

Министерство образования и науки Российской Федерации
ГОУ ВПО САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО (САРАТОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

УДК 621.373

№ госрегистрации 01201064326

Инв.№

УТВЕРЖДАЮ
Ректор Саратовского университета

профессор _____ Л.Ю. Коссович
« ____ » _____ г.

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ
по государственному контракту от 06 сентября 2010 г. № 14.740.11.0074

В рамках федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры
инновационной России» на 2009-2013 годы

по теме:
НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ, ВОЗДЕЙСТВИЕ ФЛУКТУАЦИЙ,
МУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТЬ И СИНХРОНИЗАЦИЯ В СОСРЕДОТОЧЕННЫХ И
РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМАХ РАДИОФИЗИКИ
(промежуточный, этап № 2)

Наименование этапа: «Волны в нелинейных средах»

Руководитель НИР,
д-р физ.-мат. наук, проф.

В. С. Анищенко

подпись, дата

Саратов 2011

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководитель,
профессор, д.ф.-м.н.

Анищенко В.С. (разд. 1)

Исполнители

(подпись, дата)

Студент

Боев Я.И. (разд. 1)

(подпись, дата)

Профессор, д.ф.-м.н.

Четвериков А.П. (разд. 2)

(подпись, дата)

Доцент, д.ф.-м.н.

Шабунин А.В. (разд. 3)

(подпись, дата)

Студент

Литвиненко А.Н. (разд. 3)

(подпись, дата)

Студент

Слепнев А.В. (разд. 4)

(подпись, дата)

Профессор, д.ф.-м.н.

Вадивасова Т.Е. (разд. 4)

(подпись, дата)

Зав. уч. лабораторией

Маляев В.С. (разд. 6)

(подпись, дата)

Студент

Семенов В.В. (разд. 6)

(подпись, дата)

Доцент, к.ф.-м.н.

Стрелкова Г.И. (разд. 1)

(подпись, дата)

Аспирант

Феокистов А.В. (разд. 1)

(подпись, дата)

Аспирант

Астахов С.В. (разд. 6)

(подпись, дата)

Доцент, д.ф.-м.н.

Павлов А.Н. (разд. 5)

(подпись, дата)

Ассистент, к.ф.-м.н.

Павлова О.Н. (разд. 5)

(подпись, дата)

Студент

Назимов И.А. (разд. 5)

(подпись, дата)

Нормоконтроллер

Дубовская Е.Н.

(подпись, дата)

РЕФЕРАТ

Отчет 79 с., 51 рис., 43 источника.

ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС, СИНХРОНИЗАЦИЯ ХАОСА, ФЛУКТУАЦИИ, НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ, ХАОС И СТРУКТУРЫ

Объектом исследования являются фундаментальные научные проблемы современной радиофизики и нелинейной динамики.

Цель работы - выявление закономерностей и свойств волновых и колебательных процессов в нелинейных системах и средах в присутствии внешних регулярных и шумовых воздействий.

Разработка новых методов диагностики сложных сигналов и защиты информации

Теоретическое и экспериментальное исследование автоколебательных процессов в возбудимых системах под действием шума. Исследование динамики локализованных волн в нагреваемой двумерной нелинейной решетки Морзе частиц. Разработка методов управления мультистабильностью за счет вынужденной синхронизации. Исследование влияния шума на переход к хаотическому поведению в автоколебательной среде. Разработка теоретических основ широкополосного спектрального анализа на основе непрерывного вейвлет преобразования. Проведение численных экспериментов по восстановлению сигнала, модулирующего параметр зашумленной хаотической системы.

СОДЕРЖАНИЕ

	Обозначения и сокращения	7
	ВВЕДЕНИЕ	8
1	Теоретическое и экспериментальное обоснование автоколебательного характера процессов в возбудимых системах	9
1.1	Введение	9
1.2	Стохастические автоколебания	9
1.3	Бистабильные стохастические осцилляторы	10
1.4	Возбудимые стохастические осцилляторы	13
1.5	Выводы	17
2	Исследование динамики локализованных волн в нагреваемой двумерной нелинейной решетке Морзе частиц	18
2.1	Введение	18
2.2	Математическая модель для анализа нагреваемой нелинейной двумерной решетки и алгоритм численного решения	19
2.3	Возбуждение локализованных волн за счет начального возмущения скорости частиц решетки	22
2.4	Возбуждение термических солитонов в треугольной решетке	25
2.5	Выводы	27
3.	Разработка методов управления мультистабильностью за счет вынужденной синхронизации	28
3.1	Введение	28
3.2	Исследуемая система и рассматриваемые колебательные режимы	29
3.3	Сущность метода управления мультистабильностью	31
3.4	Исследование влияния би-фазного гармонического сигнала на связанные генераторы	33
3.5	Вынужденная синхронизация би-фазным сигналом	36
3.6	Управление сложными колебательными режимами	38
3.7	Выводы	41
4	Исследование влияния шума на переход к хаотическому поведению в автоколебательной среде	41
4.1	Введение	41
4.2	Сценарии перехода к хаосу для однородной моды $n=0$ и бегущих волн $n \neq 0$	44
4.3	Исследование экспоненциальной неустойчивости решений в области	49

	хаотической динамики	
4.4	Влияние шума у порога хаоса	52
4.5	Выводы	54
5	Разработка теоретических основ широкополосного спектрального анализа на основе непрерывного вейвлет-преобразования	55
5.1	Введение	55
5.2	Особенности спектрального анализа, основанного на непрерывном вейвлет-преобразовании	56
5.3	Проведение широкополосного спектрального анализа с подстройкой частотно-временного разрешения	59
5.4	Спектральный анализ динамики внутриклеточных процессов	62
5.5	Выводы	65
6.	Проведение численных экспериментов по восстановлению сигнала, модулирующего параметр зашумленной хаотической системы	66
6.1	Введение	66
6.2	Оценка управляющего параметра осциллятора Ресслера с аддитивным гауссовым шумом. Настройка параметров фильтрации и выбор методов оценки	68
6.3	Оценка управляющего параметра осциллятора Ресслера в натурном эксперименте	72
6.4	Выводы	74
	ЗАКЛЮЧЕНИЕ	75
	СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	76

Обозначения и сокращения

ГИН - генератор с инерционной нелинейностью

НЧ - низкочастотный

ВЧ - высокочастотный

ФС - фазовая синхронизация

ФХН - ФитцХью-Нагумо

ВВЕДЕНИЕ

Данный научный отчет включает информацию о научных результатах, полученных сотрудниками научно-образовательного центра по нелинейной динамике и биофизике Саратовского государственного университета в период с 1.01.11 по 30.06.11. в ходе выполнения государственного контракта 14.740.11.0074 по программе Министерства образования и науки РФ «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009 – 2013 годы». Основной задачей является проведение фундаментальных исследований по нелинейной динамике и биофизике с целью выявления закономерностей и свойств волновых и колебательных процессов в нелинейных системах и средах в присутствии внешних регулярных и шумовых воздействий; разработка новых методов диагностики сложных сигналов и защиты информации. Выполнение НИР должно обеспечить закрепление в сфере науки и образования научных и научно-педагогических кадров в процессе подготовки студентов, аспирантов и докторантов в Саратовском университете.

За отчетный период исследования проводились в соответствии с техническим заданием на первый этап 2011 года. Работы выполнялись в соответствии с календарным планом работ по контракту.

Отчет включает краткую информацию об основных научных результатах, полученных исполнителями проекта на 2 этапе работы по теме «Волны в нелинейных средах».

1. Теоретическое и экспериментальное обоснование автоколебательного характера процессов в возбудимых системах

1.1 Введение

А.А. Андроновым была создана теория автоколебательных систем с одной степенью свободы и предложен математический образ автоколебаний на фазовой плоскости - устойчивый предельный цикл. За прошедшие годы в теории нелинейных колебаний был получен ряд новых принципиальных результатов, связанных с открытием и исследованием широкого класса колебательных процессов, которые рассматриваются как автоколебания. Естественно попытаться понять, в чем состоит сходство всех известных автоколебательных процессов, каковы различия между ними и насколько они соответствуют определению А.А. Андропова. Кроме того, возникает потребность обобщить понятие автоколебаний на еще более широкий класс систем, которые традиционно к автоколебательным не относились, но имеют с ними много общих черт. Речь идет о неавтономных системах, находящихся под действием непериодических, в том числе случайных, внешних сил. Такой подход требует рассмотрения с более общих современных позиций понятия аттрактора как математического образа автоколебаний. Если с регулярными аттракторами автоколебательных систем проблем не возникает, то вопрос об аттракторах хаотических автоколебаний, колебаний в неавтономных системах с непериодическим воздействием и колебаний, возникающих под действием шума, требует детального обсуждения. Мы попытаемся предложить единую концепцию автоколебаний в динамических и стохастических системах, рассмотреть математические образы соответствующих автоколебаний в виде аттракторов той или иной структуры и сформулировать наиболее общее определение автоколебаний.

1.2. Стохастические автоколебания

Можно выделить класс нелинейных диссипативных систем, которые в отсутствии шума не являются автоколебательными, но в которых шум приводит к возникновению колебаний, обладающих чертами автоколебательного режима. В литературе такие системы обычно называются стохастическими осцилляторами, хотя, на наш взгляд, правильнее было бы назвать их стохастическими генераторами или стохастическими автоколебательными системами, а возникающие в них индуцированные шумом колебания стохастическими автоколебаниями.

Различают два типа таких систем (хотя, возможно, есть и другие): бистабильные осцилляторы и возбудимые осцилляторы. Общей чертой стохастических осцилляторов является то, что за счет энергии стационарного источника шума в них возникают и поддерживаются

незатухающие случайные колебания со следующими свойствами:

- 1) колебания являются стационарными с почти постоянной амплитудой, определяемой, главным образом, параметрами системы и слабо зависящей от характеристик шума;
- 2) в некотором диапазоне частот система усиливает шум (т.е. она не является просто пассивным нелинейным фильтром), причем спектрально корреляционные характеристики колебаний определяются свойствами системы и слабо зависят от соответствующих характеристик шума;
- 3) колебания системы обладают некоторыми свойствами «синхронизируемости» как под действием внешней силы, так и в результате взаимодействия.

В чем принципиальная разница стохастического осциллятора с шумом и диссипативного нелинейного осциллятора, возмущаемого регулярным сигналом? Почему индуцированные шумом колебания имеют сходство с автоколебаниями? На наш взгляд дело в том, что в отличие от регулярного (периодического или квазипериодического) воздействия, широкополосный шум «не навязывает» динамической системе заданных извне характерных частот. Поэтому колебания такой неавтономной системы можно рассматривать как некоторую независимую колебательную моду, обладающую типичными свойствами автоколебаний: независимостью режима от начального состояния и способность к синхронизации. Рассмотрим более подробно различные типы стохастических осцилляторов.

1.3. Бистабильные стохастические осцилляторы

Бистабильный стохастический осциллятор – это нелинейный диссипативный осциллятор, имеющий в отсутствии внешнего воздействия два устойчивых состояния равновесия (в принципе можно рассматривать и мультистабильные стохастические осцилляторы со многими состояниями равновесия), и который находится под действием шума. Шум приводит к случайным переключениям системы между состояниями равновесия, которые и представляют собой «автоколебания». Средняя амплитуда стохастических колебаний определяется расстоянием между точками равновесия, а средняя частота переключений ω_K (частота Крамерса) зависит от высоты потенциального барьера, разделяющего состояния равновесия и интенсивности шума.

Модель бистабильного осциллятора может быть представлена в виде

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \frac{U(x)}{dx} = \sqrt{2D} n(t) \quad (1.1)$$

где $n(t)$ – нормированный источник белого гауссова шума, D – интенсивность шума, $U(x)$ – потенциальная функция, имеющая два минимума (две потенциальные ямы) и максимум между ними, γ – параметр диссипации. При выборе $U(x)=x^4/4 - x^2/2$ из (1.1) получается стохастический осциллятор Дуффинга (по-другому называется осциллятором Крамерса). При сильной диссипации ($\gamma \rightarrow \infty$) можно перейти к одномерной модели передемпфированного осциллятора Крамерса

$$\frac{dx}{d\tau} + x^3 - x = \sqrt{2D} n(t) \quad (1.2)$$

где $\tau = \gamma t$ – «быстрое время». Модель (1.2) является базовой моделью при исследовании таких явлений как стохастический резонанс и стохастическая синхронизация. Однако мы в качестве примера бистабильного стохастического осциллятора рассмотрим более общую двумерную модель.

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} - x + x^3 = \sqrt{2D} n(t) \quad (1.3)$$

На рисунке 1.1 приведены некоторые характеристики стохастических колебаний в системе (1.3). На первый взгляд индуцированные шумом колебания в бистабильной системе похожи на автоколебательный режим, например, на зашумленный предельный цикл.

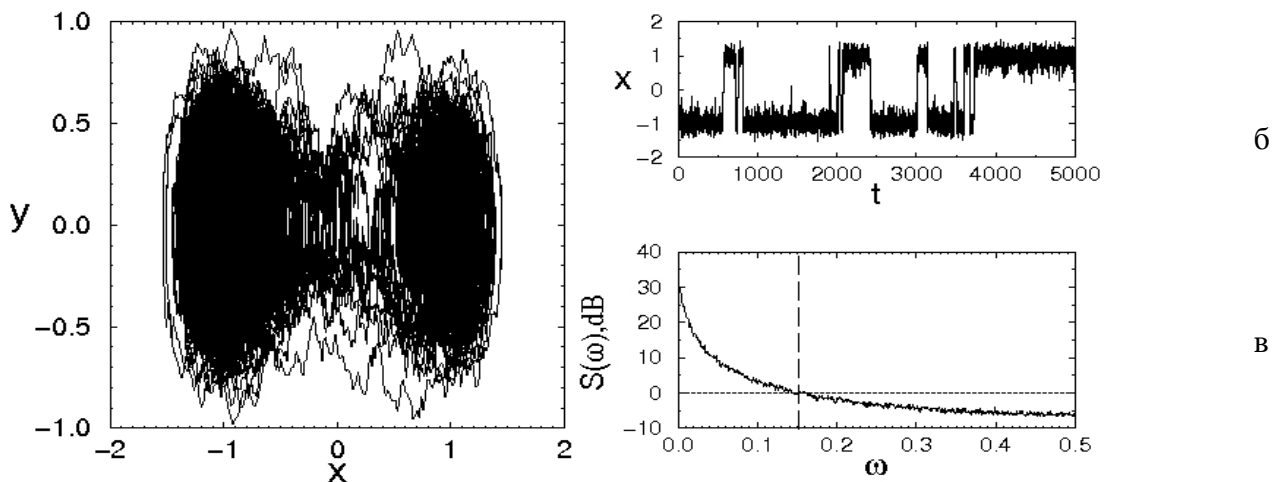


Рисунок 1.1: Стохастические колебания в системе (1.3) при $\gamma = 1$, $D = 0.06$: а – фазовый портрет; б – вид колебаний во времени; спектральная плотность мощности колебаний, нормированная на спектральную плотность мощности шума.

В спектре отсутствует линия на характерной частоте колебаний (частоте Крамерса). Стохастический аттрактор (в смысле Арнольда) не имеет форму замкнутой кривой, а является, в зависимости от значений γ и D , либо единственной точкой, перемещающейся по фазовой плоскости, либо множеством с фрактальной структурой. Однако в системе (3) и подобным ей системам присуще все выделенные нами свойства стохастических автоколебаний. Переключения вызванные шумом, являются стационарными случайными колебаниями с почти постоянной амплитудой. Спектр имеет форму лоренциана с максимумом в нуле, полуширина которого соответствует частоте переключений и определяется интенсивностью шума и высотой потенциального барьера. Характер спектра свидетельствует о перераспределении мощности широкополосного шума в области низких частот. Принципиально важное свойство системы (1.3), позволяющее сопоставить стохастические колебания с автоколебаниями, состоит в эффекте частичной синхронизации. Речь идет здесь о так называемой стохастической синхронизации бистабильных осцилляторов.

Рассмотрим осциллятор (1.3), добавив внешнее гармоническое воздействие

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} - x + x^3 = C \cos \omega_{\text{вн}} t + \sqrt{2D} n(t) \quad (1.4)$$

где амплитуда воздействия C является подпороговой, т.е. без шума внешняя сила не может вызывать переключения.

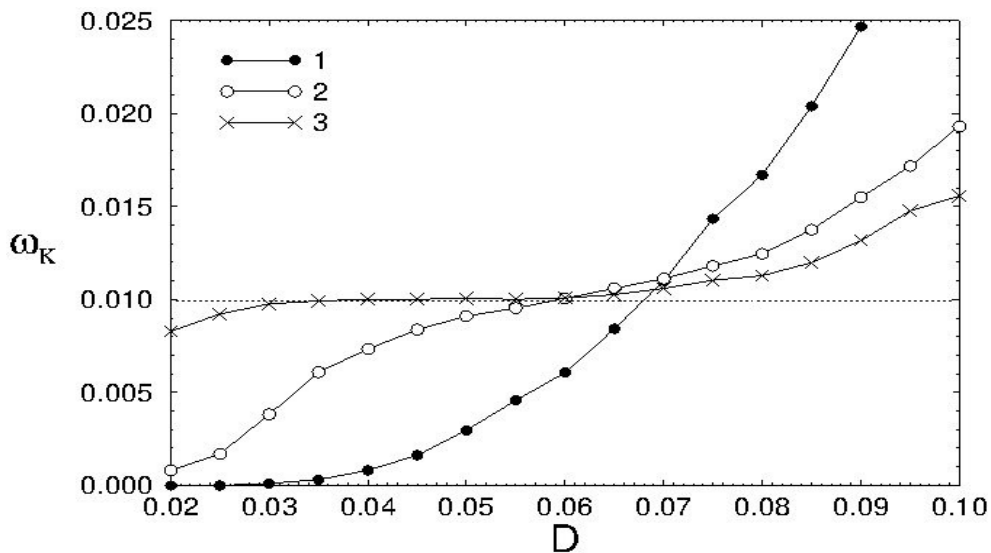


Рисунок 1.2: Эффект частичного захвата частоты в системе (1.4). Зависимость средней частоты переключений от интенсивности шума при $\gamma = 1$, $\omega_{\text{вн}} = 0,01$ и различных амплитудах гармонического воздействия: $C = 0$ (кривая 1); $C = 0.2$ (кривая 2); $C = 0.3$ (кривая 3).

Интенсивность шума D можно рассматривать как внутренний параметр стохастического автогенератора, на который на заданной частоте воздействует гармоническая сила. Меняя D , мы изменяем характерное время системы $T_K = 2\pi/\omega_K$ и «подстраиваем» стохастический автогенератор под внешнее воздействие. При достаточной амплитуде гармонического сигнала существует область значений D , в которой частота ω_K , несмотря на изменение интенсивности шума, остается близкой к частоте воздействия $\omega_{\text{нв}}$. Это – область синхронизации. Однако «синхронизируемость» бистабильных систем является свойством, не вполне аналогичным тому же свойству «настоящих» генераторов. Действительно, если зафиксировать параметры генераторов и изменять частоту внешнего сигнала, то в некотором интервале частоты $\omega_{\text{нв}}$ будет наблюдаться захват собственной частоты. Для бистабильного стохастического осциллятора, зафиксировав интенсивность шума и изменяя частоту воздействия, захват частоты Крамерса в общем случае наблюдать, не удастся.

1.4. Возбудимые стохастические осцилляторы

Возбудимый осциллятор – это система, имеющая устойчивое состояние равновесия и метастабильное состояние возбуждения. Выведенная из равновесия толчком система переходит в состояние возбуждения, из которого снова релаксирует к равновесию. Случайные воздействия определенной силы заставляют систему снова и снова переходить в возбужденное состояние. Возникающие под действием шума стохастические колебания представляют собой последовательность случайных импульсов, обычно малой длительности. Подобные процессы часто встречаются в биофизике. Импульсы возбуждения там обычно называют спайками.

Существует оптимальная интенсивность шума D , для которой последовательность импульсов возбудимой системы оказывается наиболее близка к регулярной. В качестве меры нерегулярности импульсов часто используется отношение среднеквадратичных флуктуаций интервала T между последовательными импульсами к среднему значению этого интервала

$$R = \frac{\sqrt{\langle T^2 \rangle} + \langle T \rangle^2}{\langle T \rangle} \quad (1.5)$$

Экспериментальные исследования и теоретический анализ показывают, что зависимость R от D носит нелинейный характер и при некотором значении $D = D_m$ имеет минимум, соответствующий наибольшей упорядоченности последовательности импульсов, т.е. близости ее к периодической последовательности. О максимальной упорядоченности при определенной

интенсивности шума свидетельствуют так же форма спектра мощности и скорость спада автокорреляционной функции колебаний. Это явление получило название когерентного резонанса (КР).

В режиме КР возбудимый стохастический осциллятор по своим свойствам очень похож на автоколебательную систему. Шум вызывает стационарные колебания почти постоянной амплитуды, в спектре которых присутствует четкий пик на частоте $\omega_0 = 1/\langle T \rangle$. Эта характерная частота может быть захвачена при внешнем воздействии на систему в точности так же, как захватывается частота автогенератора (с учетом шума). Для возбудимого осциллятора, в отличие от бистабильного осциллятора, можно наблюдать захват частоты, зафиксировав интенсивность шума и меняя частоту воздействия в некоторой области значений. Возможна так же взаимная синхронизация возбудимых систем.

Одним из классических примеров возбудимого осциллятора является система ФитцХью – Нагумо. Она качественно описывает действие регенеративных механизмов зажигания в нервной клетке. В несколько упрощенном виде динамика системы с учетом шума задается уравнениями:

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x} &= x - \frac{x^3}{3} - y, \\ \dot{y} &= x - a + \sqrt{2D} n(t) \end{aligned} \quad (1.6)$$

где x – быстрая переменная (активатор), y – медленная переменная (ингибитор), ε – малый параметр, определяющий отношение временных масштабов активатора и ингибитора. В качестве источника флуктуаций в уравнение по y добавлен аддитивный гауссов белый шум с интенсивность D . Параметр a задает положение точки равновесия в системе без шума.

В системе (1.6) при $D = 0$ имеется точка равновесия Q , которая с учетом того, что $\varepsilon > 0$, устойчива при $a^2 > 1$. Если $1 < a^2 < 1 + \sqrt{\varepsilon}$, то точка – устойчивый фокус, а если $a^2 > 1 + \sqrt{\varepsilon}$, то устойчивый узел. Рассмотрим систему (1.6) при $a^2 > 1$. Так как ε мало, то можно выделить медленные движения вдоль кривой $y = x - x^3/3$ и быстрые движения вдоль прямых, параллельных оси абсцисс. Они представлены на рис 1.3. Отрезок кубической кривой AC соответствует неустойчивым движениям. Ветви DA и BC являются устойчивыми. Точка равновесия Q находится на левой ветви кривой. Она соответствует невозбужденному состоянию системы, а правая ветвь кривой медленных движений соответствует состоянию возбуждения. Действие шума выводит систему из равновесия. Изображающая точка на фазовой плоскости

попадает в область неустойчивости и совершает быстрое движение вдоль горизонтальной линии I_1 и попадает на участок кривой BC (т.е. в состояние возбуждения). Двигаясь вдоль кривой BC , она достигает точки C и возвращается на ветвь DA вдоль линии I_2 (см. рисунок 1.3). Двигаясь вдоль кривой DA , точка снова попадает в окрестность состояния равновесия Q . Таким образом, под действием шума изображающая точка описывает «зашумленный предельный цикл» $ABCD$, и в (1.6) возникает последовательность случайных импульсов возбуждения.

На рисунке 1.4 представлена зависимость величины R от интенсивности шума, полученная для системы (1.6). Она демонстрирует минимум R при некотором значении интенсивности шума $D \approx 0.0025$, что говорит об эффекте КР.

Характеристика режимов колебаний в окрестности минимального значения R представлены на рисунке 1.5. На фазовом портрете (рисунок 1.5, а) виден «зашумленный предельный цикл». Реализация колебаний представляет собой последовательность коротких импульсов, повторяющихся с достаточно высокой регулярностью (рисунок 1.5, б), а в спектре присутствует четко выраженный основной спектральный максимум на частоте ω_0 , близкой к средней частоте следования импульсов (рисунок 1.5, в). Заметим, что случайный аттрактор (random attractor) системы в данном режиме представляет собой единственную точку на фазовой плоскости (система устойчива), совершающую движения в окрестности петли $ABCD$.

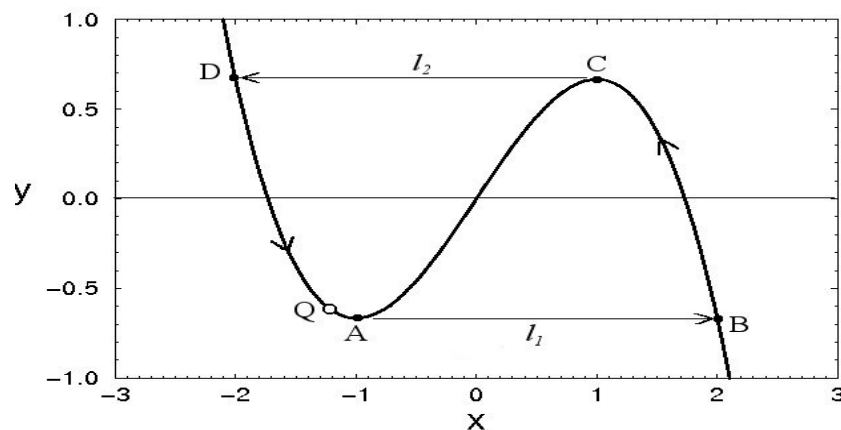


Рисунок 1.3: Иллюстрация, поясняющая возникновение стохастических колебаний в системе (1.6).

