выражением  $\sigma_\xi^2 = D/(\gamma\omega_1^2)$ .

### 1.3 Накачка белым шумом

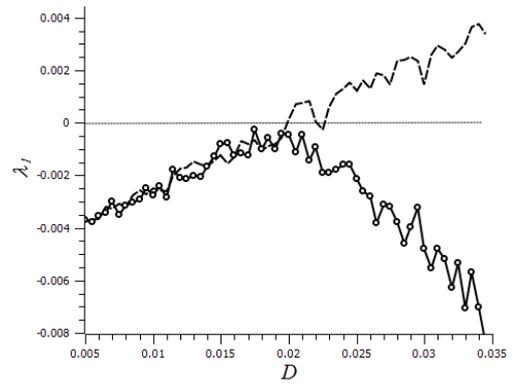
Рассмотрим случай  $\xi(t) = \sqrt{2D}n(t)$ ,  $K = 1$ , где  $n(t)$  – нормированный гауссов белый шум. При фиксированном параметре  $\alpha$  с ростом интенсивности шума  $D$  в обеих моделях осцилляторов происходит бифуркация, в результате которой равновесие в начале координат ( $x = 0, y = 0$ ) теряет устойчивость и возникают стохастические колебания. Уравнения (1), (2) и (3) интегрировались численно с учетом параметрического белого шума. Рассчитывался старший ляпуновский показатель  $\lambda_1$ . на рисунке 1а,б представлены зависимости ляпуновского показателя  $\lambda_1$  от интенсивности шума  $D$  для моделей (1) и (2). Сплошной линией изображена зависимость ляпуновского показателя некоторой произвольно выбранной стохастической траектории, (в силу эргодичности процесса выбор траектории не имеет существенного значения), а пунктир соответствует показателю точки равновесия в нуле, который определялся с помощью решения линеаризованного уравнения (3). Показатель  $\lambda_1$  для произвольной траектории в пределах точности вычислений совпадает с показателем точки равновесия до тех пор, пока та устойчива (поскольку любая траектория спустя некоторое время попадает в эту точку). Затем, при некотором бифуркационном значении  $D$  точка равновесия теряет устойчивость, о чем свидетельствует смена знака ляпуновского показателя точки равновесия. При этом показатель стохастической траектории осциллятора (1) становится положительным, а (2) – отрицательным. Таким образом, в зависимости от вида нелинейности стохастические параметрические колебания могут быть экспоненциально неустойчивыми (хаотическими), как в модели (1) или устойчивыми, как в модели (2).

Бифуркационное значение  $D$  может быть оценено теоретически с помощью укороченных уравнений для амплитуды и фазы осциллятора. В случае гауссова белого шума для линеаризованного осциллятора (3) стандартными методами усреднения и преобразования шума можно получить следующие стохастические дифференциальные уравнения (СДУ) для мгновенной амплитуды и флуктуационной компоненты фазы колебаний:

$$\dot{a} = \frac{a}{2} \left( -\alpha + \frac{D}{2} + \sqrt{D}n_1(t) \right), \quad \dot{\varphi} = \frac{\sqrt{D}}{2}n_2(t), \quad (6)$$



(a)



(б)

Рисунок 1 - Зависимости старшего ляпуновского показателя  $\lambda_1$  от интенсивности гауссова белого шума  $D$  в осцилляторах (1)(а) и (2)(б) при  $\alpha = 0.01$ ,  $K = 1$ . Сплошная линия соответствует траектории, стартующей из некоторой произвольно выбранной начальной точки, отличной от начала координат, пунктиром изображена зависимость показателя  $\lambda_1$  точки равновесия  $(0, 0)$

где преобразованные источники шума  $n_1(t)$  и  $n_2(t)$  можно в некотором приближении считать независимыми белыми гауссовыми источниками ( $\langle n_{1,2} \rangle \equiv 0$ ,  $\langle n_1(t)n_2(t + \tau) \rangle = \delta_{1,2}\delta(\tau)$ ,  $\delta(\tau)$  – функция Дирака,  $\delta_{1,2}$  – символ Кронеккера). Из уравнения для амплитуды легко видеть, что решение  $a = 0$  устойчиво при  $D < 2\alpha$  и неустойчиво при  $D > 2\alpha$ . Значение  $D = 2\alpha$  является бифуркационным. Для  $\alpha = 0.01$ , при котором проводились численные расчеты, бифуркационное значение есть  $D = 0.02$ , что хорошо соответствует результатам численных расчетов.

Примеры фазовых портретов и спектров параметрических стохастических колебаний в осцилляторах (1) и (2) при накачке белым шумом приведены на рисунке 2. Фазовые траектории заполняют область фазовой плоскости в окрестности нуля координат, хотя возможны и значительные отклонения от нуля, так как стохастические колебания при воздействии гауссова шума неограничены. На множестве стохастических траекторий определена стационарная плотность вероятности  $p(x, y)$ . Численные расчеты показывают, что в обеих осцилляторах (1) и (2)  $p(x, y)$  бесконечно возрастает с приближением к началу координат. Множество стохастических траекторий с заданным стационарным распределением вероятности можно понимать, как стохастический аттрактор, хотя существуют и другие подходы к определению аттрактора ДС с шумом. По виду приведенных на рисунке 2а,в аттракторов трудно судить о каких-то качественных различиях в поведении стохастических осцилляторов (1) и (2), хотя траектории в (1) неустойчивы, а в (2) – устойчивы.

Спектры колебаний обоих стохастических параметрических осцилляторов (рис.2б,г) имеют максимум на частоте  $\omega_0$  или в ее окрестности. В остальном они отличаются значительным образом. Спектр колебаний осциллятора (1) – очень широкий и имеет сложную форму, в то время как спектр колебаний (2) является сравнительно узким и по форме близок к лоренциану. Причина широкополосности стохастических колебаний в (1) связана с их неизохронностью и с сильной экспоненциальной неустойчивостью (динамическим хаосом).

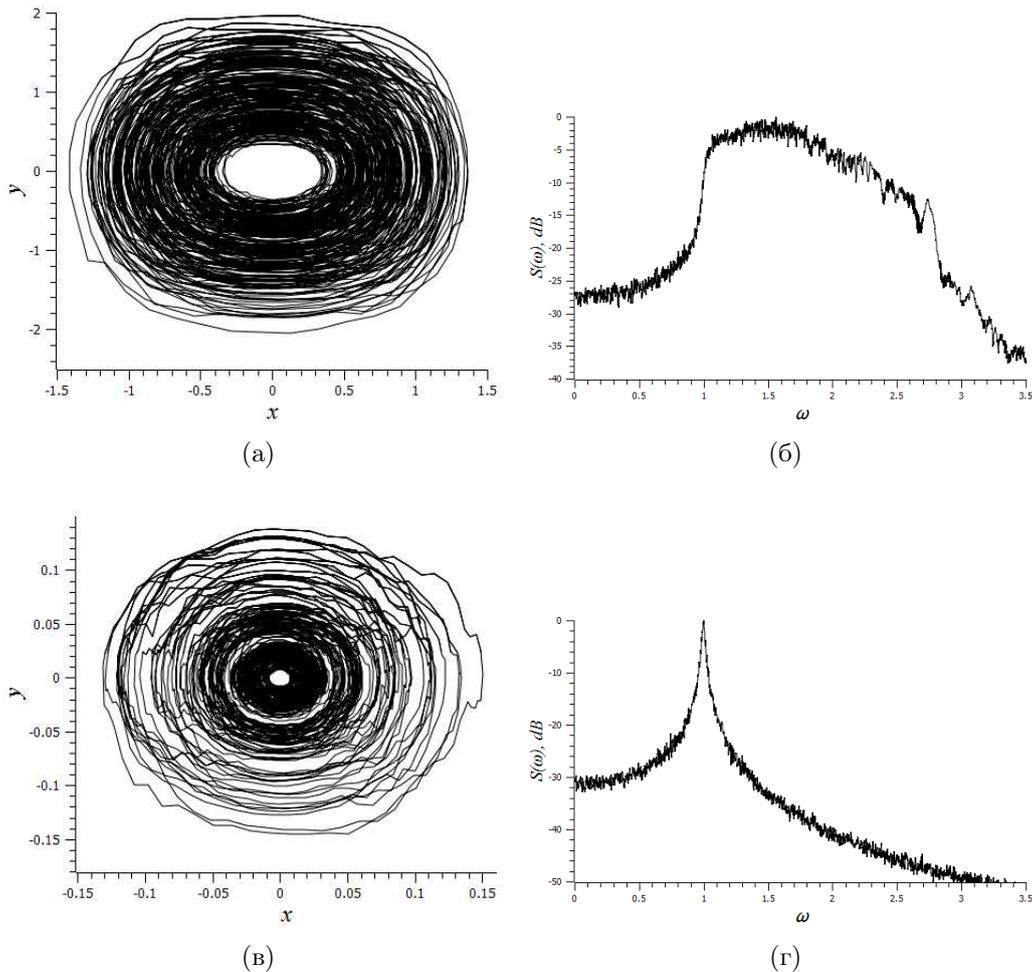


Рисунок 2 - Характеристики параметрических стохастических колебаний при накачке белым шумом: а и б – фазовый портрет и нормированный спектр мощности колебаний  $x(t)$  осциллятора (1); в и г – фазовый портрет и нормированный спектр мощности колебаний  $x(t)$  осциллятора (2). Для обоих осцилляторов  $\alpha = 0.01$ ,  $K = 1$ . Нормированный спектр  $S(\omega)$  вводится следующим образом:  $S(\omega) = 10 \lg \left( \frac{G(\omega)}{G_{max}} \right)$ , где  $G_{max}$  – максимальное значение спектральной плотности мощности

#### 1.4 Накачка цветным шумом. Влияние спектральных характеристик шума на порог параметрической неустойчивости и свойства стохастических колебаний

Как уже отмечалось, характеристики шумового сигнала, в частности его спектральные свойства, могут существенно влиять на порог параметрической неустойчивости. Действие низкочастотной накачки как бы увеличивает собственные потери осциллятора и, таким образом, стабилизирует систему, в то время как высокочастотная накачка её дестабилизирует. Также делается вывод, что белый шум вообще не влияет на устойчивость состояния равновесия, поскольку влияние высокочастотных и низкочастотных компонент сигнала взаимно уравнивается. Последний вывод противоречит численным результатам, приведенным выше. Проведенные нами исследования показывают, что накачка белым шумом приводит к возникновению стохастических колебаний.

Исследуем теперь случай накачки цветным шумом, используя модель гармонического

шума (5) и модель низкочастотного шума (4). Бифуркацию состояния равновесия будем определять с помощью линеаризованного уравнения (3), рассчитывая зависимость старшего ляпуновского показателя точки равновесия от параметра глубины модуляции  $K$ .

Результаты проведенных расчетов приведены на рисунке 3. Кривые 1 – 4 получены в случае накачки гармоническим шумом (5) с разными значениями частоты спектрального максимума  $\omega_1$ :  $\omega_1 = 1$  (кривая 1);  $\omega_1 = 2$  (кривая 2);  $\omega_1 = 3$  (кривая 3) и  $\omega_1 = 0.5$  (кривая 4). Дисперсия шума  $\sigma_\xi$  и ширина спектра на уровне половинной мощности  $\Delta\omega_\xi$  фиксировались постоянными:  $\sigma_\xi = 1$ ;  $\Delta\omega_\xi = \gamma = 0.05$ . Кривая 5 соответствует накачке низкочастотным шумом (4) с той же дисперсией  $\sigma_\xi = 1$  и той же шириной спектра  $\Delta\omega_\xi = \gamma = 0.05$ . Как видно из приведенных зависимостей показателя  $\lambda_1$  точки равновесия от параметра  $K$ , неустойчивость возникает для всех рассмотренных шумовых сигналов накачки, однако бифуркационное значение параметра  $K$  (порог параметрической неустойчивости) будет в разных случаях значительно различаться. Наиболее эффективной оказывается накачка гармоническим шумом (5) на второй гармонике собственной частоты:  $\omega_1 = 2\omega_0 = 2$  (кривая 2). Здесь прослеживается полная аналогия со случаем периодической накачки. При накачке гармоническим шумом на собственной частоте осциллятора ( $\omega_1 = \omega_0 = 1$ ) порог неустойчивости увеличивается (кривая 1). В отличие от периодической накачки, накачка гармоническим шумом на третьей гармонике ( $\omega_1 = 3\omega_0 = 3$ ) также приводит к параметрической неустойчивости, но порог при этом еще более возрастает (кривая 3). Возникновение неустойчивости наблюдается и при накачке на субгармониках собственной частоты. Приведенная на рисунке кривая 4 соответствует накачке гармоническим шумом на субгармонике  $\omega_1 = \frac{1}{2}\omega_0 = \frac{1}{2}$ .

Полученные результаты свидетельствуют о наличии бифуркации точки равновесия, приводящей к ее неустойчивости и возникновению стохастических колебаний при низкочастотной шумовой накачке сигналом (4). Интересно отметить, что при заданных значениях дисперсии и ширины спектра шумового сигнала зависимость  $\lambda_1$  от  $K$  при накачке низкочастотным сигналом (4) (кривая 5) практически полностью совпадает с аналогичной зависимостью при накачке гармоническим шумом (5) на субгармонике  $\omega_1 = \frac{1}{2}\omega_0$  (кривая 4).

Для гармонического шума (5) была построена область параметрической неустойчивости на плоскости параметров  $K$ ,  $\omega_1$  при фиксированном значении ширины спектральной линии шума ( $\gamma = 0.01$ ) и дисперсии шума  $\sigma_\xi^2 = 1$  (соответственно,  $D = \gamma\omega_1^2$ ). Результат представлен на рисунке 4.

Затонированная область на рисунке 4 соответствует стохастическим колебаниям. Можно выделить два участка границы неустойчивости, имеющих форму языков (клювы Маттье) при накачке на второй гармонике ( $\omega_1 = 2\omega_0 = 2$ ) и на основной частоте ( $\omega_1 \approx 2\omega_0 = 2$ ). Наименьший порог неустойчивости, как и при гармонической накачке, будет при выполнении условия  $\omega_1 = 2\omega_0$ . Можно предположить, что с уменьшением  $\alpha$  можно обнаружить клювы и для накачки на субгармониках собственной частоты:  $\omega_1 \approx \omega_0/m$ ,  $m = 2, 3, 4, \dots$ . Однако при выбранном значении  $\alpha$  они не проявляются. При увеличении  $\alpha$  обнаружен-

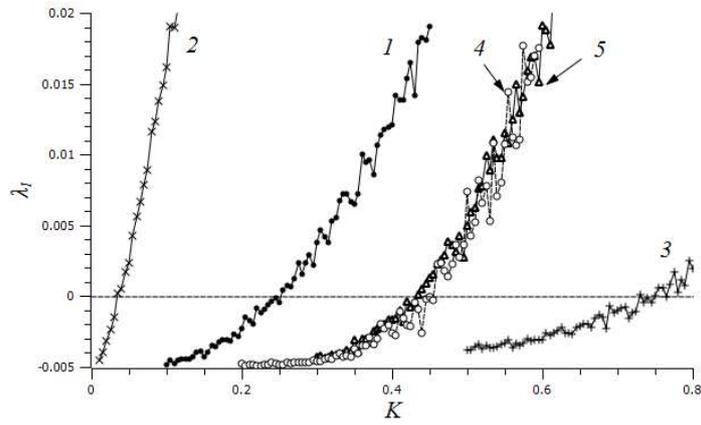


Рисунок 3 - Зависимости старшего ляпуновского показателя точки равновесия от параметра глубины модуляции  $K$  для различных шумовых сигналов накачки. Кривые 1 – 4 получены в случае накачки гармоническим шумом (5) с разными значениями частоты спектрального максимума  $\omega_1$ :  $\omega_1 = 1$  (кривая 1);  $\omega_1 = 2$  (кривая 2);  $\omega_1 = 3$  (кривая 3) и  $\omega_1 = 0.5$  (кривая 4). Кривая 5 соответствует накачке низкочастотным шумом (4). Дисперсия шума  $\sigma_\xi$  и ширина спектра на уровне половинной мощности  $\Delta\omega_\xi$  фиксировались постоянными:  $\sigma_\xi = 1$ ;  $\Delta\omega_\xi = \gamma = 0.05$

ные клювы становятся менее заметными и постепенно сглаживаются. Данные результаты находятся в хорошем соответствии с результатами полученными в на основе анализа устойчивости линейных уравнений для моментов возмущения второго порядка. В области низких частот воздействия ( $\omega_1 < 0.1$ ) процесс (5) уже нельзя считать гармоническим шумом, так как ширина спектра становится сравнима с характерной частотой  $\omega_1$  или даже превосходит ее. При малых  $\omega_1$  граница параметрической неустойчивости, отмеченная на рисунке 4, близка к значениям, полученным для низкочастотного шума (4).

Для всех исследованных случаев накачки цветным шумом траектории стохастических колебаний в осцилляторе (1) характеризуются экспоненциальной неустойчивостью, а траектории в (2) – устойчивы. Примеры зависимостей старшего ляпуновского показателя произвольной траектории  $\lambda_1$  от параметра  $K$  для осцилляторов (1) и (2) приведены на рисунке 5.

Расчеты показывают, что вид спектра стохастических колебаний, возникающих в осцилляторах (1) и (2) после бифуркации состояния равновесия качественным образом зависит от характера случайного сигнала  $\xi(t)$ . При накачке гармоническим шумом (5) (не зависимо от того, на какой гармонике или субгармонике собственной частоты  $\omega_0$  осуществляется накачка) в спектре обоих осцилляторов можно видеть пик на частоте  $\omega_0$  (рис.6а,б). При воздействии гармоническим шумом ширина спектра колебаний в (1) (рис.6а) значительно меньше, чем в случае накачки белым шумом (рис.2,а). В случае воздействия низкочастотным шумом (4) спектр стохастических колебаний в (1) становится широкополосным и в нем заметнее проявляется низкочастотная компонента (рис.6,в). Что же касается стохастических колебаний осциллятора (2), то их спектр полностью сосредоточен в низкочастотной области и по-сути повторяет спектр случайного воздействия. Пик на собственной частоте осциллятора практически не заметен (рис.6г). Таким образом, хотя при низкочастотной накачке состояние равновесия теряет устойчивость и в осцилляторе

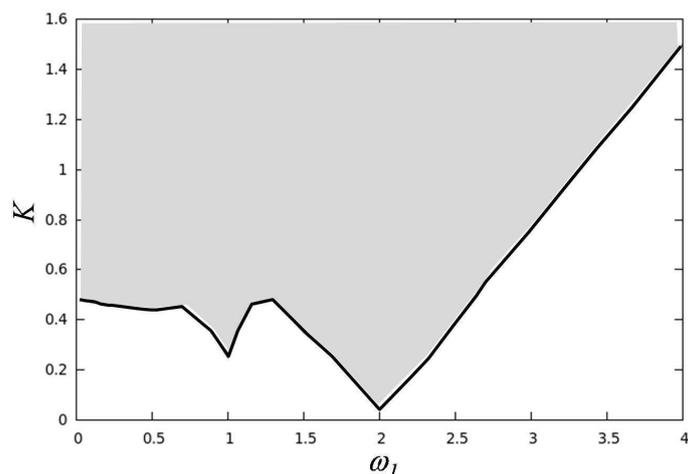


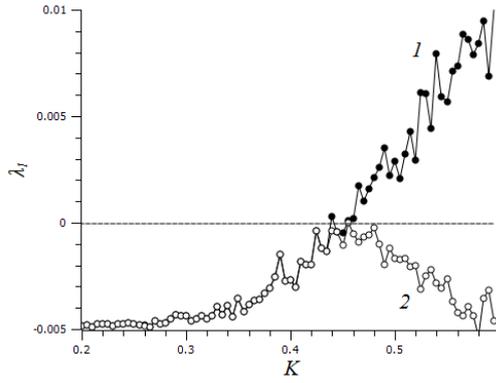
Рисунок 4 - Граница параметрической неустойчивости осциллятора на плоскости параметров  $K$ ,  $\omega_1$  при накачке гармоническим шумом (5) с шириной спектра  $\gamma = 0.01$  и единичной дисперсией. Затонированная область соответствует стохастическим колебаниям, белая область – устойчивой точке равновесия

(2) возникают стохастические колебания, возможно, эти колебания скорее следует классифицировать как вынужденные, чем как параметрические. Однако, мы полагаем, что характер этих колебаний нуждается в дополнительном исследовании.

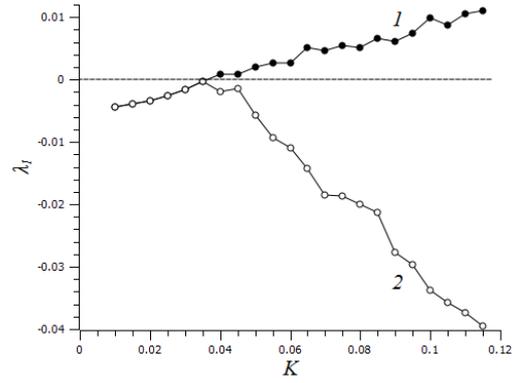
## 1.5 Внешнее гармоническое воздействие на параметрические стохастические осцилляторы

Чтобы стохастические колебания можно было отнести к стохастическому автоколебательному режиму, они должны обладать свойством частичной (эффективной в смысле Стратоновича) синхронизируемости. В этом смысле стохастические генераторы отличаются от классических детерминированных генераторов, только в том плане, что для последних в отсутствие шума синхронизация является строгой. При небольшой расстройке собственной частоты  $\omega_0$  и частоты воздействия  $\omega_2$  с ростом амплитуды гармонического воздействия  $C$  должен наблюдаться эффект захвата собственной частоты в спектре стохастических колебаний, которая должна смещаться в сторону частоты воздействия  $\omega_2$ . Для параметрических колебаний при периодической накачке свойство синхронизации отсутствует. Аналогичное предположение можно сделать и в отношении параметрических стохастических осцилляторов с шумовой накачкой.

Рассмотрим аддитивное воздействие на стохастические осцилляторы (1) и (2) внешнего гармонического сигнала. Для этого добавим в правую часть соответствующих уравнений слагаемое  $C \sin(\omega_2 t)$ , где  $C$  и  $\omega_2$  – амплитуда и частота внешнего воздействия, соответственно. Выберем такой режим стохастической накачки осцилляторов, который соответствует достаточно четкому спектральному пику на собственной частоте осциллятора  $\omega_0$ . Для осциллятора (2) такой пик наблюдается при любом шумовом воздействии, кроме воздействия низкочастотного сигнала (4). В случае осциллятора (1) для поставленной цели можно рассмотреть накачку гармоническим шумом (5) на второй гармонике собственной

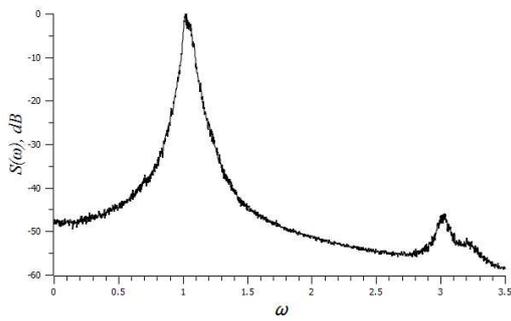


(a)

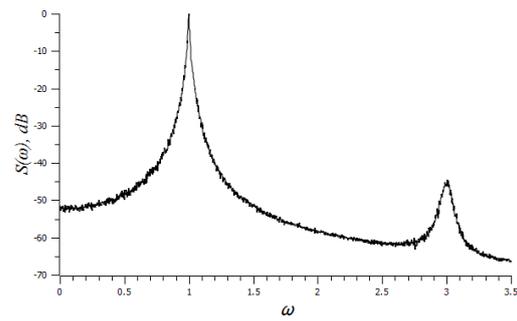


(б)

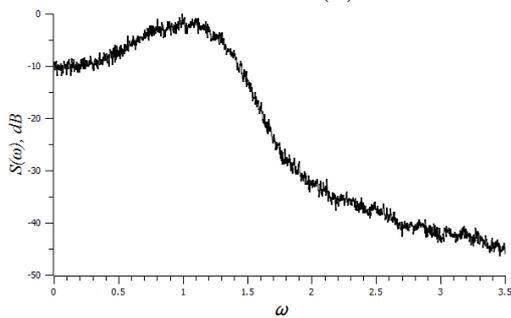
Рисунок 5 - Зависимости старшего ляпуновского показателя  $\lambda_1$  произвольно выбранной стохастической траектории в осцилляторах (1) и (2) от параметра  $K$ : а – при воздействии низкочастотным шумом (4); б – при воздействии гармоническим шумом (5) на второй гармонике собственной частоты ( $\omega_1 = 2\omega_0 = 2$ ). Кривые 1 соответствуют осцилятору (1), а кривые 2 – осцилятору (2). Дисперсия и ширина спектра случайного сигнала  $\xi(t)$  во всех рассмотренных случаях выбирались одинаковыми:  $\sigma_\xi = 1$ ;  $\Delta\omega_\xi = \gamma = 0.05$ . Параметр диссипации осцилляторов фиксировался равным  $\alpha = 0.01$



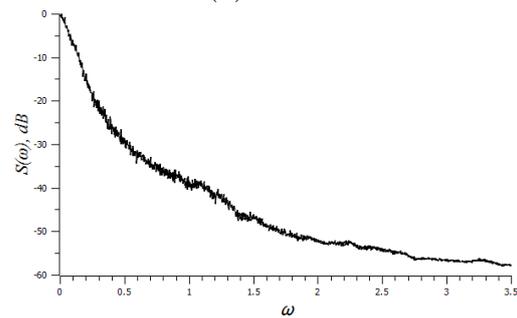
(a)



(б)



(в)



(г)

Рисунок 6 - Нормированные спектры мощности параметрических стохастических колебаний  $x(t)$  в осцилляторах (1) и (2): а,б – при воздействии гармоническим шумом (5) на второй гармонике собственной частоты ( $\omega_1 = 2\omega_0 = 2$ ) при  $K = 0.1$ ; в,г – при воздействии низкочастотным шумом (4) при  $K = 0.55$ . Рисунки (а,в) соответствуют осцилятору (1), а (б,г) – осцилятору (2). Дисперсия и ширина спектра случайного сигнала  $\xi(t)$  во всех рассмотренных случаях выбирались одинаковыми:  $\sigma_\xi = 1$ ;  $\Delta\omega_\xi = \gamma = 0.05$ . Параметр диссипации осцилляторов фиксировался равным  $\alpha = 0.01$

частоты осциллятора. Частоту гармонического воздействия  $\omega_2$  выберем близкой к собственной частоте  $\omega_0$ . Численные эксперименты в выбранном режиме накачки, а также и для других сигналов накачки (например при накачке осциллятора (2) белым шумом) показали, что захват основной частоты в спектре параметрических стохастических колебаний отсутствует. Эффект смещения спектрального максимума, соответствующего основной частоте стохастических колебаний не наблюдается. Полученные результаты проиллюстрированы спектрами мощности колебаний  $x(t)$ , представленными на рисунке 7,а,б. В случае неизохронного стохастического осциллятора (1) гармоническое воздействие может сильно изменять вид спектра и приводить к возникновению более узких спектральных пиков, соответствующих основной собственной частоте и комбинационным частотам (рис.7а). Для осциллятора (2) с ростом амплитуды  $C$  характерно уменьшение (подавление) максимума на собственной частоте стохастических автоколебаний (рис.7,б).

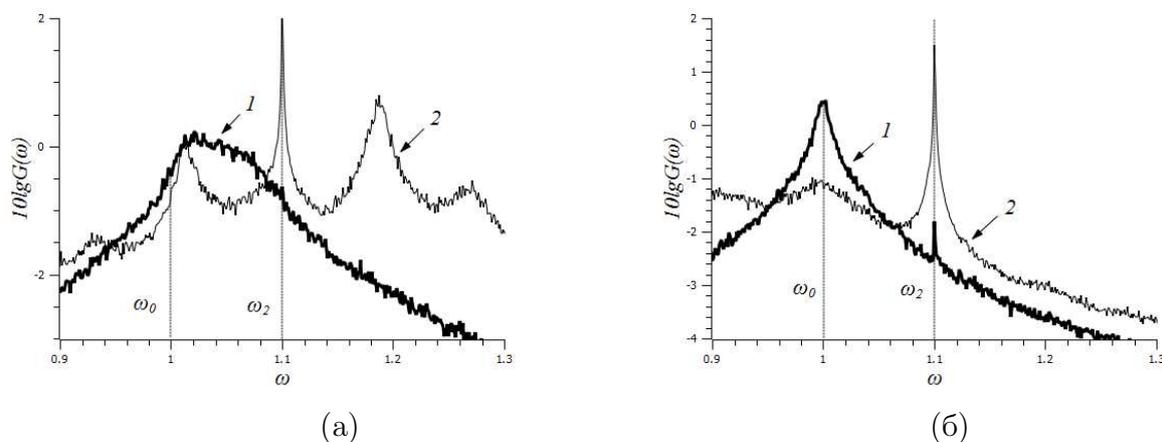


Рисунок 7 - Спектры мощности колебаний  $x(t)$  стохастического осциллятора (1)(а) и (2)(б) при аддитивном гармоническом воздействии на частоте  $\omega_2$ . Кривые 1 соответствуют амплитуде воздействия  $C = 0.001$ , а кривые 2 – амплитуде  $C = 0.05$ . Параметрическая накачка осуществляется гармоническим шумом (5) на второй гармонике собственной частоты осцилляторов. Для удобства сравнения спектральная плотность мощности колебаний  $G(\omega)$  в данном случае не нормировалась на максимальное значение

## 1.6 Выводы

В данном разделе представлены результаты исследований двух диссипативных параметрических стохастических осцилляторов с различным видом нелинейности. К параметрическим стохастическим осцилляторам относятся осцилляторы, параметры которых модулируются шумом. Энергия таких колебаний в присутствии диссипации целиком пополняется за счет источника шума. Было показано, что порог параметрической неустойчивости зависит от статистических характеристик шумового сигнала, особенно от его спектрального состава. Вид стохастического аттрактора и устойчивость траекторий определяются нелинейностью системы.