Наличие в спектре мощности колебаний характерной частоты ω_0 отличает возбудимый стохастический осциллятор от бистабильного и делает данный тип стохастических колебаний в большей степени сходными с автоколебаниями. Частота ω_0 может быть захвачена внешним гармоническим сигналом. Добавим во второе уравнение системы (1.6) гармоническую силу

$f(t) = C \cos(\omega_1 t)$ и рассмотрим зависимость отношения частот $\Theta = \omega_0 / \omega_1$ от частоты воздействия ω_1 при фиксированных значениях параметров системы, интенсивности шума и амплитуды воздействия. Результаты расчетов, полученные для трех значений амплитуды C , приведены на рис 1.6.

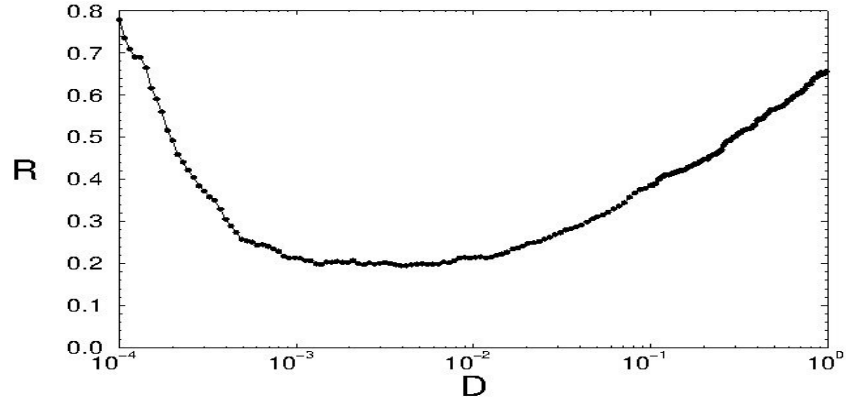


Рисунок 1.4: Зависимость величины R от интенсивности шума D в (6) при $\varepsilon = 0.01$, $a = 1.05$ в системе (1.6).

Можно сказать что в (1.6) имеет место классический случай эффективной синхронизации в полной аналогии с синхронизацией зашумленного автогенератора.

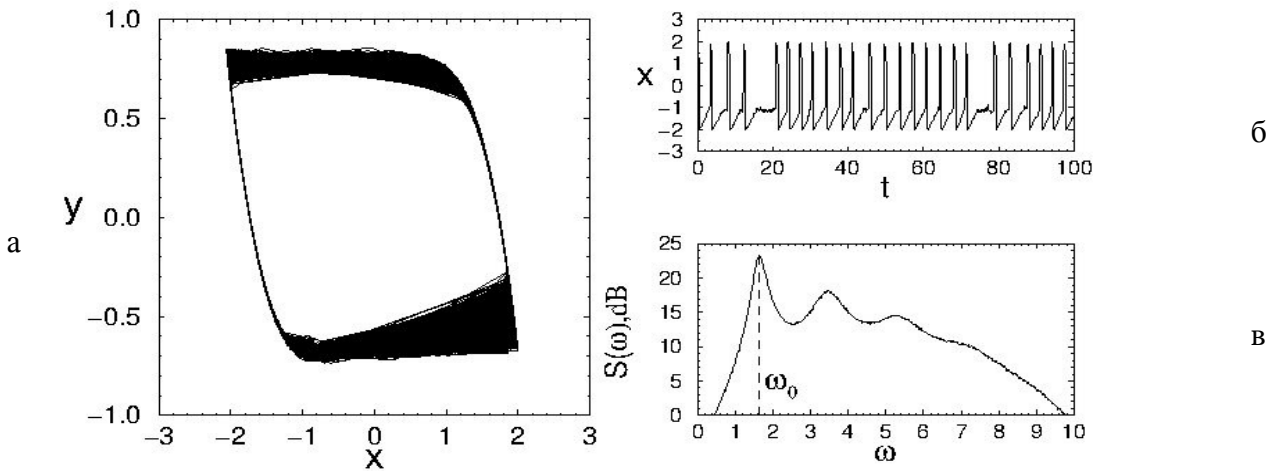


Рисунок 1.5: Стохастические колебания в системе (1.6) при $\varepsilon = 0.01$, $a = 1.05$, $D = 0.0025$: а - фазовый портрет; б - вид колебаний во времени; в - спектральная плотность мощности колебаний, нормированная на спектральную плотность мощности шума.

Таким образом, рассмотренный пример показывает, что возбудимые системы по совокупности свойств очень близки к обычным автоколебательным системам. Генерируемый такими системами процесс колебаний естественно назвать стохастическими автоколебаниями.

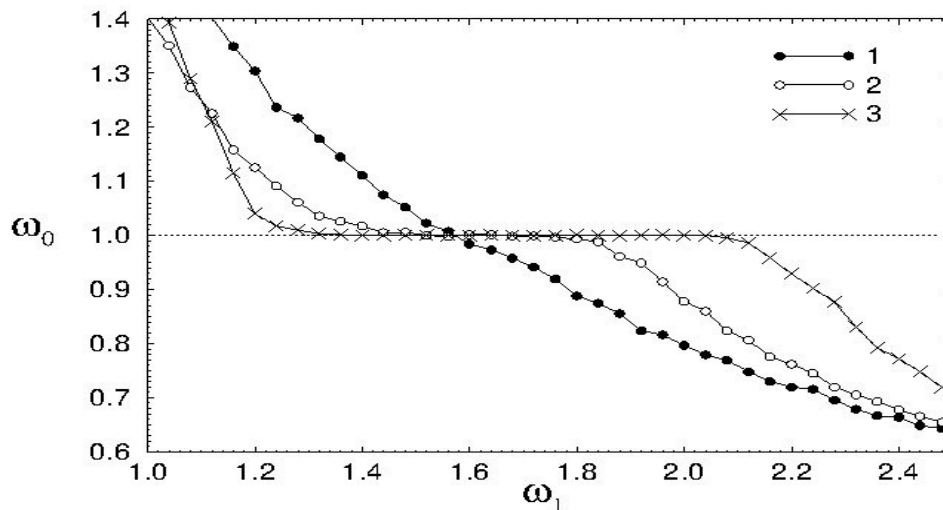


Рисунок 1.6: Зависимость $\Theta = \omega_0/\omega_1$ от частоты ω_1 в системе (1.6) при интенсивности шума $D = 0.0025$ и внешнем гармоническом воздействии $f(t) = C\cos(\omega_1 t)$ с различными значениями амплитуды C : $C = 0.05$ (кривая 1); $C = 0.2$ (кривая 2); $C = 0.5$ (кривая 3). Параметры системы: $\varepsilon = 0.01$, $a = 1.05$.

1.5. Выводы

Анализ различных колебательных процессов в нелинейных автономных и неавтономных диссипативных динамических и стохастических системах, приведенный в настоящей работе, позволяет нам ввести новую теорию согласно которой фундаментально важные понятия «автоколебания» и «автоколебательная система», введенные А.А. Андроновым для динамических систем на фазовой плоскости, расширяются и обобщаются на существенно более широкий класс процессов и систем, включая стохастические. Мы пришли к выводу, что автоколебания могут иметь место в хаотических и зашумленных системах. Для этого достаточно выполнение двух условий. Первое заключается в существовании аттрактора, что по сути означает главную особенность автоколебаний – независимость установившегося процесса колебаний от начальных данных, выбранных в некоторой области (в области притяжения аттрактора). Второе условие требует возможности синхронизации указанного типа колебаний. Другими словами, если есть аттрактор и система демонстрирует эффект частотной синхронизации, то мы имеем дело с автоколебательным процессом.

Такое определение не вступает в противоречие с определением А.А. Андропова: и предельный цикл, и тор реализуют эффекты внешней и взаимной синхронизации.

Это касается также и режимов детерминированного хаоса, синхронизация которого исследовалась в многочисленных работах последних лет. Однако вынужденные колебания

нелинейных осцилляторов под действием периодической силы не удовлетворяют второму условию: аттрактор в системе есть, но отсутствует эффект синхронизации колебаний.

Все вышесказанное касается и динамики нелинейных диссипативных систем в присутствии шумовых возмущений. Колебания в таких системах формально характеризуются наличием аттрактора в пространстве решений M' . Однако не все типы стохастических колебаний демонстрируют эффекты частотной синхронизации. Если вызванные шумом колебания проявляют свойства частотной синхронизации (в смысле эффективной синхронизации Р.А. Стратоновича), то такие колебания мы будем называть стохастическими автоколебаниями, а соответствующие системы – автоколебательными.

Отметим еще одну деталь. Согласно А.А. Андронову энергия, необходимая на поддержание автоколебаний, черпается из постоянного источника. Предлагаемое нами обобщение не вводит никаких ограничений на характер источника энергии. В принципе автоколебательная система может пополнять свою энергию за счет переменного или даже шумового источника. Главное, чтобы характерные частоты колебаний определялись самой системой, а не частотными характеристиками источника энергии.

Сформулированные условия стохастических автоколебаний (наличие аттрактора и возможность их синхронизации) мы рассматриваем и обосновываем в качестве достаточных. Являются ли они необходимыми? По все видимости, нет. Вопрос формулировки необходимых и достаточных условий реализации стохастических автоколебаний требует дальнейших исследований.

2. Исследование динамики локализованных волн в нагреваемой двумерной нелинейной решетке Морзе частиц

2.1. Введение

Как уже отмечалось в отчете по предыдущему этапу проекта, раздел «Анализ динамики локализованных волн в «холодной» решетке потенциально взаимодействующих заряженных частиц», в последние годы активно изучаются проблемы транспорта энергии и заряда в регулярных дискретных средах решеточного некристаллического типа, одномерных (квази-одномерных) и двумерных. Один из возможных механизмов такого транспорта связан с распространяющимися нелинейными локализованными волнами солитонно-подобного типа (в дальнейшем, для простоты, солитонами). Исследование характеристик солитонного механизма транспорта является одной из целей проекта.

В отчете по предыдущему этапу излагались результаты исследования нелинейных волн в «холодной», т.е. не находящейся в контакте с внешней нагретой средой, двумерной решетке частиц, связанных потенциальными силами Морзе. Было показано, что в такой решетке возможно возбуждение квазистационарных локализованных волн с присущими солитонам характеристиками и длительным временем жизни, что дает надежду на использование их в качестве носителей внешних заряженных частиц. Исследования проводились в рамках разработанной модели анализа нелинейных локализованных волн в двумерных решетках потенциально взаимодействующих частиц, основанной на представлении решетки в виде ансамбля частиц с конечным эффективным радиусом взаимодействия между ними. При этом «возбуждение» волн в компьютерном эксперименте осуществлялось соответствующим заданием начальных условий для координат и скоростей частиц, без обсуждения способов их физической реализации. Однако в реальных системах возбуждение локализованных волн наиболее вероятно при нагревании решетки до температуры, соответствующей энергии, при которой проявляются нелинейные свойства потенциалов взаимодействия, но еще недостаточной, чтобы решетка «расплавилась» и потеряла свойства упорядоченной периодической структуры. Поэтому в настоящем разделе излагаются результаты исследования локализованных волн в нагреваемой решетке. Будем в дальнейшем называть такие волны термическими солитонами, имея в виду прежде всего то, что энергия для их возбуждения черпается из нагретой окружающей среды (теплового бассейна).

Отметим, что разработанная ранее модель позволяет изучать волны как в регулярной среде (используются уравнения движения Ньютона, при этом решетка рассматривается как консервативная система), так и адаптировать ее для исследования возмущений в «нагреваемой» среде, что с точки зрения нелинейной динамики означает, что частицы системы испытывают трение и каждая из них подвергается воздействию внешней стохастической силы в форме белого Гауссова шума, т.е. рассматривается как открытая система. В этом случае уравнения движения Ньютона заменяются стохастическими дифференциальными уравнениями Ланжевена, решение которых понимаются в смысле интегралов Ито.

2.2. Математическая модель для анализа нагреваемой нелинейной двумерной решетки и алгоритм численного решения

В настоящей работе рассматриваются двумерные решетки частиц, связанных силами, соответствующими потенциалу Морзе, который качественно похож на реальный молекулярный

потенциал Леннарда-Джонса, а с другой стороны, асимптотически подобен нелинейному потенциалу Тоды, решетки с которым хорошо изучены:

$$V(r) = D(e^{-2br} - 2e^{-br}) \quad (2.1)$$

Здесь $r = x - \sigma$, x – расстояние между частицами, b – коэффициент жесткости связи, D – глубина потенциальной ямы. Для предотвращения различных нефизических эффектов при численном моделировании решеток с нежесткой связью ($B = b\sigma \sim 2 \div 7$) используется модифицированная форма потенциала Морзе с более быстрым спаданием потенциала на больших расстояниях $x > 1.5\sigma$.

$$V(r) = D(e^{-2br} - 2e^{-br}) \frac{1}{1 + e^{(r-d)/2\sigma v}} \quad (2.2)$$

Совокупность частиц решетки рассматривается как ансамбль, в котором каждая частица может в принципе взаимодействовать с любой другой частицей, если расстояние между ними не превышает 1.5σ . Динамика частиц при численном моделировании рассматривается в прямоугольной области с периодическими граничными условиями (в ячейке моделирования), размеры которой выбираются, чтобы обеспечить нужную геометрию решетки. Гамильтониан такой системы записывается в виде

$$H = \frac{M}{2} \sum_n v_n^2 + \sum_{ij} V(|R_i - R_j|) \quad (2.3)$$

где M – масса каждой частицы решетки, которые полагаются идентичными, v – их скорости, R – соответствующие радиус-векторы. В нагреваемой решетке каждая частица, помимо регулярных воздействий, соответствующих гамильтониану (2.3), испытывает хаотические воздействия. В результате динамика каждой частицы описывается стохастическим уравнением Ланжевена

$$\ddot{Z}_n = \sum_k F_{nk}(|Z_{nk}|)z_{nk} + (-\gamma_0 \dot{Z}_n + \sqrt{2D_v}(\xi_{xn} + i\xi_{yn})) \quad (2.4)$$

причем выполняется вытекающее из флуктуационно-диссипативной теоремы соотношение Эйнштейна

$$T = D_v / \gamma_0 \quad (2.5)$$

Здесь введена комплексная безразмерная координата частиц $Z_n = (x_n + iy_n)/\sigma$, x, y – координаты в прямоугольной системе, соответствующие радиус-вектору R , $Z_{nk} = Z_n - Z_k$, F_{nk} – модуль силы взаимодействия между n -ой и k -ой частицами, z_{nk} – соответствующий единичный вектор, определяющий направление этой силы, точкой над символом обозначена производная по безразмерному времени $\tau = \omega_M t$, где ω_M – частота малых осцилляций частицы вблизи минимума

потенциала Морзе, γ_0 – коэффициент трения, D_v – интенсивность стохастической силы каждого из независимых источников нормального гауссова шума $\xi_{x,yn}$, T -безразмерная температура, измеряемая так же как и все энергетические величины в данной задаче, в единицах $2D$ (напоминаем, D – потенциальная энергия, соответствующая дну ямы потенциала Морзе (2.1))

Уравнения (2.4) решаются численно методом Рунге-Кутты по схеме 4-го порядка, адаптированным для решения стохастических дифференциальных уравнений в соответствии с методикой, изложенной в [1]. Такая схема обеспечивает точность $O(\Delta\tau^{-2})$ при учете стохастических воздействий на частицы и точность $O(\Delta\tau^{-4})$ при отключении шума, где $\Delta\tau$ – шаг интегрирования с типичными значениями 0.001-0.0001. Последнее важно потому, что динамику частиц при заданной температуре T можно изучать и в частном случае термоизолированной системы (в термостате), когда после выведения системы на заданную температуру при $D_v \neq 0$, $\gamma_0 \neq 0$ стохастическая сила и трение отключаются, после чего система рассматривается как консервативная (подобно тому, как это делается в методе молекулярной динамики).

В процессе компьютерных симуляций накапливается информация об эволюции комплексных координат частиц $Z_{n0}(t)$ (траекториях) и скоростей $V_{n0}(t)$, на основе которых рассчитываются усредненные характеристики ансамбля, в том числе такие, которые позволяют судить о динамике коллективных возбуждений, в том числе в ансамбле, находящимся под воздействием флуктуаций. Точность расчетов контролируется проверкой выполнения условия поддержания постоянной температуры (2.5), рассчитываемой как усредненная по ансамблю кинетическая энергия частиц.

Для наглядного представления локализованных волн плотности находится распределение плотности массы $\rho(Z)$ ансамбля на основании предположения о том, что каждая точечная частица моделирует объемный объект, плотность которого в простейшем приближении может быть задана Гауссовой функцией, т.е.

$$\rho(Z) = \sum_{n, |Z-Z_n| \leq 1.5} e^{-\frac{|Z-Z_n|^2}{2\lambda^2}} \quad (2.6)$$

Значения параметра λ выбираются таким образом, чтобы при равновесном расположении частиц они не «чувствовали» друг друга, т.е. распределение ρ в точках дислокации частиц была бы практически такой же, как если бы каждая частица была единственной в ансамбле, а именно $\rho=1$. Для экономии времени компьютерного моделирования в формуле (2.6) учитываются только частицы, находящиеся от точки Z на расстоянии, не превышающем 1.5 как и при расчете сил взаимодействия частиц (как показывают оценки, это практически не влияет на результаты моде-

лирования). Дополнительно для выделения локализаций частиц применяется «амплитудный фильтр», когда распределения плотности, определенные формулой (2.6), потом преобразуются в соответствии с правилом

$$\begin{aligned}\rho' &= \rho - \rho_{fil}, \text{ если } \rho > \rho_{fil}, \\ \rho' &= 0, \text{ если } \rho \leq \rho_{fil}\end{aligned}\tag{2.7}$$

Здесь ρ_{fil} – постоянная амплитудного фильтра, ее типичные значения 1.01-1.2. Распределения плотности $\rho'(Z)$ показывают только области сгущений частиц. Кроме того, для идентификации движущихся локальных сгущений частиц (в частности, солитонов), мгновенные картины распределения плотности $\rho'(Z, t_k)$, построенные в дискретные моменты времени t_k , где t_k принадлежат определенному интервалу времени $t_0 < t_k < t_0 + t_{ac}$, накладываются друг на друга. На таких «кумулятивных» картинах неподвижные сгущения частиц выглядят как точечные объекты с разной степенью яркости (пропорциональной их времени жизни), а движущиеся сгустки оставляют треки («цепочки следов»). Отметим, что такая технология идентификации движущихся объектов в компьютерных симуляциях по сути напоминает технологию идентификации движущихся частиц в пузырьковой камере.

2.3. Возбуждение локализованных волн за счет начального возмущения скорости частиц решетки

На предыдущем этапе исследований в компьютерных экспериментах была показана принципиальная возможность существования солитоно-подобных долгоживущих возмущений в треугольной решетке Морзе. В проведенных тогда экспериментах солитоны задавались как одномерные солитоны в одной или нескольких цепочках решетки благодаря начальным согласованным возмущениям координат и скоростей частиц, известным из теории солитонов в одномерных решетках. Однако в нагреваемой решетке движение частиц происходит вследствие получения каждой частицей импульсных воздействий, причем произвольно ориентированных по направлению. Поэтому прежде чем рассматривать движение частиц в нагреваемой решетке, исследуем динамику частиц, которые в начальный момент времени получают только начальный импульс (без начального смещения, соответствующего солитону). Будем изучать, как изменяется динамика частиц при варьировании величины и направления начального импульса (начальной скорости v_0).

Рисунок 2.1 иллюстрирует эволюцию возмущения в треугольной решетке после начального (при $\tau=0$) получения импульса тремя частицами в трех смежных цепочках, причем все начальные скорости одинаковы ($v_0=2$) и ориентированы вдоль оси x . Видно, что за счет энергии

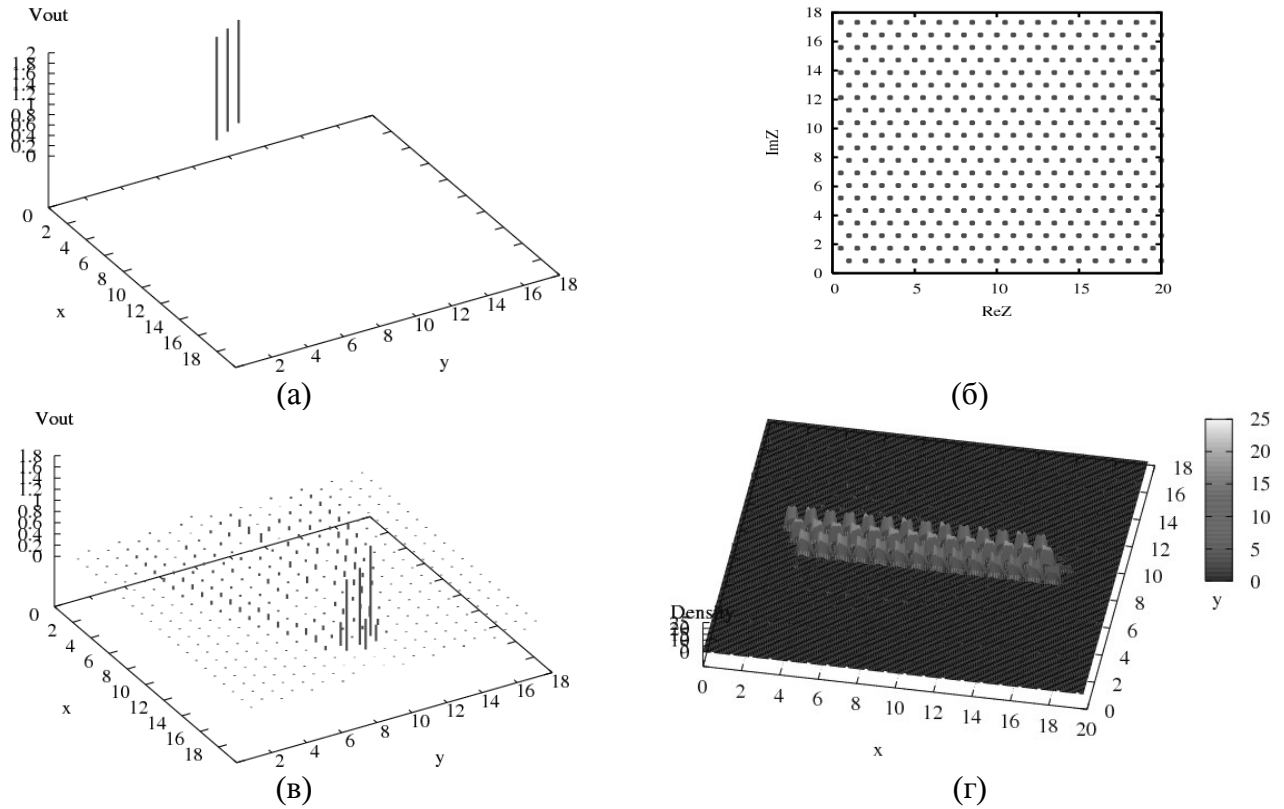


Рисунок 2.1. Трансформация начального импульсного возмущения скорости трех частиц в трех смежных цепочках в треугольной решетке $N=400$ частиц. (а) и (б) – начальные распределения модулей скоростей частиц $|v_n(0)|$ и координат частиц $Z_n(0)$, соответственно; (в) – распределение модулей скоростей частиц при $\tau=4$; (г) – треки движущихся солитоно-подобных сгущений частиц в течение времени $\tau_{ac}=4$. $B=5$, $\lambda=0.3$, $\rho_{fil}=1.02$, $v_0=2$.

начальных импульсов возбуждаются солитоно-подобные локализованные сверхзвуковые волны с достаточно-большим временем жизни. Среднюю скорость волн можно оценить как $v_{sol} \approx (15-3)/4 \approx 3$, исходя из начальной и конечной координат возмущения и времени движения, а время жизни как $\tau_{life} \sim 10^2$, исходя из того, что за время $\tau=4$ солитон потерял $\sim 5-10\%$ начальной энергии, которая рассеялась вдоль решетки, как видно из рисунка 2.1(в). Однако при уменьшении начальной скорости время жизни быстро падает, поскольку рассеяние энергии в решетке происходит интенсивнее (рисунок 2.2.). В частности, при $v_0=1$ средняя скорость волн $v_{sol} \approx 2$, а время жизни $\tau_{life} \sim 10$. Это означает, что возбуждение термических солитонов с достаточно большим временем жизни можно ожидать только при достаточно высокой температуре.

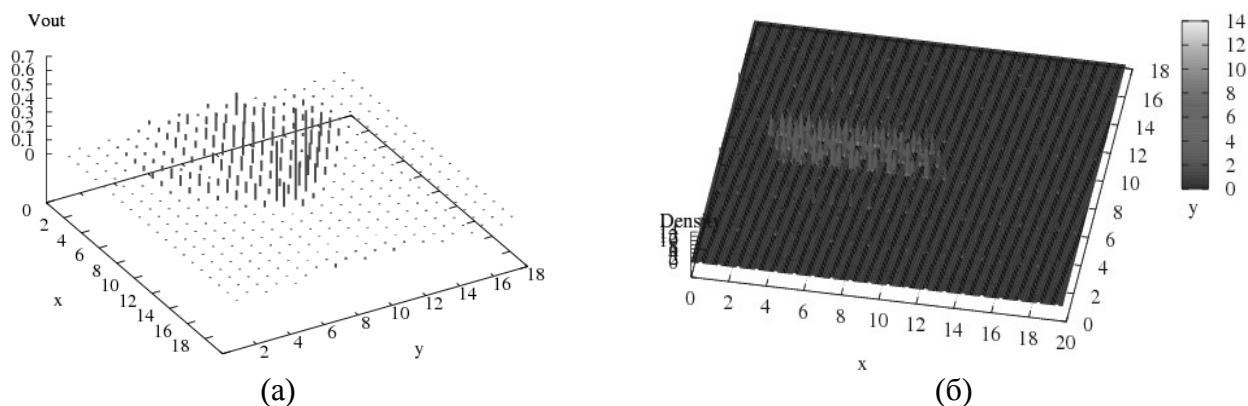


Рисунок 2.2. Трансформация начального импульсного возмущения скорости трех частиц в трех смежных цепочках в треугольной решетке $N=400$ частиц. (а) – распределение модулей скоростей частиц при $\tau=4$; (б) – треки движущихся солитон-подобных сгущений частиц в течение времени $\tau_{ac}=4$. $B=5$, $\lambda=0.3$, $\rho_{fil}=1.02$, $v_0=1$.

Важным пунктом в исследуемой проблеме является выяснение вопроса о направлении распространения солитонов при произвольном направлении начального импульса возбуждения. Для его решения было проведено компьютерное моделирование с параметрами, соответствующими результатам, представленным на рисунке 2.1, но при различном направлении начального импульса, которое характеризуется углом θ относительно оси x (т.е. для данных на рисунке 2.1 $\theta=0^0$). Из представленных на рисунке 2.3 результатов эксперимента

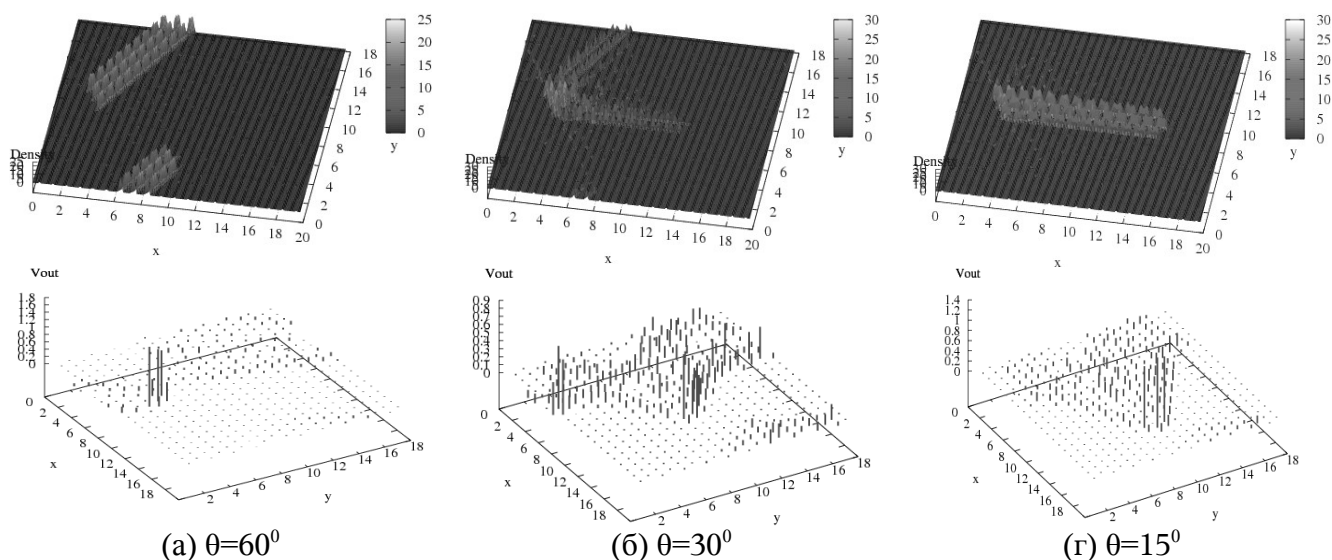


Рисунок 2.3. Трансформация начального импульсного возмущения скорости трех частиц в трех смежных цепочках в треугольной решетке $N=400$ частиц при трех значениях направления начального импульса θ . Верхний ряд – треки движущихся солитон-подобных сгущений частиц в течение времени $\tau_{ac}=4$, нижний ряд - распределение модулей скоростей частиц при $\tau=4$. $B=5$, $\lambda=0.3$, $\rho_{fil}=1.02$, $v_0=2$.

следует, что солитон-подобные волны возмущения распространяются вдоль кристаллографических осей и при заданной энергии имеют максимальное время жизни, когда начальный импульс ориентирован точно вдоль одной из них (рисунок 2.1 и рисунок 2.3(а)). Однако это усло-

вие не является критическим, даже при отклонении от оси на 15° солитон распространяется вдоль оси, хотя и с гораздо большими потерями энергии на возбуждение колебаний в смежных цепочках (сравни рисунок 2.1 и рисунок 2.3(в)). Даже при направлении вектора начальной скорости между осями (рисунок 2.3(б)) происходит в основном возбуждение двух солитонов, бегущих вдоль двух осей (с примерно вдвое меньшей энергией), хотя и излучение энергии в смежные цепочки решетки достаточно большое. Полученные результаты позволяют сделать вывод, что возбуждение термических солитонов вполне вероятно.

2.4. Возбуждение термических солитонов в треугольной решетке

Исследование термических возбуждений при разных температурах исследовалось посредством численного решения уравнений (2.4) при ненулевых значениях трения и интенсивности стохастической силы. Как правило, моделирование проводилось в два этапа. На первом решетка «нагревалась» из состояния с нулевой температурой (т.е. с невозмущенными значениями координат и скоростей всех частиц) или с какой-то температурой T_0 (т.е. с начальными значениями координат и скоростей, полученными в предыдущих симуляциях для температуры T_0) до заданной температуры (2.5), причем с достаточно большим значением параметра $\gamma_0 \sim 0.2-0.01$, чтобы обеспечить небольшую длительность стадии установления равновесной температуры $\sim 1/\gamma_0$. При этом, однако, флуктуации температуры могут быть существенными. Чтобы их уменьшить, на стационарной стадии процесса коэффициент трения и интенсивность стохастической силы уменьшаются (с поддержанием постоянного значения температуры) в $10-10^2$ раз, включая случай, когда тепловой бассейн отключается вовсе. Длительность стационарной стадии выбирается достаточно большой, что рассчитываемые на этой стадии усредненные (равновесные) значения характеристик не зависели от ее длительности. Точность расчетов контролируется на основании зависимости средних (по ансамблю) значений кинетической, потенциальной и полной энергий решетки во времени. Типичные зависимости представлены на рисунке 2.4.

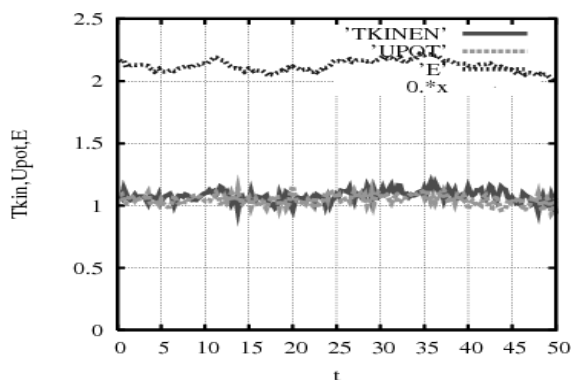


Рисунок 2.4. Зависимость усредненных по ансамблю кинетической, потенциальной и полной энергий треугольной решетки от времени при $T=1$. $B=4$, $\gamma_0=D_v=0.04$

На рисунке 2.5 представлены треки локальных возмущений плотности частиц в треугольной решетке с $N=400$ частиц и $B=4$ при разных температурах. Из них следует, что при совсемнизкой

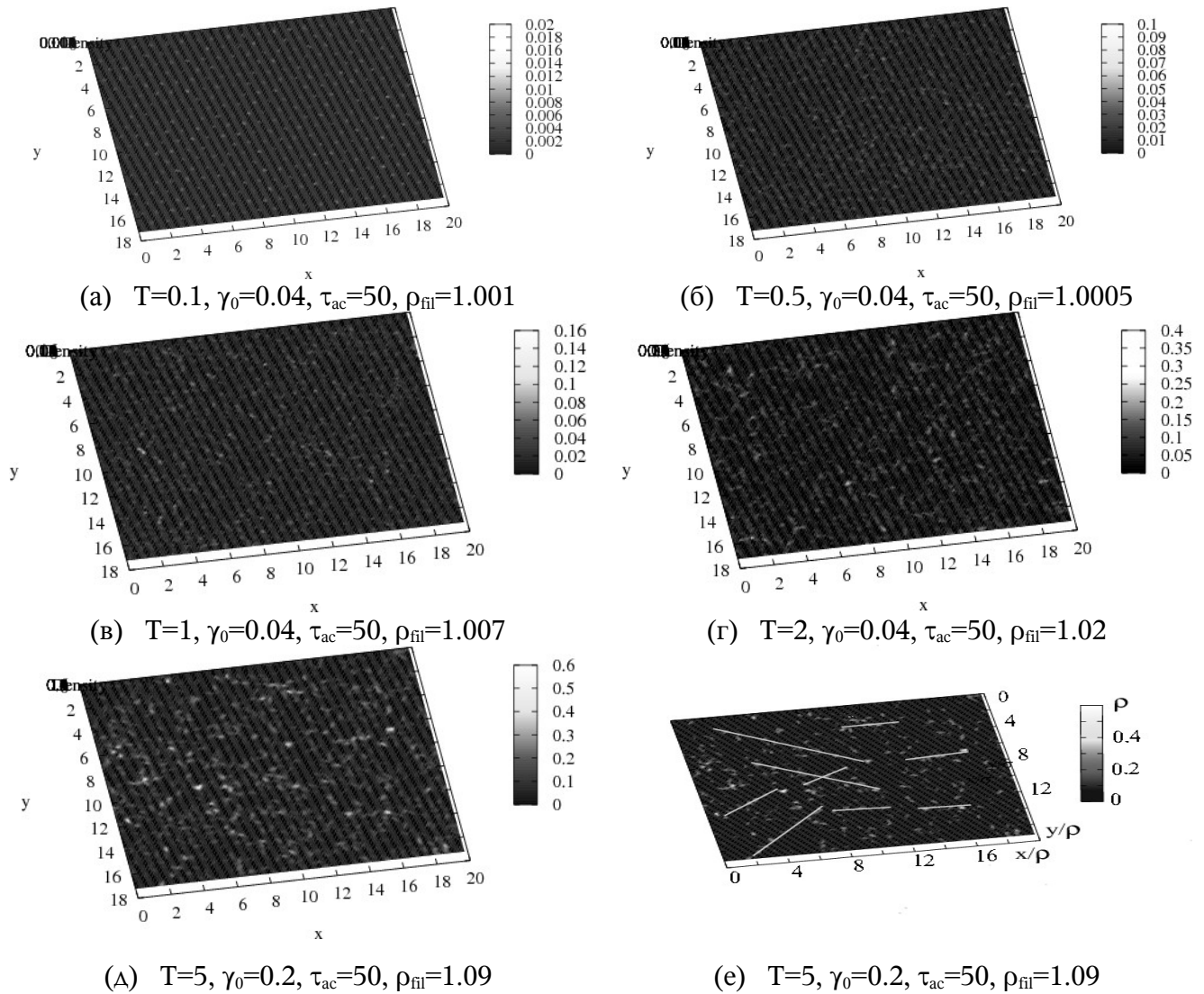


Рисунок 2.5. Треки локальных возмущений плотности частиц в треугольной решетке с $N=400$ частиц при разных температурах (а-д). Рисунок (е) повторяет (д), но на нем выделены треки, соответствующие солитонам с большим временем жизни. $B=4$.

температуре (рисунок 2.5(а)) частицы совершают слабые колебания около положений равновесия, так что распределение плотности выглядит как упорядоченная треугольная решетка. При более высокой температуре (рисунок 2.5(б)), но все еще соответствующей линейным колебаниям, частицы способны сдвигаться от положений равновесия на большие дистанции, однако относительные смещения частиц маленькие и распределение выглядит как неупорядоченный «ансамбль». При $T=1$ (рисунок 2.5(в)), заметны короткие треки, соответствующие низкоэнергетическим солитонам с маленьким временем жизни. При $T=2$ (рисунок 2.5(г)) количество солитонов растет, а время жизни увеличивается. Наконец, при $T=5$ (рисунок 2.5(д)) видны солитоны с достаточно большим временем жизни и «длиной пробега» $\sim 3-10$ – это также хорошо видно на

рисунке 2.5(е), повторяющем рисунок 2.5(а), но на котором наиболее заметные треки выделены прямыми линиями. Отметим, что мгновенные распределения плотности (см., например, рисунок 2.6) выглядят уже как достаточно неупорядоченные, однако в среднем упорядоченная (решеточная) структура ансамбля частиц еще сохраняется, хотя по оценкам температура $T=5$ в единицах 2D близка к температуре «плавления» треугольной решетки. При дальнейшем увеличении температуры число термических солитонов с большим временем жизни падает, потому что «решетка» становится все более разупорядоченной, однако корректно исследовать такой режим можно только в ячейке моделирования с большими размерами и большим количеством частиц, что предполагается сделать в дальнейшем. Таким образом, существует ограниченный диапазон оптимальных температур, в котором возбуждение термических солитонов наиболее эффективно. Вне этого диапазона снизу термические солитоны не возбуждаются, потому что для этого недостаточно тепловой энергии, а сверху потому что «решетка» становится разупорядоченной и солитоны не в состоянии поддерживать направление распространения вдоль «кристаллографических осей», так как оси не фиксированы. Эти результаты согласуются с наблюдавшимися в одномерных решетках Морзе.

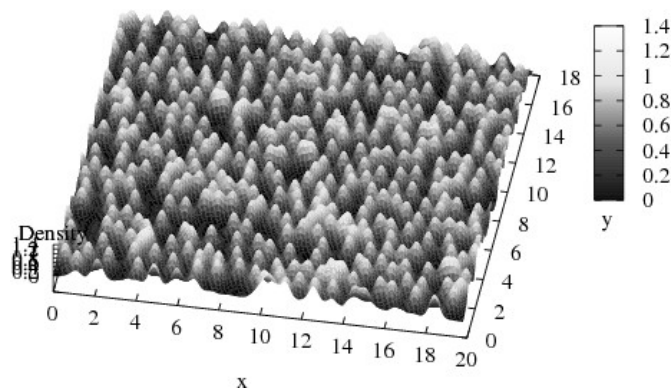


Рисунок 2.6: Распределение плотности частиц в момент времени $\tau=50$ в треугольной решетке с $N=400$ частиц при $T=5$, т.е. соответствующее рисунку 2.5 (а). $B=4$, $\rho_{\text{пл}}=1.09$.

2.5. Выводы

Таким образом, в результате выполнения данного этапа работы

- 1) разработана модель движения потенциально взаимодействующих частиц двумерной решетки, находящейся под действием стохастической силы;
- 2) разработан способ визуализации локализованных волн плотности солитонного типа в двумерной решетке;
- 3) показано, что локализованные солитоно-подобные волны могут возбуждаться в двумерных нелинейных решетках начальными возмущениями скоростей частиц решетки, однако энергия начальных возбуждений должна быть высокой; такой способ возбуждения солитонов

соответствует физическим условиям реализации термических солитонов в нагреваемых решетках,

4) показано, что солитоны распространяются вдоль кристаллографических осей решетки, однако возбуждение их начальными импульсами не критично к направлению импульса относительно осей – даже при угле отклонения относительно одной из осей до 15° солитон распространяется вдоль этой оси, хотя доля энергии, рассеиваемой в смежных цепочках решетки, увеличивается, а время жизни падает,

5) показано, что эффективное возбуждение термических солитонов происходит в ограниченном диапазоне температуры, расположенном ниже температуры «плавления» решетки,

6) найдено, что длина пробега термических солитонов составляет $(2-10)\sigma$, где σ - постоянная решетки, т.е. среднее (равновесное) расстояние между частицами решетки.

Полученные результаты относятся, строго говоря, к треугольной решетке с минимальной потенциальной энергией и не могут быть автоматически обобщены на решетки с другими типами симметрии (в частности, квадратичные), поскольку решетки с локальными минимумами потенциальной энергии склонными трансформироваться к треугольной симметрии при нагревании, поэтому вопрос о возбуждении в них термических солитонов должен решаться отдельно.

3. Разработка методов управления мультистабильностью за счет вынужденной синхронизации

3.1. Введение

Одним из свойств нелинейных автоколебательных систем является мультистабильность, то есть сосуществование в фазовом пространстве нескольких аттракторов, выбор между которыми происходит посредством выбора начальных условий. Мультистабильность - типичное явление для нелинейных динамических систем самой разной природы [2-4]. Особый вид мультистабильности, заключающийся в том, что сосуществующие колебательные моды почти идентичны и отличаются лишь величиной фазового сдвига между колебаниями подсистем, получил название ``фазовой мультистабильности" [5,6]. Фазовая мультистабильность может существовать уже в системе двух взаимодействующих генераторов с простым поведением. В ансамблях генераторов с более сложной динамикой может наблюдаться *развитая* фазовая мультистабильность, при которой число сосуществующих аттракторов неограниченно растет по мере перехода от более простых видов колебаний к более сложным. Характерным примером здесь могут служить диффузионно связанные

фейгенбаумоновские системы [5], для которых было показано, что при слабой связи число сосуществующих фазовых мод после каждой бифуркации удвоения периода увеличивается вдвое и на пороге перехода к хаосу становится неограниченно большим.

Выбор установившихся колебаний в системе с мультистабильностью определяется выбором начальных условий, которые на практике достаточно трудно проконтролировать. Кроме того, в системах с развитой фазовой мультистабильностью границы бассейнов притяжения сосуществующих аттракторов зачастую устроены достаточно сложно и могут обладать фрактальными свойствами [7]. Поэтому, целенаправленный выбор того или иного сосуществующего режима оказывается непростой задачей. Вследствие этого, для мультистабильных систем актуальны вопросы управляемых переходов между мультистабильными состояниями, то есть задача управления мультистабильностью.

Множество используемых методов управления мультистабильностью можно разделить на два класса: управление при помощи цепи обратной связи ("feedback methods") и при помощи внешнего неавтономного воздействия на систему ("non-feedback methods"). В первом случае, воздействие зависит от текущего состояния системы и направлено таким образом, чтобы постепенно "привести" фазовую точку к желаемому аттрактору [8]. Во втором случае, внешнее воздействие в виде модуляции одного из параметров [9,10] или аддитивного сигнала [11], разрушает мультистабильность, переводя управляемую систему в моностабильное состояние.

В данной работе мы предлагаем использовать новый подход к управлению мультистабильностью посредством вынужденной синхронизации, основанный на "затягивании" колебаний системы двух генераторов в нужную фазовую моду при одновременном воздействии на оба генератора внешними гармоническими сигналами на частоте суб-гармоники, сдвинутыми по фазе друг относительно друга.

3.2 Исследуемая система и рассматриваемые колебательные режимы

Выберем в качестве исследуемой системы два симметрично связанных идентичных генератора с нелинейным отрицательным сопротивлением (цепь Чуа):

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1,2} &= \alpha (y_{1,2} - \varphi(x_{1,2})) \\ \dot{y}_{1,2} &= x_{1,2} - y_{1,2} + z_{1,2} + K(y_{2,1} - y_{1,2}) \\ \dot{z}_{1,2} &= -\beta y_{1,2} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь $\varphi(x)=0.0625x^3-0.167x$ - характеристика нелинейного элемента цепи, α и β - управляющие параметры, K - коэффициент линейной связи. Будем рассматривать работу системы (3.1) при фиксированном значении параметра $\beta=14$.

Рассмотрим начало появления мультистабильности в системе (3.1). При $\alpha=6.578$ в результате бифуркации Андронова-Хопфа в фазовом пространстве рождаются синфазные периодические колебания, C^0 (здесь и далее верхний индекс будет обозначать задержку по времени второго генератора относительно первого в единицах периода однооборотного предельного цикла). С ростом α эти колебания претерпевают бифуркацию удвоения периода, в результате которой соответствующий им предельный цикл становится седловым, а в его окрестности появляется устойчивый синфазный предельный цикл периода два $2C^0$. Проекция фазового портрета данного колебательного режима построены на рис. 3.1a,b.

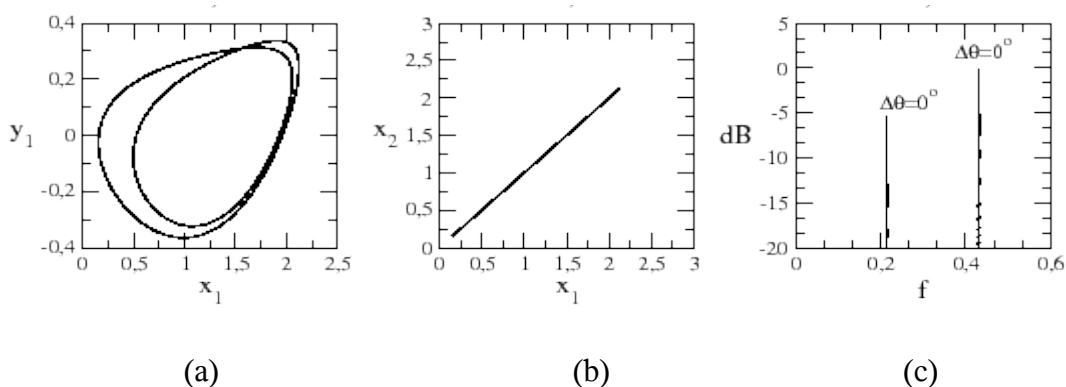


Рисунок 3.1: Фазовые портреты и нормированный спектр мощности.

Выше по параметру ставший седловым цикл периода один претерпевает еще одну бифуркацию удвоения периода, в результате которой он теряет устойчивость в направлении, трансверсальном к подпространству симметрии, а в его окрестности появляется еще один предельный цикл периода два, соответствующий несинфазным колебаниям, который далее становится устойчивым. Проекция фазового портрета для этого режима построены на рис. 3.2a,b. Видно, что данные колебания уже не являются синфазными. Из анализа временных реализаций можно определить, что колебания в одном из генераторов отстают на пол-периода от колебаний в другом генераторе. Если обозначить период исходного цикла периода один, как T , то соотношение между временными реализациями в двух генераторах можно записать как $x_1(t)=x_2(t-T)$. Поэтому, обозначим этот предельный цикл как $2C^1$.

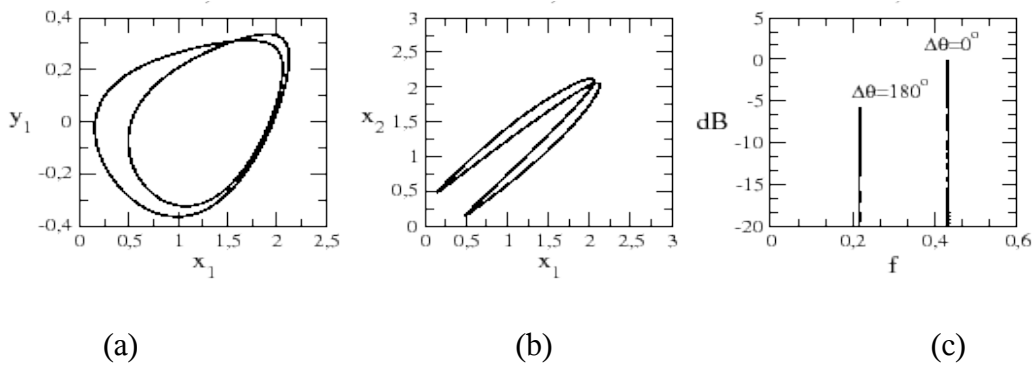


Рисунок 3.2: Фазовые портреты и нормированный спектр мощности

Таким образом, в фазовом пространстве системы сосуществует два устойчивых предельных цикла. В дальнейшем, на базе каждого из этих аттракторов происходит последовательность бифуркаций, приводящая к возникновению сосуществующих в фазовом пространстве хаотических аттракторов, которые будем обозначать как $2A^0$ и $2A^1$, соответственно. Выберем значения параметров, соответствующих условию существования колебаний $2C^0$ и $2C^1$ и попробуем найти простой метод, позволяющий переключать систему между этими режимами.

3.3. Сущность метода управления мультистабильностью

Поскольку оба аттрактора $2C^0$ и $2C^1$ сосуществуют в фазовом пространстве при одних и тех же значениях параметров, каждый из них должен иметь свой бассейн притяжения, между которыми располагается разграничивающее инвариантное многообразие.