## 2 Анализ характеристик и бифуркаций стохастических систем в условиях аддитивного и мультипликативного воздействия шумом различной статистики

### 2.1 Введение

Вопрос о том, что собой представляют бифуркации в присутствии шума (стохастические бифуркации), как шум повлияет на бифуркации, имеющиеся в детерминированной модели системы и какие новые бифуркации и типы поведения он может вызвать являются весьма важными в силу двух причин: во-первых, шум всегда присутствует в любой реальной системе и, во-вторых, вблизи бифуркации система особенно чувствительна к действию шума, так как в бифуркационной точке нарушается свойство структурной устойчивости. Имеется немало работ, посвященных исследованию стохастических бифуркаций. Среди работ в данном направлении можно назвать известную монографию В. Хорстнемке и Р. Лефевра [3], а также книгу Л. Арнольда [7], одна из глав которой посвящена стохастическим бифуркациям. Однако достаточно полная общая теория до настоящего времени отсутствует. Это во многом связано с тем фактом, что стохастические бифуркации не обладают универсальностью локальных бифуркаций динамических систем, которые не зависят от конкретного вида уравнений, описывающих систему и функций задающих нелинейности. Влияние шума на одну и ту же бифуркацию в различных системах может быть существенно различно. Кроме того, важную роль играют характеристики шума, которые также могут быть разными.

Одной из типичных и важнейших в нелинейной динамике бифуркаций является бифуркация рождения предельного цикла (бифуркацию Андронова-Хопфа). С этой бифуркацией связано возникновение режима автоколебаний в любых периодических генераторах. Она может носить мягкий (суперкритический) и жесткий (субкритический) характер. В субкритическом случае автогенерация предшествует бифуркации и системе наблюдается бистабильность. Исследование влияния шума на переход к автоколебательному режиму представляет собой классическую задачу статистической радиофизики. Влияние шума на бифуркацию Андронова-Хопфа исследовалось в ряде работ, например в [8–15]. Тем не менее, в вопросе о влиянии шума генератор вблизи возникновения автогенерации остается много неясного. В ряду указанных работ отсутствует исследование влияния параметрического шума на режим бистабильности и бифуркацию Андронова-Хопфа в классической модели генератора Ван дер Поля с жестким возбуждением. Данный вопрос рассматривался в [14] для другой модели автогенератора – осциллятора Хопфа. Однако эта модель достаточно искусственна и не имеет прямого отношения к реальным автогенераторам, в то время как осциллятор Ван дер Поля, хотя и представляет собой идеализированную модель, но всё же модель полученную вом ножестве реальных задач. Кроме того, обычно исследования ограничиваются рамками квазигармонического анализа, либо проводятся численно. И тот и другой подход содержат возможные неточности: с одной стороны ква-

зигармонический анализ является приближенным и допустим только при сравнительно слабом шуме, с другой стороны любые численные методы имеют свои пределы точности. Таким образом, исследование стохастических бифуркаций требует сравнения результатов, полученных различными методами. Только детальное аналитическое и численное исследование и сопоставление результатов может позволить сделать выводы о характере влияния шума на бифуркационный переход, имеющий место в данной системе.

Данное исследование преследовало следующие цели: анализ стохастических бифуркаций в генераторе Ван дер Поля с жестким возбуждением при двух видах параметрического (мультипликативного шума); сопоставление результатов квазигармонического анализа с результатами численных экспериментов, что позволило бы установить, насколько можно доверять квазигармоническому анализу стохастических бифуркаций в системе с параметрическим шумом.

## 2.2 Модели генератора с параметрическим шумом и вывод укороченных стохастических уравнений

Будем рассматривать генератор Ван дер Поля с жестким возбуждением в присутствии шумовой модуляции одного из параметров: параметра возбуждения  $\varepsilon$  или частоты генератора (точнее ее квадрата). Соответственно, мы имеем две математические модели, задаваемые следующими стохастическими дифференциальными уравнениями (СДУ):

$$\ddot{x} + [\omega_0^2 + \sqrt{2D}n(t)]x = (\varepsilon + x^2 - x^4)\dot{x}; \quad (7)$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = (\varepsilon + \sqrt{2D}n(t) + x^2 - x^4)\dot{x}. \quad (8)$$

Уравнения (7) и (8) записаны для безразмерной переменной  $x$  и безразмерного времени  $t$ . Случайный сигнал  $n(t)$  представляет собой нормированный белый гауссов шум ( $\langle n(t) \rangle \equiv 0$ ,  $\langle n(t)n(t+\tau) \rangle = \delta(\tau)$  – функция Дирака),  $D$  – константа, задающая интенсивность шума,  $\omega_0$  – параметр, который в квазигармоническом режиме соответствует собственной частоте генератора. Полагалось, что  $\omega_0 = 1$ ).

Будем описывать поведение генератора динамическими переменными  $x$ ,  $y = \dot{x}$ . В отсутствие шума в генераторе имеют место следующие режимы и бифуркации. При  $\varepsilon > 0$  наблюдается режим генерации, которому соответствует устойчивый предельный цикл. В начале координат имеется неустойчивая точка равновесия (фокус). При  $\varepsilon = 0$  происходит субкритическая бифуркации Андронова-Хопфа, в результате которой, при переходе в область отрицательных значений  $\varepsilon$  из неустойчивого фокуса рождается неустойчивый предельный цикл. При этом фокус становится устойчивым. При  $-\frac{1}{8} < \varepsilon < 0$  имеет место режим бистабильности, соответствующий сосуществованию двух аттракторов – устойчивого предельного цикла и устойчивого фокуса в начале координат. Бассейны их притяжения разделены неустойчивым предельным циклом. При  $\varepsilon = -\frac{1}{8}$  происходит касательная бифуркация устойчивого и неустойчивого циклов, в результате которой они сливаются и

исчезают. При  $\varepsilon < -\frac{1}{8}$  единственным аттрактором системы является точка равновесия.

Для проведения приближенного теоретического анализа генератора с шумом будем предполагать квазигармонический характер колебаний. Тогда можно воспользоваться следующим представлением колебаний:

$$\begin{aligned}x(t) &= a(t) \cos \Phi(t), \\y(t) &= -a(t) \sin \Phi(t), \quad \Phi(t) = t + \varphi(t),\end{aligned}\tag{9}$$

где  $a(t)$  – мгновенная амплитуда колебаний, а  $\varphi(t)$  – флуктуация фазы. С помощью метода усреднения получим стохастические укороченные уравнения для  $a(t)$  и  $\varphi(t)$ . Новые переменные  $a(t)$  и  $\varphi(t)$  не являются независимыми, что учитывается дополнительным условием

### Вывод укороченных СДУ

Используя замену переменных (9) из уравнения (7) получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned}\dot{a} &= (\varepsilon + a^2 \cos^2 \Phi - a^4 \cos^4 \Phi) a \sin^2 \Phi + \sqrt{2D} a n(t) \sin \Phi \cos \Phi, \\ \dot{\varphi} &= (\varepsilon + a^2 \cos^2 \Phi - a^4 \cos^4 \Phi) a \sin \Phi \cos \Phi + \sqrt{2D} a n(t) \cos^2 \Phi.\end{aligned}\tag{10}$$

Производим преобразование тригонометрических функций и усредняем выражения (10) почленно за период  $T_0 = 2\pi/\omega_0 = 2\pi$ . При этом учитывается "медленность" функций  $a(t)$ ,  $\varphi(t)$  по сравнению с периодом колебаний. В результате усреднения приходим к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned}\dot{a} &= \frac{a}{2} \left( \varepsilon + \frac{a^2}{4} - \frac{a^4}{8} \right) + \frac{a}{2} \sqrt{2D} \xi_1(t, \varphi), \\ \dot{\varphi} &= \frac{\sqrt{2D}}{2} \xi_2(t, \varphi),\end{aligned}\tag{11}$$

где новые источники шума определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned}\xi_1(t, \varphi) &= \frac{1}{2\pi} \int_t^{t+2\pi} n(\theta) \sin 2\Phi(\theta) d\theta, \\ \xi_2(t, \varphi) &= \frac{1}{2\pi} \int_t^{t+2\pi} n(\theta) \cos 2\Phi(\theta) d\theta.\end{aligned}\tag{12}$$

Они характеризуются наличием двух масштабов времени: "быстрого" – в результате наличия множителя  $n(\theta)$ , описывающего некоррелированные случайные "толчки", которые испытывает система, и "медленного" – который определяется множителями  $\sin 2\Phi(\theta)$  и  $\cos 2\Phi(\theta)$ , представляющими собой квазигармонический шум в силу того, что случайная компонента фазы  $\varphi(t)$  является "медленным" случайным процессом.

## Преобразование сточников шума

Преобразуем источники шума, в соответствии с методами, изложенными в [16, 17]. Выражения (12) можно представить в виде

$$\begin{aligned}\xi_1(t, \varphi) &= N_1(t) \sin 2\varphi(t) + N_2(t) \cos 2\varphi(t), \\ \xi_2(t, \varphi) &= N_1(t) \cos 2\varphi(t) - N_2(t) \sin 2\varphi(t),\end{aligned}\quad (13)$$

где введены следующие случайные функции:

$$\begin{aligned}N_1(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_t^{t+2\pi} n(\theta) \cos 2\theta d\theta, \\ N_2(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_t^{t+2\pi} n(\theta) \sin 2\theta d\theta.\end{aligned}\quad (14)$$

Из определения следует, что  $N_1(t)$  и  $N_2(t)$  представляют собой совместно-гауссовы процессы с нулевыми средними значениями. Не сложно найти их корреляционные функции:

$$\Psi_{N_1}(t, t+\tau) = \langle N_1(t)N_1(t+\tau) \rangle = \begin{cases} \frac{1}{2(4\pi)^2} (8\pi + 4\tau + \sin 4t - \sin(4t + 4\tau)) \text{ при } -2\pi < \tau < 0, \\ \frac{1}{2(4\pi)^2} (8\pi - 4\tau - \sin 4t + \sin(4t + 4\tau)) \text{ при } 0 < \tau < 2\pi, \\ 0 \text{ при } |\tau| > 2\pi, \end{cases}\quad (15)$$

$$\psi_{N_2}(t, t+\tau) = \langle N_2(t)N_2(t+\tau) \rangle = \begin{cases} \frac{1}{2(4\pi)^2} (8\pi + 4\tau - \sin 4t + \sin(4t + 4\tau)) \text{ при } -2\pi < \tau < 0, \\ \frac{1}{2(4\pi)^2} (8\pi - 4\tau + \sin 4t - \sin(4t + 4\tau)) \text{ при } 0 < \tau < 2\pi, \\ 0 \text{ при } |\tau| > 2\pi, \end{cases}\quad (16)$$

а также взаимную корреляционную функцию

$$\psi_{N_1N_2}(t, t+\tau) = \langle N_1(t)N_2(t+\tau) \rangle = \begin{cases} \frac{1}{2(4\pi)^2} (\cos(4t + 4\tau) - \cos 4t) \text{ при } -2\pi < \tau < 0, \\ \frac{1}{2(4\pi)^2} (\cos 4t - \cos(4t + 4\tau)) \text{ при } 0 < \tau < 2\pi, \\ 0 \text{ при } |\tau| > 2\pi. \end{cases}\quad (17)$$

Интегралы от корреляционных функций по всем возможным значениям  $\tau$  в любой момент времени  $t$  имеют одни и те же значения:

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} \psi_{N_1}(t, t+\tau) d\tau \equiv \int_{-2\pi}^{2\pi} \psi_{N_2}(t, t+\tau) d\tau \equiv \frac{1}{2}, \quad \int_{-2\pi}^{2\pi} \psi_{N_1N_2}(t, t+\tau) d\tau \equiv 0.$$

При рассмотрении медленно меняющихся процессов  $\varphi(t)$  и  $a(t)$ , для которых изменения существенны только на интервалах времени, значительно превосходящих период  $T_0$ , можно заменить, источники  $N_1(t)$  и  $N_2(t)$  на эквивалентные гауссовы источники белого шума с тем же значением интеграла от корреляционной функции:  $N_1(t) \rightarrow N_1^{\text{б}}(t)$  и  $N_2(t) \rightarrow N_2^{\text{б}}(t)$ ,

где

$$\begin{aligned} \langle N_{1,2}^{\circ}(t) \rangle &\equiv 0, \\ \langle N_i^{\circ}(t)N_k^{\circ}(t+\tau) \rangle &= \frac{1}{2}\delta_{i,k}\delta(\tau), \quad i, k = 1, 2, \end{aligned} \quad (18)$$

где  $\delta_{i,k}$  - символ Кронеккера. Тогда вместо можно записать

$$\begin{aligned} \xi_1(t, \varphi) &= N_1^{\circ}(t) \sin 2\varphi(t) + N_2^{\circ}(t) \cos 2\varphi(t), \\ \xi_2(t, \varphi) &= N_1^{\circ}(t) \cos 2\varphi(t) - N_2^{\circ}(t) \sin 2\varphi(t), \end{aligned} \quad (19)$$

Разделим “медленные” и “быстрые” компоненты случайных процессов источники  $\xi_1(t, \varphi)$  и  $\xi_2(t, \varphi)$ :

$$\begin{aligned} \xi(t, \varphi) &= \langle \xi_1(t, \varphi)/a, \varphi \rangle + \tilde{\xi}_1(t), \\ \xi_2(t, \varphi) &= \langle \xi_2(t, \varphi)/a, \varphi \rangle + \tilde{\xi}_2(t), \end{aligned} \quad (20)$$

где  $\langle \xi_{1,2}(t, \varphi)/a, \varphi \rangle$  - условные средние, полученные при усреднении значений  $\xi_{1,2}$  по ансамблю случайных воздействий  $N_{1,2}^{\circ}(t)$  при выбранных реализациях  $a(t)$  и  $\varphi(t)$ , а  $\tilde{\xi}_{1,2}(t)$  - отклонения от условных средних. Условные средние являются медленно меняющимися случайными функциями, так как их зависимость от времени определяется через медленные функции  $a(t)$  и  $\varphi(t)$ . Флуктуации  $\tilde{\xi}_{1,2}(t)$  отражают действие “случайных толчков”, отклоняющих фазовую траекторию от заданного направления и представляют собой быстро меняющиеся компоненты случайных воздействий.

Найдем условные средние  $\langle \xi_1(t, \varphi)/a, \varphi \rangle$  и  $\langle \xi_2(t, \varphi)/a, \varphi \rangle$ . Для этого представим  $\varphi(t)$  в виде:  $\varphi(t) = \varphi(t') + \Delta\varphi$ , где  $t' = t - \Delta t$ . Интервал времени  $\Delta t$  предполагается малым по сравнению с характерным временем медленных процессов  $a(t)$  и  $\varphi(t)$ , так, что  $\Delta\varphi$  - малое приращение фазы (при этом на интервале  $\Delta t$  могут укладываться много периодов  $T_0$ ). Тогда можно представить

$$\begin{aligned} \xi_1(t, \varphi) &= N_1^{\circ}(t) \sin 2(\varphi(t') + \Delta\varphi) + N_2^{\circ}(t) \cos 2(\varphi(t') + \Delta\varphi) \approx \\ &\approx N_1^{\circ}(t) \sin 2\varphi(t') + 2N_1^{\circ}(t)\Delta\varphi \cos 2\varphi(t') + N_2^{\circ}(t) \cos 2\varphi(t') - 2N_2^{\circ}(t)\Delta\varphi \sin 2\varphi(t'). \end{aligned}$$

Учитывая, что  $\varphi(t')$  не зависит от  $N_1^{\circ}(t)$  и  $N_2^{\circ}(t)$ , так как предшествует им по времени, получаем

$$\langle \xi_1(t, \varphi)/a, \varphi \rangle \approx 2 \langle N_1^{\circ}(t)\Delta\varphi/a, \varphi \rangle \cos 2\varphi(t') - 2 \langle N_2^{\circ}(t)\Delta\varphi/a, \varphi \rangle \sin 2\varphi(t'). \quad (21)$$

Из второго уравнения системы (11) находим выражение для приращения фазы:

$$\Delta\varphi = \frac{\sqrt{2D}}{2} \int_{t'}^t [N_1^{\circ}(\theta) \cos 2\varphi(\theta) - N_2^{\circ}(\theta) \sin 2\varphi(\theta)] d\theta. \quad (22)$$

Из (21), (22) и (18) с учетом свойств функции Дирака получаем

$$\langle \xi_1(t, \varphi)/a, \varphi \rangle \approx \frac{\sqrt{2D}}{4} \sin^2 2\varphi(t) + \frac{\sqrt{2D}}{4} \cos^2 2\varphi(t) = \frac{\sqrt{2D}}{4}.$$

Аналогично можно получить:

$$\langle \xi_2(t, \varphi)/a, \varphi \rangle \approx 0.$$

Подставляя найденные условные средние в выражения (23) и вводя нормированные источники

$$n_1(t) = \sqrt{2}\tilde{\xi}_1(t), \quad n_2(t) = \sqrt{2}\tilde{\xi}_2(t),$$

приходим к представлению

$$\begin{aligned} \xi_1(t, \varphi) &= \frac{\sqrt{2D}}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}}n_1(t), \\ \xi_2(t, \varphi) &= \frac{1}{\sqrt{2}}n_2(t). \end{aligned} \quad (23)$$

Из (11) и (23) окончательно получаем следующие укороченные СДУ генератора:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{a}{2} \left( \varepsilon + \frac{D}{2} + \frac{a^2}{4} - \frac{a^4}{8} \right) + \frac{a}{2} \sqrt{D} n_1(t), \\ \dot{\varphi} &= \frac{\sqrt{D}}{2} n_2(t), \end{aligned} \quad (24)$$

При этом, пренебрегая в первом приближении медленными компонентами шума, можно считать что источники  $n_1(t)$  и  $n_2(t)$  – независимые источники нормированного гауссова белого шума.

Проведя аналогичные выкладки для (8), приходим к той же самой системе стохастических укороченных уравнений (24). Таким образом, в квазигармоническом приближении модуляция гауссовым белым шумом как параметра возбуждения, так и квадрата собственной частоты приводит к одним и тем же результатам. Различия в поведении двух моделей будут существенны в области параметров, где заметна ангармоничность генератора.

Отметим, что полученные уравнения для амплитуды и флуктуации фазы являются независимыми, причем фазовое уравнение описывает винеровский процесс с коэффициентом диффузии фазы  $\frac{D}{2}$ . Уравнение для амплитуды содержит мультипликативный шум, модулирующий параметр  $\varepsilon$ . Будем понимать это уравнение, как СДУ Стратоновича, так же как исходное уравнение генератора.

## 2.3 Теоретический анализ стохастических бифуркаций в рамках квазигармонического приближения

### Бифуркация состояния равновесия

Для анализа устойчивости состояния равновесия генератора в точке  $x = 0$ ,  $y = 0$  достаточно рассмотреть уравнение для амплитуды и проанализировать устойчивость решения  $a = 0$ , которая определяется ляпуновским показателем

$$\lambda(a = 0) = \left\langle \left. \frac{\partial \dot{a}}{\partial a} \right|_{a=0} \right\rangle,$$

где угловые скобки означают статистическое усреднение. С учетом (24), получаем

$$\lambda(a = 0) = \frac{1}{2} \left( \varepsilon + \frac{D}{2} \right).$$

Соответственно, условие бифуркации есть:

$$D = -2\varepsilon. \quad (25)$$

При  $D < -2\varepsilon$  точка равновесия в начале координат является устойчивой, при  $D > -2\varepsilon$  она неустойчива и наблюдаются стохастические колебания. Аналогичные результаты для точки равновесия получены и в случае генератора с мягким возбуждением [7, 10]. Эта бифуркация связана с потерей устойчивости и относится к динамическим бифуркациям (D-бифуркациям) [7]. Чтобы исследовать феноменологические бифуркации (P-бифуркации) обратимся к вероятностному распределению  $p(x, y)$ .

### Аналитическое выражение для стационарной плотности вероятности $p(x, y)$ и анализ феноменологических бифуркаций в генераторе в рамках квазигармонического приближения

Стохастическое уравнение Стратоновича для амплитуды колебаний описывает диффузионный процесс  $a(t)$ , характеризующийся коэффициентом сноса  $A_a(a) = \frac{a}{2}(\varepsilon + \frac{3D}{4} + \frac{a^2}{4} - \frac{a^4}{8})$  и коэффициентом диффузии  $B_a(a) = \frac{Da^2}{8}$ . Используя известное выражение для стационарной плотности вероятности однокомпонентного диффузионного процесса, получаем:

$$p(a) = \frac{C_0}{B_a} \exp \left\{ \int \frac{A_a(a)}{B_a(a)} da \right\} = Ca^\gamma \exp \left\{ -\frac{a^2}{2D} \left( \frac{a^2}{4} - 1 \right) \right\}, \quad (26)$$

где  $\gamma = \frac{4\varepsilon}{D} + 1$ ,  $C_0$  и  $C$  – нормировочные константы.

Второе уравнение системы (24) описывает нестационарный (винеровский) процесс. Однако, если ввести ограниченную фазу  $\phi(t) = \varphi(t) \pm 2\pi k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,  $\phi(t) \in [0, 2\pi]$ , то можно показать, что для нее существует стационарное распределение, являющееся рав-

номерным в рассматриваемом интервале значений:

$$p(\phi) = \frac{1}{2\pi}, \phi(t) \in [0, 2\pi]. \quad (27)$$

Учитывая замену (9) и независимость переменных  $a$  и  $\phi$ , которая следует из системы (24), получаем выражение для совместной плотности вероятности динамических переменных  $x$  и  $y$ :

$$p(x, y) = \frac{1}{a} p(a) p(\phi).$$

С учетом (26) и (27) имеем:

$$p(x, y) = N(x^2 + y^2)^\nu \exp \left\{ -\frac{x^2 + y^2}{2D} \left( \frac{x^2 + y^2}{D} - 1 \right) \right\}, \quad (28)$$

где  $\nu = \frac{2\varepsilon}{D}$ ,  $N$  – нормировочная константа. Частные производные функции  $p(x, y)$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(x, y)}{\partial x} &= N \frac{(x^2 + y^2)^{\nu-1}}{x} \left[ 2\nu + \frac{x^2 + y^2}{D} \left( 1 - \frac{x^2 + y^2}{2} \right) \right] e^{q(x, y)} \\ \frac{\partial p(x, y)}{\partial y} &= N \frac{(x^2 + y^2)^{\nu-1}}{y} \left[ 2\nu + \frac{x^2 + y^2}{D} \left( 1 - \frac{x^2 + y^2}{2} \right) \right] e^{q(x, y)}, \\ q(x, y) &= \left\{ -\frac{x^2 + y^2}{2D} \left( \frac{x^2 + y^2}{D} - 1 \right) \right\}. \end{aligned} \quad (29)$$

Из анализа выражений (28) и (29) получаем следующую картину перестроек стационарной плотности вероятности  $p(x, y)$  в области существования стохастических колебаний ( $D > -2\varepsilon$ ):

1. При  $\varepsilon < 0$  в начале координат  $x = 0$ ,  $y = 0$  плотность вероятности обращается в бесконечность. Значение  $\varepsilon = 0$  является бифуркационным. В этой точке поведение функции  $p(x, y)$  в начале координат качественно меняется, что соответствует первой Р-бифуркации.
2. При  $0 < \varepsilon < \frac{D}{4}$  в начале координат значение  $p(x, y)$  обращается в ноль, но производные терпят разрыв и гладкий минимум отсутствует. При  $\varepsilon = \frac{D}{4}$  наблюдается вторая Р-бифуркация, приводящая к возникновению гладкого минимума плотности вероятности в нуле координат.
3. При выполнении условий  $\varepsilon > -\frac{1}{8}$  независимо от интенсивности шума существует максимум плотности вероятности в точках "невозмущенного предельного цикла"  $x^2 + y^2 = a_0^2 = 1 + \sqrt{1 + 8\varepsilon}$ . Он возникает при  $\varepsilon = -\frac{1}{8}$ , что соответствует третьей Р-бифуркации в исследуемой системе, являющейся стохастическим аналогом касательной бифуркации циклов.

Бифуркационная диаграмма генератора (7)/(8), соответствующая квазигармоническому приближению, представлена на рисунке 8. На ней изображены линии рассмотренных вы-

ше бифуркаций и отмечены области с различным характером стационарной плотности вероятности. В области 1 система имеет устойчивую точку равновесия в начале координат и стохастические колебания затухают. Стационарная плотность вероятности есть функция Дирака  $\delta(x, y)$ . В областях 2 – 5 существуют стационарные стохастические колебания, которым соответствует качественно различный вид функции  $p(x, y)$ . На диаграмме представлены срезы двумерной плотности вероятности в плоскости  $y = 0$ , рассчитанные по формуле (28) и дающие представление о форме распределения, соответствующей различным отмеченным областям. При расчетах в соответствии с (28) нормировка (вычисление коэффициента  $N$ ) проводилась численно.

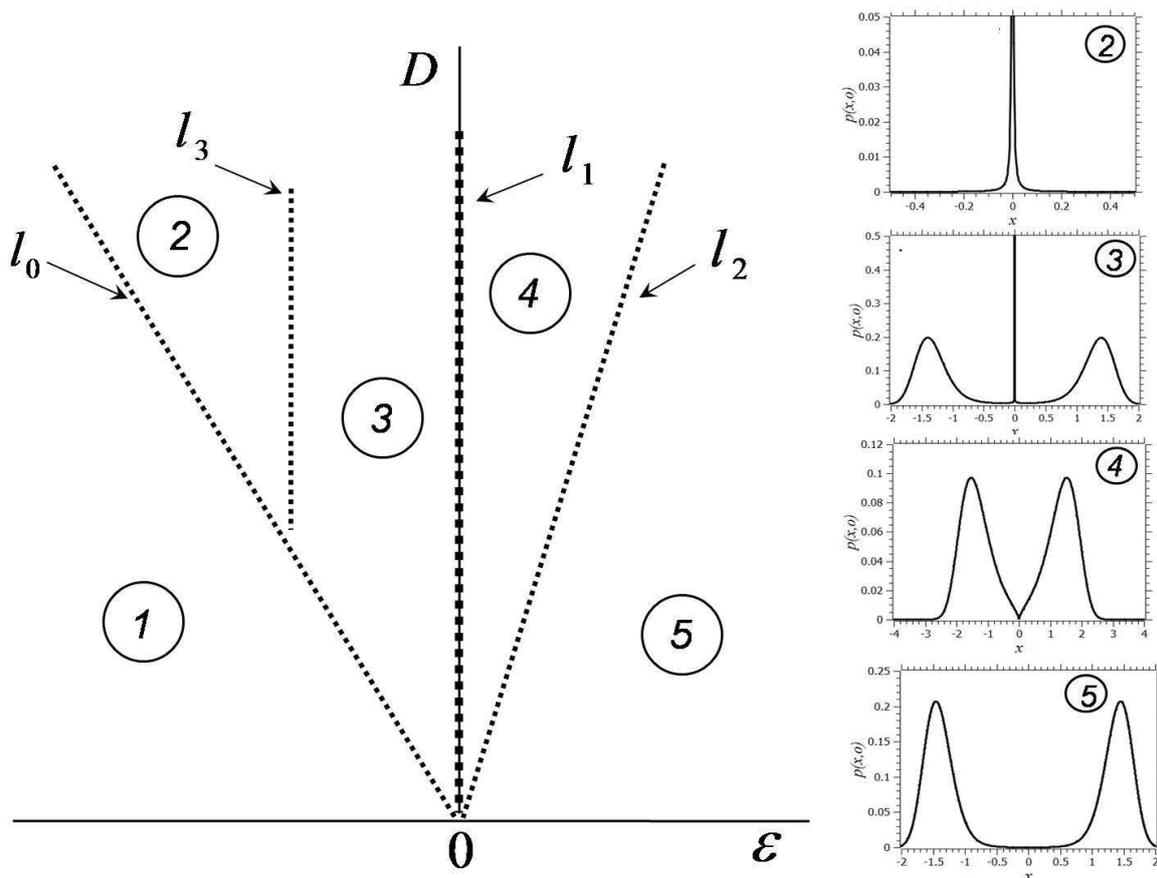


Рисунок 8 - Бифуркационная диаграмма генератора с жестким возбуждением при наличии мультипликативного гауссова белого шума, полученная аналитически в рамках квазигармонического приближения. Линия  $l_0$  ( $D = -2\varepsilon$ ) соответствует потере устойчивости точкой равновесия в начале координат и возникновению стохастических колебаний. Линии  $l_1$  ( $\varepsilon = 0$ ) и  $l_2$  ( $D = 4\varepsilon$ ) соответствуют первой и второй феноменологическим бифуркациям, связанным с качественным изменением поведения функции  $p(x, y)$  в начале координат. Линия  $l_3$  ( $\varepsilon = -\frac{1}{8}$ ) соответствует Р-бифуркации, связанной с появлением максимума распределения при  $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 + \sqrt{1 + 8\varepsilon}}$ . В области 1 система имеет устойчивую точку равновесия в начале координат и стохастические колебания затухают. Области 2 – 5 соответствуют стохастическим колебаниям с различным характером вероятностного распределения. Типичный вид функции  $p(x, y = 0)$  в различных областях представлен на диаграмме

## 2.4 Численное исследование системы стохастических уравнений

Модель (7) может быть представлена в виде следующей системы стохастических уравнений Стратоновича:

$$\dot{x} = y, \dot{y} = (\varepsilon + x^2 - x^4)y - [\omega_0^2 + \sqrt{2D}n(t)]x. \quad (30)$$

Соответственно, модель (8) можно переписать в виде:

$$\dot{x} = y, \dot{y} = (\varepsilon + \sqrt{2D}n(t) + x^2 - x^4)y - \omega_0^2x. \quad (31)$$

Для интегрирования стохастических уравнений использовался модифицированный метод Эйлера [18]. Поясним разностную схему на примере следующего стохастического уравнения первого порядка:

$$\dot{x} = f(x, t) + g(x, t)n(t),$$

где  $f(x, t)$  и  $g(x, t)$  – детерминированные непрерывные функции своих аргументов,  $n(t)$  – нормированный источник гауссова белого шума. Если данное СДУ является уравнением Стратоновича, то разностная схема имеет вид:

$$\begin{aligned} x(t+h) &= x + \frac{1}{2}(\Delta x + \Delta x'), \\ \Delta x &= f(x, t)h + g(x, t)\sqrt{h}\eta, \\ \Delta x' &= f(x + \Delta x, t + h)h + g(x + \Delta x, t + h)\sqrt{h}\eta, \end{aligned} \quad (32)$$

где  $x$  – значение переменной в момент времени  $t$ ,  $h$  – шаг интегрирования,  $\eta$  – величина, создаваемая на данном шаге интегрирования генератором некоррелированных случайных чисел со стандартным гауссовым распределением. В [18] доказана сходимость данной разностной схемы со скоростью  $h^2$ . При расчетах выбирался малый шаг интегрирования  $h = 0.001$ , что обеспечивало достаточную точность интегрирования.

Численно исследовалась устойчивость точки равновесия систем (30) и (31) в начале координат. Для этого рассчитывался старший ляпуновский показатель траектории  $x = 0$ ,  $y = 0$ . Полученные результаты полностью соответствуют условию D-бифуркации, найденному при квазигармоническом анализе, что свидетельствует о корректности метода интегрирования.

Для дополнительной проверки надежности численной схемы исследовалось первое уравнение укороченной системы (24), описывающее мгновенную амплитуду стохастических колебаний. По данным интегрирования в установившемся режиме строилась стационарная плотность вероятности  $p(a)$ . Сравнение численных результатов и расчета по формуле (26) дает практически полное совпадение значений (рис.9а). Таким образом, численное интегрирование и статистическая обработка данных проводятся корректно. Однако если воспользоваться результатами интегрирования систем (30) и (30) и вычислить плотность вероятности мгновенной амплитуды  $a(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$ , то при тех же значениях

параметров  $\varepsilon$  и  $D$  результат будет иным (рис.9б).

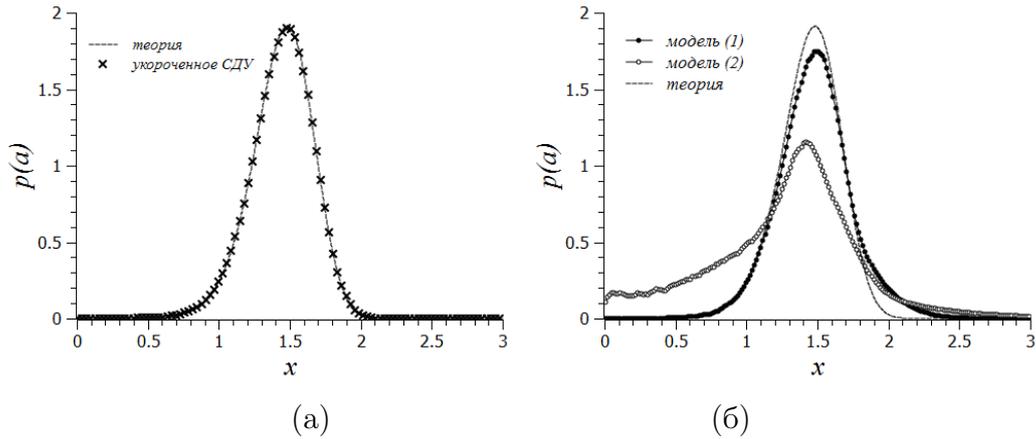


Рисунок 9 - Распределения мгновенной амплитуды, рассчитанные разными методами: а – сравнение распределения  $p(a)$ , полученного при численном интегрировании укороченного уравнения для амплитуды с теоретической кривой (26) (нормировочный коэффициент  $C$  определялся численно); б – сравнение результатов, полученных при численном исследовании моделей (7) и (8) и теоретического распределения (26). Расчеты проводились при  $\varepsilon = 0.03$  и  $D = 0.1$

Распределения  $p(a)$ , полученные численно для двух моделей, существенно отличаются друг от друга и оба они отличаются от результатов с квазигармонической теорией. Причем, в случае первой модели (7) максимальное расхождение с теорией имеет место для больших амплитуд (справа от максимума распределения), а для второй модели (8) возникает существенное отклонение от теории для малых амплитуд (в окрестности нуля). Такое несовпадение нельзя объяснить только зависимостью амплитуды от фазы  $\phi$ , которая может быть различна для двух моделей и не учитывается квазигармонической теорией. Как показывают расчеты, при выбранных значениях  $\varepsilon$  и  $D$  эта зависимость выражена слабо. Можно уверенно сделать вывод, что квазигармоническое приближение при выбранных параметрах не описывает адекватным образом поведение исследуемых моделей генератора с шумом, уже потому, что "не чувствует" различий в этом поведении, ощутимых при численном интегрировании СДУ.

на рисунке 10 приводится сравнение графиков распределения  $p(x, 0)$  при  $\varepsilon = 0.03$ ,  $D = 0.1$ , построенных по данным численного интегрирования (30) и (31), которые сравниваются с теоретическим результатом (28). Можно отметить значительное расхождение результатов, причем имеет место качественное отличие в характере теоретического распределения и распределения, полученного для модели (8) численно. Для численно полученного распределения в начале координат имеет место высокий пик. Можно предположить, что значение параметра  $\varepsilon$ , соответствующее первой Р-бифуркации для модели (31) на самом деле больше нуля и увеличивается с ростом интенсивности шума.

Распределения  $p(x, 0)$  при  $\varepsilon = 0.01$ ,  $D = 0.005$  представлены на рисунке 11. В этом случае качественное несоответствие теории и численного исследования модели (8) не наблюдается (рис.11б), однако количественные различия заметны. Для первой модели (рис.11а) они в этом случае даже больше, чем для второй. Следует заметить, что выбранная точка

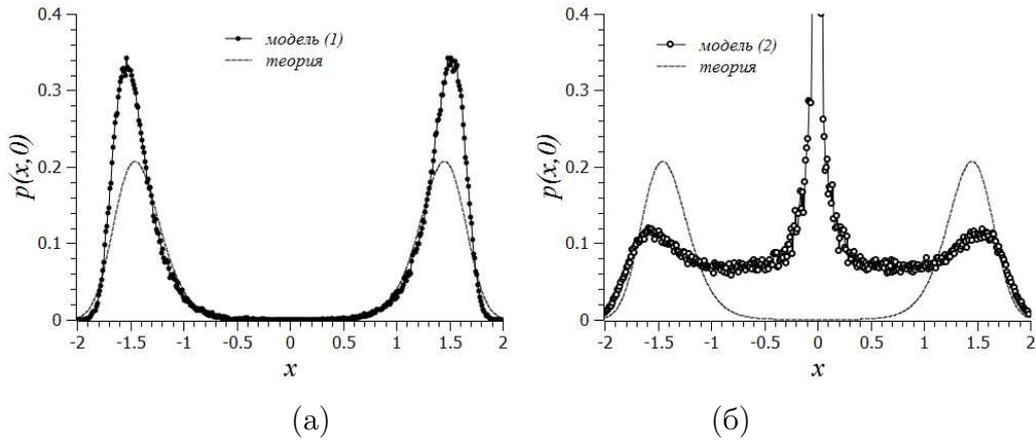


Рисунок 10 - Распределения  $p(x, 0)$  при  $\varepsilon = 0.03$ ,  $D = 0.1$ , полученные численно для моделей (7) (а) и (8) (б). Пунктирной линией на обоих графиках нанесена теоретическая кривая, построенная по формуле (28) (нормировочный коэффициент  $N$  определялся численно)

на плоскости параметров  $\varepsilon$ ,  $D$  в данном случае сильно удалена от теоретических бифуркационных линий. Этим, возможно, объясняется, что все полученные кривые  $p(x, 0)$  носят один характер и соответствуют режиму сравнительно слабо зашумленных автоколебаний.

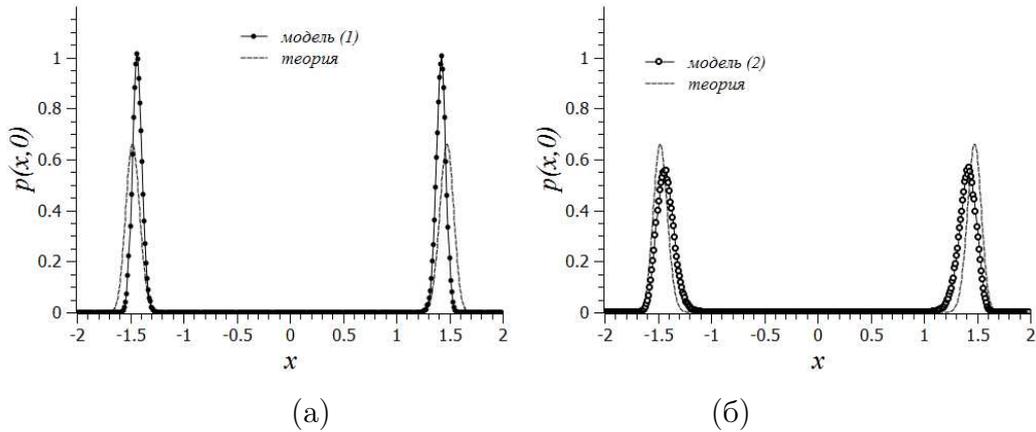


Рисунок 11 - Распределения  $p(x, 0)$  при  $\varepsilon = 0.01$ ,  $D = 0.005$ , полученные численно для моделей (7) (а) и (8) (б). Пунктирной линией на обоих графиках нанесена теоретическая кривая, построенная по формуле (28)

## 2.5 Выводы

Теоретический анализ генератора Ван дер Поля с жестким возбуждением в рамках квазигармонического приближения приводит к укороченной модели для мгновенной амплитуды и флуктуационной компоненты фазы, которая оказывается одинаковой при двух типах воздействия на систему мультипликативного шума: при случайной модуляции параметра возбуждения и при случайной модуляции квадрата собственной частоты. С помощью полученной укороченной системы был проведен полный бифуркационный анализ

генератора. Он выявил наличие динамической бифуркации, приводящей к потере устойчивости точкой равновесия в нуле и возникновению стохастических колебаний, а также трех феноменологических бифуркаций, состоящих в перестройке вероятностного распределения  $p(x, y)$ . Бифуркация потери устойчивости точкой равновесия и две Р-бифуркации, связанные с изменением характера поведения распределения в окрестности нуля, подобны аналогичным бифуркациям, наблюдаемым в укороченной модели генератора с мягким возбуждением [7, 10]. С этой точки зрения субкритическая бифуркация Андронова-Хопфа в присутствии мультипликативного шума мало отличается от соответствующей суперкритической бифуркации. Различие состоит в том, что максимум распределения, соответствующий предельному циклу, при суперкритической бифуркации возникает при  $\varepsilon = 0$  одновременно с изменением значения плотности вероятности в начале координат с  $\infty$  на 0, а при субкритической бифуркации он возникает при  $\varepsilon = -1/8$ , что соответствует касательной бифуркации циклов в детерминированной системе.

Важным результатом работы является установление несоответствия квазигармонической теории с данными численных экспериментов. Распределения вероятности, численно полученные для двух моделей шума, сильно отличались от теоретического распределения, а также были различны между собой. Эти отличия при некоторых значениях параметров носили качественный характер. Таким образом, полученная теоретически бифуркационная диаграмма не отражает в достаточной степени реального поведения генератора с шумовой модуляцией параметров. Существенные отличия могут наблюдаться даже при сравнительно слабом шуме. Для каждого из способов шумовой модуляции параметра генератора бифуркационные линии располагаются по-своему и построение полной бифуркационной картины требуется проведение дополнительных численных исследований.

### **3 Разработка теории взаимодействия заряженных частиц с солитонами в решетке связанных нелинейных осцилляторов**

#### **3.1 Введение**

В отчете по предыдущему этапу настоящего проекта была разработана адиабатическая теория движения заряженных частиц под действием поляризационного потенциала, индуцированного термическими солитонами в нагретой нелинейной решетке связанных осциллирующих (молекулярных) частиц. Взаимодействие электрона с решеткой также анализировалось в рамках модели, основанной на уравнении Паули, выведенном из соответствующего уравнения Шредингера (см. раздел “Разработка адиабатической теории транспорта заряженных частиц в нагреваемой решетке взаимосвязанных нелинейных осцилляторов”). Оба эти подхода хороши для исследования проблемы проводимости, когда требуется определить наиболее вероятное поведение электрона (или усредненное по ансамблю большого количества частиц с разными начальными условиями). Однако во

многих случаях приходится рассматривать поведение одиночного электрона с заданными начальными условиями (подобные задачи возникают, например, при исследовании обменных процессов в биологических молекулах). Для одномерных решеток (цепочек) такие проблемы исследуются в рамках известной модели сильной связи (МСС). Однако для двумерных систем (молекулярных слоев) работы с привлечением аналогичной модели практически неизвестны. Поэтому в настоящем разделе представлены результаты разработки двумерной модели сильной связи и описываются и анализируются результаты численного моделирования поведения заряженной частицы, полученные в рамках этой модели.

### 3.2 Двумерная модель сильной связи для описания транспорта заряда в ансамбле взаимодействующих частиц

Как известно, в модели сильной связи предполагается что заряженная частица (пусть в дальнейшем для простоты обозначаемая как электрон, как это обычно и бывает, хотя не исключается и транспорт более сложных (агрегатных) частиц) может дислоцироваться только на частицах решетки и “прыгать” с одной частицы на другую (поэтому такой тип проводимости часто называют прыжковым). В этом случае волновая функция электрона является дискретной, а квадрат модуля ее компонента  $p_n = |c_n|^2$  определяет вероятность обнаружить электрон дислоцированным на  $n$ -ой частице решетки. В одномерной решетке (цепочке) влияние на эволюцию  $n$ -ого компонента волновой функции оказывают только два его соседа, справа и слева. Влиянием “несоседей” обычно пренебрегается, поскольку считается, что они достаточно далеко расположены (на расстояние  $\geq 2\sigma$ , где  $\sigma$  - постоянная решетки, т.е. среднее (равновесное) расстояние между частицами решетки) и к тому же их влияние экранируется ближайшими соседями, даже если они подходят к ним близко. Если следовать этой логике, то при обобщении одномерной модели на двумерную необходимо для каждого типа решетки с разной геометрией (с разным количеством соседей и разным расположением их в пространстве) рассматривать отдельную модель. Но даже в этом случае приходится дополнительно предполагать, что смещение частиц от положения равновесия является маленьким, т.е. геометрия решетки практически не изменяется в процессе эволюции. Однако в случае “мягкой” решетки при достаточно большой энергии возбуждения это положение как раз нарушается. Поэтому для реализации поставленных целей была разработана модель “ансамблевого” типа, в рамках которой предполагается, что каждый  $n$ -ый компонент волновой функции испытывает влияние любого другого  $k$ -го компонента, если расстояние между частицами с номерами  $n$  и  $k$ , соответственно, на которых они дислоцируются, не превышает некоторого заданного расстояния  $r_{el}$ . Такая концепция соответствует принципам разработанной в предыдущих разделах модели взаимодействия частиц решетки. Они также предполагаются взаимодействующими, если расстояния между ними не превышает так называемого радиуса экранирования, определяющего характерный пространственный масштаб потенциала взаимодействия частиц решетки (потенциала Морзе в рассматриваемом случае). Для простоты будем считать, что характерный масштаб сил связи электрона и решетки равен радиусу экранирования, кото-

рый обычно выбирается равным  $1.5\sigma$ . Такой выбор представляется разумным, поскольку при рассматриваемых параметрах жесткости оба потенциала на таком расстоянии спадают до значений, которые могут действительно считаться пренебрежимо малыми. К тому же такой выбор характерного размера обеспечивает соответствие разработанной модели “ансамблевого” типа моделям ”решеточного“ типа в режимах с небольшим уровнем энергии, когда частицы не отклоняются сильно от положений равновесия. Действительно, в одномерной решетке ближайшие ”соседи” расположены на расстоянии  $\sigma$ , а следующие - на расстоянии  $2\sigma$ ; в квадратичной ближайшие соседи также расположены на расстоянии  $\sigma$  и учитывается также влияние диагональных элементов с характерным расстоянием  $\sqrt{2}\sigma$ , а уже более удаленные на расстояние  $2\sigma$  элементы не принимаются во внимание. Что касается наиболее устойчивой треугольной решетки с минимальной потенциальной энергии, которая в основном рассматривается в настоящей работе, то в ней также ближайшие 6 соседей каждой частицы расположены на расстоянии  $\sigma$ , а частицы следующего слоя, расположенные на расстоянии  $(\sqrt{3}/2)\sigma$ , уже не оказывают влияния на взаимодействие при малых энергиях (смещениях) частиц. Однако при увеличении энергии и смещении более чем на  $0.2\sigma$  их влияние в модели начинает приниматься во внимание. С учетом сказанного компонент Гамильтониана, соответствующий взаимодействию решетки и электрона, который в квазиклассическом приближении в общем случае (в случае учета влияния всех компонентов, независимо от расстояния между ними) записывается в виде

$$H_{el} = \sum_n E_n(Z_n)|c_n|^2 - V_0 e^{\alpha b \sigma} \sum_n \operatorname{Re}[c_n \sum_{m \neq n} c_m^* e^{-\alpha|Z_n - Z_m|}], \quad (33)$$

теперь переписывается в форме

$$H_{el} = \sum_n E_n(Z_n)|c_n|^2 - V_0 e^{\alpha b \sigma} \sum_n \operatorname{Re}[c_n \sum_{m \neq n, |Z_m - Z_n| < 1.5} c_m^* e^{-\alpha|Z_n - Z_m|}]. \quad (34)$$

Здесь  $Z_n = x_n + iy_n$  - нормированная на  $\sigma$  комплексная координата частицы решетки,  $V = V_0 e^{\alpha r_{nm}}$  - коэффициент (нелинейной) связи  $n$ -ого и  $m$ -ого компонентов волновой функции электрона,  $E_n|Z_n|$  определяет собственную энергию электрона, причем в рассматриваемой однородной решетке все компоненты  $E_n|Z_n|$  одинаковы и постоянны и без потери общности могут быть положены равными нулю. Дифференцируя последний Гамильтониан, получим дискретный аналог уравнения Шредингера, описывающего в данном случае эволюцию  $n$ -ого компонента волновой функции электрона с учетом нелинейной связи с решеткой (через смещения  $Z_n$ )

$$\frac{dc_n}{dt} = j\tau e^{\alpha b \sigma} \sum_{m \neq n, |Z_n - Z_m| < 1.5} [c_m e^{-\alpha|Z_n - Z_m|}] \quad (35)$$

В свою очередь в уравнениях движения появляется дополнительное слагаемое, учитывающее влияние электрона на динамику частиц решетки, поэтому уравнение движения

выглядит теперь следующим образом

$$\frac{d^2 Z_n}{dt^2} = \sum_{m \neq n, |Z_n - Z_m| < 1.5} [e^{b\sigma - |Z_n - Z_m|} (1 - e^{b\sigma - |Z_n - Z_m|}) + 2\alpha V_0 e^{\alpha(b\sigma - |Z_n - Z_m|)} \operatorname{Re}(c_n c_m^*)] \frac{Z_n - Z_m}{|Z_n - Z_m|} \quad (36)$$

В настоящем разделе не ставится цель исследовать взаимодействие электрона с термическими солитонами, поэтому решетка предполагается “холодной”, а следовательно, в уравнение движения не нужно включать слагаемые, имитирующие влияние нагретой внешней среды. Таким образом, эволюция частиц описывается уравнением движения Ньютона, а не стохастическим уравнением Ланжевена, как это было в предыдущем разделе. Образующие самосогласованную систему уравнения (3) и (4) решаются численно методом Рунге-Кутты 4-го порядка. На каждом шаге интегрирования определяются координаты  $Z_n$  и скорости  $V_n = dZ_n/dt$  каждой из частиц, на основании которых строятся распределение плотности частиц  $\rho(Z)$  (по методике, описанной в отчете по предыдущему этапу работы), а также компоненты  $c_n$ , позволяющие рассчитать распределение плотности вероятности  $p(Z)$ . Последнее строится способом, аналогичным тому, которым строится плотность распределения частиц решетки, а именно, вместо дискретного распределения  $p_n = |c_n|^2$ , в котором вероятности найти частицу определены только в точках дислокации точечных частиц решетки, предполагается, что каждый компонент волновой функции порождает в пространстве маленькую область с ненулевой вероятностью обнаружить в ней электрон. Эта область задается опять Гауссовой функцией с примерно тем же значением характерной ширины, что функция Гаусса, служащая для описания распределения плотности одиночной частицы в пространстве. При решении используются периодические граничные условия, при этом размеры ячейки моделирования выбираются, исходя из геометрии исследуемой решетки. В случае квадратичной решетки с простейшей геометрией  $L_x = L_y$ , а для треугольной решетки  $L_y = (\sqrt{3}/2)L_x$ . Начальные условия для частиц решетки зависят от характера исследуемых возбуждений. В простейшем случае можно полагать, что происходит возбуждение квазиодномерных возбуждений, распространяющихся вдоль осей решетки. Как было показано на предыдущих этапах исследований, при малых энергиях такие возбуждения (фононы) быстро затухают за счет рассеивания энергии в смежные слои, однако с увеличением энергии доля рассеиваемой энергии (“потерь”) падает, а время их жизни растет. Поэтому представляется, что они в состоянии захватывать внешние частицы, образуя с ними связанные состояния (солитроны) с достаточно большим временем жизни. Чтобы показать это, проанализируем результаты численного моделирования.

### 3.3 Захват и транспорт частиц солитон-подобными квазиодномерными возбуждениями в треугольной решетке с Морзе потенциалом

Отметим, что имея данные о координатах всех  $N$  частиц (точечных масс в рассматриваемой модели) в решетке с периодическими граничными условиями в данный момент

времени, можно рассчитать, как уже было показано на предыдущих этапах исследования, функцию распределения плотности частиц по формуле

$$\rho(Z, t) = \sum_{n, |Z-Z_n| < 1.5\sigma} e^{-\frac{|Z-Z_n(t)|^2}{2\lambda^2}}, \quad (37)$$

полагая, что каждая частица на самом деле не является точечной, а занимает в пространстве (в данном случае - на плоскости) некоторый объем, причем плотность распределения массы в этом объеме уменьшается с удалением от центра частицы в соответствии с функцией Гаусса. Заметим, что параметр  $\lambda$  определяет размер области локализации частицы и выбирается таким образом, что в невозмущенном состоянии распределение плотности вблизи каждой частицы выглядело бы так, как если эта частица была единственной в пространстве. Аналогичным образом предполагается, что дискретные компоненты  $|c_n|^2$  также могут быть интерпретированы как распределенные в пространстве (на плоскости) по закону Гаусса с соответствующим образом выбранным параметре  $\lambda_{el}$ .

Рассмотрим теперь результаты моделирования взаимодействия электрона с возбужденными солитоноподобными волнами в треугольной решетке, состоящей из 400 частиц, связанных потенциальными силами Морзе. Размеры решетки  $20 \times 20(\sqrt{3}/2)$  соответствуют равновесному расположению частиц при отсутствии возмущений, т.е. состоянию с минимальным значением потенциальной энергии. Как было показано на предыдущих этапах исследований, наиболее перспективными носителями заряженных внешних частиц представляются квази-одномерные солитоноподобные возмущения, распространяющиеся в выделенных цепях решетки вдоль ее кристаллографических осей (в дальнейшем для простоты - солитоны). Их пространственная форма и закон эволюции во времени могут быть заданы формулой, описывющей солитон Тоды, но с другим выбором параметров, определяющих связь между их энергией, скоростью и шириной, как это было сделано на предыдущем этапе. Однако в настоящем разделе используется другой способ задания квази-одномерных солитонов, более адекватный с физической точки зрения и одновременно более простой для реализации численного моделирования. Предполагается, что в начальный момент времени одна из частиц получает импульс (начальную скорость  $v_0$ ) вдоль одной из осей решетки (для определенности - вдоль оси  $x$ , если специально не оговаривается другое). При относительно небольшом значении  $v_0$  происходит возбуждение пакета фононов (линейных волн) решетки, причем распространяющихся как в направлении, задаваемом скоростью  $v_0$ , так и в противоположном. Однако в определенном диапазоне значений начальной скорости происходит формирование одного солитона, сопровождающееся возбуждением фононов с пренебрежимо малой, по сравнению с энергией солитона, энергией. Характерное время формирования солитона (время перехода модуляции по скорости в модуляцию по плотности)  $t \sim \sigma/v_0$ . Описанные особенности возбуждения солитона начальным импульсом проиллюстрированы на рисунке 12, где показано начальное распределение модуля скорости в решетке  $|v(x, y)|$  (одна из частиц, с координатами  $x \sim 3, y \sim 9$  имеет начальную скорость  $v_0 = 2$ )(а), распределение модуля скорости

$|v(x, y)|$  в конце моделирования при  $t = 3$  (б), а также эволюция возмущений плотности за время  $\Delta t = 3$ . Нетрудно видеть, что начальная модуляция скорости формирует квази-одномерный солитон, бегущий вдоль оси с малыми потерями энергии на возбуждение побочных (паразитных для рассматриваемого процесса) колебаний как в “своей” цепочке, так и в смежных. Отметим сразу, что энергия взаимодействия электрона с этим возмущением мала по сравнению с энергией самого возмущения, поэтому представленная картина меняется мало и в случае взаимодействия. В дальнейшем будет предполагаться, что в большинстве компьютерных экспериментов, описанных в этом разделе, изменяются начальные условия и параметры взаимодействия для электрона, а солитон возбуждается такой же, как представлен на 12, если не оговаривается другое.

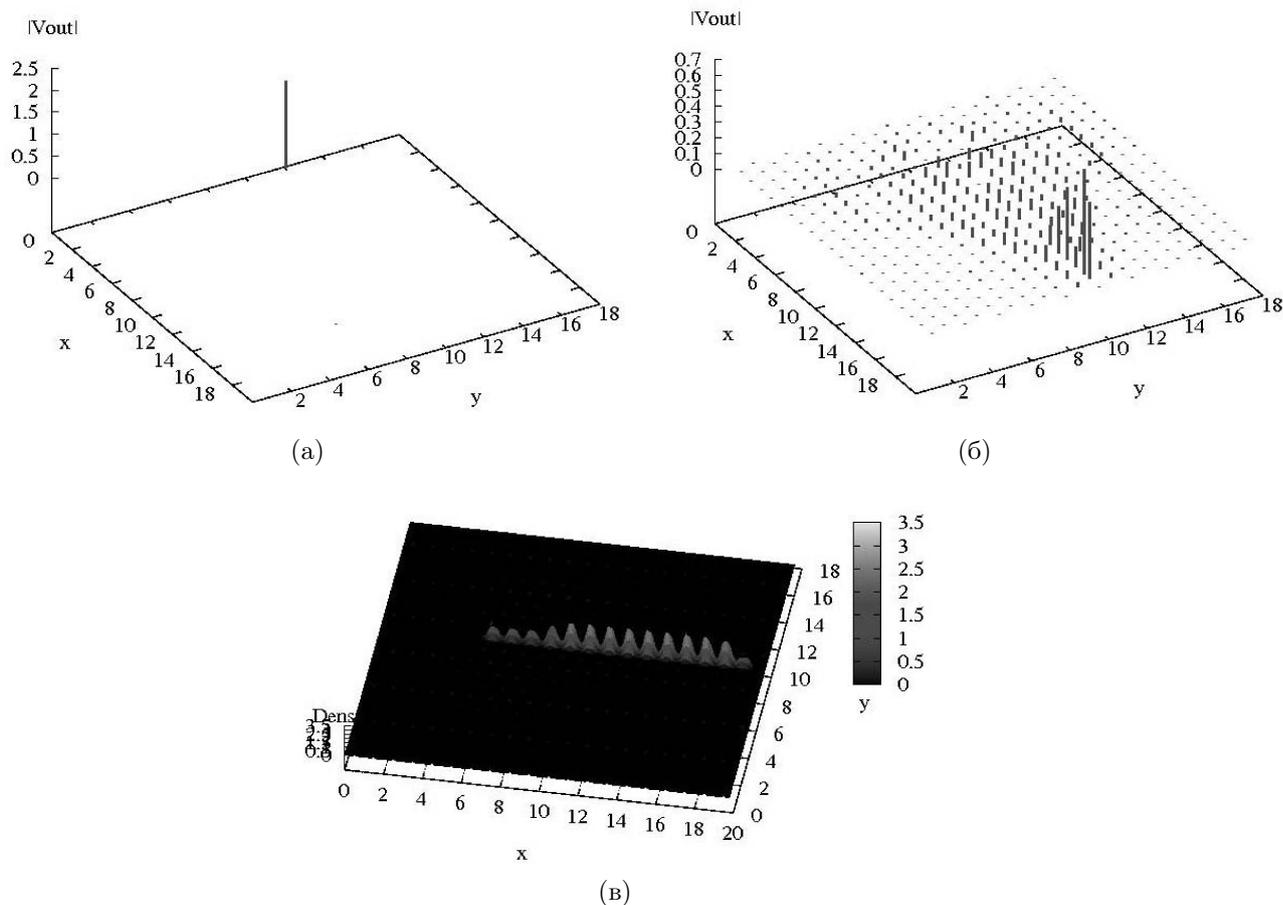


Рисунок 12 - Распределения (сверху вниз) модулей скорости частиц в начальный момент времени и при  $t = 3$ , а также эволюция возмущений плотности в течение времени  $\Delta t = 3$ .  $N = 400$ ,  $b\sigma = 4$ ,  $v_0 = 2$ .