Рассмотрим различия в сосуществующих колебательных режимах, для чего перейдем от временного представления колебаний к спектральному. На рис. 3.1с изображены спектры мощности колебаний $x_1(t)$ в режиме $2C^0$, а также взаимные фазовые спектры между сигналами $x_1(t)$ и $x_2(t)$. На рис. 3.2с аналогичные характеристики построены для режима $2C^1$. Из сопоставления обоих рисунков видно, что различия в колебаниях проявляются в разных фазах субгармоник. Если гармоники на основной частоте в обоих случаях синфазны, то разности фаз суб-гармоник в случае $2C^0$ равны нулю, а в случае $2C^1$ составляют π . То есть колебания $2C^0$ характеризуются синфазными субгармониками, а колебания $2C^1$ - противофазными. Попробуем использовать эту особенность для управляемых переключений между сосуществующими аттракторами.

Поскольку сосуществующие колебательные режимы различаются только фазами субгармоник, попробуем с помощью внешнего воздействия "затянуть" субгармоники в нужные фазовые соотношения. Для этого будем использовать внешний гармонический сигнал,

подаваемый с разными фазами на оба генератора системы (3.1), частота которого близка к частоте первой субгармоники. При этом разность фаз между сигналами выбирается равной разности фаз между гармониками целевого режима.

С учетом управляющего воздействия система уравнений генераторов будет модифицирована посредством добавления в третье и шестое уравнения системы (3.1) аддитивных внешних сигналов: $s_1 = A \cos(\omega t)$ и $s_2 = A \cos(\omega t + \phi)$, соответственно, где A и ω - их амплитуда и частота, ϕ - разность фаз между s_1 и s_2 .

Проверим работоспособность предлагаемого метода. Для этого выберем значения управляющих параметров $\alpha=8.3$, $K=0.01$, соответствующие сосуществованию в фазовом пространстве двух предельных циклов, и начальные условия, при которых генераторы функционируют в режиме $2C^0$. Выберем амплитуду управляющего сигнала $A=0.01$ и частоту, равную половине базовой частоты. Разность фаз для целевого режима $2C^1$ составляет 180° , соответственно выберем $\phi=\pi$.

Рассмотрим влияние управляющего воздействия на колебания в системе. Для этого построим временные реализации $z_1(t)$ и $z_2(t)$ (рис 3.3 а,b), а также управляющие сигналы, подаваемые на каждый из генераторов (рис 3.3 с,d). Управление включается в момент времени $t_1=50$. До этого момента колебания подсистем являются синфазными. Для того чтобы соотношение между фазами колебаний подсистем было лучше видно, обозначим локальные максимумы временных реализация буквами ``А" и ``В": ``А" - больший максимум, ``В" - меньший максимум. Например, в момент времени $t=46.5$ обе временные реализации находятся в состоянии ``А", а в момент времени  $t=48$  - в состоянии ``В". При включении воздействия наблюдается быстрая перестройка фазового сдвига между временными реализациями: колебания во втором генераторе плавно сдвигаются относительно колебаний первого генератора и после небольшого интервала времени τ , равного нескольким (если быть точнее, то пяти) периодам, устанавливается нужный колебательный режим.

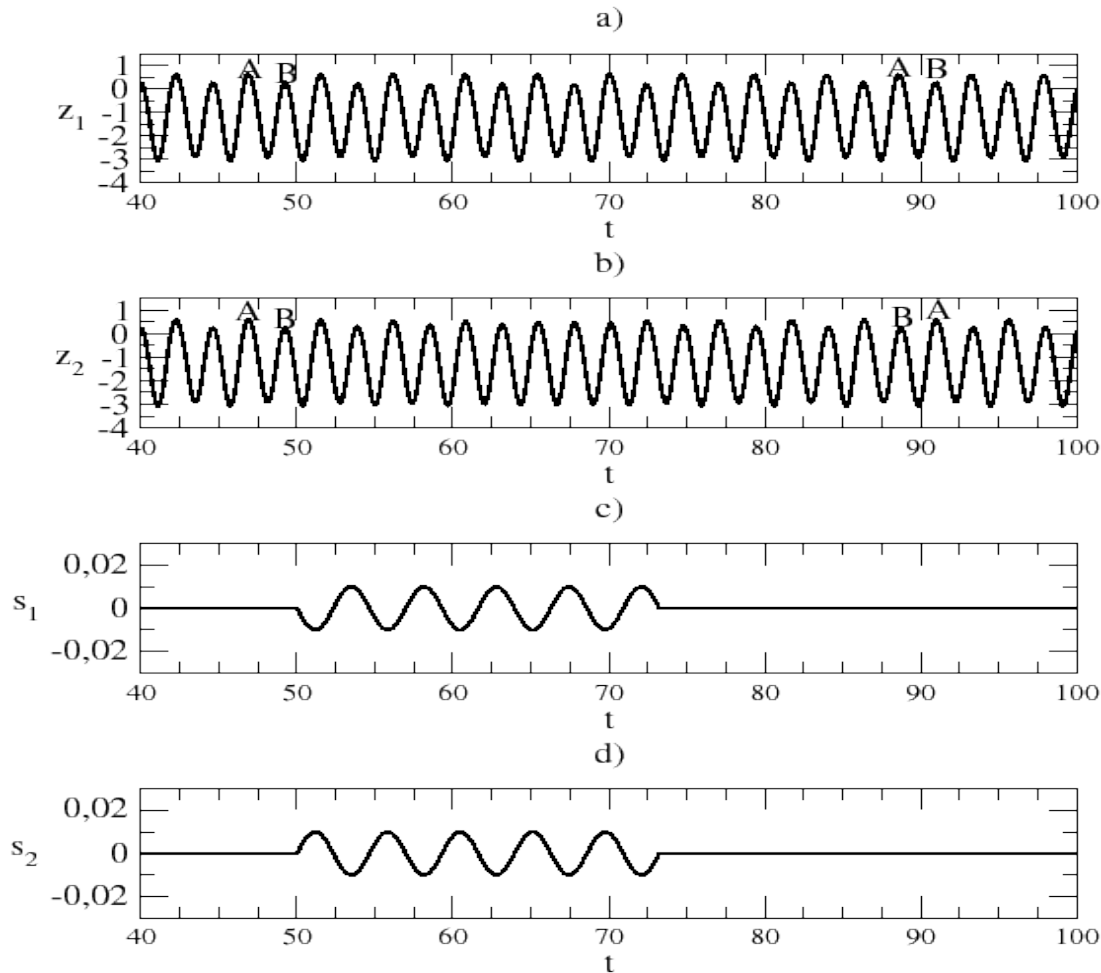


Рисунок 3.3: Процесс переключения генераторов из состояния $2C^0$ в $2C^1$.

После этого момента $t_2=t_1+t$ управляющее воздействие можно выключить - система остается в выбранном колебательном режиме $2C^1$. В этом случае, как это видно из сопоставления рис. 3.3а и рис. 3.3б, колебания в подсистемах находятся уже в разных фазах: в момент времени $t=88$ первый генератор находится в состоянии ``А'', а второй - в состоянии ``В''.

Если выбрать в качестве исходного режима цикл $2C^1$, а в качестве целевого - $2C^0$ то указанная выше методика останется неизменной, за исключением значения фазового сдвига ϕ : чтобы обеспечить переключение на режим $2C^0$ его нужно выбрать равным нулю. Таким образом, переключение параметра между двумя значениями $\phi=0$ и $\phi=\pi$ дает возможность переключать генераторы в нужный колебательный режим.

3.4. Исследование влияния би-фазного гармонического сигнала на связанные генераторы

Рассмотрим теперь влияние управляющего воздействия на систему (3.1) более подробно. Для этого выберем значение частоты воздействия $\omega=1.349$, фазы $\phi=\pi$ и начальные условия,

соответствующие режиму $2C^0$. Будем постепенно увеличивать амплитуду сигналов от $A=0$, следя за происходящими изменениями. При переходе A через ноль, на базе предельного цикла $2C^0$ мягко рождается двумерный тор $2T_1^0$ (рис.3.4).

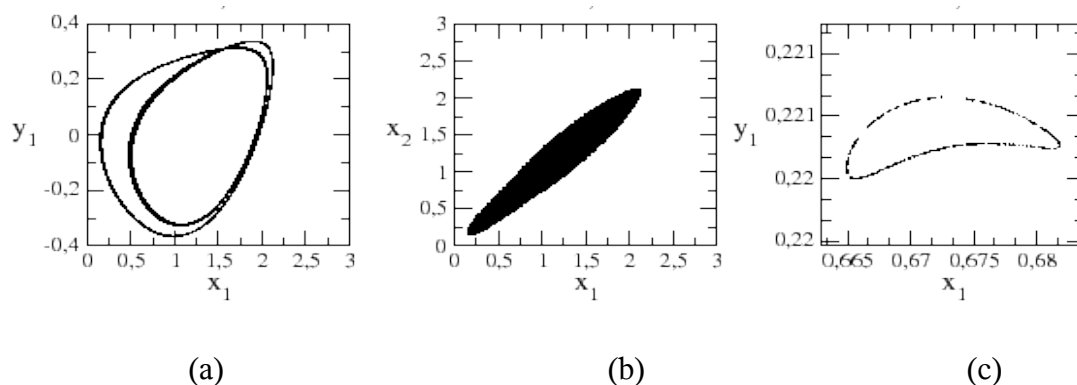


Рисунок 3.4: Квазипериодические колебания $2T_1^0$: (a) проекция фазового портрета в переменных x_1 - y_1 , (b) - в переменных x_1 - x_2 , (c) - фрагмент сечения Пуанкаре.

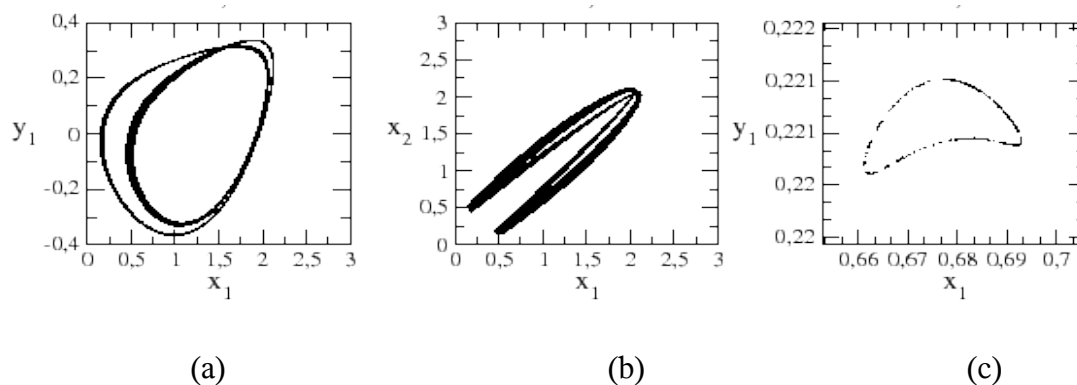


Рисунок 3.5: Квазипериодические колебания $2T_1^1$: (a) проекция фазового портрета в переменных x_1 - y_1 , (b) - в переменных x_1 - x_2 , (c) - фрагмент сечения Пуанкаре.

При увеличении A происходит постепенное изменение формы колебаний. Колебания перестают быть синфазными: проекция тора на плоскость x_1 - x_2 ``утолщается''. Наконец, при достижении некоторого порогового значения $A=A_0$ происходит жесткий переход на колебательный режим, образованный на базе предельного цикла $2C^1$, который будем обозначать как $2T_1^1$ (рис.3.5). Этот переход является необратимым: уменьшение параметра A не ведет к возврату на исходный режим. Снятие управляющего сигнала в этом случае приводит к переводу системы в режим функционирования $2C^1$.

Таким образом, переключение системы из одного состояния в другое носит пороговый характер: существует минимально необходимая амплитуда воздействия для того чтобы произошло переключение. Как показывают исследования это пороговое значение амплитуды достигает точного минимума при совпадении частоты сигналов с половиной базовой частоты колебаний. На рис. 3.6 построена зависимость порогового значения амплитуды воздействия A_0 для переключения с колебаний $2C^0$ на колебания $2C^1$ от отношения частот (линия l_1). Если выбрать начальные условия, соответствующие предельному циклу $2C^1$ и разность фаз между управляющими сигналами $\phi=0$, то аналогичным образом можно осуществить переключение на режим $2C^0$. Минимальное значение амплитуды воздействия будет в этом случае выше, однако, сам характер зависимости порогового значения амплитуды от частоты воздействия сохранится. Данная зависимость представлена на том же рисунке 3.6 (линия l_2). Из графика видно, что указанные зависимости имеют минимум при соотношении частот $\omega/\omega_0=0.5$ и монотонно растут с отстройкой по частоте. Переключение в прямом и обратном направлении происходит при разных значениях амплитуды: кривая l_2 идет выше кривой l_1 , то есть переключение с режима $2C^1$ на режим $2C^0$ требует более сильного управляющего воздействия.

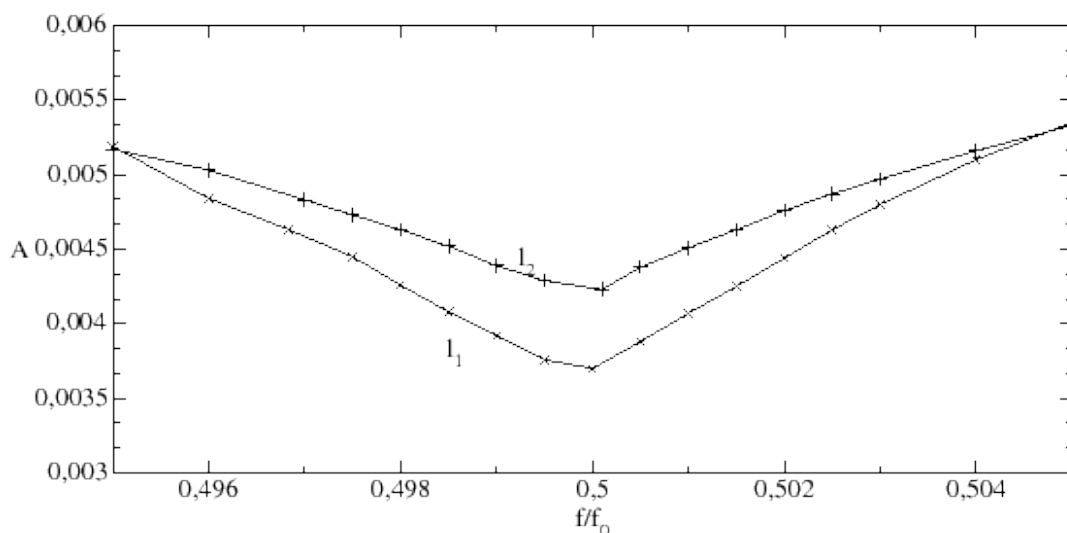


Рисунок 3.7: Амплитуда, требуемая для переключения системы из одного режима функционирования в другой и наоборот.

Рассмотренный выше эффект управления наблюдается и при других значениях параметров. Исследования показывают, что качественная картина этих процессов сохраняется, однако пороговое значение амплитуды воздействия существенным образом зависит от значений параметра α .

3.5. Вынужденная синхронизация би-фазным сигналом

Известно, что воздействие внешней периодической силы на автоколебательную систему приводит к синхронизации автоколебаний. Явление вынужденной синхронизации внешним гармоническим скалярным сигналом хорошо изучено. Однако, в данном случае мы имеем дело с синхронизацией под действием нескольких сигналов одинаковой частоты, но с разными фазами. Каким образом происходит синхронизация в данном случае?

Рассмотрим какие режимы сосуществуют на плоскости параметров "частота - амплитуда" при выборе начальных условий как на аттракторе $2C^0$ так и на аттракторе $2C^1$. Выберем значение частоты воздействия в окрестности $0.5\omega_0$ и разностью фаз между двумя сигналами $\phi=\pi$.

Результаты анализа представлены на рис. 3.8. Здесь пунктирными линиями l_1 и l_1' отмечены границы области синхронизации колебаний на базе цикла $2C^1$. Разность фаз между сигналами s_1 и s_2 равна разности фаз колебаний на данной частоте в самих генераторах.

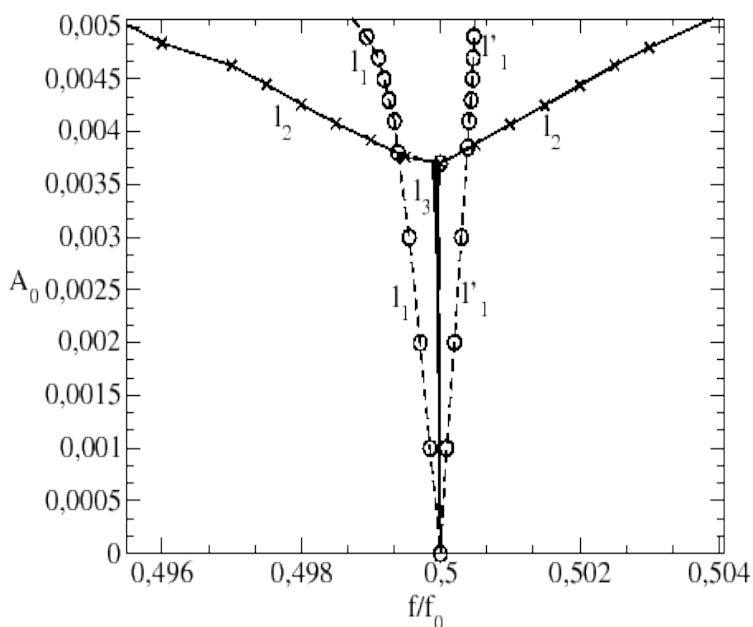


Рисунок 3.8: Бифуркационная диаграмма. Пунктирной линией показана граница области синхронизации генераторов, функционирующие в режиме $2C^1$ с внешним воздействием с разностью фаз 180 градусов.

Можно сказать, что такое воздействие является "естественным" для колебаний данной моды. На линии $A=0$ происходит мягкое рождение квазипериодических колебаний, которым в фазовом пространстве соответствует двумерный тор $2T_1^1$. При изменении частоты наблюдается эффект синхронизации на торе, в результате чего на поверхности тора рождается двух-оборотный устойчивый предельный цикл $2C_N^1$. Линии, ограничивающие область

синхронизации обозначены на рисунке как l_1 и l_1' . Область синхронизации имеет типичную форму "клява", опирающуюся на линию рождения тора в точке $\omega/\omega_0=0.5$. Выберем теперь начальные условия на синфазном цикле $2C^0$. Также как и в случае воздействия на один осциллятор, при воздействии на два генератора на линии $A=0$ происходит мягкое рождение квазипериодических колебаний. На рис. 3.9а изображена проекция стробоскопического сечения аттрактора в переменных x_1 и y_1 при $A=0.0035$, $\omega=1.3474$.

Как показали исследования, при двойном воздействии с нестандартным для данного типа колебаний значением разности фаз, также как и при воздействии одним сигналом, наблюдается синхронизация через захват частоты. Однако, в отличие от стандартной ситуации, при данном воздействии отсутствует скольнибудь заметная область синхронизации. При изменении частоты колебания становятся периодическими только на линии l_2 , соответствующей точному соотношению $\omega/\omega_0=0.5$. На рисунке данная линия имеет конечную толщину, вследствие конечной точности эксперимента. При подходе к этой линии скорость изображающей точки замедляется и стремится к нулю при приближении к ней. На самой линии изображающая точка останавливается, а при пересечении линии l_2 - начинает вращаться в противоположном направлении. На всей плоскости параметров, за исключением линии l_2 , вплоть до линии переключения (l_3 и l_3') существуют квазипериодические колебания $2T^0$. При пересечении линии l_3 или l_3' тор перестает быть притягивающим и траектория переходит на один из режимов, образованных на базе цикла $2C^1$.

Таким образом, на плоскости параметров ниже линий l_3 и l_3' сосуществует два режима: тор $2T^0$ и цикл $2C_N^1$ внутри области синхронизации - и торы $2T^0$ и $2T^1$ - вне области синхронизации. Выше линий l_3 и l_3' существует только один режим: либо $2C_N^1$ - внутри области синхронизации, либо $2T^1$ - вне ее.

Исследование процессов синхронизации системы связанных генераторов при гармоническом внешнем воздействии на оба генератора показало, что в зависимости от выбора значений разности фаз между сигналами задающего генератора, синхронизация происходит по-разному. Если разность фаз выбирается равной разности фаз между соответствующими гармониками в спектрах колебаний подсистем, то синхронизация происходит так же, как и при воздействии на один генератор. Если разность фаз выбирается противоположной разности фаз, существующей между колебаниями под-систем, то синхронизация наблюдается лишь при точном совпадении частоты воздействия с частотой задающего генератора, то есть область синхронизации вырождается в линию.

3.6. Управление сложными колебательными режимами

Предлагаемый метод управления мультистабильными состояниями может быть распространен и на более сложные колебательные режимы. Рассмотрим, как происходит переключение между сосуществующими хаотическими аттракторами.

В ходе каскадов бифуркации удвоения периода на основе циклов $2C^0$ и $2C^1$ образуются хаотические двух-ленточные аттракторы $2A^0$ и $2A^1$, фазовые портреты и спектры которых построены на рис. 3.9а и рис. 3.9б, соответственно. Характер колебаний и вид спектров мощности этих аттракторов почти идентичен, за исключением фазовых соотношений между колебаниями подсистем. Как видно из рисунков, в спектре мощности этих мод присутствуют пики на базовой частоте, ее гармониках, а также пики на субгармониках. В работе [11] было показано, что разности фаз, соответствующие этим гармоническим составляющим, ``наследуют" разности фаз периодических колебательных режимов, на базе которых данные аттракторы были сформированы: $2C^0$ и $2C^1$. То есть, для режима $2A^0$ фазы гармоник и субгармоник равны нулю, а для режима $2A^1$, фазы гармоник равны нулю, а фазы субгармоник - π . Фазы остальных составляющих спектров являются случайными величинами, равномерно распределенными в диапазоне значений от $-\pi$ до π .

Поскольку спектры колебаний хаотических аттракторов $2A^0$ и $2A^1$ отличаются фазами субгармоник, для них можно применить тот же метод управления, что и для исходных периодических режимов. Выберем в качестве исходного режима $2A^1$ (рис. 3,9б) для которого значение фаз взаимного спектра на субгармониках равно нулю. Нашей целью является переключение с этого режима на целевой режим $2A^0$, для которого фазы субгармоник равны нулю. Будем использовать тот же метод, что и для периодических колебаний.

Подадим внешнее воздействие с частотой $\omega=1.347$ и фазой $\phi=0$. Амплитуду воздействия будем плавно увеличивать от нуля, наблюдая при этом за изменениями фазовых портретов и спектров режима $2A^1$. При подаче управляющего сигнала, начиная примерно с значения амплитуды $A=0.0025$ генераторы переходят в режим ``объединенного" аттрактора, при котором наблюдается временные переключения между двумя сосуществующими режимами.

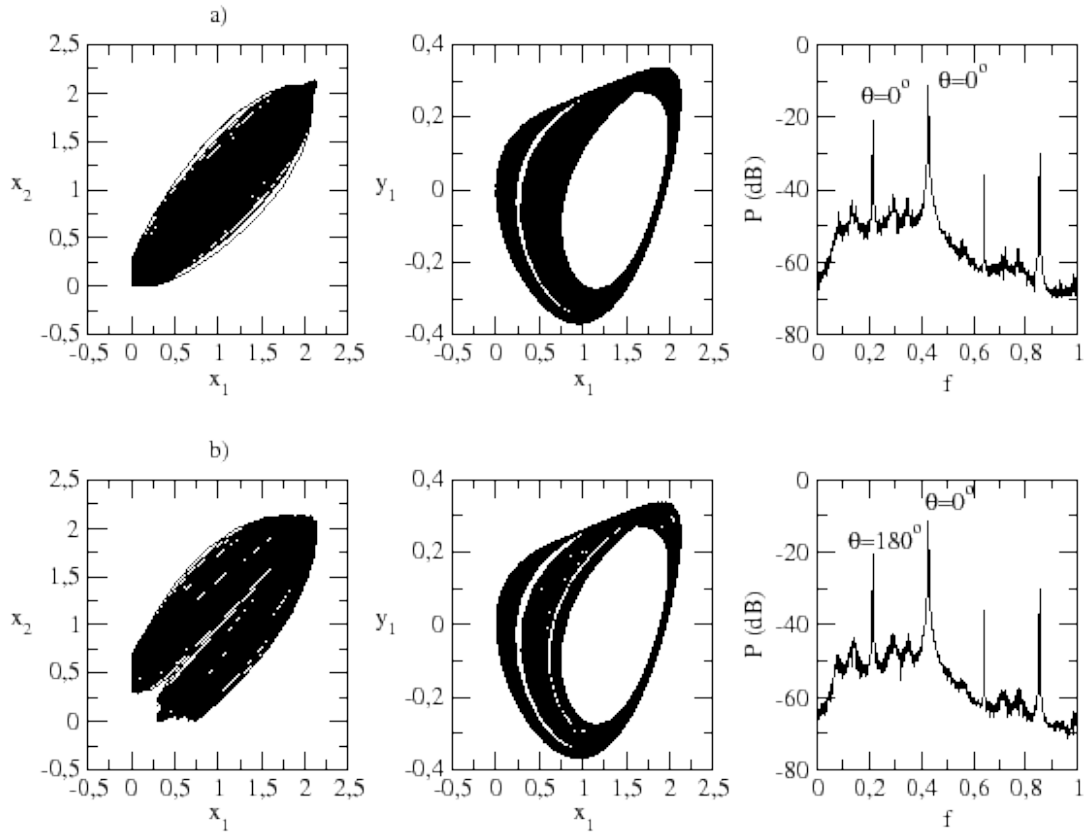


Рисунок 3.9: Проекция фазовых портретов и спектры мощности хаотических колебаний (а) $2A^0$ и (б) $2A^1$.