Проанализируем теперь эволюцию функции распределения плотности вероятности  $p_n$  обнаружить электрон на  $n$ -том сайте решетки в условиях, когда первоначально он дислоцирован на одной частице решетки, в той же цепочке, по которой распространяется описанный выше солитон, но несколько впереди (при  $y = 5$ ) солитона (рисунки 13, 14). Поскольку эволюция волновой функции происходит намного быстрее, чем возмущений в решетке (напомним, разница темпов эволюции задается параметром  $\tau$ , который при численных расчетах задавался равным 10), то в течение времени пока первоначально локали-

зованная волновая функция “не чувствует” возбужденного солитона, она эволюционирует как в невозмущенной решетке, причем в первые мгновения она не “чувствует” и границ ячейки моделирования (рисунок 13, а,б). Однако затем формируется сложная интерференционная картина, представляющая собой суперпозицию собственных мод прямоугольной ячейки моделирования (рисунок 13, в,г), а после того, как солитон оказывается в состоянии сильно взаимодействовать с электроном (рисунок 13, д), происходит быстрый захват и локализация электрона на солитоне (рисунок 13, е), после чего они движутся вместе со скоростью солитона (рисунок 13, ж). Нетрудно видеть, что за время  $t = 6$  (и, естественно, захваченный им электрон) проходят расстояние 14, т.е. его скорость составляет 2.3 (в единицах скорости звука в одномерной решетке(цепочке)). Поскольку скорость звука в треугольной решетке составляет по оценкам, по крайней мере для плоских волн, 1.2, то ясно, что рассматриваемый солитон является сверхзвуковым. Таким образом, можно сделать вывод, что в двумерных решетках, как и в одномерных, возможно формирование связанных состояний “солитон-электрон” - солитонов, движущихся со сверхзвуковой скоростью и обеспечивающих перенос заряженных частиц, как одиночных, так в общем случае и ансамблей, вдоль решетки.

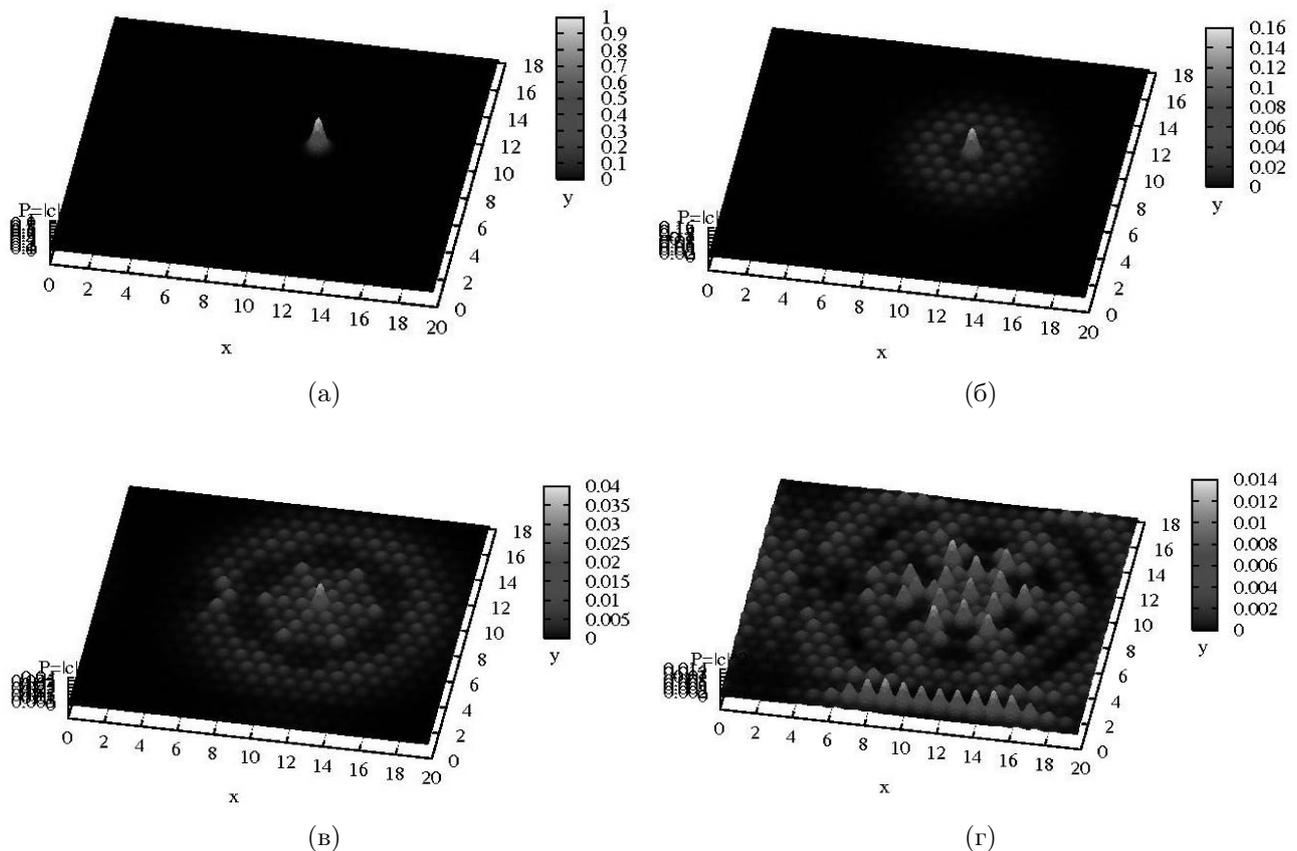


Рисунок 13 - Распределение плотности вероятности электрона в моменты времени (сверху вниз)  $t=0, 0.1, 0.2, 0.3$ .  $N = 400, b\sigma = 4, V = 1, \alpha = 1.5$

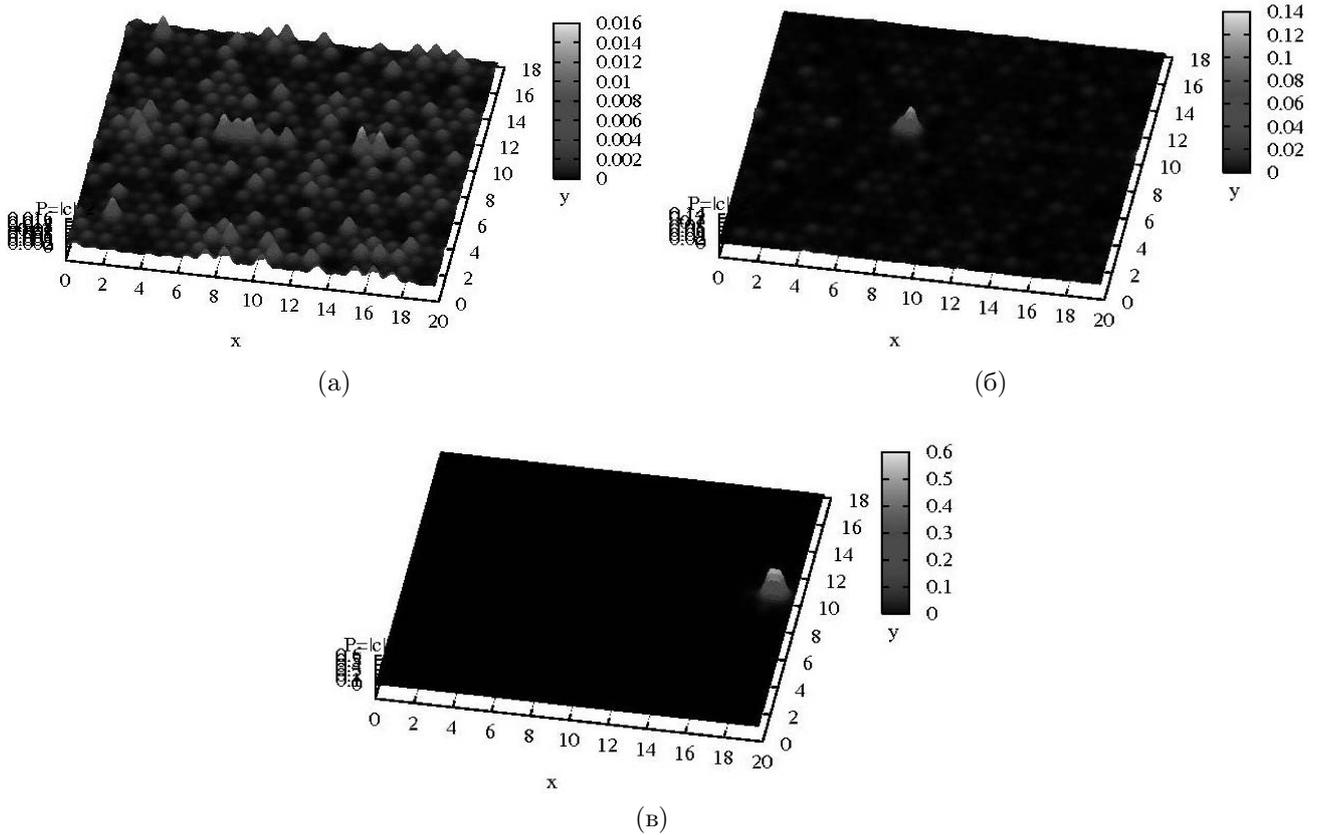


Рисунок 14 - Распределение плотности вероятности электрона в моменты времени (сверху вниз)  $t=0.4, 1, 6$ .  $N = 400, b\sigma = 4, V = 1, \alpha = 1.5$

### 3.4 Факторы, ограничивающие формирование эффективных солектронов

В численных экспериментах, описанных выше, значения параметров выбирались таким образом, чтобы обеспечить высокую эффективность взаимодействия электрона с решеткой. В реальных системах, как можно предполагать, такие условия реализуются не всегда. Поэтому важно проанализировать влияние различных факторов на возможность формирования солектронов и их стабильность, определяющую их время жизни и, следовательно, их эффективность как элементов механизма транспорта заряда. Рассмотрим влияние наиболее важных факторов.

1) Влияние энергии солитона. Как уже было показано ранее, если энергия солитона (начальная скорость  $v_0$ ) недостаточно велика, то он сильно “излучает” энергию в смежные слои, его фронт быстро приобретает подково-образную форму, подобно солитону Кадомцева-Петвиашвили, но затем солитон исчезает. Такой солитон способен захватить электрон, волновая функция которого на время также приобретает подково-образную форму, однако с потерей энергии солитона такой подково-образный солектрон разрушается. Типичные картины распределения модуля скорости частиц решетки и распределения вероятности электрона для стадии существования связанного состояния приведены на рисунке 15 для тех же значений параметров, что и на рисунках 13 и 14, но при значении

начальной скорости  $v_0 = 0.8$ , т.е. при энергии солитона примерно в 6 раз меньшей, чем у рассмотренного выше. Результаты серии симуляций, в которых варьировалось значение начальной скорости (при неизменных значениях остальных параметров), показывают, что существует ограниченный с обеих сторон диапазон значений начальной энергии, при которой образуются солитоны и солектроны с достаточно высоким временем жизни.

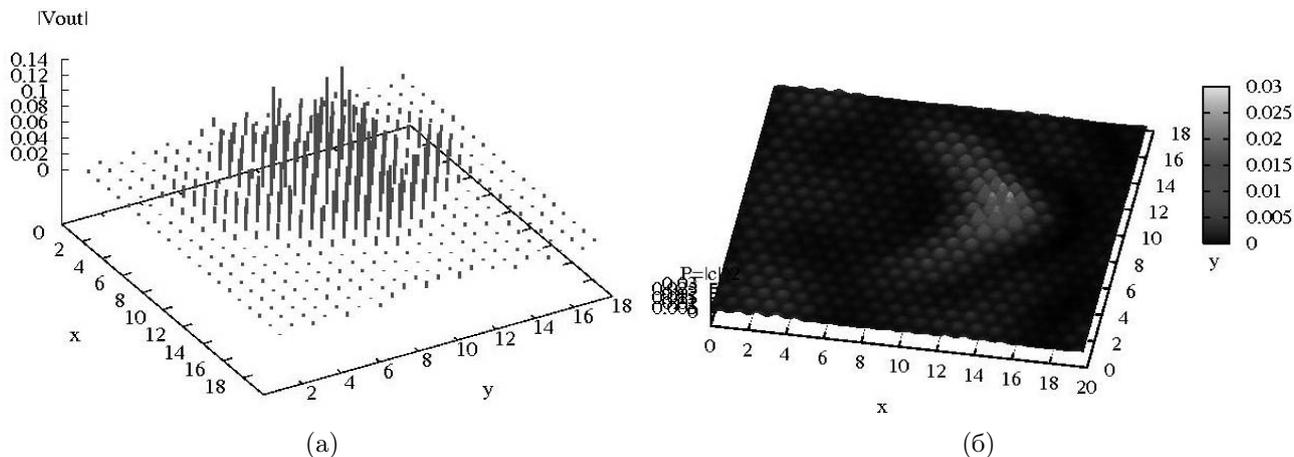


Рисунок 15 - Распределение модуля скорости и плотности вероятности электрона в момент времени  $t=6$  при начальной скорости  $v_0 = 0.8$ . Начальные дислокации солитона и электрона такие же, как и рассмотренные выше.  $N = 400, b\sigma = 4, V = 1., \alpha = 1.5$

## 2) Влияние начальной дислокации электрона относительно солитона

В предыдущем разделе намеренно рассматривалась ситуация с благоприятным начальным расположением солитона и электрона - электрон дислоцировался в той же цепочке, в которой движется солитон. Показано, что в этом случае солитон способен захватить электрон. Однако следует отметить, что, по-видимому, существует ограничение для такого эффекта - если электрон вначале находится далеко от солитона, его волновая функция, скорее всего, успеет "расползтись" по решетке до того, как солитон подойдет к области начальной дислокации электрона, при этом значения вероятностей нахождения там электрона будет столь мала, что вероятность формирования солектрона будет малой. Условия численного эксперимента не позволили здесь исследовать это ограничение и мы оставляем эту задачу на будущее. Однако более актуальной является исследование принципиальной возможности формирования солектрона в ситуации, когда электрон первоначально не находится на траектории солитона, а дислоцирован в параллельных цепочках (пусть недалеких, но параллельных) Симуляции, проведенные для первоначального расположения электрона в цепочке "через" одну (рисунок 16 а,б) и "через" три (рисунок 16 в,г) показывают, что по крайней мере, в этих случаях формирование солектрона происходит, т.е. этот процесс не является критическим к начальному расположению электрона "не на траектории" солитона. Опять же, по-видимому, если электрон удалять, то вероятность формирования связанного состояния будет падать, однако ограничения численного эксперимента не позволили исследовать этот эффект в рамках настоящей работы и мы также оставляем это на будущее.

## 3) Влияние степени связи электрона с решеткой

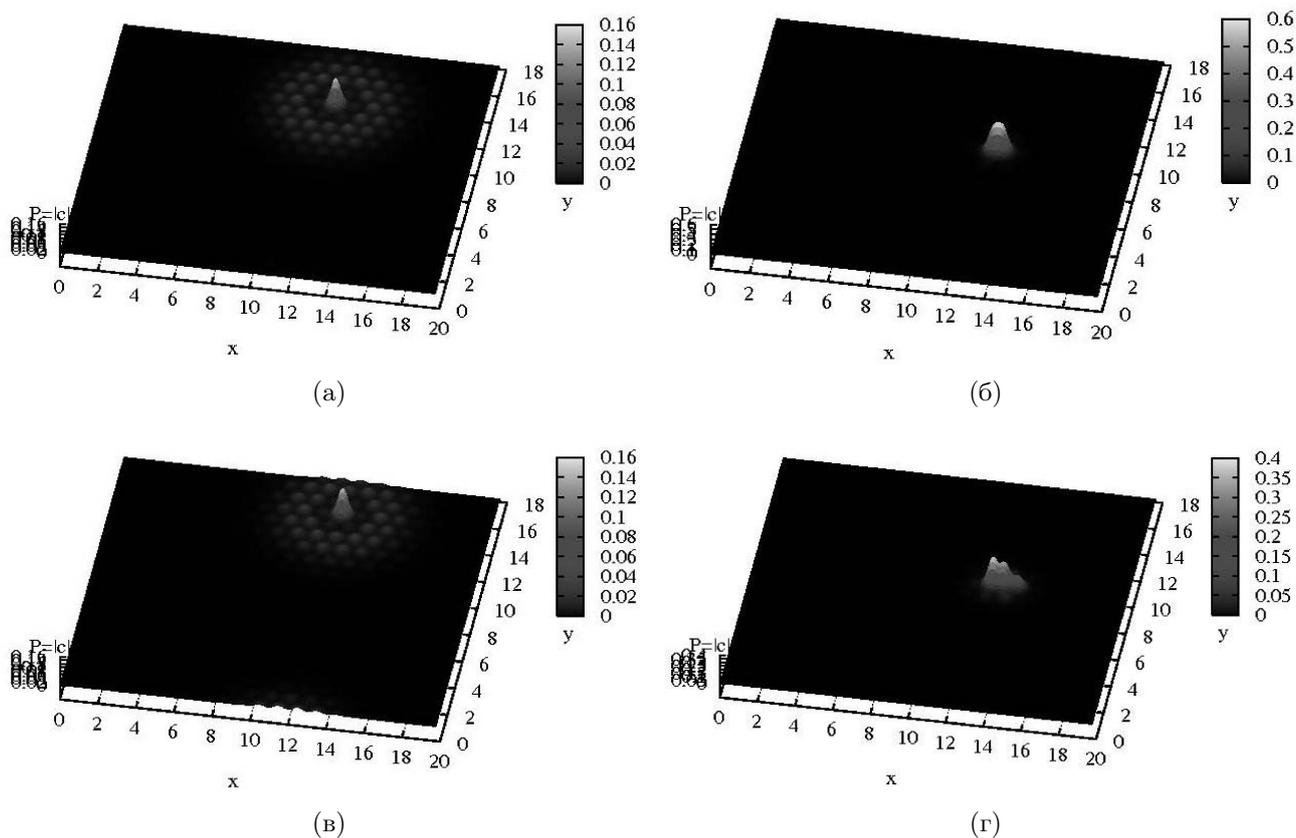


Рисунок 16 - Распределение плотности вероятности электрона в моменты времени  $t = 0.1$  и  $t = 3$  (сверху вниз) при начальном расположении электрона в параллельной цепочке "через" одну (а,б) и "через" три (в,г). Начальная дислокация солитона та же, что рассмотрено выше.  $N = 400, b\sigma = 4, V = 1, \alpha = 1.5, v_0 = 2$ .

Очень существенным фактором, ограничивающим возможность формирования связанных состояний, является величина параметров связи электрона с решеткой, в первую очередь параметра  $\alpha$ , определяющего степень нелинейности связи. Заведомо ясно (прежде всего из результатов исследования одномерных систем), что при малых значениях  $\alpha$  солитоны не образуются. При очень большом значении  $\alpha = 1.5$  процесс формирования происходит, как это показано выше, очень эффективно. Следовательно, понижая в компьютерном эксперименте значения параметра  $\alpha = 1.5$ , можно оценить его бифуркационное значение. Понятно, что оно зависит от значений других параметров, поэтому для оценки была выбрана одна из рассмотренных выше ситуаций (электрон первоначально дислоцирован в параллельной цепочке, отстоящей от "солитонной" цепочки через три других) и затем проведена серия экспериментов с варьированием  $\alpha$ . Обнаружено, что при значении параметра  $\alpha = 1$  солитрон еще образуется (рисунок 17, а), а при  $\alpha = 0.8$  уже нет (рисунок 17, б). Поэтому можно полагать критическим значением  $\alpha = 1$  (при  $V = 1$ ). Это значение можно полагать вполне разумным и соответствующим известным экспериментальным данным для, например, биологических и органических молекул.

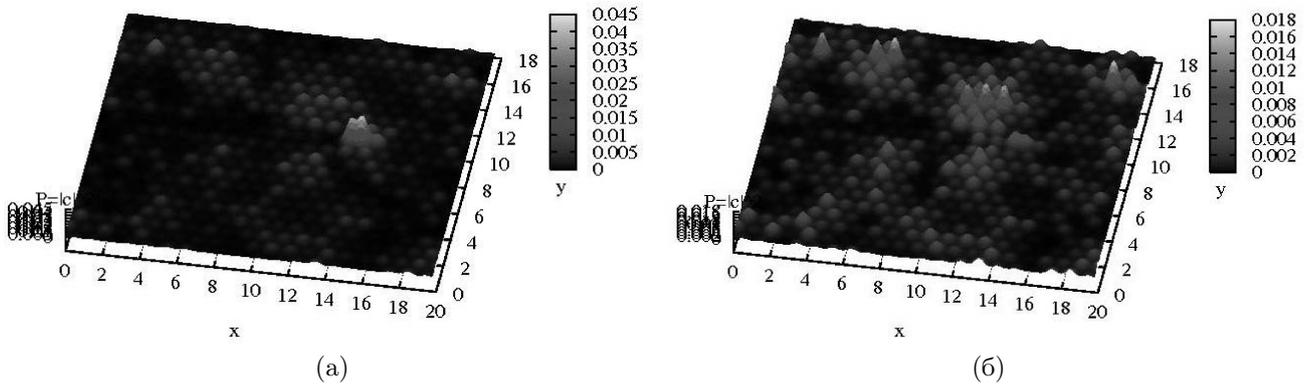


Рисунок 17 - Распределение плотности вероятности электрона в момент времени  $t=3$ , при начальном расположении электрона в параллельной цепочке “через” три, при  $\alpha = 1$ . и  $\alpha = 0.8$  (сверху вниз). Начальная дислокация солитона та же, что рассмотрено выше.  $N = 400, b\sigma = 4, V = 1, v_0 = 2$ .

### 3.5 Выводы

При выполнении данного этапа проекта разработана двумерная модель сильной связи для ансамбля частиц, связанных потенциальными силами Морзе и экспоненциальной силой взаимодействия внешней частицы (электрона) с локализованными возбуждениями в ансамбле. При варьировании граничных и начальных условий данная модель позволяет исследовать, в частности, транспорт электрона в решетках с различными симметриями. Проведено численное моделирование взаимодействия электрона с квази-одномерными солитон-подобными возбуждениями в треугольной Морзе решетке. Показана принципиальная возможность формирования связанного состояния солитона и электрона - квази-одномерного сверхзвукового солитона. Доказано, что процесс формирования не критичен к начальному взаимному расположению локализованного возбуждения решетки и локализованного электрона. Однако при уменьшении энергии солитона и уменьшении параметра нелинейной связи электрона и решетки вероятность формирования связанного состояния падает. Это означает, что в конкретных системах описанный эффект может быть реализован в ограниченной параметрической области.

## 4 Исследование синхронизации и мультистабильности в ансамблях связанных осцилляторов в условиях спонтанных дальних связей между парциальными подсистемами

### 4.1 Введение

Синхронизация и мультистабильность в связанных системах - явления, изучение которых важно как с фундаментальной, так и с прикладной точки зрения. Синхронизация

колебаний - типичное явление для взаимодействующих автогенераторов. При синхронизации периодических автоколебаний их текущие фазы оказываются связанными, что ведет к автоподстройке периодов [19]. В ансамблях из нескольких генераторов синхронизация может приводить к возникновению фазовой мультистабильности [20]. При этом, в фазовом пространстве сосуществует несколько аттракторов, соответствующих разным значениям установившихся разностей фаз, каждое из которых соответствует своему синхронному состоянию. Фазовая мультистабильность достаточно хорошо изучена в ансамблях осцилляторов с простым поведением, где она реализуется в виде иерархии режимов бегущих волн [21–25]. В системах с более сложным поведением она также известна. Например, достаточно хорошо исследован вопрос о развитии мультистабильности в двух системах с симметричной диффузионной связью, в которых переход к хаосу происходит через каскад бифуркаций удвоения периода [26–29, 31]. Если связь достаточно слабая, то усложнение формы колебаний в результате бифуркаций удвоения периода ведет к увеличению числа сосуществующих аттракторов: два предельных цикла периода два, четыре цикла - периода четыре, восемь циклов - периода восемь и т.д. После каждой бифуркации удвоения периода число сосуществующих предельных циклов удваивается и на пороге перехода к хаосу их число становится неограниченно велико. После перехода к хаосу, в ходе бифуркаций слияния лент многоленточных хаотических аттракторов наблюдается обратный процесс. Каждая из бифуркаций слияния лент сопровождается объединением двух сосуществующих аттракторов в один. В результате, если число сосуществующих аттракторов удваивалось после каждой бифуркации удвоения периода, то это число уменьшается в два раза после каждой бифуркации слияния лент. То есть, число сосуществующих многоленточных аттракторов совпадает с числом лент. Эволюция завершается образованием единственного одноленточного хаотического аттрактора.

Обнаруженные закономерности формирования мультистабильности в системах с удвоениями периода могут быть объяснены с точки зрения эволюции спектров колебаний. В работе [32] было показано, что удвоение числа предельных циклов после каждой бифуркации удвоения периода связано с тем, что фазы появляющихся после бифуркации суб-гармоник могут различаться на  $\pi$ . Поэтому, появление новых суб-гармоник в спектре мощности увеличивает в два раза число сосуществующих аттракторов, а “размывание” суб-гармоник при бифуркациях слияния лент многоленточных хаотических аттракторов - соответственно уменьшает их число в два раза.

Развитие фазовой мультистабильности в ансамблях с большим числом автогенераторов со сложной динамикой исследовано не столь полно. В работе [25] было показано, что в ансамблях генераторов с локальными связями возможно сосуществование бегущих волн. Однако, детального исследования формирования мультистабильности при усложнении формы колебаний не проводилось. В настоящей работе мы показываем, как происходит развитие мультистабильности в ансамбле автогенераторов при усложнении формы колебаний в ходе каскада бифуркаций удвоения периода, сколько различных фазовых мод сосуществует в фазовом пространстве и как их число меняется с параметрами системы.

Рассматривается, как меняется характер мультистабильности, в том случае, если наряду с локальными связями, существуют кратковременные глобальные (дальнодействующие) связи между осцилляторами.

## 4.2 Фазовая мультистабильность в ансамбле осцилляторов Ресслера

Рассмотрим ансамбль  $N$  ( $N > 1$ ) идентичных осцилляторов Ресслера с периодически граничными условиями, в котором наряду с локальной диффузионной связью, присутствуют дальнодействующие спонтанные связи между элементами:

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= -y_i - z_i + \gamma(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}) + \varepsilon(x_I - x_i) \\ \dot{y}_i &= x_i + 0.2y_i \\ \dot{z}_i &= 0.2 + z_i(x_i - c)\end{aligned}\tag{38}$$

Здесь  $x_i$ ,  $y_i$  и  $z_i$  - динамические переменные  $i$ -го осциллятора ( $i = 1, \dots, N$ ),  $c$  - управляющий параметр, ответственный за бифуркации удвоения периода,  $\gamma > 0$  - параметр локальной связи,  $\varepsilon(x_I - x_i)$  - элемент спонтанной связи между текущим осциллятором и осциллятором с произвольным номером  $I \in [1, N]$ , сила которой определяется коэффициентом  $\varepsilon$ . В настоящей работе исследовалась цепочка из тридцати элементов ( $N = 30$ ).