Если в этот момент выключить управляющий сигнал, система случайным образом перейдет на один из аттракторов $2A^0$ либо $2A^1$. При увеличении амплитуды воздействия, начиная примерно с амплитуды $A=0.007$ характер аттрактора меняется: проекция фазового портрета оказывается сходной с проекцией аттрактора $2A^0$. В этом случае, при выключении управляющего воздействия неопределенность перехода исчезает, система во всех случаях переходит на аттрактор $2A^0$.

Характер происходящих изменений наглядно проявляется в спектрах колебаний указанных режимов. На рис. 3.10 построены спектры мощности, взаимные фазовые спектры и графики функции когерентности для колебаний на базе $2A^1$ при последовательно увеличивающихся значениях амплитуды воздействия. На рис. 3.10а данные характеристики приведены для исходного аттрактора $2A^1$. Видно, что значения взаимной фазы базовой гармоники концентрируются вблизи нуля, а значения фазы суб-гармоники - вблизи π .

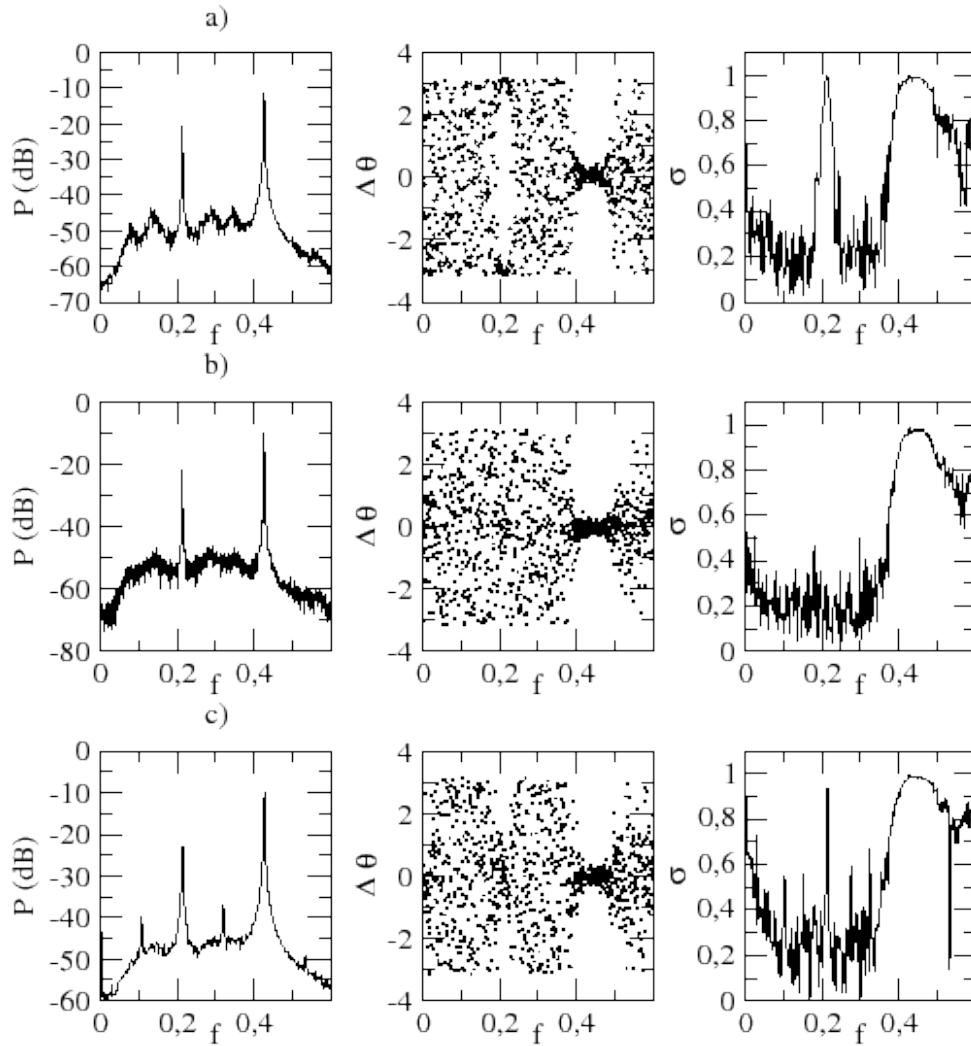


Рисунок 3.10: Спектр мощности, взаимный фазовый спектр и функция когерентности хаотических колебаний на базе аттрактора $2A^1$ при разных амплитудах управляющего сигнала: (a) $A=0$, (b) $A=0.003$, (c) $A=0.007$

Детерминированный характер фазового спектра на этих частотах подтверждается поведением функции когерентности, которая для них близка к единице. При переходе к "объединенному" аттрактору, характер спектральных характеристик существенно меняется. Хотя спектр мощности имеет ту же форму с двумя выраженными пиками. Фазовый спектр на частоте основной гармоники остается детерминированным, а на частоте суб-гармоники "расплывается", что подтверждается резким уменьшением функции когерентности для этой частоты. Наконец, при большой амплитуде воздействия, фазовый спектр снова структурируется, но уже около нового значения $\theta=0$, что подтверждается ростом значения функции когерентности на этой частоте.

Если в качестве исходного режима выбрать хаотический режим $2A^0$, то указанную выше методику можно использовать, задавая фазу управляющего воздействия $\phi=0$. В этом случае, сначала происходит переход к ``объединенному" режиму, а затем, при $A=0.007$ - к аттрактору, фазовый портрет которого аналогичен портрету аттрактора $2A^1$. Выключение управляющего воздействия приводит к переходу на режим $2A^1$.

3.7. Выводы

Разработан новый метод управления фазовой мультистабильностью в двух связанных генераторах, основанный на ``затягивании" колебаний в нужный режим при помощи внешних гармонических сигналов на частоте суб-гармоники, прикладываемых к подсистемам. Изменяя разность фаз между этими сигналами можно управлять переключениями между сосуществующими колебательными модами. Метод работает как для периодических, так и хаотических колебаний.

Получены закономерности синхронизации автоколебаний при би-фазном гармоническом воздействии. Обнаружено, что ширина области синхронизации существенно зависит от величины разности фаз внешних сигналов. Если данная разность фаз равна разности фаз соответствующих гармоник в спектре автоколебаний, область синхронизации имеет характерный вид ``языка Арнольда". Если разность фаз существенно отличается от этой величины - область синхронизации вырождается в линию и синхронизации наблюдается лишь в точке совпадения частот.

4. Исследование влияния шума на переход к хаотическому поведению в автоколебательной среде

4.1. Введение

Поведение активных сред со сложной динамикой, обусловленной сильно нелинейным характером поведения отдельных элементов среды, на сегодняшний день сравнительно мало изучено, в отличие от нерегулярного (турбулентного) поведения сред, описываемых квазигармоническими моделями типа уравнения Гинзбурга-Ландау [12-13]. В последнем случае сложная динамика является следствием взаимодействия элементов среды. Однако можно поставить задачу несколько иначе. Пусть среда составлена из бесконечного числа бесконечно малых автоколебательных ячеек («элементарных генераторов»), обладающих собственной сложной динамикой даже в отсутствии взаимодействия. Возникает вопрос, какие режимы поведения среды могут наблюдаться в этом случае при вариации параметра, управляющего динамикой элемен-

тов среды, и какие сценарии перехода к хаотическому поведению во времени и к пространственной турбулентности могут быть реализованы? Важным и малоизученным вопросом является также влияние шума на пространственно распределенные системы. Если влияние случайных воздействий на сосредоточенные системы вблизи бифуркаций и при переходе к хаотической динамике рассмотрено во многих работах и, в общих чертах, роль шума обозначена (хотя имеется множество неисследованных деталей), то эффекты шумового воздействия на сложные режимы пространственно-распределенных систем изучены очень слабо.

В данной работе исследовалось поведение автоколебательной среды, составленной из «элементарных генераторов», представляющих собой генератор Анищенко-Астахова. Генератор Анищенко-Астахова является одной из базовых моделей теории динамического хаоса и может, в зависимости от управляющих параметров, демонстрировать различные режимы колебаний, как регулярные, так и хаотические. Модель автоколебательной среды может быть представлена в виде следующей системы уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = mx + y - xz + \gamma \frac{\partial^2 (x - y)}{\partial s^2}, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = -x, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = -gz + \frac{g}{2} (x + |x|)x, \quad (4.1)$$

где x, y, z – безразмерные динамические переменные, являющиеся функциями безразмерного времени t и безразмерной пространственной координаты s ; γ – коэффициент диффузии, определяемый величиной связи между соседними ячейками. Среда исследовалась с периодическими граничными условиями:

$$\forall t \quad x(0, t) = x(L, t), \quad y(0, t) = y(L, t), \quad z(0, t) = z(L, t);$$

$$\left. \frac{\partial x(s, t)}{\partial s} \right|_{s=0} = \left. \frac{\partial x(s, t)}{\partial s} \right|_{s=L}, \quad \left. \frac{\partial y(s, t)}{\partial s} \right|_{s=0} = \left. \frac{\partial y(s, t)}{\partial s} \right|_{s=L}, \quad \left. \frac{\partial z(s, t)}{\partial s} \right|_{s=0} = \left. \frac{\partial z(s, t)}{\partial s} \right|_{s=L},$$

где L – длина системы. Во всех численных экспериментах фиксировалась длина системы $L=100$ безразмерных единиц, коэффициент диффузии $\gamma=0.1$ и параметр $g=0.2$. Параметр m изменялся от 0.96 до 1.7.

Система (4.1) интегрировалась с использованием разложения на пространственные гармоники, число которых выбиралось достаточно большим для корректного описания непрерывной среды и зависело от сложности пространственного профиля колебаний в исследуемом режиме. В результате численного интегрирования строились различные характеристики режима колебаний во времени и пространстве: проекции фазовых траекторий и сечения фазового пространства в отдельных точках среды, мгновенные пространственные профили и пространственно-временные распределения для выбранных переменных, профили мгновенных значений фазы колебаний в различных точках среды. Для анализа устойчивости решений совместно с (4.1) интегрировалась линеаризованная система уравнений для малого возмущения.

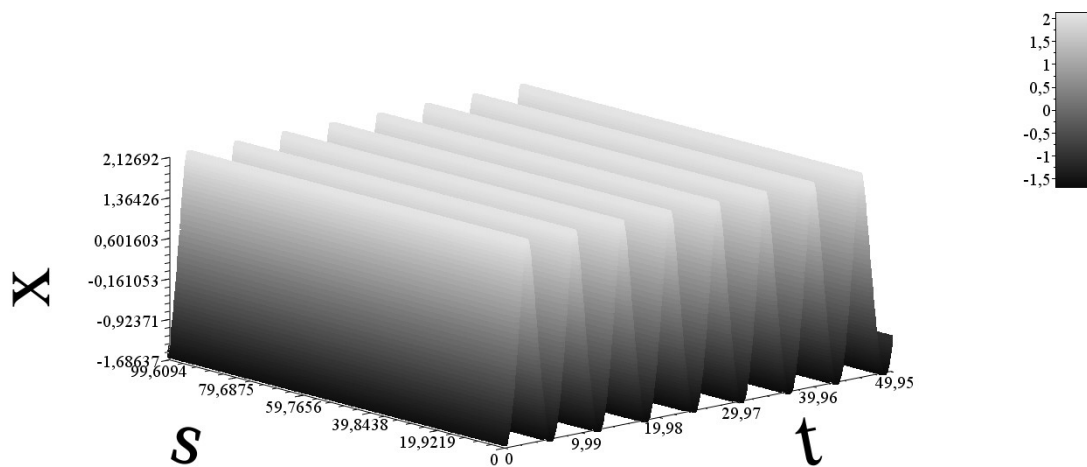
Уже в квазигармоническом режиме (при малых значениях параметра m) в среде (4.1) наблюдается мультистабильность, связанная с периодичностью граничных условий [14-16]. При значениях параметров указанных выше, в (4.1) сосуществует несколько устойчивых пространственных мод, которые отличаются числом длин волн, укладывающихся на длине системы в квазигармоническом режиме (рисунок 4.1). С усложнением характера колебаний во времени пространственный профиль также усложняется и по виду профиля становится трудно определить, какова длина волны. Для того, чтобы идентифицировать различные моды в некоторый фиксированный момент времени t рассчитывалась мгновенная фаза колебаний в разных точках пространства

$$\Phi(s) = -\operatorname{arctg} \frac{y(s, t)}{x(s, t)} \pm \pi i, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (4.2)$$

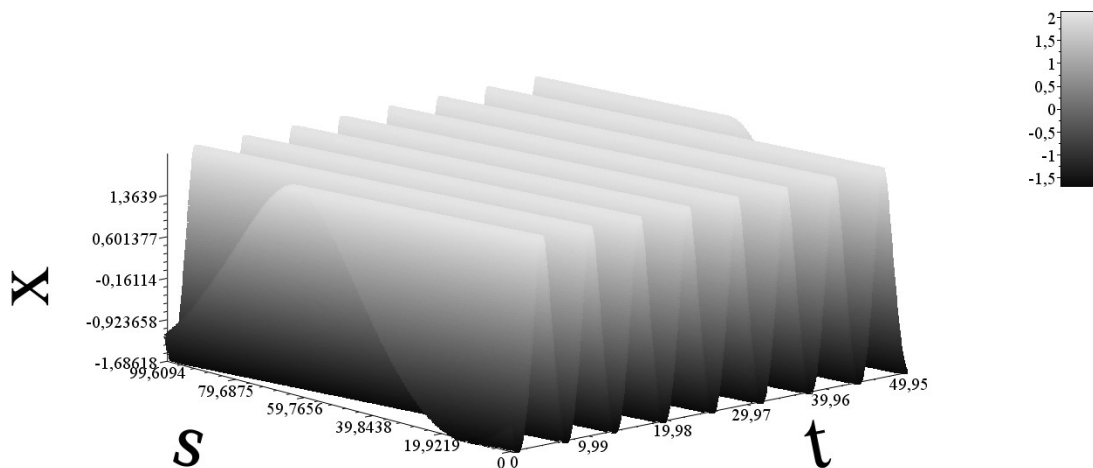
(целое число i определялось из условия непрерывности функции $\Phi(s)$) и определялась разность фаз в начальной точке $s=0$ и конечной точке $s=L$: $\varphi(L) = \Phi(0) - \Phi(L)$. Каждая мода характеризуется целым числом

$$n = \frac{\varphi(L)}{2\pi}. \quad (4.3)$$

Будем называть его номером моды. Однородный режим соответствует колебаниям всех точек пространства в одной фазе, следовательно, для него $n=0$. Кроме него были обнаружены моды с номерами $n=\pm 1, \pm 2, \pm 3$. Они соответствуют бегущим волнам с различной фазовой скоростью в различных направлениях. Вероятно, возможны и другие устойчивые режимы, которые не были диагностированы в численных экспериментах.



(a)

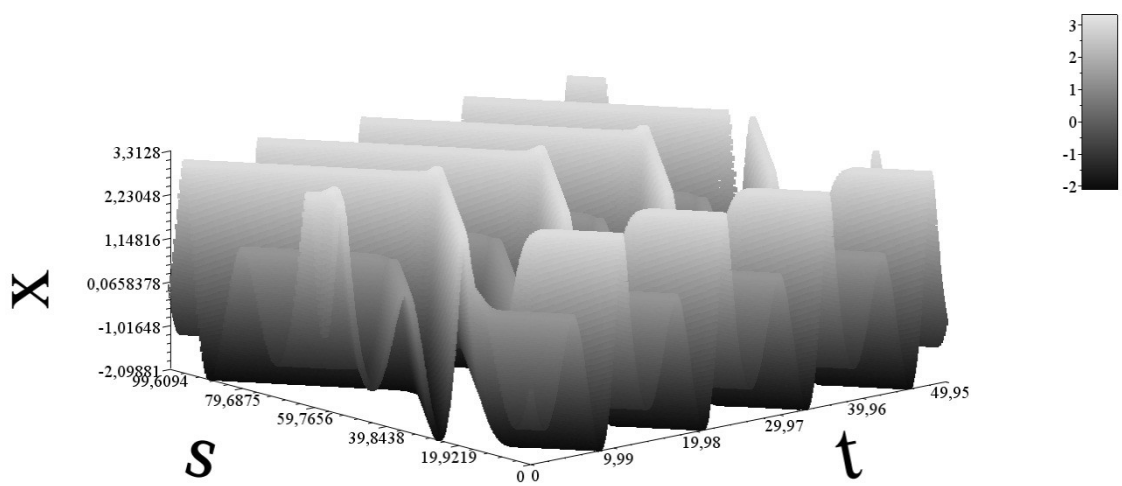


(б)

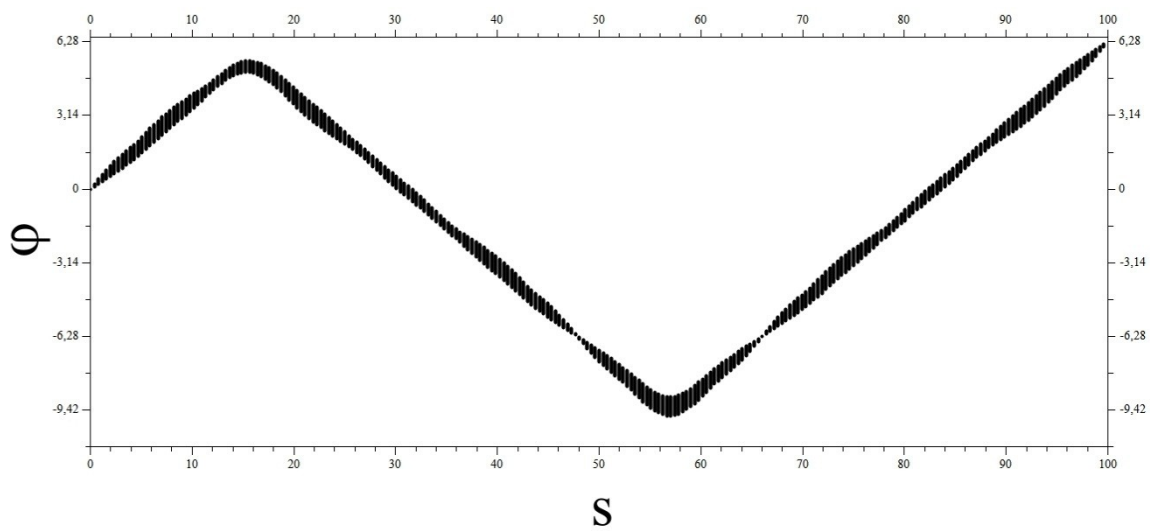
Рисунок 4.1: Пространственно-временные диаграммы режимов в среде (4.1) при $m=0.96$: а – пространственно-однородная мода $n=0$; б – бегущая волна $n=1$. На диаграммах представлены зависимости переменной x от пространственной координаты s и времени. Значения переменной отражены градиациями тона.

4.2. Сценарии перехода к хаосу для однородной моды $n=0$ и бегущих волн $n \neq 0$

Для всех исследованных мод при $m \in [0.96; 0.97]$ в системе (4.1) наблюдается удвоение периода колебаний во времени. Однако как было установлено нами ранее, сценарий перехода к колебаниям удвоенного периода для однородной моды $n=0$ и для бегущих волн различен [17,18]. Для $n=0$ данный переход аналогичен обычной бифуркации удвоения периода цикла, известной для сосредоточенных систем. Для всех сосуществующих в (4.1) бегущих волн ($n \neq 0$) происходит более сложное развитие режима, включающее возникновение квазипериодических колебаний, рост периода модуляции колебаний и, затем, переход к периодическим во времени колебаниям с удвоенным периодом. Удвоение периода колебаний для бегущих волн приводит к немонотонной зависимости фазы волны от пространственной координаты и, соответственно искажению фронта волны (рисунок 4.2). За эволюцией волнового фронта удобнее наблюдать, если смотреть на пространственно-временную диаграмму «сверху вниз» (рисунок 4.3)



(a)



(б)

Рисунок 4.2: Режим бегущей волны $n=1$ после удвоения периода колебаний ($m=1,1$): а – пространственно временная диаграмма; б – мгновенный профиль разности фаз $\phi(s)=\Phi(0)-\Phi(s)$

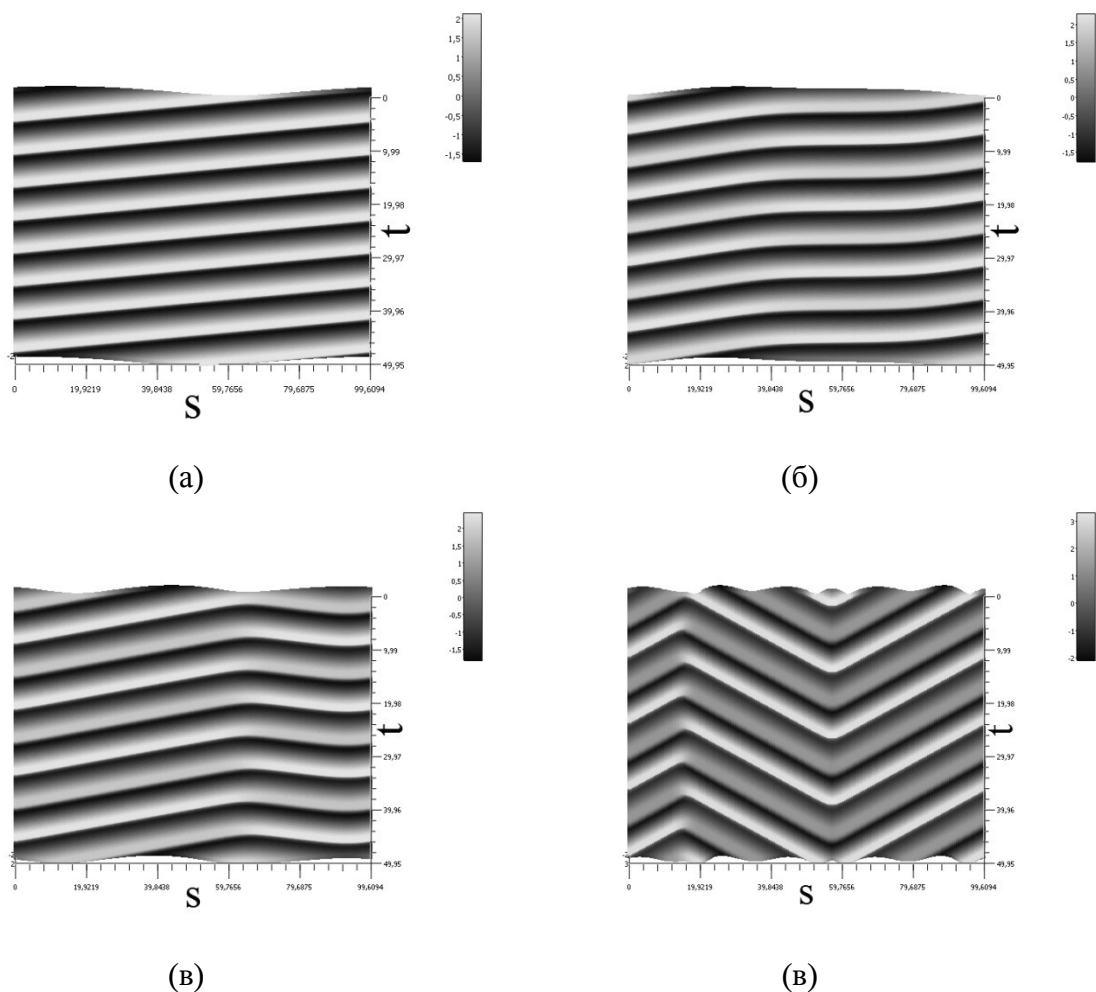


Рисунок 4.3: Эволюция волнового фронта моды $n=1$ при увеличении параметра m (а – $m=0.96$, б – $m=0.97$, в – $m=0.98$, г – $m=1.1$)

При дальнейшем увеличении параметра m для однородной моды наблюдается последовательность бифуркаций удвоения периода колебаний во времени, приводящая к хаотической динамике в соответствии со сценарием Фейгенбаума. Следует отметить, что область притяжения однородного режима с приближением к порогу хаоса постоянно уменьшается. Из ряда научных публикаций, посвященных пространственно-дискретным системам с удвоениями периода колебаний (цепочкам модельных отображений и цепочкам автогенераторов), известно, что пространственно однородный хаотический режим возможен только в случае конечной длины цепочки [19,20]. С увеличением числа элементов однородный режим перестает быть устойчивым раньше, чем происходит переход к хаотической динамике. Соответственно, точки непрерывной среды не могут одновременно совершать идентичные хаотические движения. В этом смысле однородный режим перестает существовать. Однако мы можем говорить о хаотической моде $n=0$, понимая под этим пространственно-временной режим, соответствующий нулевой разности фаз на длине среды в среднем по времени:

$\langle \varphi(L) \rangle = \langle \Phi(0) - \Phi(L) \rangle = 0$. При этом различные точки среды будут совершать во времени различные хаотические колебания (рисунок 4.4).

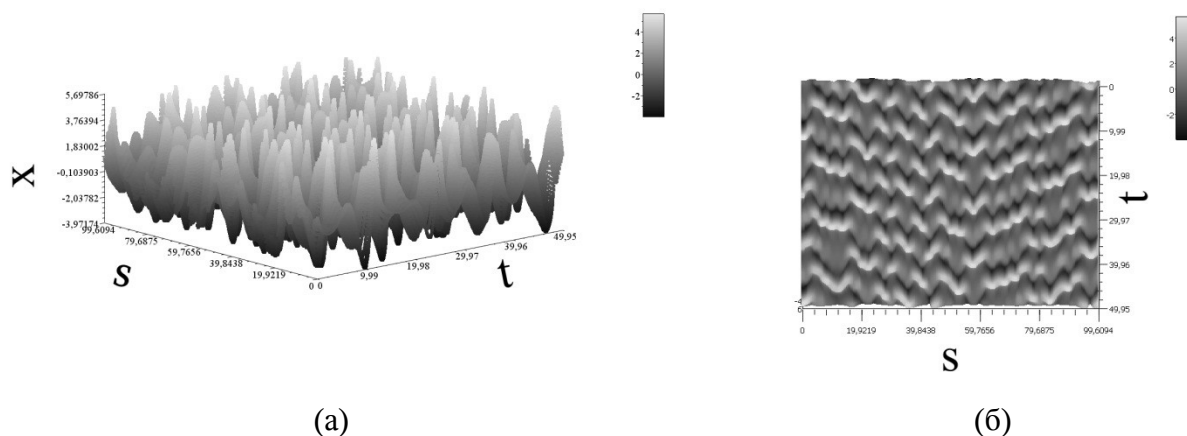
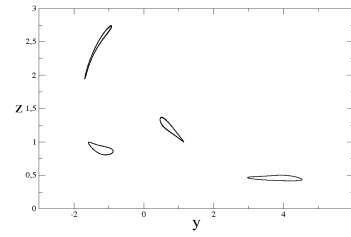
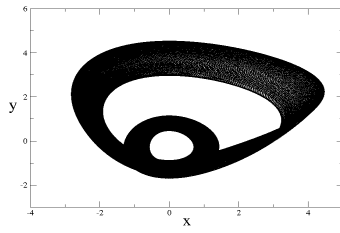


Рисунок 4.4: Режим «однородного» хаоса ($n=0$) при $m=1.5$: а – пространственно-временная диаграмма; б – пространственно-временная диаграмма (вид «сверху»)

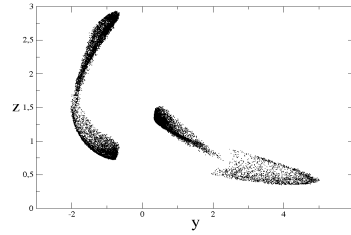
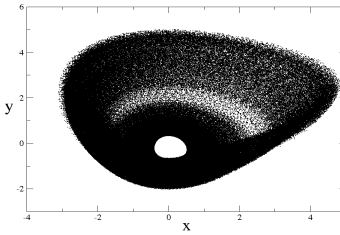
Для всех исследованных бегущих волн ($|n|=1,2,3$) при выбранном параметре связи было обнаружено только одно удвоение периода. С ростом параметра m из периодических колебаний удвоенного периода снова возникал квазипериодический режим, который в дальнейшем разрушался, порождая хаотические во времени колебания.

В сечении фазового портрета, построенного в фиксированной точке пространства, можно видеть характерную картину разрушения инвариантной кривой, соответствующей двумерному тору (рисунок 4.5). Данный сценарий перехода к хаосу для пространственно неоднородных режимов описан в литературе для пространственно-дискретных моделей, в частности для цепочки осцилляторов Ресслера [16]. Таким образом, результат, полученный для модели непрерывной среды (4.1) находится в полном согласии с результатами исследования более простых моделей.

С ростом параметра m усложняется не только форма колебаний во времени. Для бегущих волн наблюдается эволюция пространственного профиля, который становится всё более сложным, возникают всё более мелкомасштабные пространственные осцилляции, что, в конечном счете, ведет к пространственной нерегулярности. Однако исследование таких сложных структур затруднительно, так как требует учета все большего числа пространственных гармоник.

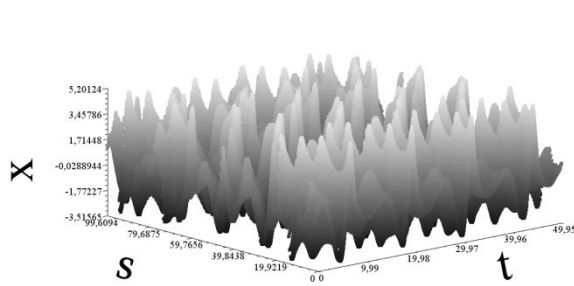


(а)

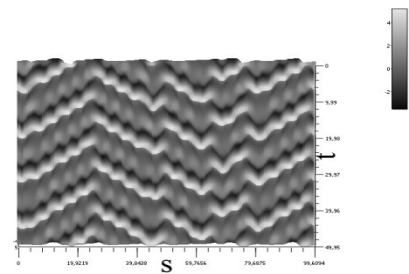


(б)

Рисунок 4.5: Вторичное возникновение квазипериодических колебаний, их разрушение и переход к хаосу для моды $n=1$: а – $m=1.34$; б – $m=1.39$. Слева изображены фазовые портреты в точке $s=40$, справа – соответствующие сечения плоскостью $x=0$



(а)



(б)

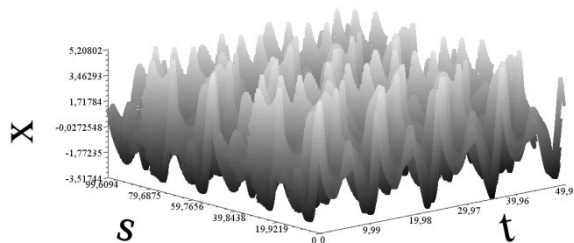


Рисунок 4.6: Пространственно-временные диаграммы хаотических режимов при $m=1.43$: а – мода $n=1$; б – мода $n=2$.

В области хаоса продолжают сосуществовать моды с различными номерами n , соответствующими различным средним значениям разности фаз $\phi(L)$. Примеры пространственно-временных диаграмм режимов хаотических бегущих волн приведены на рисунке 4.6.

При $m=1.56$ наблюдается объединение всех мод (включая волны с отрицательными номерами $n=-1,-2,-3$, бегущие в обратную сторону). Зависимости среднего сдвига фазы $\phi(L)$ на длине системы от параметра m , полученные для различных мод, представлены на рисунке 4.7.

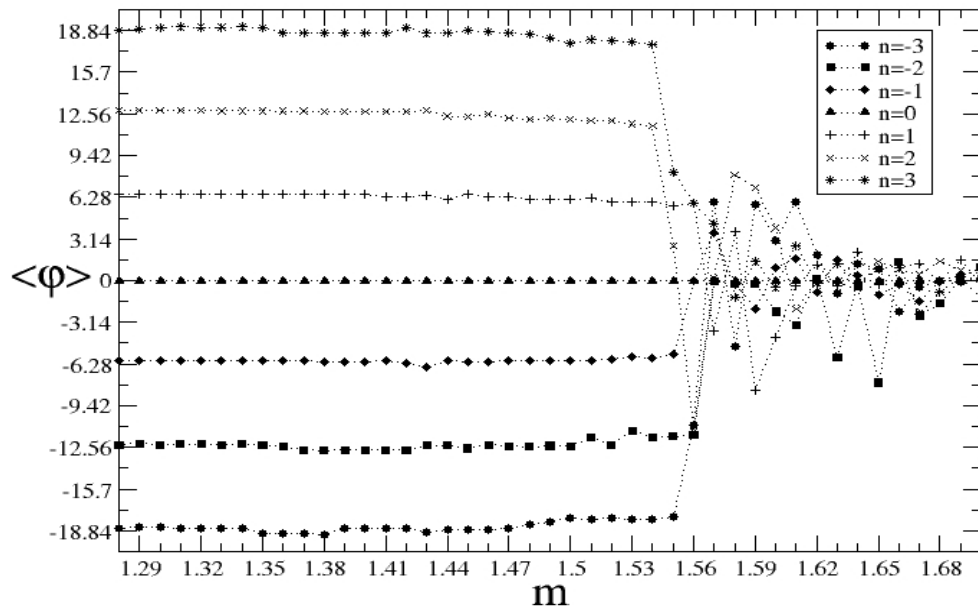


Рисунок 4.7: Зависимости среднего сдвига фазы за длину системы $\phi(L)$ от параметра m для сосуществующих мод $n=0,1,2,3$

4.3. Исследование экспоненциальной неустойчивости решений в области хаотической динамики

Хаотическое во времени поведение среды означает абсолютную экспоненциальную неустойчивость решений системы (4.1). Для анализа неустойчивости рассматривались решения уравнений в вариациях:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = mu + v - uz - xw + \gamma \frac{\partial^2(u-v)}{\partial s^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -u, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = -gw + 2gx \chi(x)u, \quad (4.4)$$

где u, v, w – компоненты возмущения $\mathbf{u}(s, t)$, вычисляемые в точках исследуемого решения $x(s, t)$, $y(s, t)$, $z(s, t)$, $\chi(x)$ – функция ступеньки. Далее производился расчет максимального Ляпуновского показателя λ^l решения системы (4.1) по методу Бенеттина, в котором квадратичная норма возмущения определялась как:

$$\eta(t) = ||\vec{u}(s, t)|| = \left(\int_0^L [u^2(s, t) + v^2(s, t) + w^2(s, t)] ds \right)^{1/2} \approx \left(\sum_i [u^2(i\Delta s, t) + v^2(i\Delta s, t) + w^2(i\Delta s, t)] \right)^{1/2}$$

где Δs - шаг пространственной дискретизации, определяемый числом учитываемых пространственных гармоник $N (\Delta s = L/N)$.

Рассмотрим «строгую однородную моду», для которой не только имеет место равенство $n=0$, но все точки среды ведут себя идентично. В этом случае установившееся решение системы (4.1) принадлежит инвариантному многообразию U : $x(s, t) = x(t)$, $y(s, t) = y(t)$, $z(s, t) = z(t)$. До критической точки, соответствующей порогу хаотической динамики, однородная мода устойчива к малым возмущениям. За критической точкой однородная мода становится неустойчивой, но ее легко пронаблюдать в численном эксперименте, задав однородное начальное состояние системы (4.1) $(x(s, 0), y(s, 0), z(s, 0) = \text{const})$. Если при этом выбрать однородные начальные условия для возмущений (4.4) $(u(s, 0), v(s, 0), w(s, 0) = \text{const})$, то можно получить максимальный ляпуновский показатель λ'_U , который характеризует устойчивость или неустойчивость однородного решения относительно возмущений в инвариантном многообразии U . Из характера уравнений (4.1) следует, что решения, принадлежащие инвариантному многообразию U , полностью совпадают с режимами «элементарного генератора» и при вариации параметра m должны эволюционировать полностью аналогично. Проведенные численные расчеты подтверждают данный вывод: зависимость λ'_U от параметра m для «строгой однородной моды» в пределах точности вычислений совпадает с соответствующей зависимостью, полученной для отдельного генератора Анищенко-Астахова с сосредоточенными параметрами (рисунок 4.8). Данный результат подтверждает корректность используемой численной схемы интегрирования и метода расчета максимального ляпуновского показателя.

В результате проведенных расчетов было установлено, что для мод $n=0, \pm 1, \pm 3$ переход к хаотическому режиму происходит практически при одном и том же значении параметра $m \approx 1.37$, однако окно периодичности при $m > 1.54$, наблюдающееся для моды $n=0$, у неоднородных мод исчезает (рисунок 4.9). Особо нужно отметить «двухволновые» моды $n=\pm 2$, для которых граница перехода к хаосу оказывается сдвинутой в сторону роста значений параметра m , и для $n=-2$ наблюдается окно периодичности, отсутствующее у остальных режимов (рисунок 4.10).

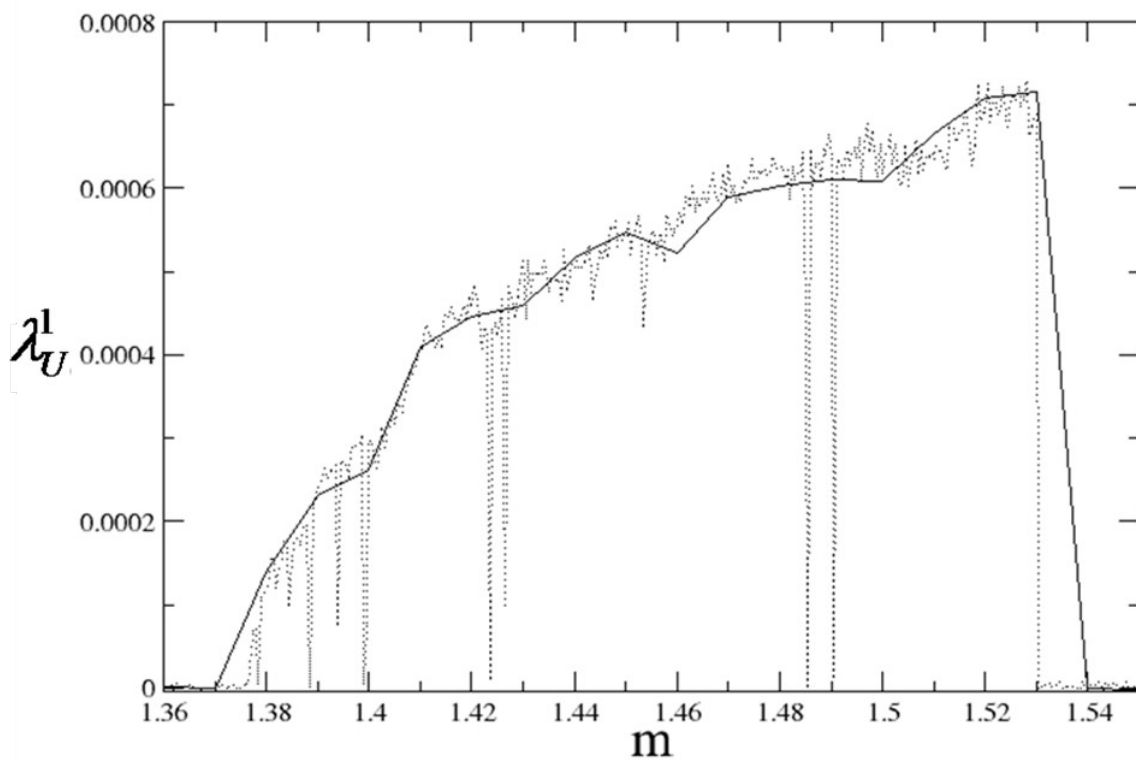


Рисунок 4.8: Зависимости максимального ляпуновского показателя λ^1 для моды $n=0$ в среде (4.1) (сплошная линия) и для генератора Анищенко-Астахова (пунктирная линия) от параметра m

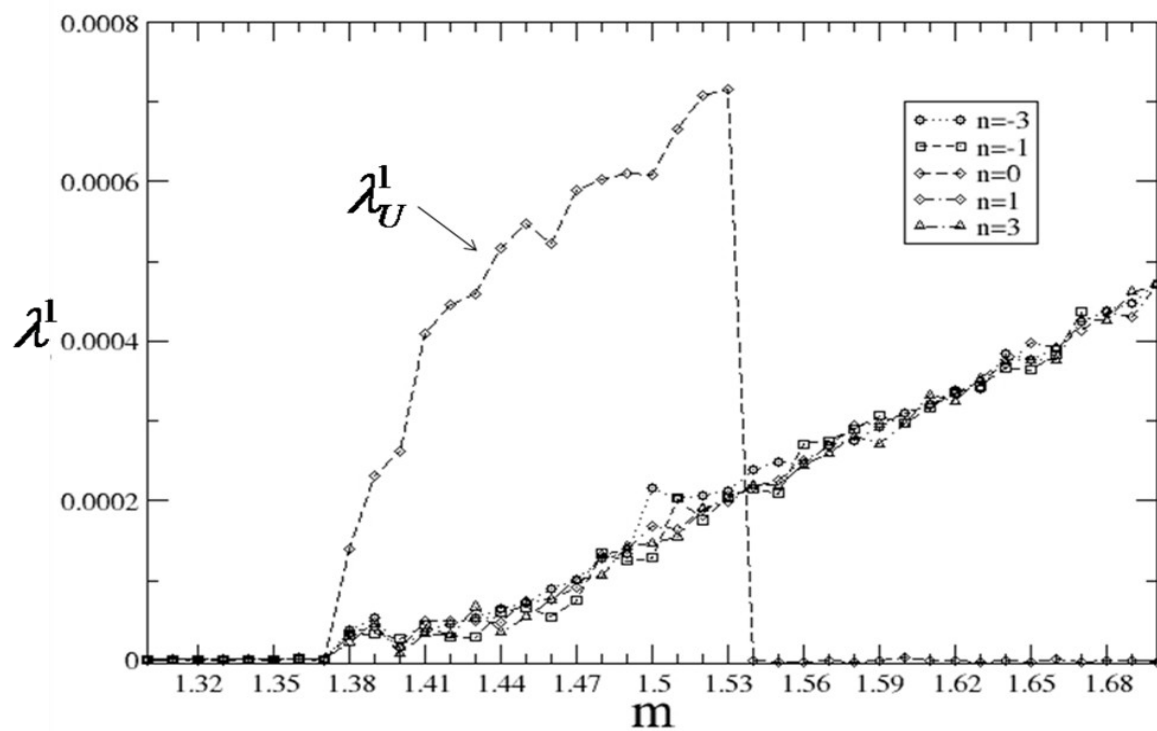


Рисунок 4.9: Зависимости максимального ляпуновского показателя мод $n=0, \pm 1, \pm 3$ от параметра m

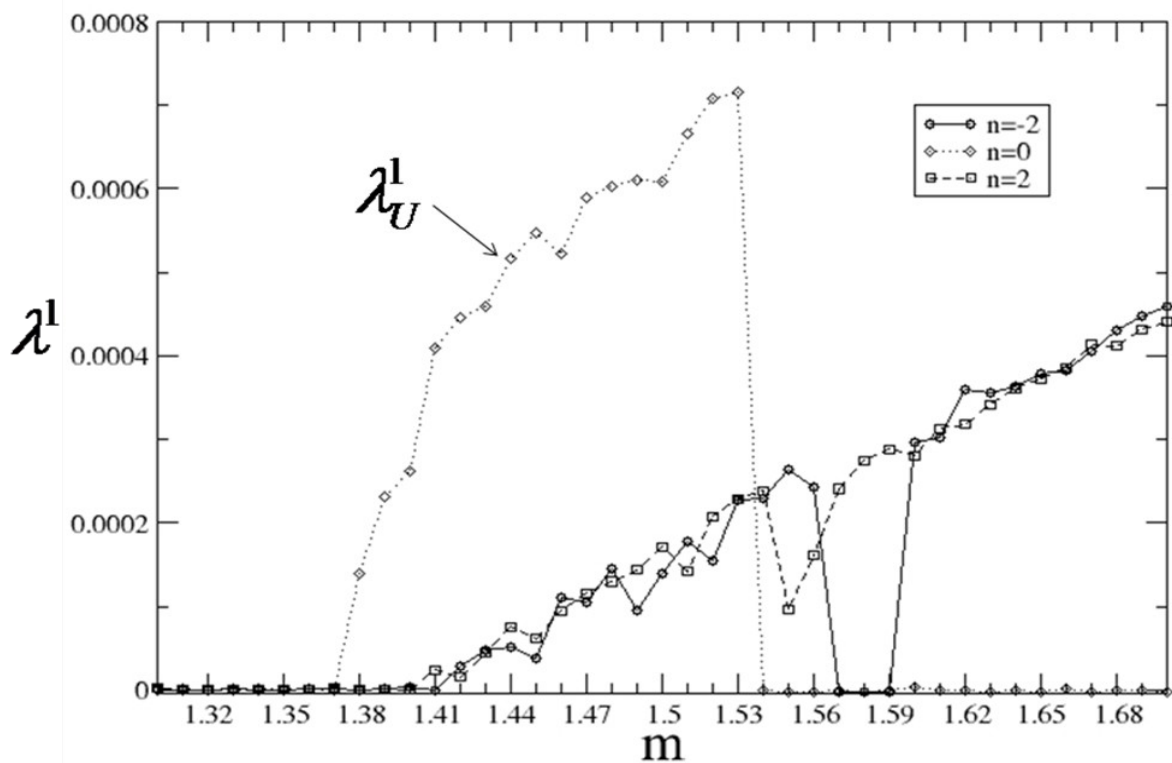


Рисунок 4.10: Зависимости максимального ляпуновского показателя мод $n=0, \pm 2$ от параметра m

4.4 Влияние шума у порога хаоса

Рассмотрим влияние аддитивного гауссова белого шума на поведение автоколебательной среды. Для этого в первое уравнение системы (4.1) введем слагаемое вида

$$\xi(t) = \sqrt{2D}n(t)$$

задающее источник пространственно-однородного гауссова белого шума. Здесь $n(t)$ - источник нормированного гауссова белого шума, D - константа, характеризующая интенсивность шума.

В ходе данной работы было установлено, что результат воздействия однородного шума на «строго однородную моду» аналогичен влиянию шума на «элементарный генератор». Граница перехода к хаотическому режиму незначительно сдвигается в сторону уменьшения параметра m , окна периодичности исчезают (рисунок 4.11). Результат однородного шумового воздействия на неоднородные моды также оказался незначительным. На рисунке 4.12 представлены фрагменты зависимости максимального ляпуновского показателя от параметра m , полученные для моды $n=1$ у порога хаоса при различной интенсивности шума. Влияние шума, даже значительной интенсивности, практически отсутствует. Граница хаоса в пределах точности вычислений ляпуновского показателя не изменяется.