Динамика системы (38) при отсутствии дальнодействующих связей ( $\varepsilon = 0$ ) хорошо известна. Осциллятор Ресслера - автоколебательная система, демонстрирующая каскад бифуркаций удвоения периода, который развивается по сценарию Фейгенбаума. Динамика ансамбля (38) сложнее, чем динамика одного генератора. При слабой связи там наблюдается множество колебательных режимов, характеризующихся одинаковой формой колебаний в каждом из осцилляторов, но отличающихся от своих соседей на величину текущей фазы, то есть - явление фазовой мультистабильности. Здесь и далее текущая фаза колебаний в  $i$ -м осцилляторе определяется по формуле, предложенной А. Пиковским:

$$\varphi_i(t) = 2\pi \frac{t - t_n^{(i)}}{t_{n+1}^{(i)} - t_n^{(i)}} - \pi\tag{39}$$

где  $t_n^{(i)}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) - момент времени  $n$ -го (предыдущего), а  $t_{n+1}^{(i)}$  -  $n + 1$ -го (последующего) пересечения траекторией  $\mathbf{x}_i(t)$  некоторой гиперплоскости.

В работе [25] было показано, что при случайном выборе начальных условий в системе (38) реализуются только такие режимы, для которых разность фаз между колебаниями соседних осцилляторов постоянна вдоль цепочки:  $\Delta\varphi_i(t) = \varphi_{i+1}(t) - \varphi_i(t) = \Delta\varphi$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ). Их можно рассматривать как автоволны, бегущие с постоянной фазовой скоростью  $v = 2\pi/(\Delta\varphi T)$  вдоль цепочки и характеризующихся длиной волны  $\Lambda = 2\pi/\Delta\varphi$ . Если число осцилляторов в ансамбле ( $N$ ) конечно, то и число возможных бегущих волн также конечно и равно  $N$ . Значение фазового сдвига для каждой волны рассчитывается

по формуле:

$$\Delta\varphi^{(k)} = \frac{2\pi k}{N} \text{ mod } 2\pi \quad (40)$$

Индекс  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N/2$  определяет пространственную структуру колебаний цепочки осцилляторов и может использоваться как индекс волны. Значению  $k = 0$  соответствует пространственно - однородное состояние, когда колебания в каждом из осцилляторов синфазны,  $k = \pm N/2$  относятся к одному и тому же режиму, при котором колебания в соседних осцилляторах противофазны. В остальных случаях, каждое положительное значение  $k$  соответствует прямой волне, а отрицательное - обратной. Поскольку прямые и обратные волны отличаются только направлением распространения, в дальнейшем будут рассматриваться только прямые волны:  $k \geq 0$ .

Из анализа устойчивости бегущих волн в квазигармоническом приближении [?, 25] известно, что при положительных значениях диффузионной связи могут быть устойчивыми только те волны, для которых разность фаз между соседними осцилляторами не превосходит  $\pi/2$ . Это означает, что только волны с  $|k| \leq N/4$  могут быть устойчивыми, а с  $N/4 < |k| \leq N/2$  - нет. В данном случае устойчивыми могут быть режимы с  $k = 0, \pm 1, \dots, \pm 7$ . Проведенные численные исследования поведения ансамбля показали, что при достаточно слабой связи ( $\gamma = 0.005$ ), выбирая специальным образом начальные условия, можно получить каждый из волновых режимов со значениями индекса  $k$  из данного диапазона. на рисунке 18 изображены снимки волн с  $k = 0, 1, 2, 4$  и 7. На том же рисунке пунктирными линиями построены профили обратных волн с отрицательными  $k$ .

Чтобы получить пространственные “профили” автоволн, изображенных на рисунке 18, использовалась следующая методика:

1. строилось сечение Пуанкаре траектории гиперплоскостью  $y_1 = 0$ , для чего отслеживались моменты времени  $t_n$ , в которые переменная  $y_1$  меняет знак с положительного на отрицательный;
2. строился график зависимости значений переменной  $x$  в каждом из генераторов при пересечении траекторией данной гиперплоскости ( $x_i(t_n)$ ) от номера осциллятора  $i$ .

Таким образом получался “мгновенный снимок” волны, привязанный к определенному значению фазы одного из генераторов (в данном случае - первого). Характер пространственного профиля волн полностью определяется значением индекса  $k$ ; последний равен числу максимумов или минимумов на длине цепочки.

Каждая из  $k$ -волн, изображенных на рисунке 18, является родоначальником семейства колебательных режимов, для которых набег фазы вдоль ансамбля равен  $2\pi k$ . При увеличении параметра  $c$  на базе каждой такой волны происходят бифуркации рождения двумерных торов, синхронизация на торе, и каскад бифуркаций удвоения периода, ведущий к колебаниям более сложной формы, а затем - к хаотическим колебаниям. Например, для волны с  $k = 2$  последовательность усложнения колебательных режимов показана на рисунке 19. Вначале, при  $c = 2.85$  наблюдается мягкий переход к квазипериодическим

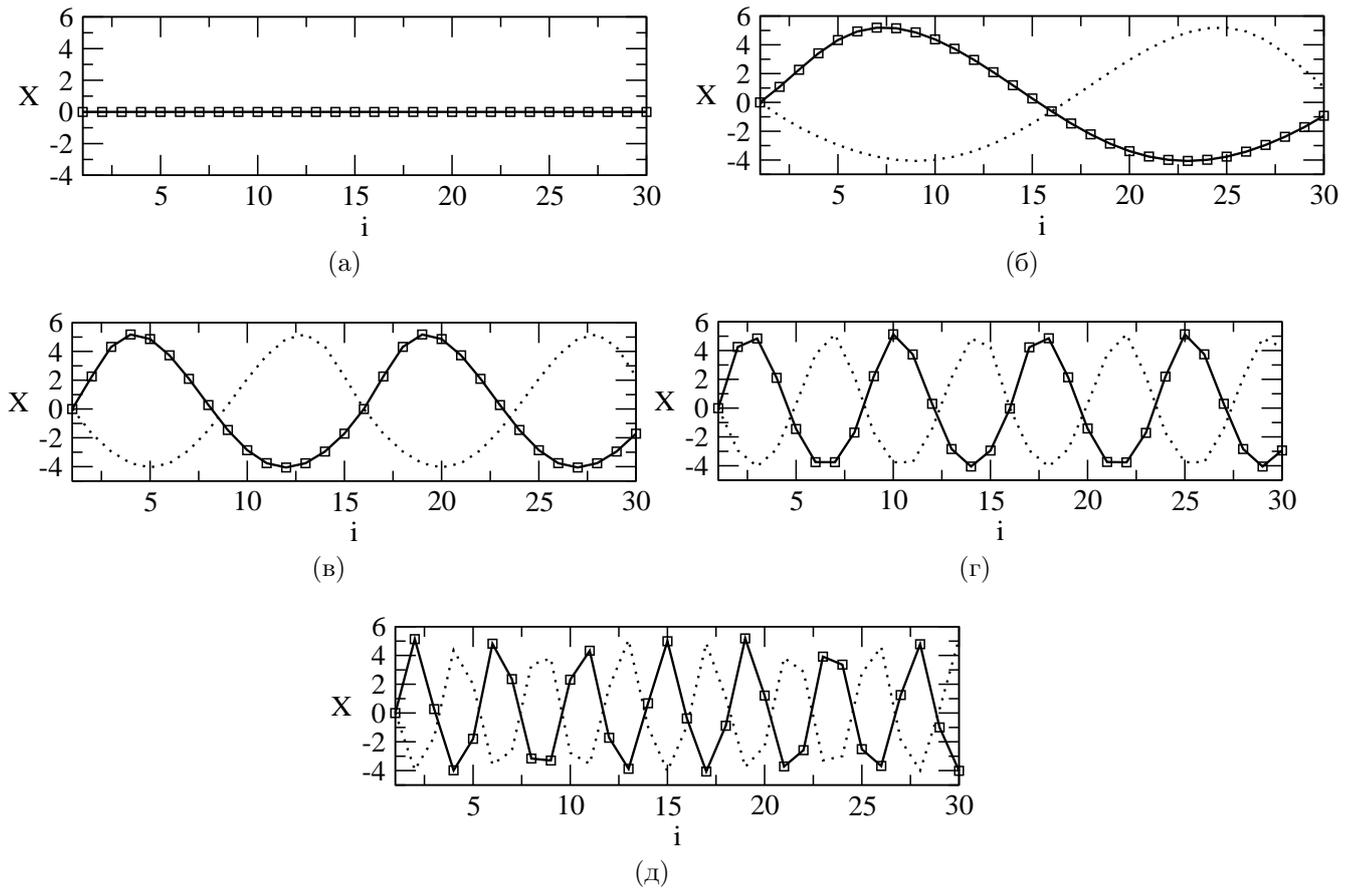


Рисунок 18 - “Профили” бегущих волн с разными значениями индекса  $k$  (слева) и фазовые портреты (справа): (а)  $k = 0$ ; (б)  $k = 1$ ; (в)  $k = 2$ ; (г)  $k = 4$ ; (д)  $k = 7$

колебаниям в каждом из осцилляторов (рисунок 19а). Данный режим, в результате синхронизации на торе сменяется периодическими колебаниями удвоенного периода (рисунок 19б), на базе которых через каскад бифуркаций удвоения периода развиваются хаотические колебания (рисунок 19г,д).

Усложнение формы колебаний в каждом из осцилляторов ансамбля ведет к нарушению пространственной регулярности. Например, для  $k$ -волны периода два (рисунок 19б) анализ пространственного профиля, а также распределения разностей текущих фаз вдоль цепочки показывает, что данные колебания больше не являются пространственно-однородными. В распределении разностей фаз присутствуют стационарные “фазовые дефекты”, а именно - значения фазовых сдвигов в нескольких осцилляторах ансамбля отличается от фазовых сдвигов в остальных осцилляторах. Несмотря на наличие дефектов, суммарный набег фазы вдоль ансамбля сохраняет значение  $\Phi = 4\pi k$ . Строго говоря, такие колебательные режимы более не являются бегущими волнами. Однако, среднее значение фазового сдвига между соседними осцилляторами сохраняется и, соответственно, наследуется пространственный вид профиля моды с двумя минимумами и максимумами вдоль цепочки.

Как показали исследования, эволюция колебательных режимов на базе каждой из бегущих волн с  $k = 1, \dots, 7$  происходит схожим образом. В каждом из случаев наблюдается

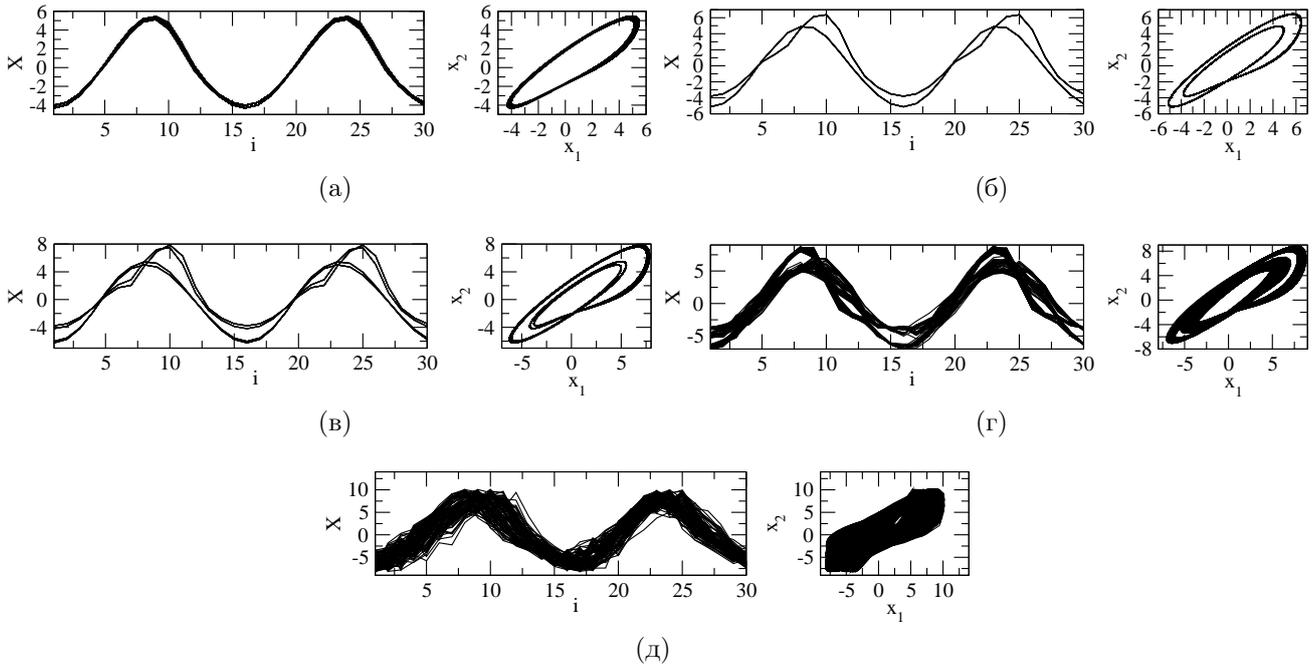


Рисунок 19 - Пространственные профили (слева) и проекции фазовых портретов (справа) колебательных режимов, образованных на базе волны с  $k = 2$  при увеличении параметра  $c$ : (а)  $c = 2.85$ , (б)  $c = 3.05$ , (в)  $c = 4.1$ , (г)  $c = 4.4$ , (д)  $c = 6.25$

замещение первой бифуркации удвоения периода последовательностью бифуркации рождения двумерного тора и синхронизацией на торе, в результате чего система переходит на один из нескольких сосуществующих предельных циклов периода два, симметричных друг другу. В пространственном распределении разностей фаз вдоль цепочки наблюдаются фазовые дефекты, обусловленные тем, что в некоторых точках среды значения фаз суб-гармоник отличаются на  $\pi$  от соответствующих значений в других точках среды, в то время как значения фаз основных гармоник остается неизменным. Различие в фазах субгармоник является источником дальнейшего развития мультистабильности на базе каждой из пространственных мод.

Усложнение формы колебаний приводит к увеличению числа сосуществующих аттракторов за счет “расщепления” одного самосимметричного аттрактора на несколько симметричных друг другу, различающихся расположением дефектов. В работе [1] было показано, что максимальное число сосуществующих регулярных аттракторов (предельных циклов) периода  $i$  или хаотических аттракторов с числом лент, равным  $i$ , ( $M_i$ ) составляет

$$M_i = \left[ \frac{N}{2} \right] i^{N-1} \quad (41)$$

где  $[ ]$  означает целую часть числа. Формула (41) обобщает известную закономерность развития мультистабильности в двух взаимодействующих системах с удвоениями периода, по которой число предельных циклов, одновременно сосуществующих в фазовом пространстве, удваивается после каждой бифуркации. На пороге хаоса число аттракторов стремиться к бесконечности.

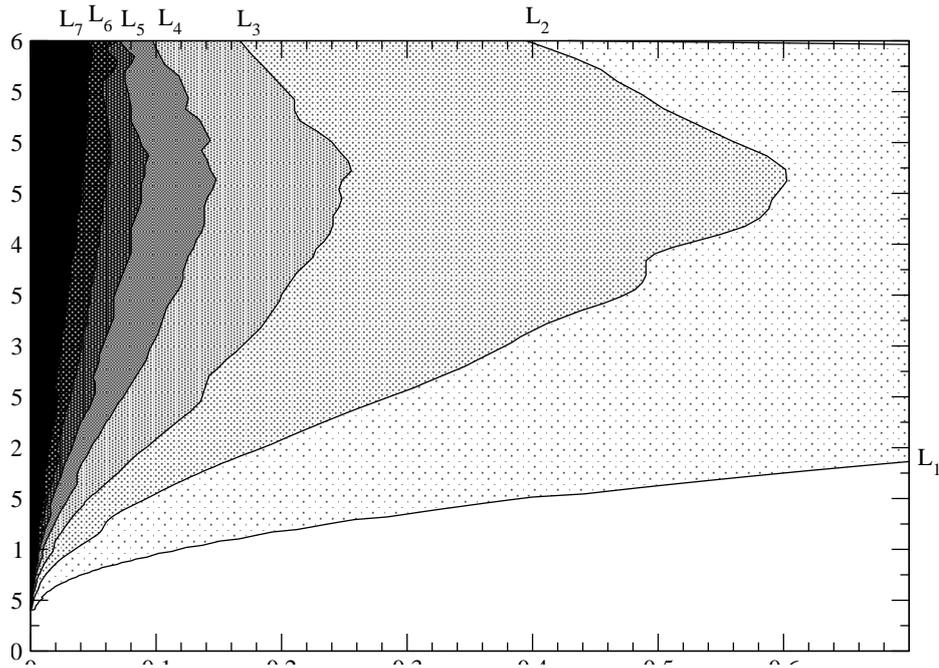


Рисунок 20 - Расположение режимов с разным набегом фазы вдоль ансамбля (разным значением индекса волны  $k$ ) на плоскости параметров “ $\gamma - c$ ”. Области с разными  $k$  отмечены разными оттенками серого цвета: от белого для  $k = 0$  до черного для  $k = 7$

Автоколебательные режимы с разным индексом  $k$  при слабой связи сосуществуют в фазовом пространстве. Таким образом наблюдается развитая фазовая мультистабильность. Однако, область значений параметров (например,  $\gamma - c$ ) для каждого из режимов своя. Как показывают исследования, чем больше  $k$  (или чем короче длина волны) - тем при меньших значениях коэффициента связи данный режим устойчив. В совокупности, области устойчивости для разных фазовых мод составляют вложенную структуру: области для более коротковолновых режимов располагаются внутри областей для более длинноволновых. Для рассматриваемой системы (38) расположение таких зон устойчивости отображается на рисунке 20. На нем области устойчивости  $k$ -волны ограничены: слева - осью  $\gamma = 0$ , справа - кривой  $L_k$ . Цвет области маркирует длину волны - области более коротковолновых режимов выделены более темным цветом.

### 4.3 Переход к пространственно-однородным колебаниям под действием “дальних” связей

Рассмотрим теперь к каким эффектам приводит появление “дальних” связей, наряду с существующими локальными связями в ансамбле осцилляторов Ресслера. Для этого предусмотрим возможность для каждого из  $N$  осцилляторов цепочки (38) устанавливать связь с любым другим элементом ансамбля. Сила таких далекодействующих связей определяется параметром  $\varepsilon$ . Связь устанавливается между текущим осциллятором с номером  $i \in [1 : N]$  и осциллятором со случайно выбранным номером  $I \neq i$ . Составленная таким

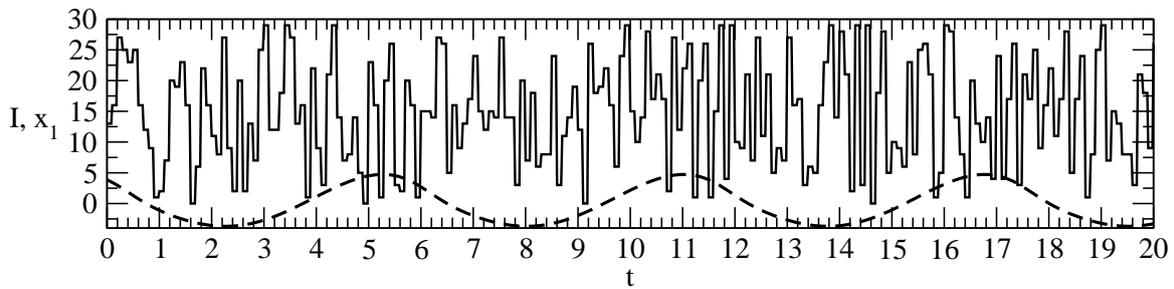


Рисунок 21 - Зависимость номера осциллятора, связанного с 1-м осциллятором ансамбля, от времени при  $\tau = 0.1$ . Для сопоставления на графике штриховой линией приведена временная реализация колебаний  $x_1(t)$

образом сеть существует в течение фиксированного времени  $\tau$ , после которого происходит перестройка системы связей. Соответственно, индекс  $I$  - функция времени, принимающая целочисленные значения, изменения которых происходят с периодом  $\tau$ .

Таким образом, система глобальных связей характеризуется двумя параметрами: интенсивностью  $\varepsilon$  и интервалом стационарности топологии связей  $\tau$ . Последний параметр естественно сопоставить с характерным временным масштабом колебаний, которым является период колебаний  $T$ . Например, случай быстропеременных связей соответствует соотношению  $\tau \ll T$ , когда в течение одного периода функция  $I(t)$  может поменять значение несколько раз. Другой крайностью является случай “замороженных связей”, при котором  $\tau \rightarrow \infty$  и, соответственно,  $I$  перестает зависеть от времени. Поскольку при замороженных связях структура сети случайна и постоянна, процесс в такой системе является неэргодичным, и, соответственно, по конкретной временной реализации нельзя судить о динамике системы. Между этими двумя крайними вариантами располагается случай, когда интервал стационарности принимает значение близкие к характерному временному масштабу:  $\tau \approx T$ . Проведенные исследования показали, что величина  $\tau$  вплоть до очень больших, но конечных значений, не влияет качественно на поведение системы (38). Поэтому, в наших исследованиях  $\tau$  фиксировано на значении 0.1, что соответствует быстропеременным связям. Зависимость индекса  $I$  от времени для данного случая отображена на рисунке 21а, на котором также для сравнения приведена временная реализация колебаний в отдельном осцилляторе Ресслера.

Будем исследовать поведение системы (38) в зависимости от  $\varepsilon$ . Рассмотрим, к каким эффектам приводит введение глобальных связей, когда колебания в каждом из осцилляторов имеют простейший вид - периодические, с периодом один. Для этого выберем в качестве исходного режима пространственно периодический с длиной волны  $N/2$ , что соответствует  $k = 2$  (рис.186), установив  $c = 2.5$  и  $\gamma = 0.005$ . Будем постепенно увеличивать коэффициент связей  $\varepsilon$ , следя за происходящими изменениями в динамике системы. При малых  $\varepsilon$ , вплоть до  $\varepsilon \simeq 0.0017$  никаких видимых изменений не происходит. Колебания остаются периодическими, также как и пространственное распределение вдоль ансамбля. При  $\varepsilon \simeq 0.0017$  пространственно-периодическая структура нарушается. Разность фаз между соседними осцилляторами перестает быть постоянной. Появляется пространственная

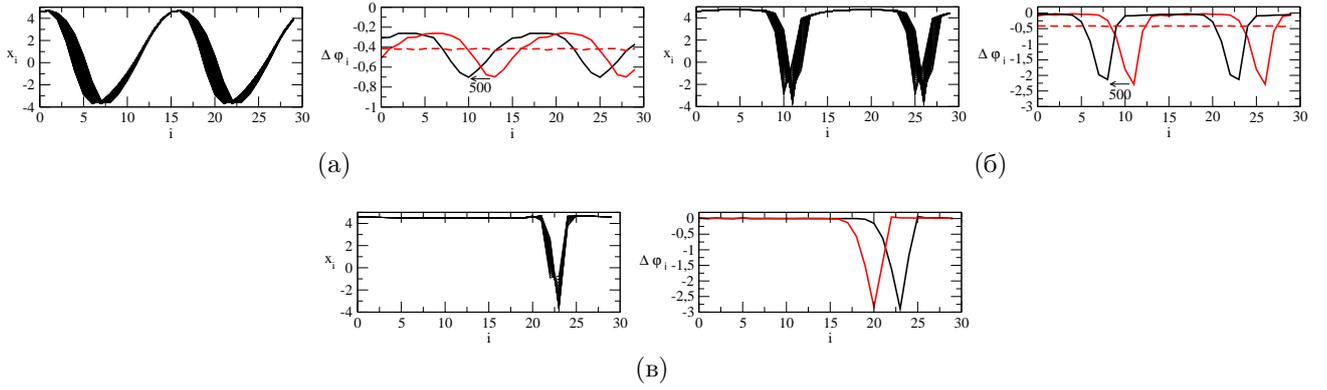


Рисунок 22 - Профиль бегущей волны (слева) и распределение разностей фаз вдоль цепочки (справа) при (а)  $\varepsilon = 0.0017$ , (б)  $\varepsilon = 0.00237$ , (в)  $\varepsilon = 0.0024$

модуляция разности фаз вдоль цепочки: разность фаз между соседними осцилляторами флуктуирует вокруг среднего значения (22а). Причем, данное распределение более не является стационарным, оно движется вдоль кольца с постоянной скоростью. Так, если построить зависимость  $\Delta\varphi_i$  для двух разных моментов времени, отстоящих друг от друга на интервал  $\Delta t = 500$ , как показано на правом рисунке 22а, мы увидим, что распределение разности фаз смещается. Поскольку колебания при этом характеризуются двумя независимыми временными масштабами: квазипериодом колебаний в каждом из осцилляторов и временем обхода фазового профиля вдоль кольца - они становятся квазипериодическими.

Дальнейший рост параметра связи сопровождается увеличением неоднородности в распределении фазы. При  $\varepsilon = 0.00237$  колебания в большей части ансамбля становятся почти синфазными. Вся цепочка распадается на два кластера с почти синфазным поведением, границами между которыми являются “фазовые дефекты” - осцилляторы ансамбля, в которых значение разности фаз существенно отличается от разностей фаз между основной частью осцилляторов. Несмотря на то, что большая часть осцилляторов ансамбля движется синфазно, за счет наличия дефектов суммарный набег фазы вдоль кольца сохраняется тем же, что и в исходном режиме, то есть равным  $4\pi$ . Дефекты вращаются вдоль кольца с той же постоянной скоростью, что и при меньшей величине коэффициента глобальной связи  $\varepsilon$ . Наконец, при  $\varepsilon \simeq 0.0024$  происходит необратимый переход на волну с другим значением  $k$ : либо на синфазный режим  $1C^0$  (как правило), либо на режим с длиной волны, равной длине цепочки  $1C^1$  (достаточно редко). Последний случай представлен на рисунке 22в.

Последовательность качественных изменений в динамике ансамбля при росте величины глобальных связей одинакова для разных исходных режимов:  $1C^k$ ,  $k = 1, 2, \dots, 7$ . В каждом из случаев мы наблюдаем пороговый характер влияния  $\varepsilon$ : при  $\varepsilon < \varepsilon_t^{(k)}$  ( $\varepsilon_t^{(k)}$  - пороговое значение  $\varepsilon$  для  $k$ -волны) наличие глобальных связей никак не проявляется на видимой динамике ансамбля. При  $\varepsilon = \varepsilon_t^{(k)}$  возникает модуляция разности фаз, глубина которой растет с ростом  $\varepsilon$ . Рост неоднородности в распределении разности фаз вдоль цепочки сопровождается постепенным выравниванием фаз соседних осцилляторов и формированием кластеров синфазного поведения, границами между которыми являются “фазовые дефек-

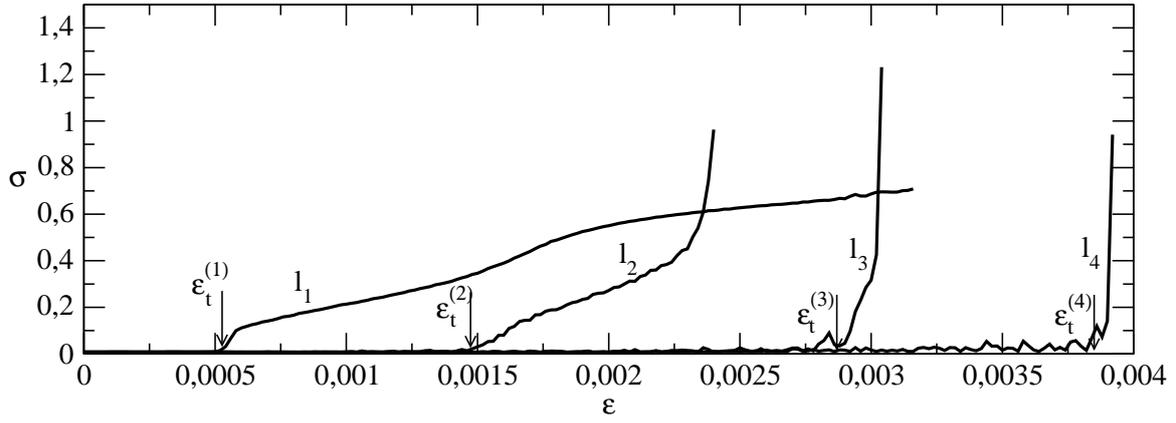


Рисунок 23 - Зависимость среднеквадратичного отклонения разности фаз от  $\varepsilon$

ты”. Число кластеров и дефектов совпадает с индексом  $k$ . Наконец, при достижении еще одного порогового значения  $\varepsilon = \varepsilon_c^{(k)}$  - волна теряет устойчивость и траектория переходит на пространственно-однородный режим  $1C^0$ , при котором колебания во всех осцилляторах синфазны. На этот режим глобальные связи не оказывают никакого влияния, поскольку при  $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_j$  все слагаемые, соответствующие связям в (38) обнуляются.

На рисунке 23 построены значения средне-квадратичного отклонения разности фаз от среднего значения  $\sigma = \sqrt{\langle \Delta\varphi_i^2 - \langle \Delta\varphi_i^2 \rangle \rangle}$  ( $\langle \rangle$  – среднее по ансамблю осцилляторов) как функции от коэффициента глобальных связей для исходных режимов с  $k = 1, 2, 3, 4$ . Из построенных графиков хорошо виден пороговый характер фазовой динамики: для каждого из типов колебаний существует свое значение  $\varepsilon_t$ , отмеченное на рисунке стрелкой, после которого начинается резкий рост значения среднеквадратичного отклонения  $\Delta\varphi$  от нуля. Последовательность критических значений возрастает с ростом индекса  $k$ . От пространственного периода волны также зависит интервал значений  $\varepsilon$ , в котором наблюдается модуляция фазы. Для волны  $1C^1$  этот интервал достаточно протяженный, а зависимость  $\sigma(\varepsilon)$  плавная, в то время как для режимов  $1C^3$  или  $1C^4$  система очень быстро переходит от пространственно-периодическому к пространственно-однородному состоянию.

На рисунке 24 на плоскости параметров “ $\gamma - \varepsilon$ ” построены области существования пространственно-периодических режимов с разной длиной волны. Область существования  $1C^k$  режима ограничена линией  $l_k$ . Каждый из  $1C^k$  режимов существует внутри замкнутой области, ограниченной сверху соответствующей линией  $l_k$ , которая представляет собой графическое представление зависимости критического значения  $\varepsilon_t^{(k)}$  от  $\gamma$ . Кроме этого, на рисунке представлены линии  $L_k$ , ограничивающие области, где существует колебательный режим с набегом фазы вдоль кольца, равным  $2\pi k$ . Все линии начинаются из точки с координатами  $(0 : 0)$  и каждая из пар линий  $l_k, L_k$  сходится к точке с координатами  $(\gamma_k : 0)$ . Если сопоставить рисунок 24 с рисунком 20, то можно заметить, что значения  $\gamma_k$  представляют собой точки границы области существования режима  $1C^k$  при заданном  $c = 2.5$ .

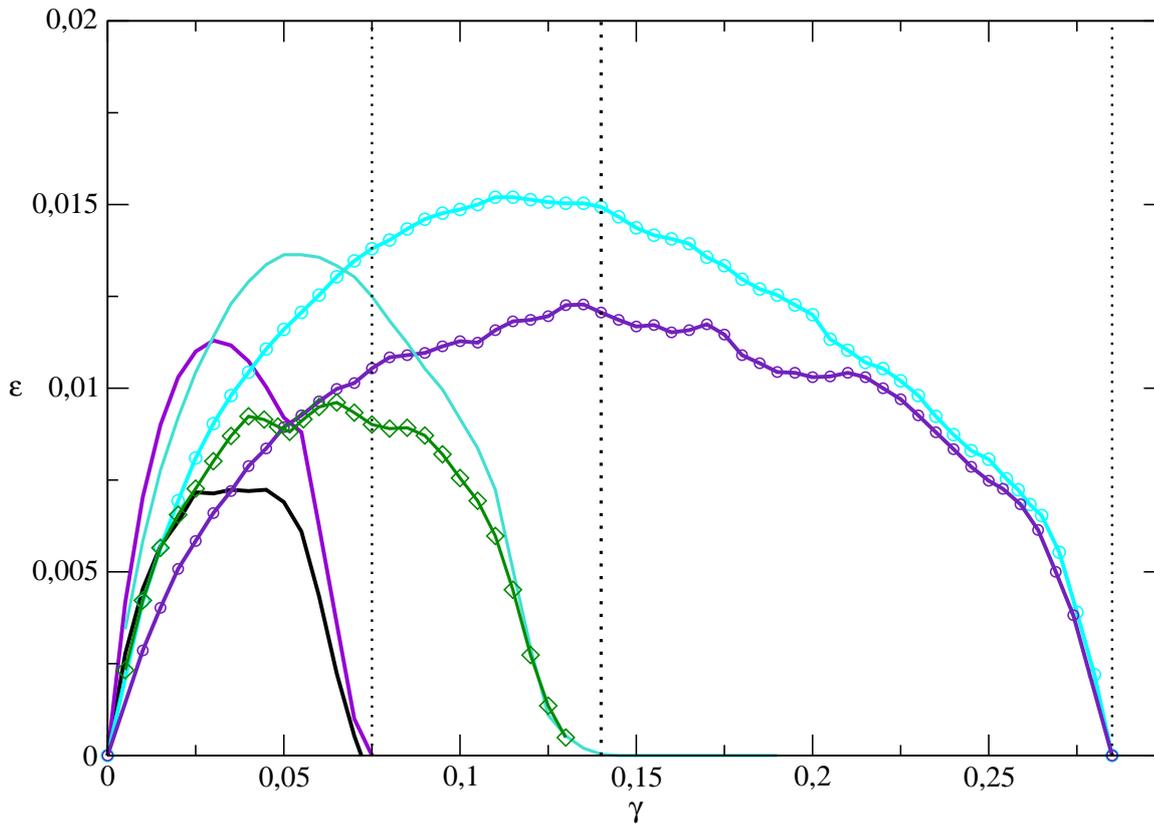


Рисунок 24 - Области существования различных пространственных мод на плоскости параметров  $\gamma - \varepsilon$

#### 4.4 Влияние дальних связей на режимы с более сложными пространственными структурами

Представленные в предыдущем разделе результаты относятся к простейшим пространственным структурам, существующим в цепочке осцилляторов с периодическими граничными условиями - бегущим волнам. При усложнении временной динамики осцилляторов, которая происходит с ростом параметра  $c$ , в ансамбле возникают сложные неупорядоченные структуры. Эти структуры существуют на базе каждой из бегущих волн с заданным  $k = 0, \pm 1, \dots, \pm 7$ . Рассмотрим, как спонтанные дальнедействующие взаимодействия осцилляторов влияют на данную пространственную организацию.

Рассмотрим систему (38) при  $c = 3.05$ ,  $\gamma = 0.005$ , что соответствует предельному циклу удвоенного периода в каждом из осциллятора. Согласно (41) всего таких режимов  $2^{N-1}$ , что для данной длины цепочки составляет около миллиарда сосуществующих аттракторов для каждого  $k$ . Выберем в качестве примера одну из волн с  $k = 2$ , профиль которой показан на рисунке 25 а. Как видно из рисунка, разность фаз между колебаниями соседних осцилляторов более не является постоянной. Она “флуктуирует” вокруг среднего уровня в  $\Delta\varphi^{(2)} = 4\pi/N$ , который отмечен на правом рисунке прерывистой линией. При “включении” дальнедействующих связей пространственное распределение в цепочке сохраняется, пока интенсивность связей не превышает порогового значения  $\varepsilon \simeq 0.0018$ , после чего колебания становятся квазипериодическими (рисунок 25б). В распределении разности фаз

появляется пространственная модуляция, которая накладывается на существующую ранее картину. На правом рисунке 25б видны два характерных глобальных минимума, положение которых смещается вдоль ансамбля с постоянной скоростью. Распределение разности фаз приведено на рисунке в два разных момента времени, различающихся на  $\Delta t = 500$ . При увеличении  $\varepsilon$  до  $\varepsilon \simeq 0.002$  происходит необратимый переход на пространственный режим с набегом фазы вдоль цепочки, равным нулю. Однако, данный режим также не является пространственно однородным. Он представляет собой один из почти миллиарда сосуществующих пространственно-неоднородных режимов, возникших на базе волны  $1C^0$ . Пространственное распределение вдоль цепочки и распределение разности фаз показаны на рисунке 25в. Указанная пространственная структура является чрезвычайно устойчивой. Она существует вплоть до  $\varepsilon = 0.295$ , то есть до значений величины глобальных связей, многократно превосходящих величину локальной связи  $\gamma = 0.005$ . Наконец, при  $\varepsilon > 0.295$  происходит жесткий переход к пространственно-однородному состоянию (рис.25г).

#### 4.5 Влияние далекодействующих связей на мультистабильность хаотических аттракторов

Рассмотрим теперь, что произойдет, если колебания в элементах ансамбля являются хаотическими. Выберем, например, режим развитого одноленточного хаоса  $1A$ . Для этого установим значения параметров  $c = 4.6$ ,  $\gamma = 0.005$ . При данных значениях параметров в фазовом пространстве сосуществует  $N/2$  хаотических аттракторов, каждый из которых возник на базе одного из предельных циклов:  $1C^0, 1C^{\pm 1}, \dots, 1C^{\pm 7}$ . Соответственно, обозначим их  $1A^0, 1A^{\pm 1}, \dots, 1A^{\pm 7}$ . Здесь, как и для периодических режимов, верхний индекс в обозначении  $1A^k$  равен суммарному набегу фазы вдоль цепочки осцилляторов, деленному на  $2\pi$ . Выбор конкретного режима определяется начальными условиями. Для определенности выберем режим с  $k = 2$ , пространственный профиль которого и распределение разности фаз вдоль пространственной координаты показаны на рисунке 26а. Из рисунка видно, что значение разности фаз является случайной величиной, флуктуирующей относительно среднего значения  $4\pi/N$ . Включение далекодействующих связей приводит, вначале, к периодической модуляции значения разности фаз вдоль цепочки (рисунок 26б). Затем, при  $\varepsilon \simeq 0.0018$  - возникает длинноволновая пространственная модуляция разностей фаз, сходная с аналогичной модуляцией для случая периодических колебаний. На эту длинноволновую модуляцию “накладываются” случайные флуктуации. Рост силы далекодействующих связей ведет к увеличению глубины модуляции. При этом, колебания в большинстве осцилляторов выравниваются по фазе: в цепочке появляется два кластера внутри которых разность фаз флуктуирует вокруг нулевого значения, между которыми располагаются два “фазовых дефекта” (рисунок 26г). Наконец, при  $\varepsilon > 0.0036$  происходит жесткий переход на пространственный режим с  $k = 0$ . Данный вид колебаний существует в достаточно широком диапазоне величин глобальной связи, до  $\varepsilon \simeq 0.2$ , после чего возникает режим пространственно-однородных хаотических колебаний, когда колебания во всех точках ансамбля происходят синфазно. Данный режим можно считать режимом

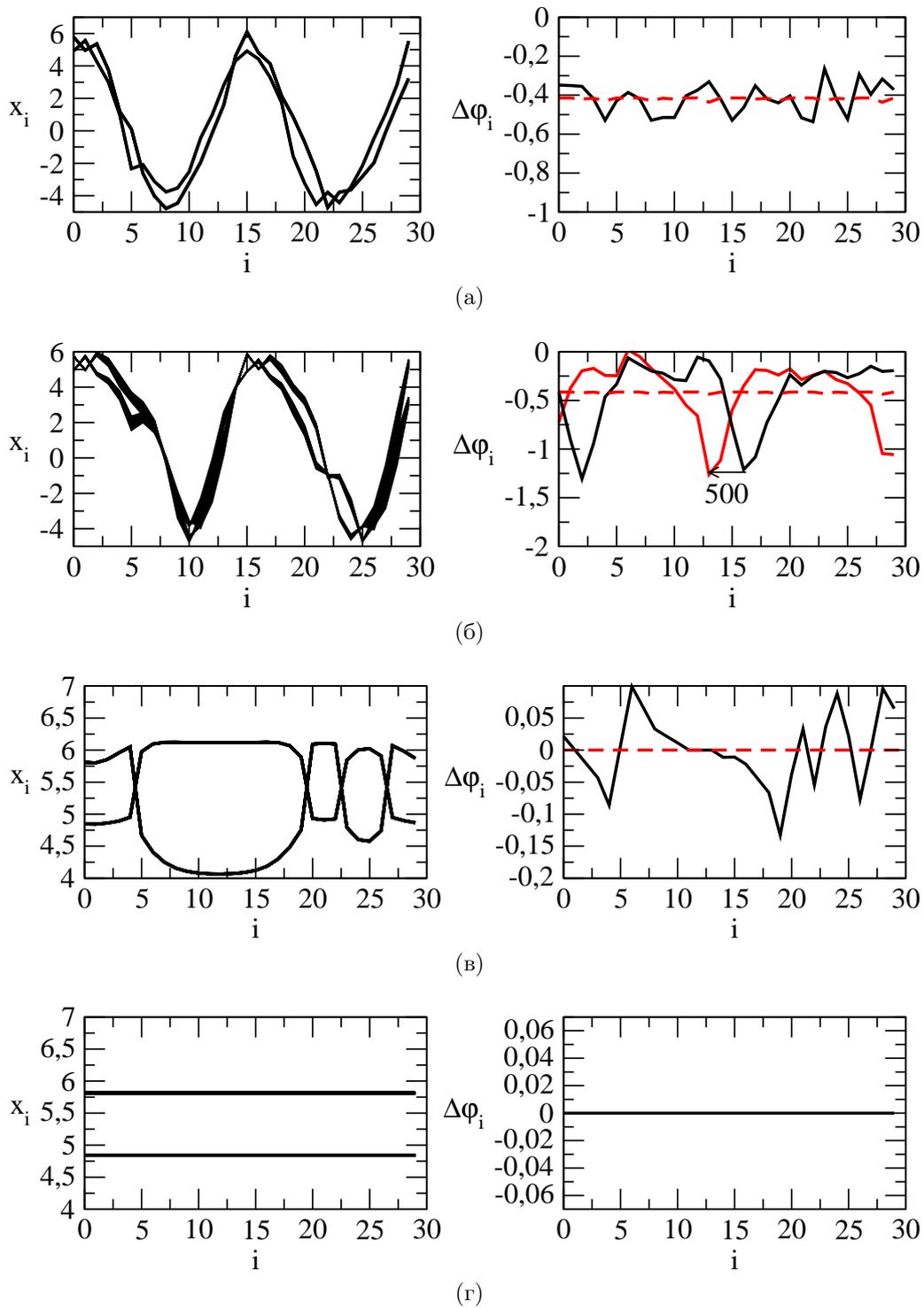


Рисунок 25 - Профиль бегущей волны (слева) и распределение разностей фаз вдоль цепочки (справа) при (а)  $\varepsilon = 0.0017$  и (б)  $\varepsilon = 0.0022$

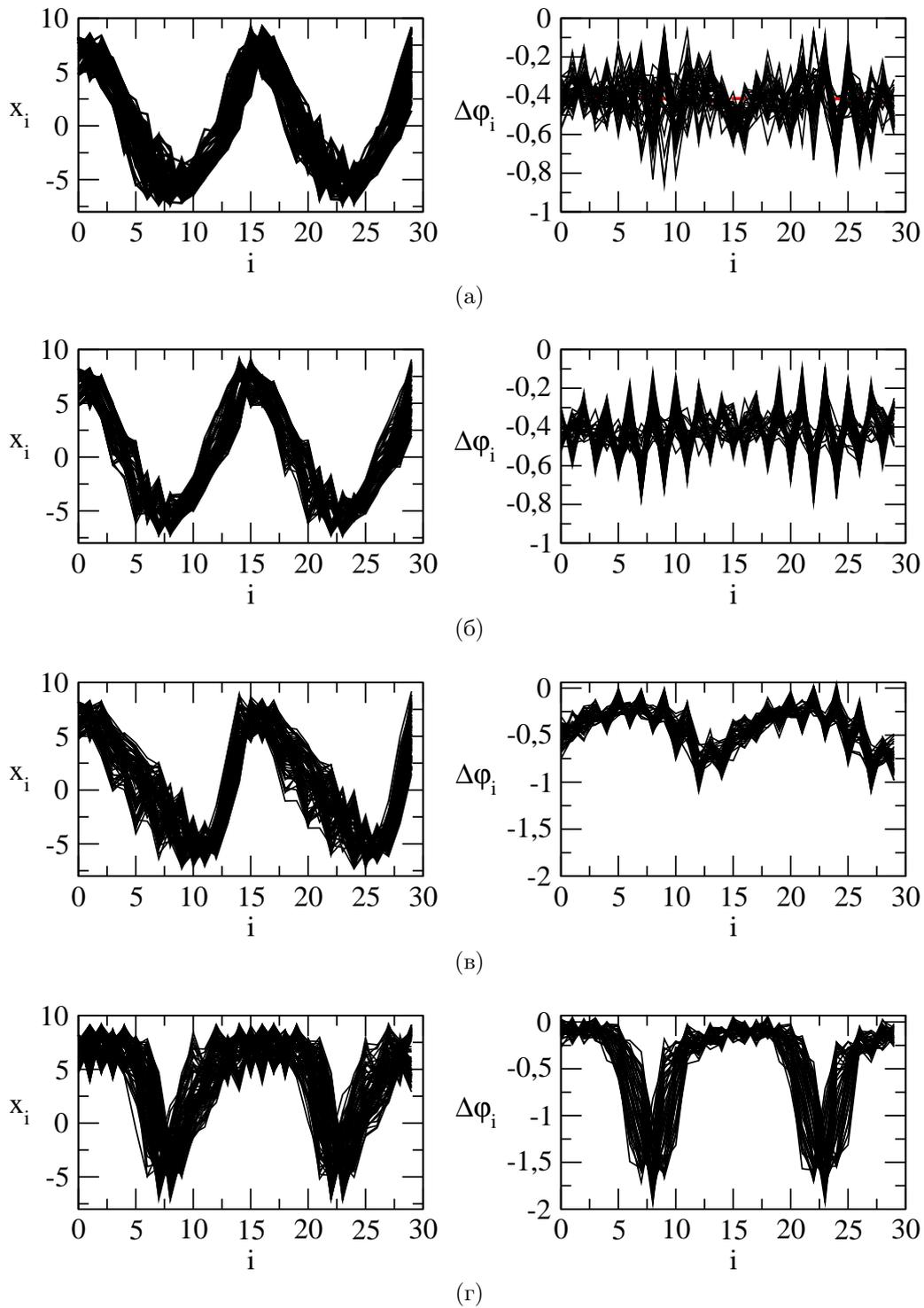


Рисунок 26 - Профиль бегущей волны (слева) и распределение разностей фаз вдоль цепочки (справа) для хаотического режима  $1A^2$  при (а)  $\varepsilon = 0$ , (б)  $\varepsilon = 0.0015$ , (в)  $\varepsilon = 0.0019$ , (г)  $\varepsilon = 0.0026$

полной синхронизации хаоса в ансамбле.

## 4.6 Выводы

Проведенные исследования обнаружили, что дальнедействующие спонтанные связи между элементами ансамбля разрушают режим мультистабильности. Данный эффект носит пороговый характер и имеет общие черты для колебаний с разной временной динамикой, как периодической, так и хаотической. Вначале, при достижении некоторого критического значения параметра связи и появляется длинноволновая фазовая модуляция, глубина которой растет с ростом параметра связи. В результате, в цепочке возникает несколько кластеров с близкими к синфазным колебаниям, между которыми располагаются элементы ансамбля, разность фаз которых велика - "фазовые дефекты". Данное распределение разности фаз движется вдоль цепочки с постоянной скоростью. Наконец, при достижении следующего критического значения происходит жесткий переход на пространственный режим с большей длиной волны (обычно с  $\Lambda = N$  или  $\Lambda = \infty$ ). При больших значениях коэффициента дальнедействующей связи в фазовом пространстве остается единственный пространственно - однородный режим, при котором колебания всех элементов являются синфазными.

## 5 Разработка пакета алгоритмов и прикладных программ для реализации анализатора спектров на основе концепции вейвлетов, предусматривающего автоподстройку частотно-временного разрешения

### 5.1 Введение

Несмотря на то, что вейвлет-анализ за последние два десятилетия хорошо зарекомендовал себя в качестве инструмента локализованного спектрального анализа, позволяющего изучать динамику систем с меняющимися во времени характеристиками, данный инструмент не лишен ряда недостатков, устранение которых позволяет повысить качество решения задач получения спектральных оценок, особенно при исследовании широкополосных процессов. Одной из ключевых проблем является проблема подстройки спектрального разрешения. В рамках оконного спектрального анализа с использованием классического преобразования Фурье размер оконной функции является постоянным, как во временной, так и в частотной областях. Это приводит к тому, что на низких частотах оконная функция может захватить несколько периодов колебаний анализируемого ритмического процесса, обеспечивая возможность оценки мгновенных спектров, а на более высоких частотах в соответствующий размер окна будут попадать, например, десятки и сотни периодов колебаний, что нарушает принцип локализованности (рисунок 27).

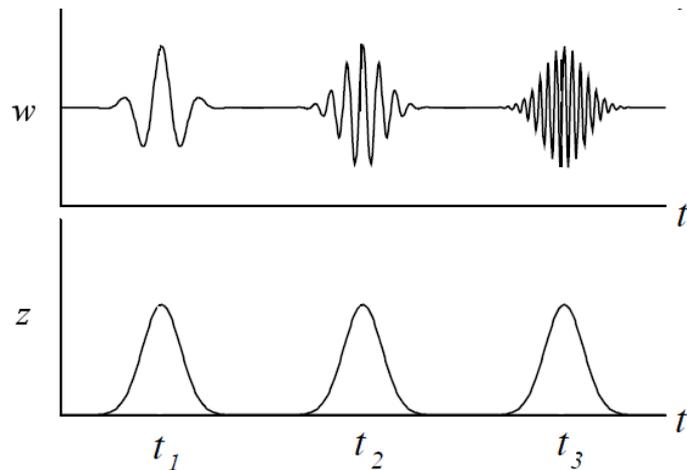


Рисунок 27 - Временное разрешение оконного спектрального анализа: сигнал, захватываемый оконной функцией ( $w$ ) и квадрат модуля огибающей ( $z$ ). В качестве оконной функции выбрана функция Гаусса

С одной стороны, это не позволяет эффективно изучать динамику систем с меняющимися во времени характеристиками, так как за временной промежуток, попадающий в пределы временного окна, свойства колебательного процесса могут измениться, и вместо отслеживания временной динамики локальных энергетических спектров будут получены усредненные величины. С другой стороны, при этом сохраняется баланс между спектральным и временным разрешением - отношение ширины окна во временной и спектральной областях остается постоянным, и все спектральные линии в спектре мощности имеют одинаковую ширину.

Вейвлет-анализ использует идеологию подвижного частотно-временного окна, расширяющегося во временной области на низких частотах и сужающегося на высоких частотах. Фактически, при этом обеспечиваются одинаковые условия с точки зрения локализованного спектрального анализа вне зависимости от частотного диапазона - как на низких, так и на высоких частотах в размер “вейвлетного окна” будет попадать одинаковое количество осцилляций анализируемой частоты (рисунок 28). Соответствующая особенность вейвлет-преобразования позволяет утверждать, что данный подход эффективен при изучении нестационарных процессов - быстрые (высокочастотные) изменения характеристик колебаний будут отслеживаться с помощью узкого по времени окна, тогда как для выявления медленных (низкочастотных) изменений необходимо рассматривать протяженные во временной области фрагменты исследуемого процесса.

Однако, проведение локализованного спектрального анализа с автоматической подстройкой ширины окна во времени приводит к проблемам в частотной области, среди которых можно выделить “размывание” спектров, связанное с увеличением ширины спектральной линии с ростом частоты и появление интерференций при недостаточном разрешении близких спектральных линий. Данное обстоятельство связано с невозможностью одновременного улучшения спектрального и временного разрешения (принципом неопределенности Гейзенберга) – уменьшение ширины окна во временной области сопровождается

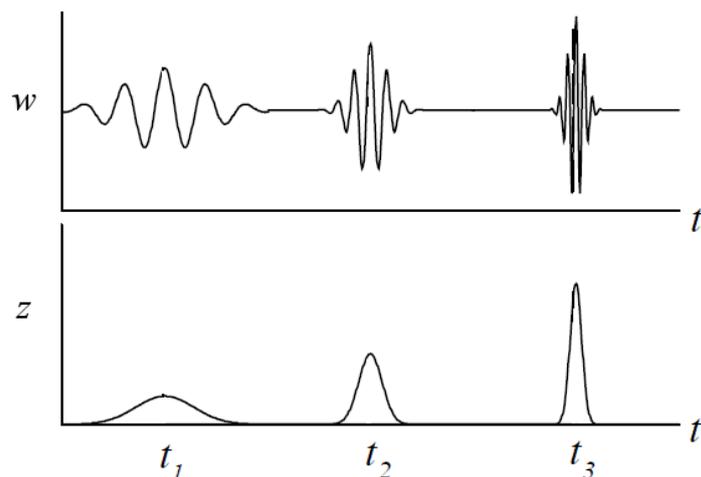


Рисунок 28 - Временное разрешение в рамках вейвлет-анализа: сигнал, захватываемый оконной функцией - вейвлетом ( $w$ ) и квадрат модуля огибающей ( $z$ )

ся увеличением ширины данного окна в частотной области с тем, чтобы площадь данного окна оставалась постоянной [34].

Еще одной проблемой, которая отмечалась в отчете по 2-му этапу НИР, является проблема нормировки спектров - отдельная нормировка должна проводиться при расчете амплитуд ритмических процессов и оценки энергии колебаний в анализируемом частотном диапазоне. “Размывание” спектральных линий приводит к тому, что при корректной оценке энергии колебаний в фиксированной полосе частот величина спектрального пика на анализируемой частоте не будет соответствовать квадрату амплитуды гармонических колебаний [35]. В связи с этим при разработке программного обеспечения необходимо учитывать данные обстоятельства.

## 5.2 Описание особенностей и основных возможностей разработанного пакета алгоритмов и прикладных программ

При выполнении НИР был разработан пакет программ для широкополосного спектрального анализа на основе непрерывного вейвлет-преобразования, предусматривающий подстройку спектрального разрешения. Данный пакет программ включает стандартную процедуру расчета коэффициентов  $W(a, b)$  непрерывного вейвлет-преобразования сигнала  $x(t)$

$$W(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi^* \left( \frac{t-b}{a} \right) dt, \quad (42)$$

где  $a$  – параметр масштаба,  $b$  – параметр смещения вдоль оси времени,  $\psi$  – выбранный анализатор (вейвлет), звездочкой обозначено комплексное сопряжение. В качестве вейвлета в задачах спектрального анализа традиционно используется функция Морле

$$\psi(t) = \frac{1}{\pi^{1/4}} \left( e^{j2\pi f_0 t} - e^{-(2\pi f_0)^2/2} \right) e^{-t^2/2}, \quad (43)$$

где  $f_0$  – параметр, называемый центральной частотой. Данная функция обладает хорошим разрешением как во временной, так в частотной областях. Кроме того, при выборе функции Морле результаты вейвлет-анализа являются наиболее приближенными к результатам классического оконного спектрального анализа, так как выбранная функция  $\psi$  представляет собой гармонические колебания, промодулированные по амплитуде функцией Гаусса. Этот вариант соответствовал бы оконному спектральному анализу с выбором функции Гаусса в качестве временного окна, однако отличие состоит в подстройке ширины окна под анализируемый временной масштаб, которое автоматически реализуется для вейвлет-преобразования.

Особенностью разработанного пакета программ является возможность подстройки спектрального разрешения, которое определяется величиной центральной частоты вейвлета Морле  $f_0$ . Настройка данного параметра позволяет достичь компромисс между разрешением вейвлет-преобразования по времени и по частоте. Программный комплекс предусматривает несколько вариантов тестирования в зависимости от степени нестационарности и числа характерных временных масштабов. В качестве тестовых примеров используются суперпозиции гармонических колебаний с независимыми частотами и сигналы с монотонным ростом (или уменьшением) частоты колебаний – линейные “чирпы”. Путем вывода на экран мгновенных значений частот ритмических процессов и энергетических спектров экспериментатор может осуществлять контроль приемлемого качества разрешения в частотной области, отсутствия паразитных интерференций (возникающих в том случае, когда расстояние в частотной области между мгновенными частотами сопоставимо со спектральным разрешением вейвлет-преобразования). Такой визуальный контроль результатов спектрального анализа является полезным на этапе предварительной настройки анализатора. Наряду с возможностью визуального контроля программный комплекс позволяет использовать настройки “по умолчанию”, которые предварительно были протестированы и являются эффективными для процессов, не содержащих участки сильной нестационарности.

Процесс расчета локальных энергетических спектров по экспериментальным данным в случае широкополосных процессов проводится в условиях “плавающего” значения  $f_0$ . Программный комплекс предусматривает две возможности:

- фиксированное значение  $f_0$  в пределах заданной полосы частот со скачкообразным изменением центральной частоты вейвлета при переходе к следующему частотному диапазону;
- монотонное изменение параметра  $f_0$  по линейному или квадратичному закону с указанием (или выбором по умолчанию) минимального (в низкочастотной области) и максимального (в высокочастотной области) значений.

Помимо проведения непосредственных расчетов энергетических спектров, предусмотрена возможность определения временных зависимостей мгновенных частот, мгновенных амплитуд и фаз характерных ритмов, а также расчет характеристик, по которым мож-

но судить о качестве проведенных спектральных оценок (таких, как отношение ширины спектральных линий к разнице частот сосуществующих ритмических процессов и т.д.).

В рамках НИР была проведена регистрация разработанного программного обеспечения: Павлов А.Н., Анисимов А.А. Программа широкополосного вейвлет-анализа с подстройкой спектрального разрешения // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2012612159 от 24.02.2012 (заявка №2011660129).