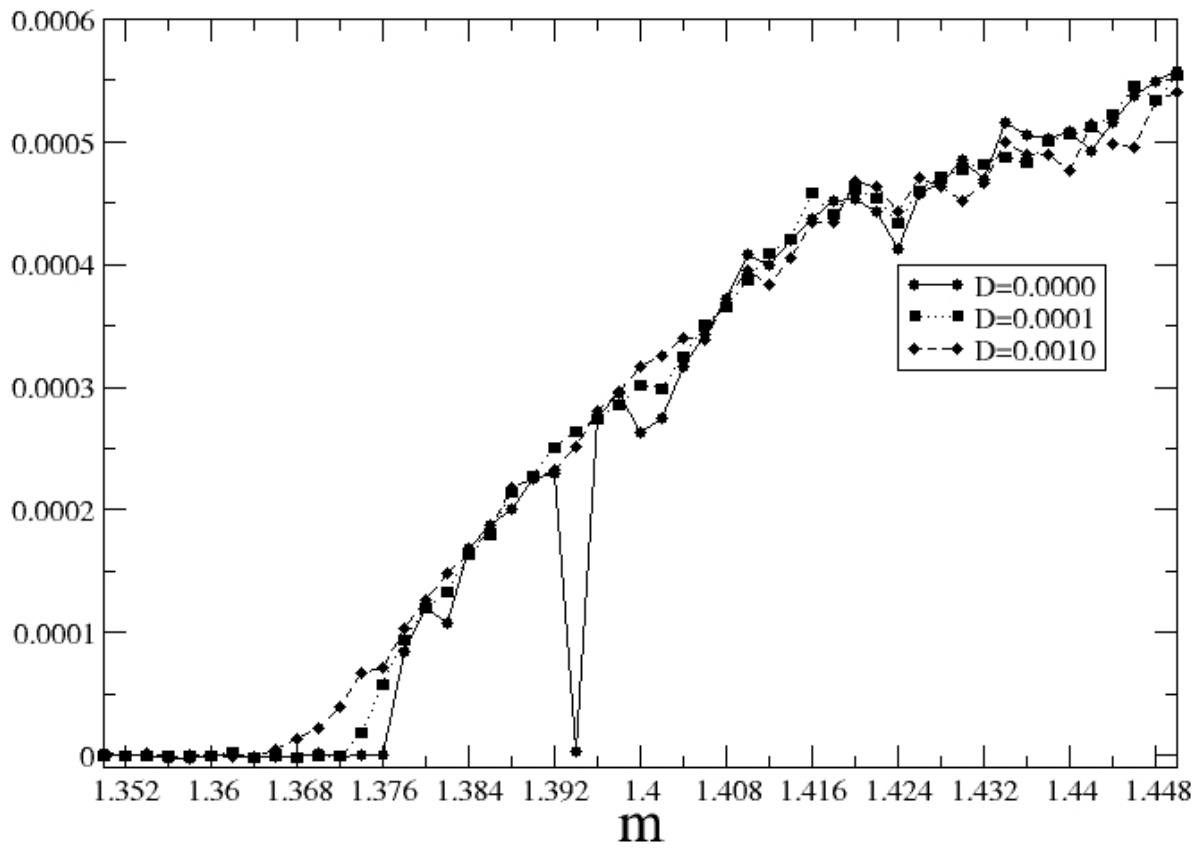


Рисунок 4.11: Зависимости максимального ляпуновского показателя λ_U^l моды $n=0$ от параметра m для различных значений интенсивности однородного шума D

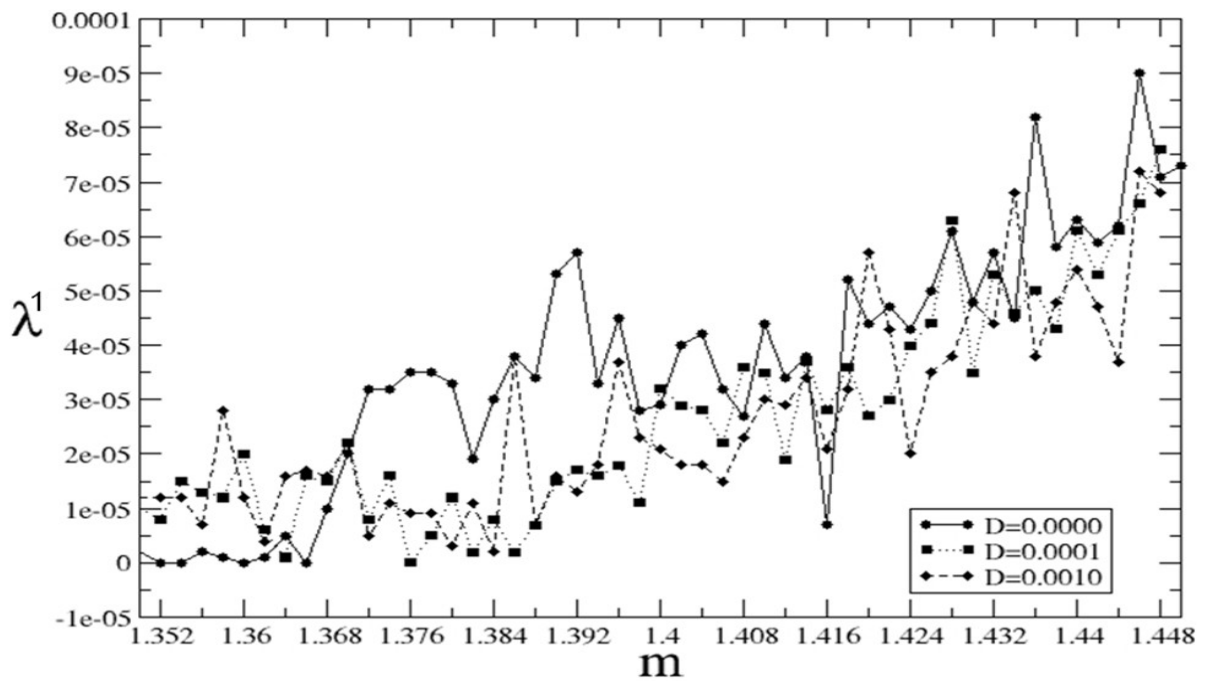


Рисунок 4.12: Зависимости максимального ляпуновского показателя λ^l моды $n=1$ от параметра m для различных значений интенсивности шума D

4.5 Выводы

Полученные результаты показали, что переход к режиму хаотических во времени колебаний в непрерывной среде (4.1) существенно зависит от исследуемой моды. Для пространственно-однородного режима колебаний реализуется тот же сценарий Фейгенбаума, что и для «элементарного генератора», служащего ячейкой автоколебательной среды (4.1). Для мод, представляющих собой бегущие волны, наблюдается единственное удвоение периода колебаний во времени и, затем, переход к хаосу через возникновение и разрушение квазипериодических двухчастотных режимов. Такое поведение среды соответствует поведению более простых пространственно-дискретных моделей, описанному в литературе. Усложнение колебаний во времени (удвоение периода и возникновение квазипериодических режимов) для бегущих волн сопровождается искажением формы волнового фронта и соответствующим усложнением мгновенного пространственного профиля волны, что с ростом управляющего параметра ведет к пространственной турбулентности.

Для исследования перехода к хаотическому во времени поведению для решений уравнений среды был рассмотрен максимальный показатель Ляпунова, характеризующий экспоненциальное изменение во времени нормы возмущения. Было показано, что в области слабого хаоса сохраняется мультистабильность режимов. Наряду с хаотическими бегущими волнами наблюдается хаотический режим стоячей волны, т.е. «однородный режим», для которого средний фазовый сдвиг на длине системы остается равным нулю, однако колебания в различных точках среды становятся неидентичными. Затем, с ростом управляющего параметра, происходит объединение всех мод, приводящее к установлению единственного глобально притягивающего режима, соответствующего хаотической стоячей волне.

Исследование влияния однородного шумового воздействия на систему (4.1) показало, что для достаточно больших времен наблюдения можно говорить о сосуществовании различных мод, реализующихся в системе без шума. Как было установлено ранее [18], с ростом интенсивности шума наблюдаются переключения системы на моды с меньшими (по абсолютной величине) значениями номеров n . В итоге остается только «однородная» мода ($n=0$). С точки зрения перехода к хаотической динамике влияние однородного шума на поведение различных мод оказалось слабым. Для стоячей волны (мода $n=0$) наблюдается небольшое смещение границы хаоса в сторону меньших значений параметра. Для режимов бегущих волн граница хаоса в пределах точности вычислений не смещалась.

Проведенные исследования позволили обосновать метод управления переходом к хаосу и хаотической динамикой в автоколебательной среде с помощью шумового воздействия, состо-

ящий в переключении автоколебательной среды с помощью шумового воздействия из режимов бегущих хаотических волн с большими значениями средней фазовой скорости (т.е. с большими значениями чисел n) в режимы с меньшими фазовыми скоростями и, в итоге, при достаточно сильном шуме, в режим хаотической «стоячей» волны. В результате исследований стало ясно, что для управления «степенью хаотичности» колебаний среды (т.е. для подавления или усиления хаоса) однородного аддитивного шумового воздействия недостаточно и требуются более сложные формы шумового воздействия. Например, параметрический шум.

5. Разработка теоретических основ широкополосного спектрального анализа на основе непрерывного вейвлет-преобразования

5.1. Введение

Появление концепции вейвлетов стало заметным событием в естествознании, существенно расширившим арсенал методов цифровой обработки нестационарных данных [21–23]. До формирования теоретических основ вейвлет-анализа практически не существовало эффективных инструментов изучения динамики систем с меняющимися во времени характеристиками. Те немногие методы, которые формально могли бы использоваться для этих целей [24, 25], имели целый ряд серьезных недостатков, заметно снижающих их практическую ценность. Пожалуй, наиболее популярным подходом являлось исследование нестационарных процессов в приближении квазистационарности (рассматривались фрагменты сигналов, в пределах которых характеристики изучаемой системы не демонстрировали существенных изменений) или применялись методы искусственного сведения к стационарности путем устранения низкочастотного тренда. Каждый из этих подходов имеет свои ограничения: проведение предварительной фильтрации для устранения «плавающего» среднего уровня не гарантирует стационарную динамику более высокочастотных ритмических процессов, а приближение квазистационарности справедливо лишь для определенного типа систем с медленно меняющимися характеристиками. Поэтому на протяжении всего 20-го века учеными осознавалась и неоднократно обсуждалась в научных изданиях важность создания нового инструментария для исследования нестационарной динамики систем различной природы. Одним из первых эту проблему озвучил Л.И. Мандельштам еще в 1920-х годах (см. ссылку в работе [26]). Но несмотря на то, что потребность в создании такого инструментария существовала давно (особенно в областях естествознания, где исследуются принципиально нестационарные процессы, например, в биологии, сейсмологии и т.д.), лишь в 1980-х годах был совершен прорыв в теории цифровой обработки сигналов, связанный с появлением

вейвлет-преобразования [21, 22]. С тех пор концепция вейвлетов значительно расширила круг своих потенциальных приложений, которые стали охватывать проблематику сжатия и кодирования информации, компьютерной графики, распознавания образов и многие другие задачи науки и техники [27, 28]. Тем не менее, первоначальный интерес к вейвлетам как инструменту локализованного спектрального анализа, который позволяет исследовать динамику спектров, меняющихся во времени, сохранился – вейвлет-анализ сейчас является, пожалуй, основным методом проведения частотно-временного анализа систем с меняющимися во времени характеристиками.

5.2. Особенности спектрального анализа, основанного на непрерывном вейвлет-преобразовании

Одной из особенностей теории вейвлетов является возможность значительного варьирования базиса, по которому проводится разложение сигнала. В отличие от классического спектрального анализа, основанного на преобразовании Фурье и оперирующего с гармоническими функциями, непрерывное вейвлет-преобразование сигнала $x(t)$

$$W(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int x(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (5.1)$$

представляет собой свертку этого сигнала с солитоноподобной функцией $\psi(t)$ (вейвлетом), задаваемой непосредственно самим исследователем, где параметры a и b характеризуют выбранный масштаб и смещение вдоль оси времени. Выбор функции $\psi(t)$ может проводиться из различных соображений. Играя роль объектива математического микроскопа, которым является вейвлет-анализ, разные функции позволяют лучше рассмотреть отдельные детали изучаемого процесса. Но при этом следует учесть, что Фурье-образы многих вейвлетов имеют довольно сложный (и непривычный для исследователей) вид [29], что затрудняет интерпретацию вычисленных с их помощью энергетических спектров. К тому же не все функции характеризуются хорошим разрешением одновременно и по времени, и по частоте. Так, применение функций с компактным носителем может приводить к сильному размытию спектральной информации [22]. Наиболее популярным вейвлетом для проведения спектрального анализа является функция Морле

$$\psi(t) = \pi^{-1/4} \cdot \exp(j2\pi f_0 t) \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right), \quad (5.2)$$

для которой характерно наличие хорошего частотно-временного разрешения, а также простота и наглядность результатов спектрального анализа. Фактически, вейвлет (5.2) представляет собой гармоническую функцию, промодулированную по амплитуде функцией Гаусса. Это позволяет установить сходство между непрерывным вейвлет-преобразованием с функцией Морле и классическим оконным спектральным анализом, в рамках которого в качестве временного окна

выбран гауссиан. Однако данное сходство является лишь внешним – на самом деле отличия между оконным спектральным анализом и вейвлет-анализом являются существенными. В первом случае размер окна фиксированный и не зависит от масштаба (частоты), тогда как в рамках вейвлет-анализа размер окна меняется, подстраиваясь под исследуемый временной масштаб – на низких частотах окно расширяется во временной области, и локальный спектр вычисляется по более длительным участкам сигнала, а на высоких частотах подвижное частотно-временное окно вейвлет-преобразования сужается по времени, расширяясь в спектральной области. Такая особенность вейвлет-преобразования позволяет извлекать информацию о быстрых изменениях в структуре сигнала из коротких участков экспериментальных данных, а о медленных изменениях – из более длительных фрагментов [29]. Наличие подвижного частотно-временного окна приводит к определенным сложностям при проведении спектрального анализа в широкой полосе частот, которые наглядно проиллюстрированы на рисунке 5.1.

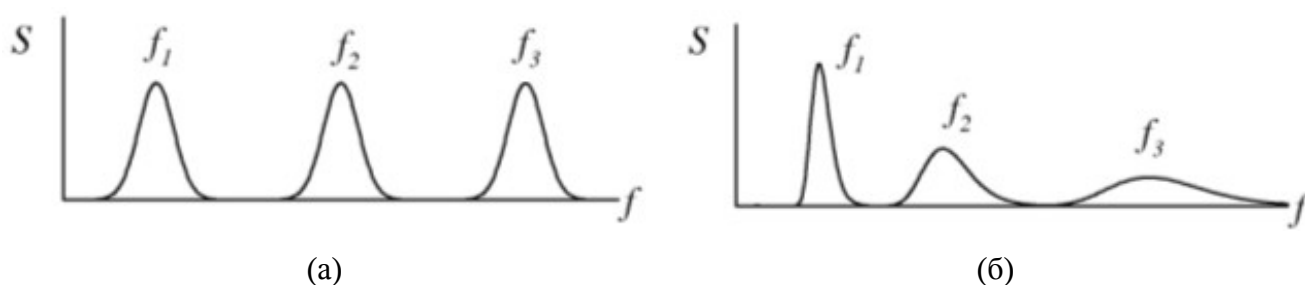


Рисунок 5.1: Энергетические спектры сигнала, представляющего собой сумму трех гармонических функций с одинаковой амплитудой и разными частотами в рамках: (а) оконного спектрального анализа, основанного на преобразовании Фурье (окно Хемминга) и (б) вейвлет-анализа с базисной функцией Морле

Обращает на себя внимание следующее обстоятельство – ширина спектральных линий в усредненном энергетическом спектре вейвлет-преобразования

$$S(f) = \langle |W(f, b)|^2 \rangle_b, \quad f = \frac{\omega_0 + \sqrt{2 + \omega_0^2}}{4\pi a}, \quad \omega_0 = 2\pi f_0 \quad (5.3)$$

увеличивается с ростом частоты, что приводит к размыванию спектральной информации и уменьшению амплитуды соответствующих «пику» энергетического спектра (рисунок 5.1, б). Это связано с тем, что с ростом частоты уменьшается длительность участка сигнала, по которому проводятся расчеты мгновенного спектра, и в силу неопределенности Гейзенберга, улучшение временного разрешения компенсируется ухудшением частотного разрешения. В результате интерпретации результатов вейвлет-анализа и классического спектрального анализа отличаются. Применительно к вейвлет-спектрам возникают сложности одновременного определения энергии колебаний в заданном частотном диапазоне и амплитуд исследуемых ритмических про-

цессов [30]. Эти сложности наиболее наглядно иллюстрируются на примере сравнения результатов спектрального анализа для суммы гармонических функций (с одинаковой амплитудой) и белого шума. Базируясь на классическом спектральном анализе, ожидаемым результатом является получение одинаковых значений амплитуд спектральных «пигов» для гармонических функций и равномерного спектра $S(f)=const$ для нормально распределенного случайного процесса. Рисунок 5.1 свидетельствует о том, что данный результат в случае вейвлет-анализа не достигается, и амплитуды спектральных пиков отличаются. При этом для белого шума действительно будет получено равномерное распределение. Это означает, что при расчете энергетического спектра по формуле (5.3) проводится корректная оценка энергии колебаний в некотором диапазоне частот, то есть площади под кривой $S(f)$, но величина спектрального пика не соответствует квадрату амплитуды гармонических колебаний на данной частоте. В связи с этим анализ амплитуд ритмических процессов и энергии в некотором частотном диапазоне необходимо проводить отдельно. При рассмотрении энергетических характеристик можно пользоваться формулой (5.3), получая корректный с физической точки зрения результат – площадь под кривой $S(f)$ для каждого спектрального пика на рисунке 5.1,б является одинаковой, то есть каждый ритмический процесс характеризуется одинаковой энергией. В случае привлечения вейвлетов для оценки амплитудных характеристик (в частности, для вычисления мгновенных амплитуд ритмических процессов) необходимо проводить нормировку квадрата модуля вейвлет-коэффициентов. Проблема нормировки результатов вейвлет-анализа возникает при рассмотрении различных прикладных задач. В частности, при применении вейвлет-преобразования в задачах статистического анализа локальных регулярностей сигнала целесообразно умножать значения коэффициентов $W(a,b)$ на множитель $1/\sqrt{a}$. Несмотря на то, что такое умножение меняет энергетические характеристики функций $\psi(t)$, приводя к изменению энергии перемасштабированного вейвлета, использование указанного множителя существенно упрощает процедуру расчета показателей Гельдера и спектра сингулярностей [31]. В рамках спектрального анализа на основе вейвлет-преобразования применение нормировок также помогает упростить расчет мгновенных амплитуд ритмических процессов.

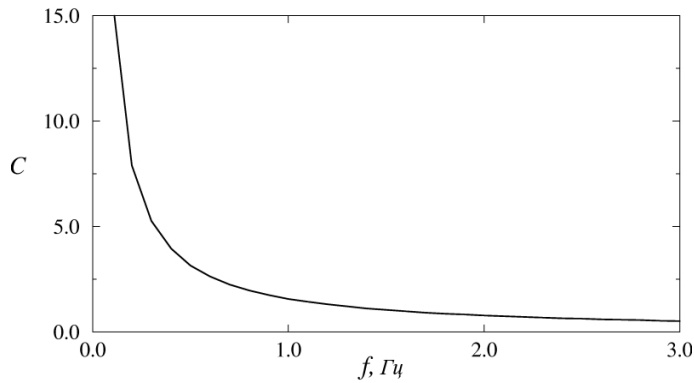


Рисунок 5.2: Нормировочный коэффициент для энергетического спектра $S(f)$, позволяющий проводить оценку амплитуд колебаний для соответствия результатов вейвлет-анализа (при $f_0=1$) и классического спектрального анализа, основанного на преобразовании Фурье

Если, по аналогии с мультифрактальным анализом [31], осуществлять корректировку коэффициентов $W(a,b)$ на величину $1/\sqrt{a}$, то это позволяет сохранить правильное отношение амплитуд ритмов в энергетическом спектре (рисунок 5.2), но при этом не будет получен равномерный спектр белого шума – рисунок 5.3.

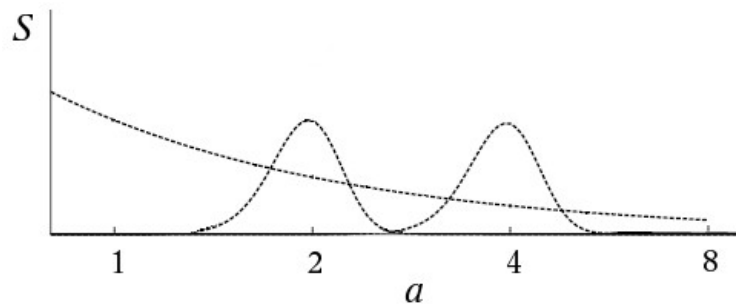


Рисунок 5.3. Энергетический вейвлет-спектр сигнала, представляющего собой сумму двух гармонических функций с одинаковой амплитудой и разными частотами, после нормировки вейвлет-коэффициентов. Пунктиром показан спектр белого шума

5.3. Проведение широкополосного спектрального анализа с подстройкой частотно-временного разрешения

Основная идея, лежащая в основе модернизации метода спектрального анализа на основе вейвлет-преобразования, состоит в том, что параметры анализатора должны подстраиваться таким образом, чтобы они обеспечивали оптимальное частотно-временное разрешение с учетом специфики анализируемого сигнала. Априорное задание центральной частоты вейвлета f_0 из общих соображений является начальным приближением, позволяющим получить общее представление о структуре энергетического спектра. Для более качественного спектрального анализа, особенно при проведении расчетов мгновенных частот ритмов и исследования взаимодействий колебательных систем, необходимо использовать специальные методики выбора параметра f_0 ,

который определяет компромисс между разрешением по времени и по частоте, варьируя число осцилляций базисной функции (рисунок 5.4).

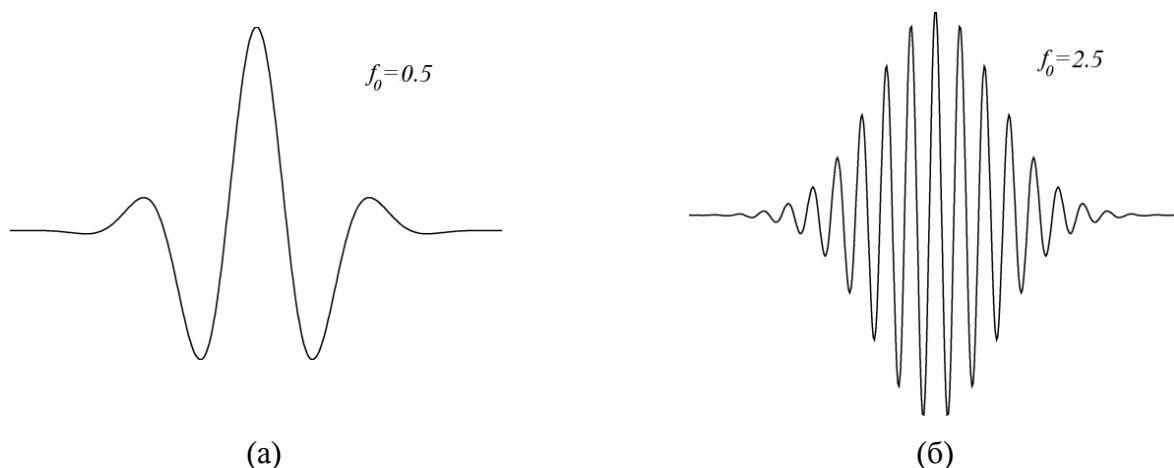


Рисунок 5.4: Функция Морле при различных значениях центральной частоты f_0

Подстройка данного параметра оказывает влияние как на усредненный энергетический спектр, вычисленный с применением вейвлет-преобразования (рисунок 5.5), так и на погрешность расчета мгновенных частот ритмических процессов, идентифицируемых в анализируемом сигнале.

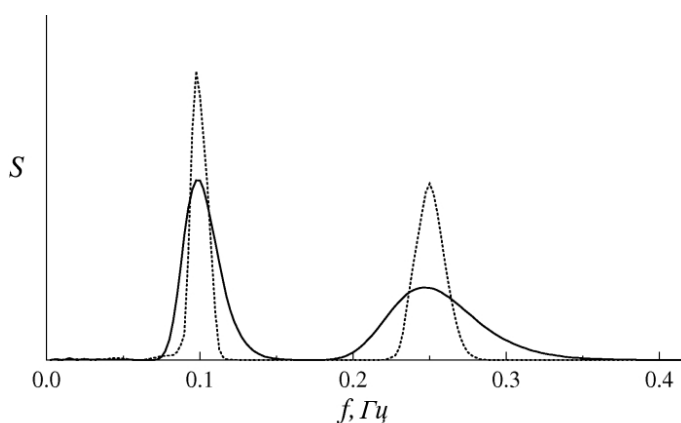


Рисунок 5.5: Энергетические спектры при различных значениях параметра f_0 функции Морле. Сплошная линия соответствует $f_0=1$, пунктир соответствует значению $f_0=3$

В простейшем варианте, при выборе центральной частоты можно воспользоваться тестированием спектрального разрешения на примере гармонических функций: меняя частоту колебаний, проводить оценку значения f_0 , обеспечивающего минимизацию ошибки определения частоты данной спектральной компоненты. Такое тестирование имеет существенный недостаток – вследствие стационарности анализируемого сигнала не требуется улучшать временное разрешение, акцентируя внимание исключительно на спектральном разрешении. В нестационарной ди-

намике оба эти разрешения должны подстраиваться одновременно, так как они являются взаимосвязанными. Вследствие этого тестирование должно проводиться на сигналах, приближенных по своим характеристикам к экспериментальным данным. При изучении принципиально нестационарных процессов, например, в биофизике, физиологии, сейсмологии и т.д., в качестве тестовых сигналов целесообразно выбирать сигналы с меняющимися во времени характеристиками. Одним из примеров может служить процесс изменения во времени частоты колебаний по линейному (или, в более сложном варианте тестирования, по нелинейному закону) – так называемый «чирп»-сигнал. Случай линейных и нелинейных чирпов является одним из наиболее популярных вариантов иллюстрации результатов частотно-временного анализа сигналов сложной структуры и, в частности, вейвлет-анализа [32]. Для решения задачи автоматической подстройки характеристик анализатора предпочтительнее выбрать линейный чирп, оценивая погрешность расчета линейной зависимости частоты колебаний во времени при вариации центральной частоты вейвлета Морле. Для уменьшения трудоемкости проводимых вычислений в рамках НИР тестирование проводилось по неперекрывающимся частотным диапазонам, после чего функциональная зависимость $f_0(f)$ интерполировалась кубическим сплайном. «Оптимальные» значения f_0 в каждом частотном диапазоне варьируются в зависимости от степени нестационарности, поэтому процедура настройки частотно-временного разрешения должна проводиться с учетом специфики исследуемых экспериментальных данных после предварительной оценки скорости изменения характеристик сигнала во времени в рамках стандартного варианта вейвлет-анализа с постоянным значением f_0 . Основной акцент в проводимых исследованиях был сделан на герцовый частотный диапазон, так как анализ такой области спектра часто приводит к существенным погрешностям, но при этом область частот ниже 10 Гц важна для изучения динамики живых систем, где существует значительная потребность в совершенствовании методов анализа структуры сигналов. Таким образом, основная идея предлагаемой модификации метода частотно-временного анализа структуры сигналов состоит в вычислении локальных значений f_0 , при которых проведение вейвлет-анализа обеспечивает минимизацию ошибки расчетов мгновенной частоты колебаний тестового примера (линейного чирпа). Определив оптимальные значения центральной частоты вейвлета Морле в различных спектральных диапазонах, исследователь получает возможность снизить погрешность расчета мгновенных частот сосуществующих ритмических процессов. Более того, нахождение оптимальных значений f_0 можно осуществить в автоматическом режиме, что устраняет субъективность выбора данного параметра в рамках стандартного варианта проведения частотно-временного анализа. При этом необходимо учесть следующее обстоятельство: в диапазоне частот ниже 1 Гц подстройка f_0 должна проводиться

более тщательно, чем при увеличении f , поэтому при построении функциональная зависимость $f_0(f)$ целесообразно выбирать логарифмический шаг по частоте при задании границ частотных диапазонов, в пределах которых проводится поиск f_0 . В рамках НИР для построения функциональной зависимости $f_0(f)$ весь анализируемый частотный диапазон разбивался на 20 поддиапазонов, соответственно, интерполяция $f_0(f)$ проводилась по 20 значениям центральной частоты вейвлета Морле. В зависимости от специфики решаемой задачи, количество поддиапазонов и степень нестационарности тестового сигнала (линейного chirpa) могут варьироваться, при составлении пакета программ для практической реализации широкополосного спектрального анализа их можно задавать в качестве параметров, определяемых исследователем.