### **5.3 Применение разработанного пакета алгоритмов и прикладных программ для проведения спектрального анализа нестационарных физиологических процессов**

Разработанный пакет прикладных программ был применен для исследования структуры сигналов медико-биологической природы в целях выявления возможностей улучшения спектральных оценок, проводимых в рамках стандартного подхода к расчету энергетических спектров на основе непрерывного вейвлет-преобразования (с фиксированной центральной частотой анализатора). В качестве примера экспериментальных данных были выбраны сигналы, регистрируемые с помощью метода когерентной фазовой микроскопии [36] клеток живых организмов (эритроциты крови человека, изолированные нейроны пиявки и т.д.). Соответствующие эксперименты проводились специалистами из Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова и Саратовского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского, которые предоставили для тестирования методов цифровой обработки сигналов ряд записей временных зависимостей фазовой высоты в различных точках клеток. Причина выбора соответствующих сигналов состоит в их чрезвычайной сложности - наличии большого количества независимых ритмов, нелинейности (приводящей к появлению большого количества гармоник и комбинационных частот), нестационарности. Эти причины обусловили проблемы адекватной интерпретации результатов спектрального анализа экспериментальных данных, представленные, например, в работе [37]. В частности, из-за сложного спектрального состава и существования интерференций близко расположенных в частотной области спектральных составляющих могут быть сделаны ошибочные выводы о модуляции одних колебательных процессов другими колебательными процессами, то есть о существовании связи между системами, ответственными за возникновение данных колебаний. Несмотря на то, что существуют способы отличить случаи модуляции и интерференций [38], для нестационарных процессов со сложным спектральным составом это не всегда просто сделать.

На рисунке 29 изображен пример усредненного энергетического вейвлет-спектра сигнала фазовой высоты, зарегистрированного при проведении когерентной фазовой микроскопии клетки эритроцита. Следует отметить, что данный спектр содержит большое количество частотных компонент в области ниже 10 Гц, тогда как с ростом частоты количество "пигов" уменьшается. Данное обстоятельство, вероятно, связано с эффектом "расплывания" спектральных линий вейвлет-спектра, и его можно постараться избежать путем

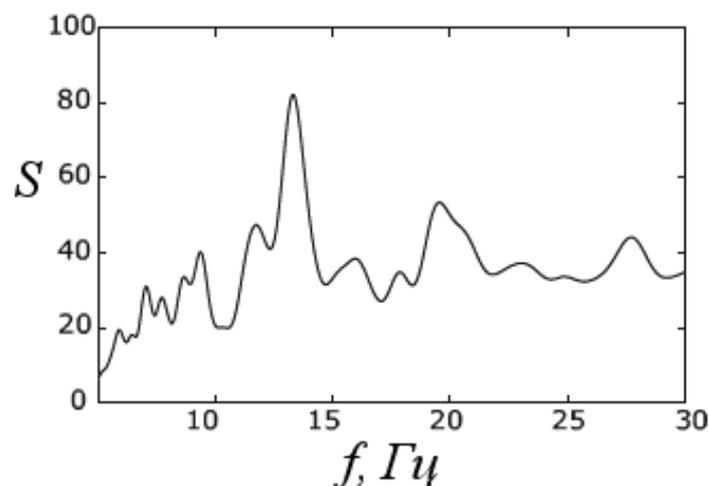


Рисунок 29 - Пример энергетического спектра вейвлет-анализа временной зависимости фазовой высоты клетки

адекватной настройки анализатора. Наличие перекрывающихся спектральных составляющих свидетельствует о недостаточной разрешающей способности анализатора (вейвлета Морле) при выбранном значении  $f_0$ . Отметим, что проведение оценок при  $f_0 = const$  не позволяет эффективно изучать динамику в широком диапазоне частот колебаний. Более предпочтительным представляется вариант задания граничных значений центральной частоты вейвлета Морле (для минимальной и максимальной частот энергетического спектра) с последующей интерполяцией величины  $f_0$  в выбранном частотном диапазоне. Такой вариант спектрального анализа, предусмотренный в разработанном программном комплексе, позволяет повысить качество оценок мгновенных частот и амплитуд ритмических процессов. Для тестовых примеров в частотной области единиц Герц получено снижение погрешности соответствующих оценок примерно на 3-4%. Аналогичный порядок снижения погрешности ожидается и для экспериментальных данных, полученных в рамках метода когерентной фазовой интерферометрии (тесты специально подбирались для достижения максимального соответствия с реальными данными). Данное обстоятельство важно при изучении эффектов взаимодействия и взаимного влияния физиологических механизмов, ответственных за генерацию ритмической активности, так как величина снижения погрешности оценок является сопоставимой, например, с шириной области синхронизации. Таким образом, разработанный программный комплекс позволяет точнее оценивать длительности участков подстройки частот колебаний (по оценкам, проведенным в рамках НИР, повышение точности расчетов длительностей таких участков может достигать до 8-9%).

## 5.4 Выводы

В рамках НИР разработан пакет программ для широкополосного спектрального анализа на основе непрерывного вейвлет-преобразования с подстройкой центральной частоты анализатора, которая может проводиться как в автоматическом режиме, так и задаваться

экспериментатором. Комплекс прошел тестирование на многочисленных примерах многокомпонентных нестационарных сигналов и апробацию на экспериментальных данных. Он предусматривает возможность оценок глобальных и локальных энергетических спектров, временных зависимостей мгновенных частот, мгновенных амплитуд и фаз ритмических процессов, расчет ряда характеристик, позволяющих оценивать качество спектральных оценок. Получено свидетельство о государственной регистрации соответствующего пакета программ. Применение программного комплекса к экспериментальным данным (многокомпонентные нестационарные процессы, регистрируемые при проведении когерентной фазовой микроскопии клеток) позволило улучшить качество спектральных оценок (снижение погрешности оценки мгновенных частот колебаний - до 3-4%, длительностей участков подстройки ритмических процессов - до 8-9%).

## **6 Разработка структурных схем защищенной передачи информации в виде аналоговых и цифровых сигналов**

### **6.1 Введение**

Одной из ключевых проблем при практической реализации методов защищенной передачи информации, использующих идеологию детектирования информационных сообщений, передаваемых в хаотическом несущем сигнале, на основе реконструкции динамических систем, является проблема повышения точности оценки параметров генератора хаотических колебаний [39]. От ее решения во многом зависят возможности улучшения характеристик многоканальности и защищенности системы связи. Решение данной проблемы требует установления возможностей определения текущих значений параметров генератора при наличии различных источников помех.

Задачу можно сформулировать следующим образом. Пусть модель динамической системы (генератора хаотических автоколебаний) задана в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений (такое динамическое описание справедливо для многих эталонных моделей генераторов), и требуется определить значение управляющих параметров по временной зависимости одной из переменных состояния данной системы. Если система является детерминированной, то данная задача сравнительно легко решается, так как значения параметров можно выразить через значения динамических переменных и их производных. Однако при наличии различных источников помех большой интенсивности оценки параметров в разные моменты времени могут существенно отличаться от истинного значения. Задача о корректной оценке параметров в этом случае оказывается более сложной. Известно, что даже слабый шум может приводить к существенным изменениям в поведении динамической системы. Система особенно чувствительна к случайным воздействиям, если она находится вблизи бифуркационных состояний или в режиме негиперболического хаоса. В рамках НИР проведены исследования, направленные на практическую реализацию детектора, предусматривающего возможность решения данной задачи, и раз-

работку структурных схем защищенной передачи информации.

## 6.2 Оценка параметров генератора хаотических колебаний в численном эксперименте

Рассмотрим возможность оценки параметров генератора хаотических колебаний на примере системы Ресслера:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z + \sqrt{2D}n(t), \\ \dot{y} = x + \alpha y, \\ \dot{z} = b + z(x - m), \end{cases} \quad (44)$$

где  $\alpha, b, m$  – управляющие параметры, система (44) содержит источник аддитивного шума интенсивности  $D$  (нормально распределенный случайный процесс).

Будем оценивать управляющий параметр  $m$ , зафиксировав остальные параметры  $\alpha, b$ . Текущая оценка на  $i$ -м шаге задается формулой, которую можно получить, если выразить параметр  $m$  из третьего уравнения системы (44):

$$m_i = \frac{b + z_i x_i - \dot{z}_i}{z_i}. \quad (45)$$

Производная  $\dot{z}_i$  аппроксимируется выражением:

$$\dot{z}_i = \frac{1}{12h}(z_{i-2} - 8z_{i-1} + 8z_{i+1} - z_{i+2}), \quad (46)$$

где  $h$  – шаг дискретизации временной реализации.

Полученный таким образом массив значений параметра  $m$  подвергался дальнейшей обработке, исследовалось распределение плотности вероятности, а итоговый результат получался нахождением среднего значения и значения, которому соответствует наибольшая плотность вероятности. Оба возможных метода оценки параметра (оценка по среднему значению и по максимуму плотности вероятности) дали хороший результат. Ранее проведенные в [40] исследования показали, что на основе статистической обработки экспериментально получаемых реализаций нелинейных динамических систем, содержащих внутренние источники шума, возможно получить оценки управляющих параметров с высокой точностью даже при большой интенсивности шума. Достаточно точные оценки значений управляющего параметра возможно получать не только в случае устойчивых периодических колебаний, но также для генераторов вблизи бифуркаций удвоения периода и в режиме хаотической динамики. Ошибка оценки не зависит от наличия бифуркаций удвоения периода в диапазоне изменения управляющих параметров. В работе [40] была исследована задача оценки параметра при наличии мягких локальных бифуркаций (бифуркации удвоения периода и суперкритическая бифуркация Андронова-Хопфа). Вопрос влияния жестких бифуркаций на результаты подобной оценки был исследован в [41]. Было выявлено, что жесткие бифуркации влияют на точность оценки сильнее, чем мягкие; оценка

ухудшается в случае жестких бифуркаций, но отклонения имеют малые значения; с увеличением интенсивности шума ошибка оценки параметра становится больше, но остается приемлемой для реализации системы защищенной передачи информации. Однако для разработки структурных схем защищенной передачи информации необходимо провести тестирование в радиофизическом эксперименте.

### 6.3 Оценка параметров генератора хаотических колебаний в радиофизическом эксперименте

Для выяснения возможности практической реализации системы защищенной передачи информации с помощью модуляции параметров системы были проведены эксперименты по оценке одного неизвестного параметра в присутствии шума. В этих целях создана экспериментальная установка, представляющая собой аналоговую модель осциллятора Ресслера. Экспериментальная установка, как любая физическая система, подвержена действию внутренних и внешних шумов, характеристики которых заранее не известны. Кроме того, была предусмотрена возможность подключения специального генератора шума в любой из каналов, а также подключение одновременно нескольких генераторов шума на разные каналы. В эксперименте присутствовал также измерительный шум, однако в соответствии с характеристиками АЦП он был незначителен. Внешний вид и принципиальная схема установки представлены на рисунках 30 и 31, соответственно.



Рисунок 30 - Внешний вид созданной установки

Работа экспериментальной установки описывается системой уравнений:

$$\begin{cases} R_0 C \dot{x} = -y - z + \xi_1(x, y, z, t) + \chi_1(t), \\ R_0 C \dot{y} = x + \alpha y + \xi_2(x, y, z, t) + \chi_2(t), \\ R_0 C \dot{z} = b + z(x - m) + \xi_3(x, y, z, t) + \chi_3(t), \end{cases} \quad (47)$$

где  $\alpha = R_0/R_1$ ,  $b = U_1/5$ ,  $m = -U_2$ ,  $R_0 = R_2, R_5 \dots R_{10}$ ,  $U_1, U_2$  – напряжение в вольтах.

При обработке экспериментальных данных система (47) нормировалась по времени для того, чтобы привести ее к виду (44). Проводился переход от времени  $t$  к времени

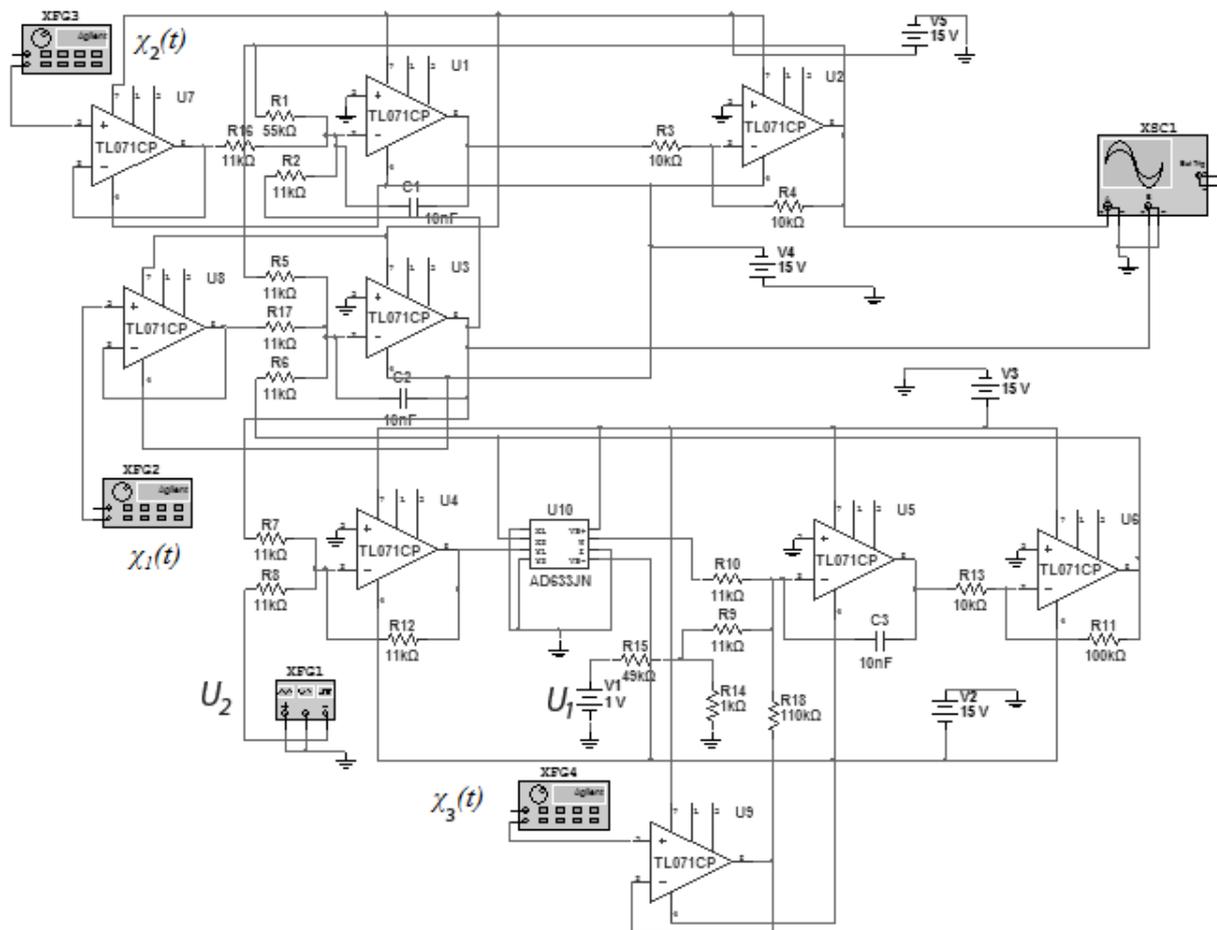


Рисунок 31 - Принципиальная схема установки

$\tau = R_0 C * t$ . Случайные источники  $\xi_j(x, y, z, t), j = 1, 2, 3$  представляют собой динамический шум, создаваемый в совокупности внутренними шумами и внешними неучтенными случайными воздействиями. Характеристики источников  $\xi_j(x, y, z, t)$  не известны. Это могут быть как аддитивные случайные воздействия, так и параметрические шумы, интенсивность которых зависит от состояния системы. Кроме того, эти источники могут включать компоненты и белого шума и цветного шума. Аддитивные шумы  $\chi_j(x, y, z, t), j = 1, 2, 3$  представляют собой действие специально подключенных генераторов шума с известными управляемыми характеристиками, генераторы являются широкополосными источниками с гауссовым распределением. В эксперименте можно было управлять интенсивностями этих источников  $D_j$  (аппаратура позволяет управлять характеристиками шума). Карты режимов колебаний, полученные в численном и натурном эксперименте (рисунок 32), свидетельствуют о том, что экспериментальная установка с высокой точностью повторяет динамику математической модели в широком диапазоне значений управляющих параметров. Расхождения эксперимента с численным расчетом, которые объясняются небольшими потерями энергии на активных элементах, не учтенными в уравнениях (47), являются весьма незначительными. Соответственно, ошибка в оценке параметра, связанная с неполным соответствием математической модели и реальной системы будет небольшой, и модель (47) может быть использована для оценки параметров экспериментальной системы по измеря-

ЕМЫМ ДАННЫМ.

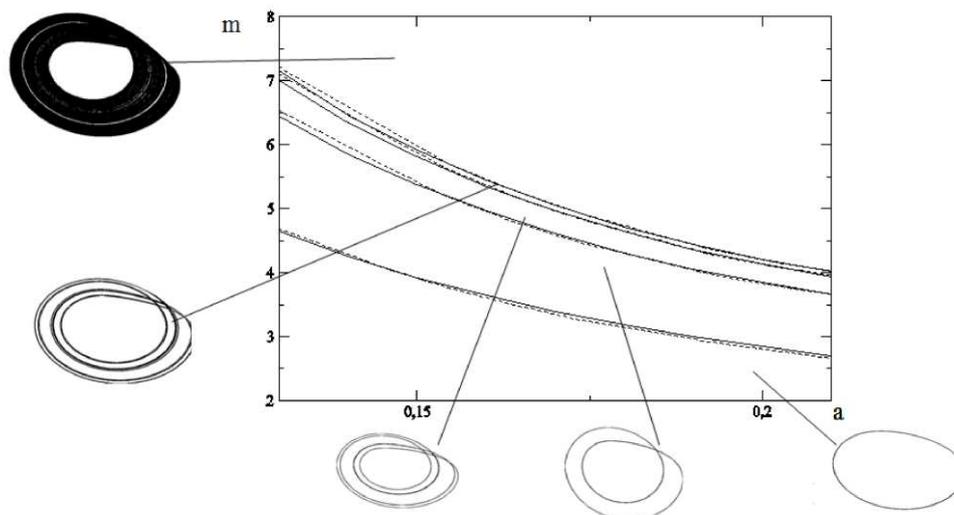


Рисунок 32 - Карты режимов на плоскости параметров  $\alpha$ ,  $m$  при фиксированном  $b = 0.2$ . Пунктирные линии обозначают бифуркации, происходящие в экспериментальной установке (47), сплошные линии – в математической модели (44)

Эксперимент проводился следующим образом: осциллятор Ресслера подключается к измерительному оборудованию, настраивается на нужный режим работы, затем с помощью АЦП и компьютера временные реализации записываются в файлы в реальном времени. По полученным данным  $x_i$  и  $z_i$  с помощью выражений (45) и (46) осуществляется расчет оценки управляющего параметра  $m$  аналогично случаю численного моделирования. Исследовался режим периодических (квазигармонических) колебаний без воздействия генераторов шума, режим колебаний удвоенного периода без воздействия генераторов шума и режим колебаний удвоенного периода с подключением в систему внешнего генератора шума. Шум вводился в первый канал (что соответствует первому уравнению системы) и имел среднеквадратичное отклонение  $0.75V$ . Строились распределения значений  $m_i$  и подсчитывалась относительная ошибка для каждого рассматриваемого режима.

Результаты обработки экспериментальных данных в трех исследованных режимах представлены на рисунке 33. Все полученные плотности вероятности  $p(m_i)$  далеки от гауссова распределения и не являются унимодальными. Однако оценка параметра  $m$  по среднему значению дает приемлемый результат, несмотря на присутствие в системе значительного динамического шума, на шум измерения и на неполное соответствие экспериментальной системы и математической модели (44). В режиме квазигармонических колебаний без воздействия генераторов шума относительная ошибка оценки составляет  $\Delta = 0.83\%$  (рисунок 33(а)), в режиме колебаний удвоенного периода без воздействия генераторов шума  $\Delta = 1.03\%$  (рис.33(б)), а при подключении в систему внешнего генератора шума она становится даже немного меньше  $\Delta = 0.87\%$  (рис.33(в)).

Характер получаемых в эксперименте распределений  $p(m_i)$  может быть объяснен присутствием в системе узкополосного параметрического шума и/или регулярных изменений параметров. Особенно это отразилось на распределении, представленном на рисунке 33а.

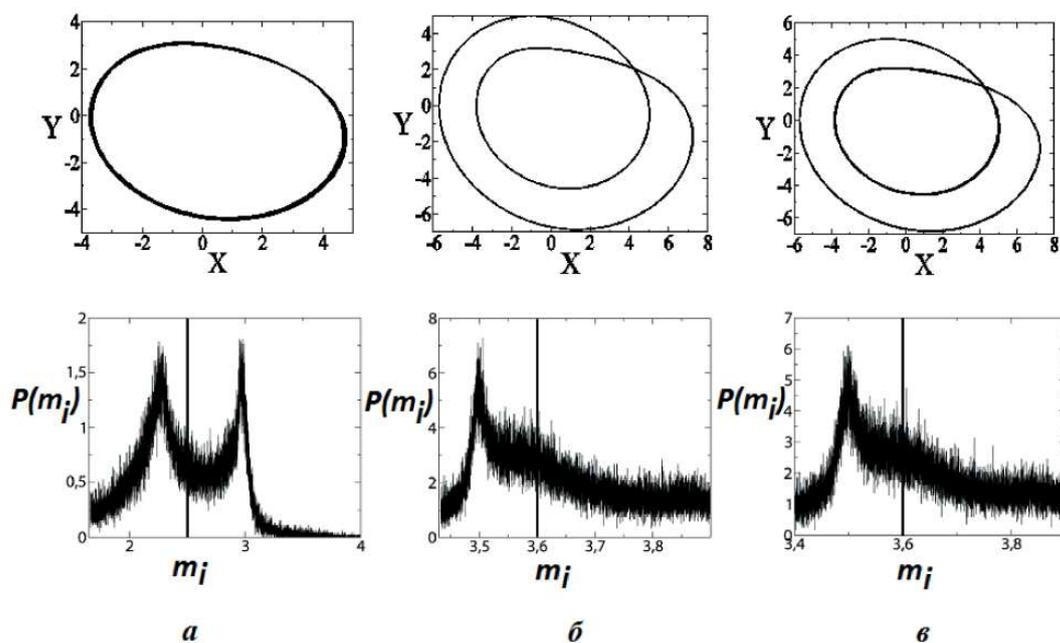


Рисунок 33 - Результаты обработки экспериментальных данных: а – в режиме квазигармонических колебаний при  $m = 2.5$  без использования генератора шума; б – в режиме колебаний удвоенного периода при  $m = 3.6$  без генератора шума; в – при  $m = 3.6$  с генератором гауссова белого шума в первом канале с среднеквадратичным отклонением  $0.75$  V. В верхнем ряду приводятся проекции фазовых портретов колебаний, в нижнем – распределения значений  $m_i$ . Сплошной линией отмечено истинное значение параметра  $m$

Наличие двух наивероятнейших значений параметра  $m$  (двух максимумов распределения), по-видимому, есть результат паразитных наводок, приводящих к модуляции параметра. Это предположение подкрепляется видом зависимости  $m_i$  от номера шага измерения  $i$  (рисунок 34).

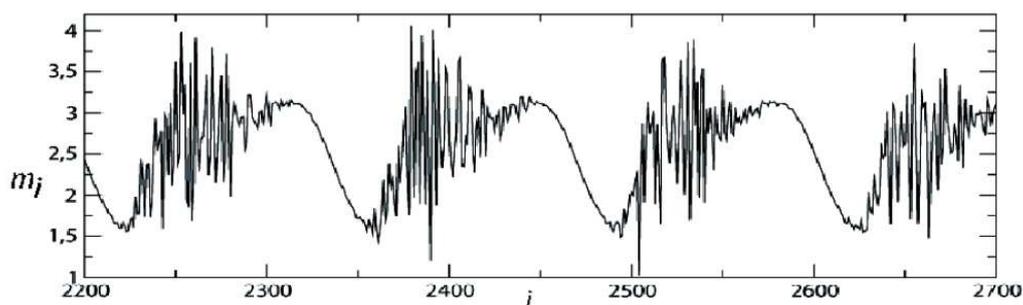


Рисунок 34 - Зависимость  $m_i$  от номера шага измерения  $i$  в режиме квазигармонических колебаний при  $m = 2.5$  без подключения генераторов шума

Проведенные исследования подтвердили возможность получения достаточно точной оценки управляющего параметра динамической системы, содержащей источник динамического шума, при использовании простого и быстрого метода оценки, на основании известных уравнений системы и ряда значений динамических переменных. Оценки с хорошей точностью были получены даже при сильном шуме, для экспериментально измеряемых данных в различных режимах колебаний системы. Сравнительно хорошая точность оценки параметра в физическом эксперименте, несмотря на наличие различного рода шу-

мов и помех и неточности математической модели, свидетельствует о возможности применения исследованного метода в задаче скрытой передачи сигнала с помощью модуляции параметра реальной динамической системы. Однако при этом требуется решить еще ряд задач. Необходимо, например, определить минимальный интервал времени, на котором измерение и обработка реализаций динамических переменных дает приемлемые оценки мгновенных значений изменяющегося во времени параметра. Это может быть полезным для оценки параметров динамических систем в случае изменяющегося параметра.

## 6.4 Передача сигнала с использованием модуляции параметра генератора хаотических колебаний

Предложенный в работе [39] подход к реконструкции сигналов предусматривает выбор такого временного окна  $t^*$ , что в его пределах значения параметров генератора хаотических колебаний допустимо еще считать практически постоянными. Иначе говоря, в течение времени  $t^*$  неавтономность генератора в расчёт не принимается. Тогда, скользя временным окном вдоль несущего сигнала, можно осуществить выделение сигналов модуляции в реальном времени [39]. Вышесказанное относится также и к задаче оценки значений параметров по временным реализациям как части глобальной задачи реконструкции динамических систем. Применяемый в рамках НИР метод можно попытаться использовать и в случае изменяющегося с течением времени значения параметра, изменив алгоритм оценки определенным образом. Измененный алгоритм заключается в следующем. Сначала проводится расчет значений параметра аналогично тому, как это делалось в разделе 6.3 (см. выражение(45)).

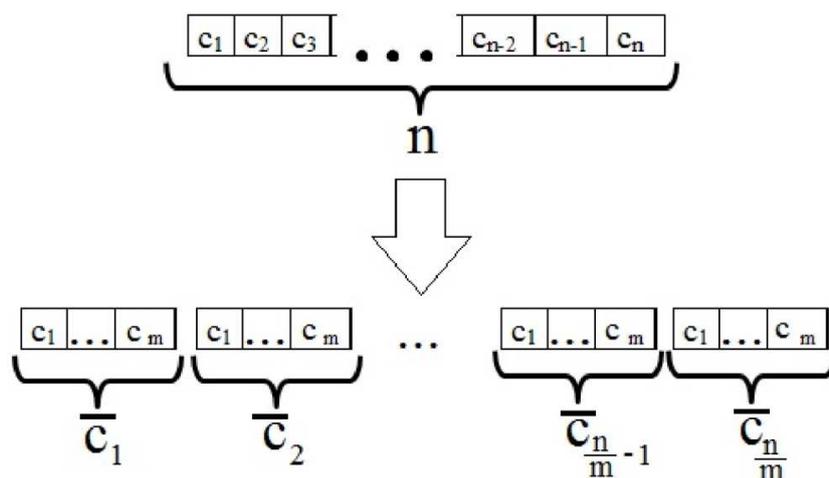


Рисунок 35 - Наглядное представление алгоритма разбиения массива значений оцениваемого параметра на окна анализа

Полученный таким образом массив значений параметра в каждый момент времени разбивается на подмассивы (окна анализа), и в каждом таком окне проводится окончательная обработка, которая заключается в вычислении среднего значения параметра в каждом окне. Оценка по среднему значению была выбрана, так как она обеспечивает

более точный результат, чем оценка по максимуму плотности вероятности в случае постоянного параметра. Методы оценки по среднему и по максимуму плотности вероятности рассматривались, поскольку они являются довольно простыми, а главное, быстрыми в выполнении на компьютере, что дает возможность использования их для осуществления защищенной передачи информации в реальном времени.

Рассмотрим вначале случай, когда управляющие параметры  $\alpha, b$  системы Ресслера (44) являются постоянными величинами, а параметр  $m$  меняется во времени. Значения этого параметра по временным реализациям вычислялись с помощью формулы (45). Для осуществления численного моделирования и записи временных реализаций использовался пакет ХРРАУТ 6.10. Полученный по (45) массив значений параметра  $m$  разбивался на окна и в каждом окне проводилось вычисление среднего значения.

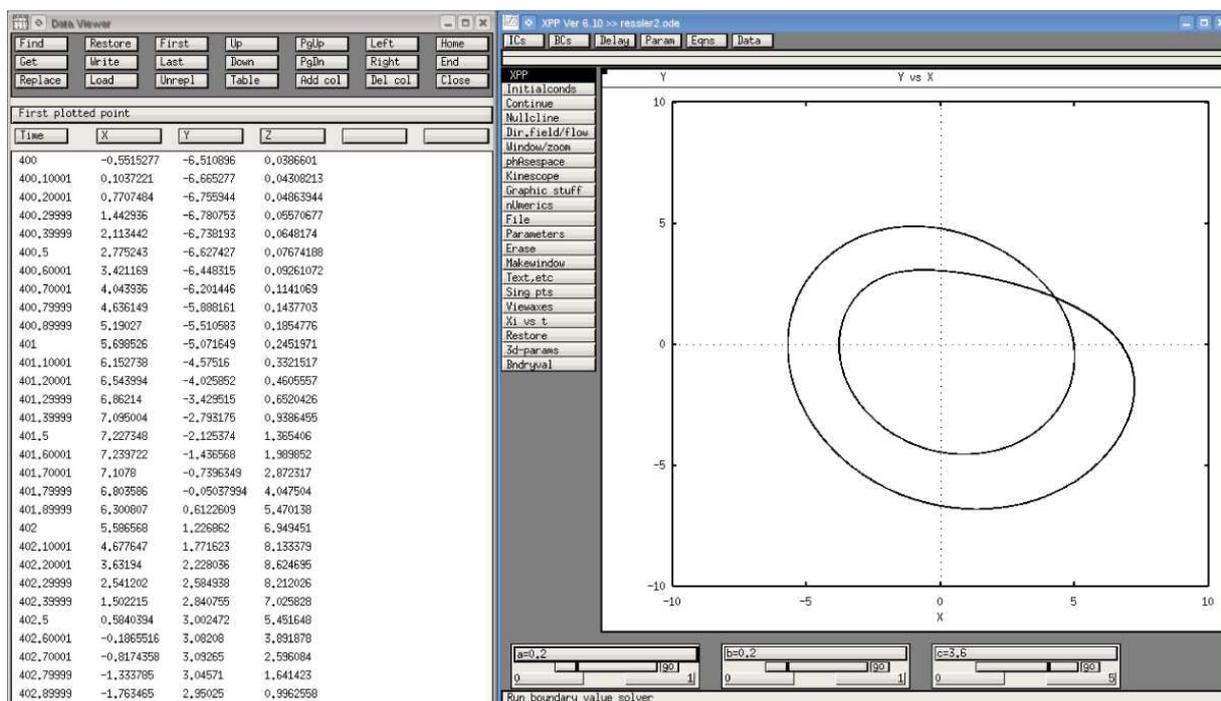


Рисунок 36 - Численное моделирование в ХРРАУТ 6.10

Первоначально численный эксперимент проводился таким образом, что значения параметра  $m$  не превышали значения, при которых в системе происходят бифуркации удвоения периода и за все время наблюдений в системе наблюдались колебания периода 1. Параметр  $m$  модулировался сигналом в форме синуса. В численном эксперименте этот сигнал был успешно восстановлен при различных значениях частоты сигнала. Результаты восстановления представлены на рисунках 37, 38, 39.

Далее численный эксперимент был продолжен, и теперь зависимость  $m(t)$  была такова, что в связи с изменением значения параметра  $m$  с течением времени в системе наблюдался каскад бифуркаций удвоения периода с последующим переходом к хаотическим колебаниям.

Модулирующий сигнал был успешно восстановлен (рисунок 40). Бифуркации удвоения периода, происходящие в системе, не повлияли на результаты восстановления сигнала.

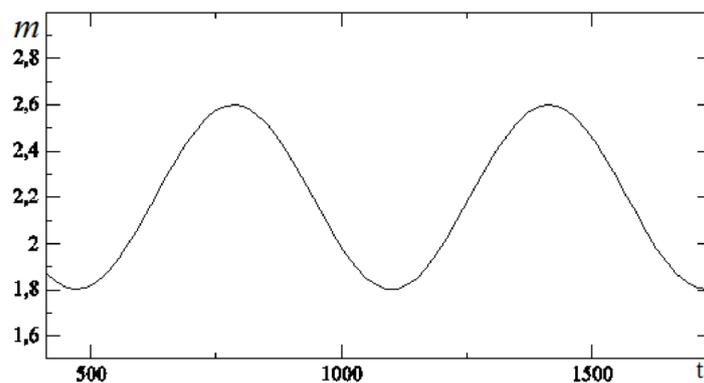


Рисунок 37 - Результат восстановления сигнала  $m = 2.2 + 0.4\sin(0.01t)$

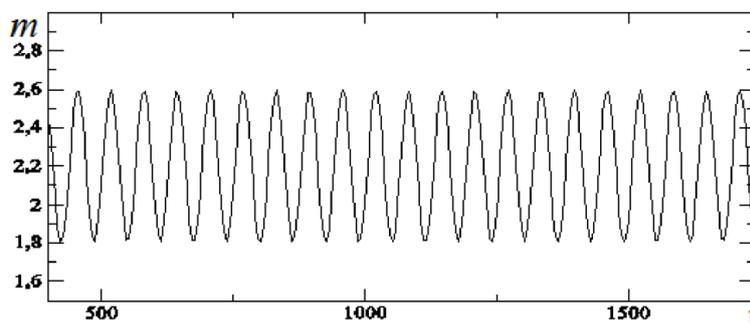


Рисунок 38 - Результат восстановления сигнала  $m = 2.2 + 0.4\sin(0.1t)$

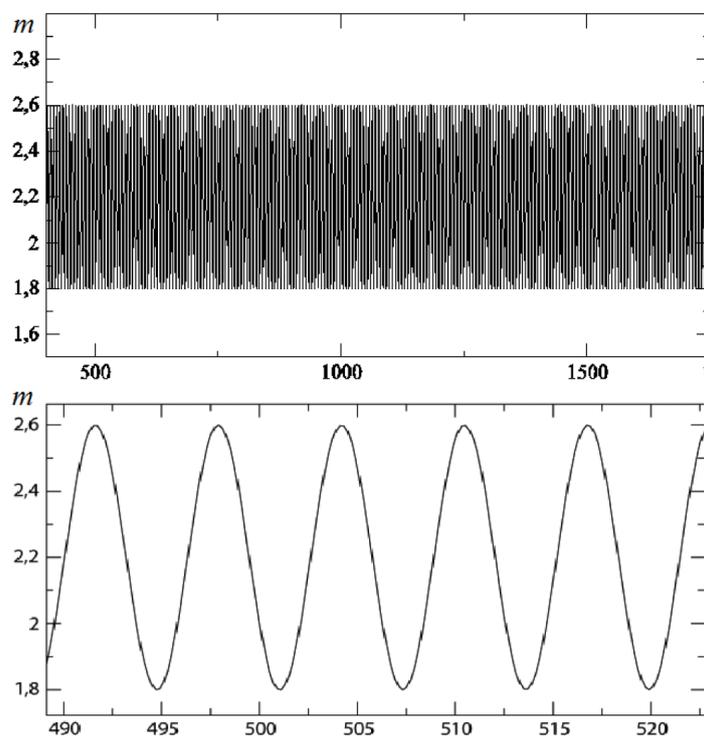


Рисунок 39 - Результат восстановления сигнала  $m = 2.2 + 0.4\sin(t)$  (нижний рисунок более детально передает форму восстановленного сигнала)

Сигнал был успешно восстановлен и в те моменты времени, когда система находилась в режиме хаоса. Причем, восстановление сигнала проводилось как в отсутствие шумов, так

и при их добавлении.

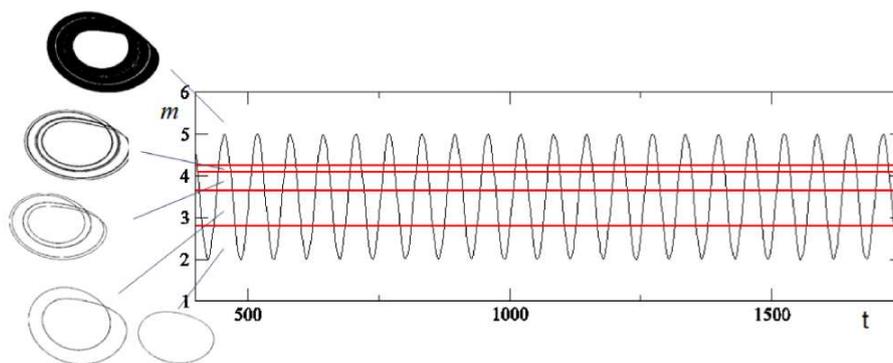


Рисунок 40 - Результат восстановления сигнала  $m = 3.5 + 1.5\sin(0.1t)$

При проведении радиофизического эксперимента была использована созданная установка (рисунки 30, 31). На вход  $U_2$ , отвечающий за значение параметра  $m$ , подавались сигналы различной формы, которые затем восстанавливались.

При восстановлении сигналов в натурном эксперименте становится важным выбор размера окна анализа. В численном эксперименте при моделировании можно получить временные реализации с каким угодно малым шагом, чтобы иметь достаточно большое количество точек для расчета, разбиения на окна и усреднения. В натурном же эксперименте возможное количество точек и шаг во временных реализациях имеют предел, который определяется частотой дискретизации АЦП, особенностями работы операционной системы компьютера и т.д. В этом случае при выборе размера окна анализа приходится искать компромисс: с одной стороны размер окна должен быть достаточно большим (чтобы провести усреднение по достаточно большому количеству точек), а с другой стороны отрезок времени, захватываемый окном анализа, должен быть достаточно малым, чтобы можно было пренебречь изменениями значения параметра за этот отрезок времени. Таким образом, в каждом окне анализа значение параметра предполагается постоянным. На рисунке 41 показаны результаты восстановления сигнала (фрагмент), представляющего собой последовательность прямоугольных импульсов, при различных размерах окна.

На вход  $U_2$  подавались сигналы, представляющие собой либо синус, либо последовательность прямоугольных импульсов. Исследование проводилось как без подключения внешнего источника шума, так и с подключением внешнего аддитивного источника белого гауссова шума интенсивности  $D = 0.01$  в первый канал (см. 47). Характеристики сигнала подобраны таким образом, что в связи с изменением значения параметра  $m$  в системе наблюдается каскад бифуркаций удвоения периода с последующим переходом к хаотическим колебаниям. Результаты восстановления представлены на рисунках 42-45.

Итак, в численном и радиофизическом экспериментах было показано, что несмотря на происходящие в системе бифуркации удвоения периода и наличие внешних и внутренних источников шума предложенный метод позволяет достаточно точно восстанавливать сигналы по временным реализациям динамической системы. Сигнал был успешно восстановлен и в те моменты времени, когда динамическая система находилась в режиме

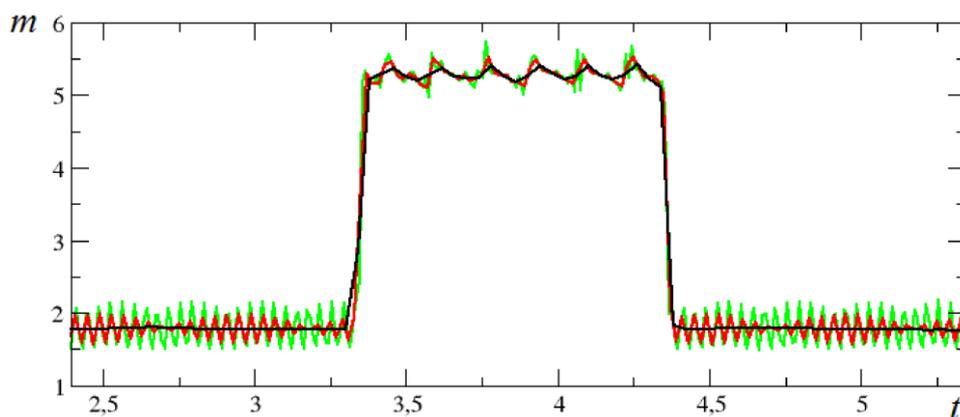


Рисунок 41 - Результат восстановления последовательности прямоугольных импульсов: зеленый цвет - размер окна 500 точек, красный - 1000 точек, черный - 2000 точек

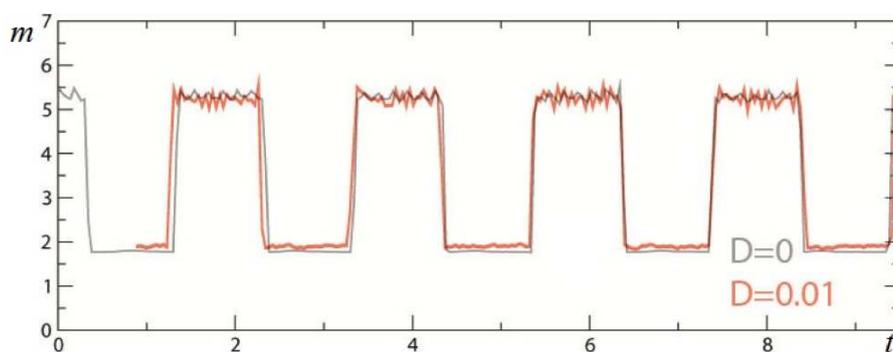


Рисунок 42 - Результат восстановления последовательности прямоугольных импульсов с частотой 0.5 Гц и скважностью 2

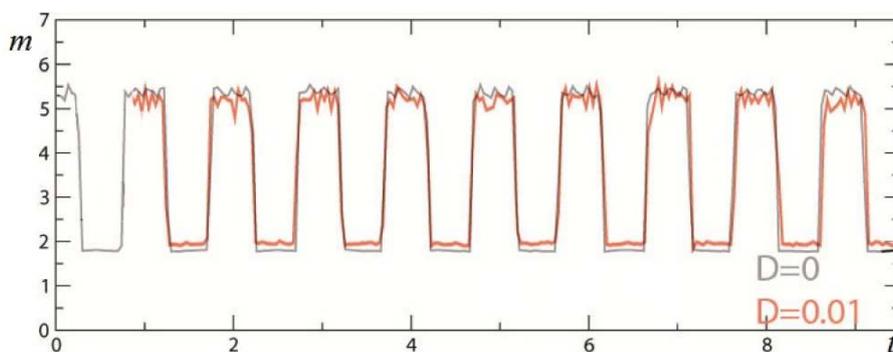


Рисунок 43 - Результат восстановления последовательности прямоугольных импульсов с частотой 1 Гц и скважностью 2

хаотических колебаний. Таким образом можно сказать, что предложенный метод может применяться для реализации системы защищенной передачи информации.

## 6.5 Выводы

При выполнении НИР были получены следующие результаты:

1) В радиофизическом эксперименте была подтверждена возможность приемлемой оценки параметров динамических систем по временным реализациям.

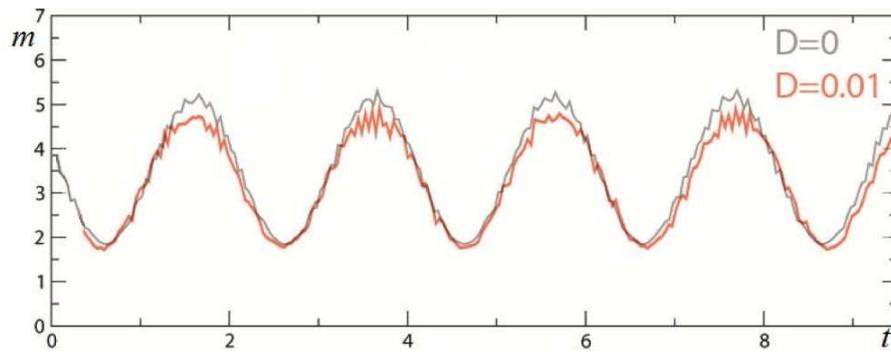


Рисунок 44 - Результат восстановления сигнала в форме синуса с частотой 0.5 Гц

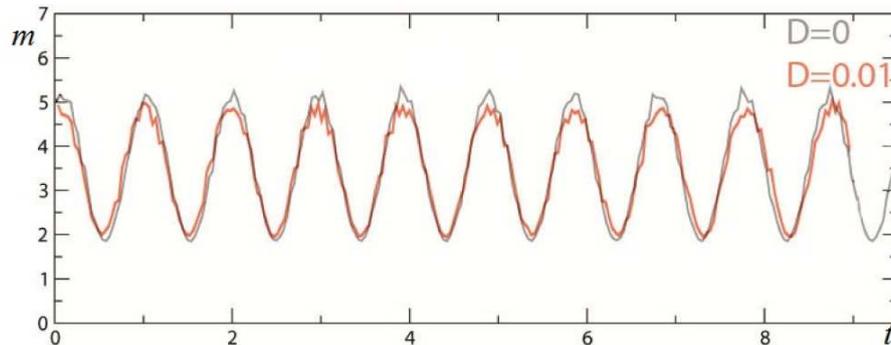


Рисунок 45 - Результат восстановления сигнала в форме синуса с частотой 1 Гц

2) Был предложена структурная схема метода скрытой передачи информации с использованием модуляции управляющего параметра динамической системы, базирующийся на задаче оценки параметров по временным реализациям. Возможность применения предложенного метода была продемонстрирована в численном и натурном экспериментах. Было установлено, что, несмотря на происходящие в системе бифуркации удвоения периода, наличие внешних источников шума с известными характеристиками и внутренних шумов с неизвестными характеристиками, предложенный метод позволяет восстанавливать сигналы с хорошей точностью. Было также установлено, что пребывание исследуемой системы в режиме хаоса не повлияло существенным образом на результаты восстановления сигнала.

Таким образом можно утверждать, что возможно применение предлагаемого метода при практической реализации системы скрытой передачи информации.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведения научных исследований получены следующие принципиальные научные результаты:

1. Разработана единая концепция стохастических автоколебаний в неавтономных нелинейных системах с шумовым возбуждением.
2. Произведен анализ характеристик и бифуркаций стохастических систем в условиях аддитивного и мультипликативного воздействия шумом различной статистики.
3. Разработана теория взаимодействия заряженных частиц с солитонами в решетке связанных нелинейных осцилляторов.
4. Исследована синхронизация и мультистабильности в ансамблях связанных осцилляторов в условиях спонтанных дальних связей между парциальными элементами.
5. Разработан пакет алгоритмов и прикладных программ для реализации анализатора спектров на основе концепции вейвлетов, предусматривающего автоподстройку частотно-временного разрешения.
6. Разработаны структурные схемы защищенной передачи информации в виде аналоговых и цифровых сигналов.

По материалам исследований подготовлены и изданы научные публикации [42–58], в том числе: один патент [42], два свидетельства о гос. регистрации программы [43, 44], монография [45], статьи в реферируемых журналах [46–58]. Результаты исследований могут быть будут использованы для подготовки студентов, магистров, молодых кандидатов и докторов наук по специальностям «радиофизика и электроника», «физика» и «медицинская физика» на физическом факультете СГУ; модернизации существующих учебных курсов «Основы теории колебаний», «Статистическая радиофизика», «Введение в нелинейную динамику», «Методы численного анализа экспериментальных данных», «Теория дискретных систем», «Детерминированный хаос», «Синхронизация колебаний», «Основы теории распределенных систем», «Анализ временных рядов» и лабораторного практикума «Электронное моделирование сложных систем и процессов».

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Стратонович Р.Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. – М.: Сов. радио, 1961.
2. Вентцель А.Д., Фрейдлин М.И. Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. – М.: Наука, 1979.
3. Хорстнемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы. – М., Мир, 1987.
4. Гардинер К.В. Стохастические методы в естественных науках. – М.: Мир, 1986.
5. Risken Z. The Fokker-Planck Equation. – Berlin, Springer, 1989.
6. Ван Кампен Н.Г. Стохастические процессы в физике и химии. – М.: Высшая школа, 1990.
7. Arnold L. Random dynamical systems. – Berlin: Spriger, 2003.
8. Lefever R., Turner J. Sensitivity of a Hopf bifurcation to multiplicative colored noise // Phys. Rev. Lett. –1986. –Vol.56. –P.1631–1634.
9. Franzoni L., Mannella R., McClintock P., Moss F. Postponement of Hopf bifurcations by multiplicative colored noise // Phys. Rev. F. –1987. –Vol. 36. –P.834-841.
10. Arnold L., Sri Namachshivaya N., Schenk-Yoppe K.R. Toward an understanding of stochastic Hopf bifurcation: a base study // Int. J. Bifurcation and Chaos,. –1996. –Vol. 6. –P. 1947–1975.
11. Schenk-Yoppe K.R. Bifurcation scenarios of the noisy Duffing - Van der Pol oscillator // Nonlinear Dynamics. –1996. –Vol. 11. –P. 255–274.
12. Olarrea J, de la Rubia F.J. Stochastic Hopf bifurcation: The effect of colored noise on the bifurcational interval // Phys. Rev. E. –1996. –Vol.53. –P. 268 –271.
13. Leung H.K. Stochastic Hopf bifurcation in a based van der Pol model // Physica A. –1998. –Vol.254. –P. 146 –155.
14. Bashkirtseva I., Ryashko L., Schurz H. Analysis of noise-induced transitions for Hopf system with additive and multiplicativt random disturbances // Chaos, Solitons, and Fractals. – 2009. –Vol. 39. –P. 7 –16.
15. Вадивасова Т.Е., Анищенко В.С., Стохастические бифуркации // Изв. Вузов. Прикладная нелинейная динамика. –2009. –Т.17. –№ 5. –С.3-16.

16. Стратонович Р.Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. – М.: Сов. радио, 1961.
17. Тихонов В.И., Миронов М.А., Марковские процессы. – М.: Сов. радио, 1977.
18. Никитин Н.Н., Разевиг В.Д. Методы цифрового моделирования стохастических дифференциальных уравнений и оценка их погрешностей // Журнал вычислительной математики и математической физики. –1978. –Т. 18. –№ 1. –С.107–116.
19. Блехман И.И. Синхронизация в природе и технике. Москва: Наука, 1981.
20. Астахов В.В., Безручко Б.П., Пудовочкин О.Б., Селезнев Е.П. Фазовая мультистабильность и установление колебаний в нелинейных системах с удвоением периода. // Радиотехника и электроника. –1993. –Т. 38, –№ 2. –С. 291-295.
21. Ланда П.С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. Москва: Наука, 1980.
22. Дворников А.А., Уткин Г.М., Чуков А.М. О взаимной синхронизации цепочки резистивно связанных автогенераторов // Известия ВУЗов: Радиофизика. –1984. –Т. 27. –№ 11. –С. 1388 - 1393.
23. Ermentrout G.B. The behaviour of rings of coupled oscillators // J. of Math. Biol. –1985. –Vol. 23. –P. 55-74.
24. Ermentrout G.B. Stable periodic solutions to discrete and continuum arrays of weakly coupled nonlinear oscillators // SIAM J. of Appl. Math. –1992. –Vol. 52. –P. 1664 - 1687.
25. Шабунин А.В., Акопов А.А., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е. Бегущие волны в дискретной ангармонической автоколебательной среде // Известия ВУЗов: Прикладная нелинейная динамика. –2005, –Т. 13, –№ 4, –С. 37-54.
26. Астахов В.В., Безручко Б.П., Ерастова Е.Н., Селезнев Е.П. Формы колебаний и их эволюция в диссипативно связанных фейгенбаумовских системах. // Журнал Технической Физики. –1990. –Т. 60. –№ 10. –С. 19-26.
27. Астахов В.В., Безручко Б.П., Гуляев Ю.П., Селезнев Е.П. Мультистабильные состояния в диссипативно связанных Фейгенбаумовских системах. // Письма в ЖТФ. –1989. –Т. 15. –№ 3. –С. 60-65.
28. Астахов В.В., Безручко Б.П., Пономаренко В.И., Селезнев Е.П. Мультистабильность в системе радиотехнических генераторов с емкостной связью. // Радиотехника и Электроника. –1991. –Т. 36. –С. 2167-2172.
29. Астахов В.В., Безручко Б.П., Пономаренко В.И.. Формирование мультистабильности, классификация изомеров и их эволюция в связанных фейгенбаумовских системах. // Известия ВУЗов: Радиофизика. –1991. –Т. 34 –№ 1. –С. 35-38.

30. Anishchenko V.S., Astakhov V.V., Vadivasova T.E., Sosnovtseva O.V., Wu C.W., Chua L.. Dynamics of two coupled Chua's circuits. // Int. J. of Bifurcation and Chaos –1995. –Vol. 5. –P. 1677-1699.
31. Bezruchko B.P., Prokhorov M.D., Seleznev E.P. Oscillation types, multistability, and basins of attractors in symmetrically coupled period-doubling systems. // Chaos, Solitons and Fractals. –2003. –Vol. 15. –P. 695-711.
32. Астахов В.В., Шабунин А.В., Анищенко В.С. Спектральные закономерности при формировании мультистабильности в связанных генераторах с удвоением периода. // Радиотехника и Электроника. –1997. –Т. 42. –С. 974-981.
33. Daubechies I. Ten lectures on wavelets. – Philadelphia: S.I.A.M., 1992.
34. Mallat S.G. A wavelet tour of signal processing. – New York: Academic Press, 1998.
35. Addison P.S. The illustrated wavelet transform handbook: applications in science, engineering, medicine and finance. – Philadelphia: IOP Publishing, 2002.
36. Тычинский В.П. Когерентная фазовая микроскопия внутриклеточных процессов// Успехи физических наук. – 2001. – Том 171. – №4. – С. 649–662.
37. Sosnovtseva O.V., Pavlov A.N., Brazhe N.A., Brazhe A.R., Erokhova L.A., Maksimov G.V., Mosekilde E. Interference microscopy under double-wavelet analysis: a new approach to studying cell dynamics // Physical Review Letters. – 2005. – Vol. 94. – P. 218103.
38. Анисимов А.А., Павлова О.Н., Тупицын А.Н., Павлов А.Н. Вейвлет-анализ чирпов // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. – 2008. – Т. 16. –№5. – С. 3–11.
39. Anishchenko V.S., Pavlov A.N. Global reconstruction in application to multichannel communication // Phys. Rev. E. – 1998. – Vol. 57. – P. 2455–2457.
40. Маляев В.С., Вадивасова Т.Е. Оценка параметров зашумленных динамических систем // Нелинейная динамика. – 2010. – Т. 6. –№2. – С. 267–276.
41. Маляев В.С., Семенов В.В. Оценка параметров зашумленных динамических систем в случае жесткой бифуркации // Нелинейные дни в Саратове для молодых–2010: Сборник материалов научной школы-конференции. Саратов: ООО ИЦ “Наука”, 2011.
42. Назимов А.И., Павлов А.Н. Способ защищенной передачи информации с использованием импульсного кодирования // Патент РФ на изобретение, заявка №2011152150 (078268) от 20.12.2011 (направлена).
43. Павлов А.Н., Анисимов А.А. Программа широкополосного вейвлет-анализа с подстройкой спектрального разрешения // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2012612159 от 24.02.2012 (заявка №2011660129).

44. Назимов А.И., Павлов А.Н. Программа моделирования процесса многоканальной защищенной передачи информации с использованием импульсного кодирования // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2012612160 от 24.02.2012 (заявка №2011660131).
45. Слепнев А.В. , Вадивасова Т.Е. Автоколебательная среда со сложной динамикой элементарной ячейки. Мультистабильность и сценарии перехода к хаосу. – LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012.
46. Анищенко В.С., Астахов С.В. , Боев Я.И., Куртц Ю. Возвраты Пуанкаре в системе с хаотическим нестранным аттрактором // Нелинейная динамика. –2012. –Т. 8. –№ 1. –С. 29–41.
47. Velarde M. G. , Brizhik L., Chetverikov A. P., Cruzeiro L., Ebeling W., Röpke G. Electron pairing in one-dimensional anharmonic crystal lattices // International Journal of Quantum Chemistry. –2012. –Vol. 112. –P. 551-565.
48. Velarde M. G. , Brizhik L., Chetverikov A. P. , Cruzeiro L., Ebeling W., Röpke G. Quartic lattice interactions, soliton-like excitations and electron pairing in one-dimensional anharmonic crystals // International Journal of Quantum Chemistry. –2012, –Vol. 112. –P. 2591–2598.
49. Назимов А.И., Павлов А.Н. Применение вейвлет-анализа и искусственных нейронных сетей к решению задачи распознавания формы импульсных сигналов при наличии помех // Радиотехника и электроника. – 2012. – Т. 57, –№ 7. – С. 771–781.
50. Astakhov S., Fujiwara N., Tsukamoto N., Kurths J. Hopf bifurcation and multistability in a system of phase oscillators // Phys. Rev. E (направлена в печать).
51. Astakhov S.V., Anishchenko V.S. Afraimovich-Pesin dimension for Poincare recurrences in one- and two-dimensional deterministic and noisy chaotic maps // Phys. Lett. A (направлена в печать).
52. Анищенко В.С., Бирюкова Н.И., Астахов С.В., Боев Я.И. Время возврата Пуанкаре и локальная размерность хаотических аттракторов // Нелинейная Динамика (направлена в печать).
53. Вадивасова Т.Е. , Слепнев А.В. Исследование возникновения автоколебаний в квазигармонической модели автоколебательной среды, находящейся под действием мультипликативного шума // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика (направлена в печать).
54. Павлов А.Н. , Храмов А.Е., Короновский А.А., Ситникова Е.Ю., Макаров В.А., Овчинников А.А. Вейвлет-анализ в нейродинамике // Успехи физических наук. – 2012. –Т. 182 (принята к публикации).

55. Velarde M. G., Ebeling W., Chetverikov A. P. Thermal solitons in 1d- and 2d-anharmonic lattices-Solitons and the organization of nonlinear fluctuations in long-living dynamical structures // International Journal of Bifurcation and Chaos (направлена в печать).
56. L. Brizhik L., Chetverikov A. P., Ebeling W., Röpke G., Velarde M. G. Electron pairing and Coulomb repulsion in one-dimensional anharmonic lattices // Physical Review B (направлена в печать).
57. Маляев В.С., Вадивасова Т.Е., Семенов В.В. Экспериментальная оценка неизвестного параметра нелинейной системы в присутствии динамического шума // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика (направлена в печать).
58. Шабунин А.В. Управление фазовой мультистабильностью в связанных автоколебательных системах с бифуркациями удвоений периода. // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. –2012 (принята к печати).