5.4. Спектральный анализ динамики внутриклеточных процессов

Рассмотрим пример применения метода широкополосного спектрального анализа с подстройкой частотно-временного разрешения. С этой целью была проанализирована динамика внутриклеточных процессов, регистрируемая в рамках интерференционной (когерентной) микроскопии. Выбор такого примера связан с тем, что динамика клеток (например, нейронов) включает большое число колебательных процессов, характеризующихся различными временными масштабами, которые можно зафиксировать не только на поверхности мембраны, но и в цитоплазме. Исследование большого числа ритмических процессов, обусловленных разными механизмами регуляции, осложняется нестационарностью соответствующих экспериментальных данных и близостью частот многих ритмов, требующей тщательной настройки анализатора для разделения независимых спектральных составляющих. Идентификация мгновенных частот соответствующих ритмических процессов позволяет решать задачи исследования взаимодействия регуляторных механизмов, которые присутствуют в динамике клеток [33]. Сложность экспериментального исследования динамики внутриклеточных процессов связана с тем, что далеко не все методы регистрации сигналов являются неинвазивными и не влияют на функционирование клеток. Одним из действительно неинвазивных подходов, не повреждающих клетку и не влияющих на динамику механизмов регуляции, является интерференционная микроскопия. Этот метод основан на вычислении оптической разности хода между лучом лазера, проходящим через объект ϕ_1 , и опорным лучом ϕ_0 . Соответствующая разность нормируется на длину волны лазера λ , в результате чего вычисляется «фазовая высота» объекта:

$$\Phi = \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{\phi_0 - \phi_1}{2\pi} - \Phi_0, \quad (5.4)$$

где Φ_0 – постоянное смещение фазы, определяемое выбором начальной точки отсчета фазы. Для неоднородных объектов, которые характеризуются меняющимся показателем преломления, фазовая высота равна

$$\Phi(x,y) = \int (n(x,y,z) - n_0) dz - \Phi_0, \quad (5.5)$$

где $n(x,y,z)$ – показатель преломления в точке клетки с координатами (x,y) , находящейся на расстоянии z от подложки, n_0 – постоянное значение показателя преломления физиологического раствора, а предел интегрирования Z выбирается выше верхней точки объекта. Соответствующие изменения можно провести в любой точке клетки или осуществить сканирование всего объекта, получив рельеф фазовой высоты [33].

На значение Φ оказывают влияние процессы, протекающие внутри клетки и на мембране (например, движения белков, изменение количества ионов в окрестности мембраны, флуктуации трансмембранного потенциала, подпороговые изменения мембранного потенциала и т.д.), это приводит к сложному спектральному составу регистрируемых экспериментальных данных. Визуально соответствующие сигналы выглядят как случайные процессы, в которых можно идентифицировать ритмическую активность (рисунок 5.6).

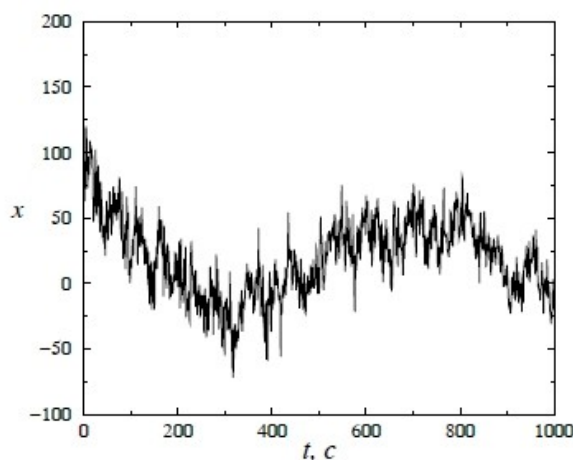


Рисунок 5.6: Временная зависимость фазовой высоты в одной из точек клетки (нейрона пиявки)

Как правило, во многих экспериментальных данных удастся идентифицировать характерные частоты в окрестности 0.1, 0.3, 1.0 и 3.0 Гц (продемонстрированные на рисунке 5.7), а также значительное количество ритмических процессов в более высокочастотном частотном диапазоне (от 5 до 25-30 Гц – рисунок 5.8). Несмотря на то, что в данном случае рассматриваются очень малые значения частот (по сравнению с диапазоном, используемым в радиофизике и технике связи), тем не менее, можно говорить о широкой полосе частот, которая включает более десятка независимых спектральных составляющих, не считая гармоник и комбинационных

частот. Проведение качественного спектрального анализа таких сигналов является важным для установления взаимосвязей между разными механизмами регуляции, которые позволят лучше понимать функции нейрона и особенности внутриклеточной динамики, как в обычном режиме функционирования клеток, так и при различных внешних воздействиях [34].

В совместных работах с научными коллективами МГУ и Датского технического университета [34, 35] нами проводились исследования, направленные на выявление взаимосвязей между системами регуляции на уровне внутриклеточной динамики нейронов. Однако при этом использовался стандартный вариант спектрального анализа на основе вейвлет-преобразования с постоянными значениями параметра f_0 .

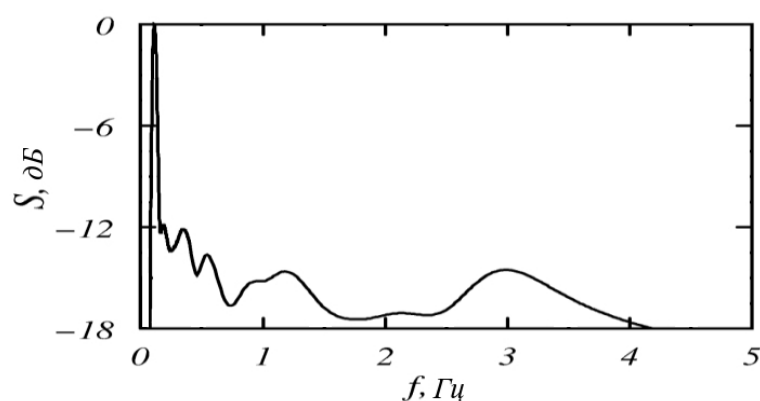


Рисунок 5.7: Энергетический спектр сигнала, изображенного на рисунке 5.6, в частотном диапазоне, включающем основные ритмические процессы

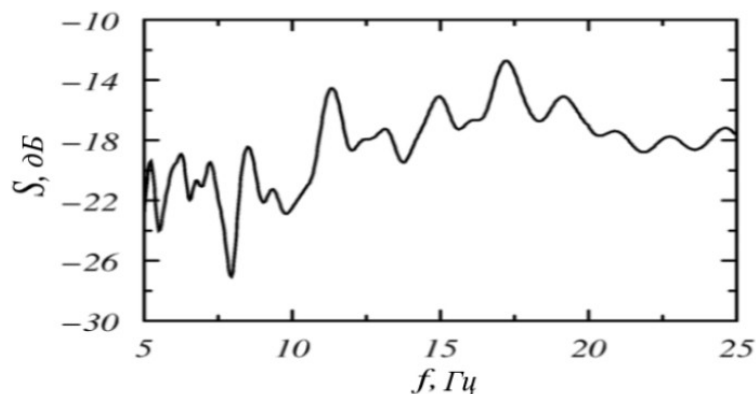


Рисунок 5.8: Энергетический спектр сигнала, изображенного на рисунке 5.6, в высокочастотной области

Привлечение рассматриваемого метода подстройки частотно-временного разрешения (с учетом сильно нестационарной динамики биофизических процессов) позволяет повысить качество локализованного спектрального анализа экспериментально регистрируемых данных (рисунок 5.9), снизив погрешность идентификации мгновенных частот (что автоматически приводит к уменьшению ошибки вычисления мгновенных амплитуд) ритмических процессов (рисунок 5.10).

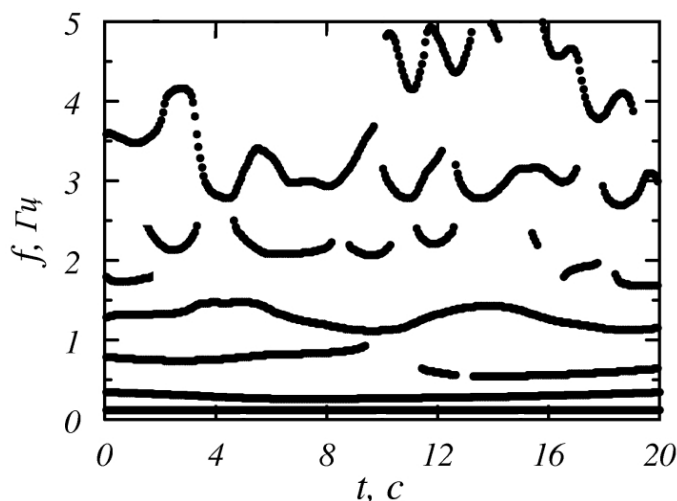


Рисунок 5.9: Мгновенные частоты ритмических процессов, вычисленные в рамках метода, предусматривающего подстройку частотно-временного разрешения

Вследствие этого повышается надежность диагностики эффектов взаимодействия регуляторных систем. В частности, при этом появляется возможность более надежной идентификации систем регуляции, оказывающих взаимное влияние друг на друга в процессе функционирования клетки.

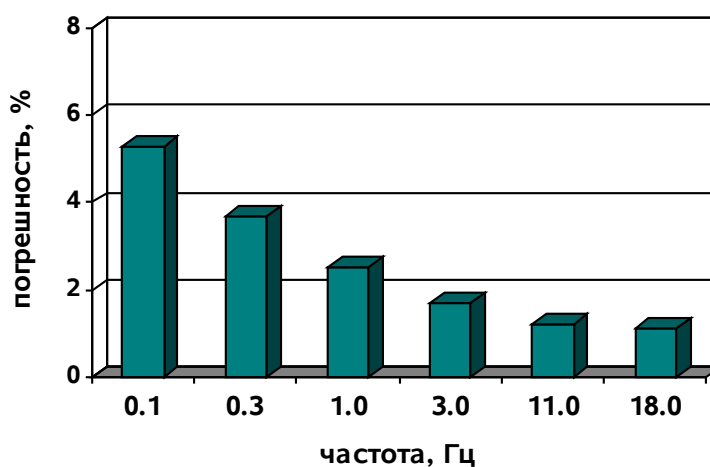


Рисунок 5.10: Величина (в %), на которую происходило снижение погрешности расчета мгновенных частот ритмических процессов при проведении локализованного спектрального анализа с подстройкой частотно-временного разрешения по сравнению со стандартным методом вейвлет-анализа с фиксированным значением центральной частоты вейвлета f_0

5.5. Выводы

В ходе выполнения НИР были проведены исследования, направленные на модернизацию стандартной процедуры спектрального анализа на основе непрерывного вейвлет-преобразования для случая широкополосных процессов. Предложена методика, предусматривающая подстройку частотно-временного разрешения для снижения погрешности вычисления мгновенных частот и амплитуд колебаний. Данная методика позволяет

осуществлять оптимизацию выбора параметра f_0 вейвлета Морле путем минимизации ошибки определения мгновенных частот тестовых ритмических процессов (линейных чирпов). После тестирования данная методика была применена для анализа динамики внутриклеточных процессов по временным зависимостям фазовой высоты, регистрируемым с помощью метода интерференционной микроскопии. Соответствующие процессы характеризуются сложным спектральным составом и наличием большого числа независимых ритмов колебаний, обусловленных различными системами регуляции. Предварительная настройка анализатора (вейвлета) позволяет снизить погрешность расчета мгновенных частот (амплитуд) ритмических процессов, что особенно важно при проведении широкополосного спектрального анализа, в рамках которого параметр f_0 должен увеличиваться с ростом частоты для обеспечения компромисса между разрешением во временной и в спектральной областях. В частности, при проведении исследования динамики внутриклеточных процессов метод вейвлет-анализа с подстройкой частотно-временного разрешения позволяет повысить надежность диагностики эффектов взаимодействия регуляторных систем для более глубокого понимания функций нейрона и особенностей внутриклеточной динамики.

6. Проведение численных экспериментов по восстановлению сигнала, модулирующего параметр зашумленной хаотической системы

6.1 Введение

Оценка параметров динамических систем, содержащих источники шума, по реализациям динамических (фазовых) переменных является одной из актуальных и сложных проблем нелинейной динамики. При решении глобальной задачи реконструкции динамических систем обязательно возникает проблема определения значений управляющих параметров системы. Необходимость анализа данной проблемы связана с возможностью использования методов реконструкции в устройствах защиты и передачи секретной информации. При этом требуется приемлемая оценка управляющих параметров динамической системы, точность которой была бы достаточной для восстановления передаваемого полезного сигнала. В рассмотренных ранее задачах реконструкции шум, как правило, добавлялся к передаваемому сигналу, а сама система полагалась детерминированной. В литературе широко представлен комплекс методов позволяющих выделить полезный сигнал в таком случае из смеси сигнала и шума. В то же время, проблемы, связанные с реконструкцией систем, находящейся под действием случайных сил (шума), меняющих характер поведения системы, пока еще исследованы недостаточно. Нами был проведен ряд исследований по оценке управляющего параметра осциллятора Ван

дер Поля с аддитивным гауссовым шумом, при этом шум вносился непосредственно в математическую модель осциллятора.

Если модель динамической системы задана, то есть известны уравнения, определяющие в каждый момент времени состояние системы в отсутствие шума, то найти значение управляющих параметров не представляет больших сложностей, так как значения параметров можно выразить через значения динамических переменных и их производных. Это можно сделать с высокой точностью, ограниченной только точностью алгоритма численного интегрирования и ошибками округления. Однако, если система подвергается воздействию случайной силы, которое невозможно учесть, то оценки параметров в разные моменты времени оказываются случайными и могут сильно отличаться от истинного значения. Задача о корректной оценке параметров в этом случае оказывается не такой уж простой. Известно, что даже слабый шум может приводить к существенным изменениям в поведении динамической системы. При работе с натурными системами, помимо всего вышеперечисленного, необходимо учитывать наличие внутренних шумов, особенности работы АЦП и ЦАП, ограниченную точность измерений, паразитные наводки и помехи в сети питания и т.д. Все это усложняет задачу и ограничивает применение уже имеющихся методов. Поэтому вызывает особый интерес проблема применения методов реконструкции динамических систем и оценки управляющих параметров на практике.

В данном разделе сравниваются методы корректной оценки параметров систем с источником шума при использовании численного моделирования и экспериментально полученных сигналов. В численных расчетах используются известные модели шумов. Однако любая реальная система подвергается воздействию случайной силы, которое невозможно учесть и точно описать в каждом конкретном случае. Кроме того, в силу природных свойств, сама система часто содержит источники флуктуаций и слабого шума, который не так просто смоделировать и учесть в математической модели.

Рассматриваются задачи по созданию экспериментальной установки (генератор Ресслера), сравнению динамики математической модели и генератора Ресслера, границы применимости используемых методов для натурной системы. Также рассматривается возможность приемлемой оценки параметров динамической системы для восстановления сигнала, модулирующего параметр зашумленной динамической системы. Проводится анализ методов, с помощью которых наиболее быстро и точно удастся получить приемлемую оценку управляющих параметров.

6.2. Оценка управляющего параметра осциллятора Ресслера с аддитивным гауссовым шумом. Настройка параметров фильтрации и выбор методов оценки

Рассмотрим классическую модель генератора Ресслера, добавив в нее источник шума:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z + \sqrt{2D} n(t) \\ \dot{y} &= x + ay \\ \dot{z} &= b + z(x - m)\end{aligned}\quad (6.1)$$

где a, b, m — управляющие параметры. Модель дополнена источником аддитивного гауссова белого шума интенсивности D .

Рассмотрим модель (6.1). Установим параметры $a = b = 0.2$ и будем оценивать управляющий параметр m :

$$m_i = x_i - \frac{\dot{z}_i - b}{z_i} \quad (6.2)$$

Следует упомянуть, что в осцилляторе Ресслера переменная z , на значение которой производится деление в (6.2), всегда положительна и вероятность очень малых значений пренебрежимо мала. Таким образом, можно обойтись без фильтра малых значений. Оценка управляющего параметра m в соответствии с (6.2) практически никогда не приводит к делению на бесконечно малую величину, поскольку переменная z может принимать только положительные значения. Данное свойство сохраняется при включении шума в первое уравнение системы: очень малые значения z имеют очень малую совокупную вероятность. Распределение m_i оказывается близким к гауссову (рис. 6.1).

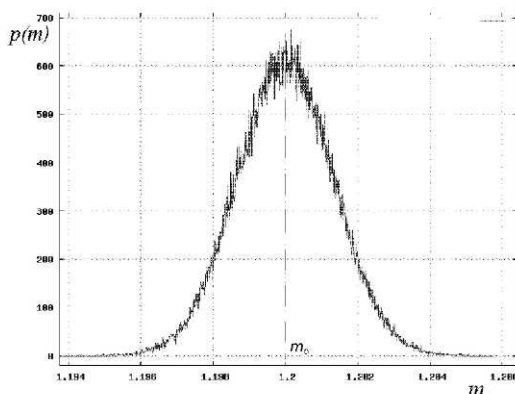


Рисунок 6.1: Результаты расчетов для системы (6.1) распределения значений m_i при $D = 0.0005$, $m = 1.19$ в режиме периодических колебаний

Исходя из выражения (6.2) для расчета оценки управляющего параметра m необходимо получить временные ряды для двух динамических переменных $x(t)$ и $z(t)$. Система (6.1) интегрировалась методом Гюна с учетом случайного возмущения с шагом $h=0.000001$. Для оценки значения параметра m проводилась выборка полученных в результате интегрирования

значений $x(t)$ и $z(t)$. Шаг выборки Δt был выбран в соответствии с наилучшей получаемой оценкой параметра. Он составил $\Delta t=1000$ (т.е. 1000 шагов интегрирования). Производная $\dot{z}_i$ аппроксимировалась выражением:

$$\dot{z}_i = \frac{1}{12h} (z_{i-2} - 8z_{i-1} + 8z_{i+1} - z_{i+2}), \quad (6.3)$$

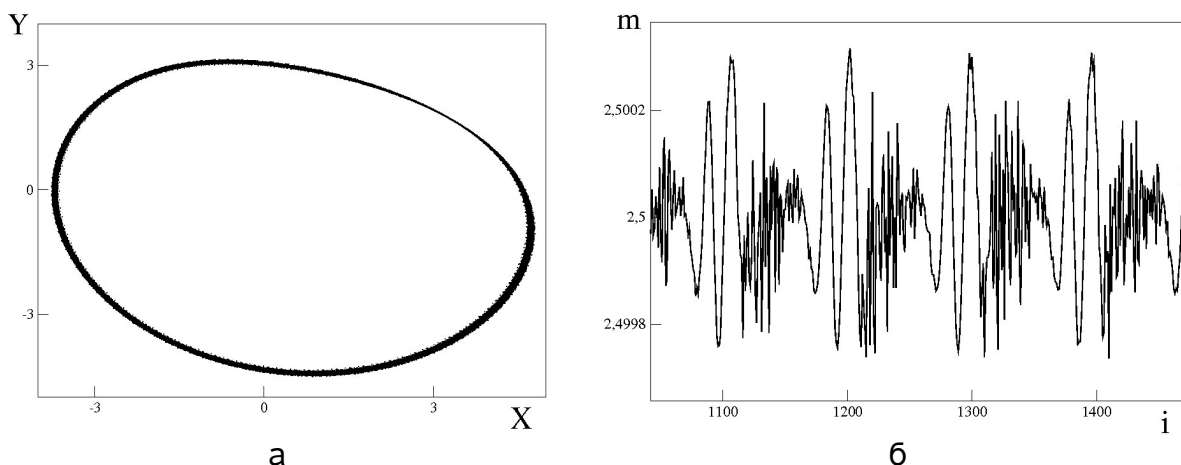


Рисунок 6.2: Результаты расчетов для системы (6.1): а - фазовый портрет б — оценка в каждой точке временной последовательности m_i . $D = 0.0002$, $m = 2.59$ в режиме периодических колебаний

На рис. 6.2(а) показан фазовый портрет численной модели (6.1) в присутствии шума интенсивности $D=0.0002$ в режиме периодических колебаний. Так как производная (6.3) вычисляется с помощью формул приближенного вычисления производной по пяти точкам, получаем не прямую линию на графике 6.2(б), которая бы соответствовала константе m , а довольно изрезанную и сложную по форме кривую, среднее значение которой находится вблизи истинного. Соответствующие для данного режима колебаний плотность распределения m и среднее значение показаны на рисунке 6.3. Оценки по максимуму плотности распределения и среднему значению довольно имеет малую ошибку ($\Delta=0.0011\%$) и находится очень близко к истинному значению.

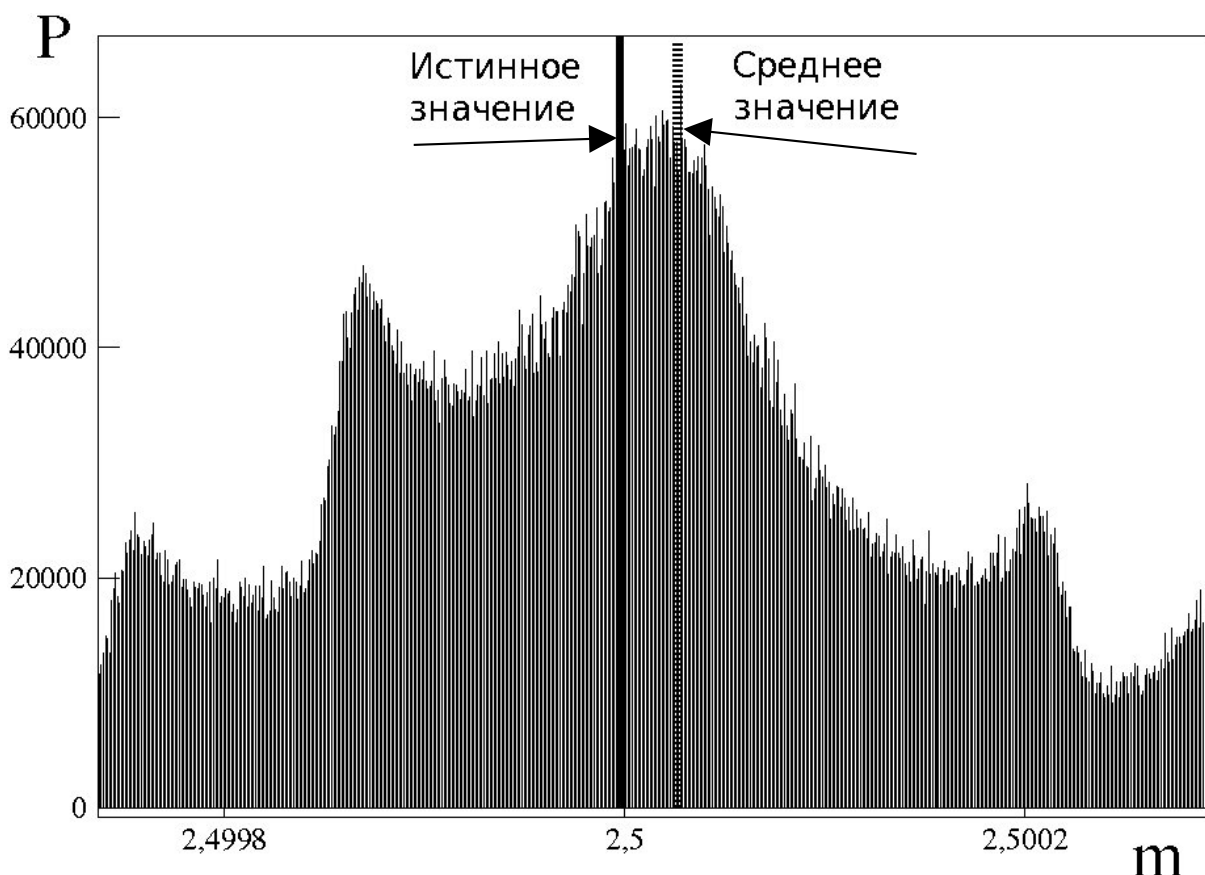
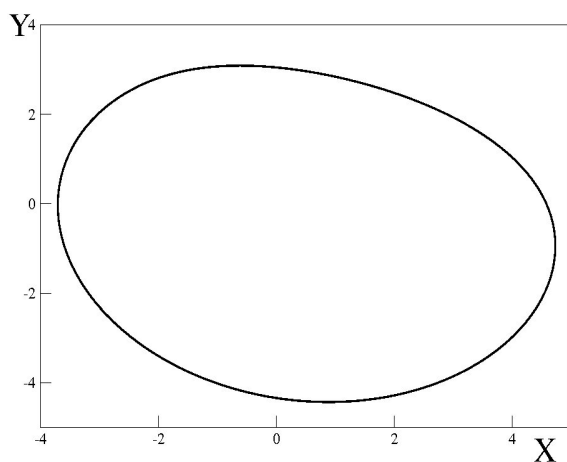


Рисунок 6.3. Результаты расчетов для системы (6.1) распределения значений m_i при $D = 0.0002$, $m = 2.5$ в режиме периодических колебаний; среднее значение равно 2.50003

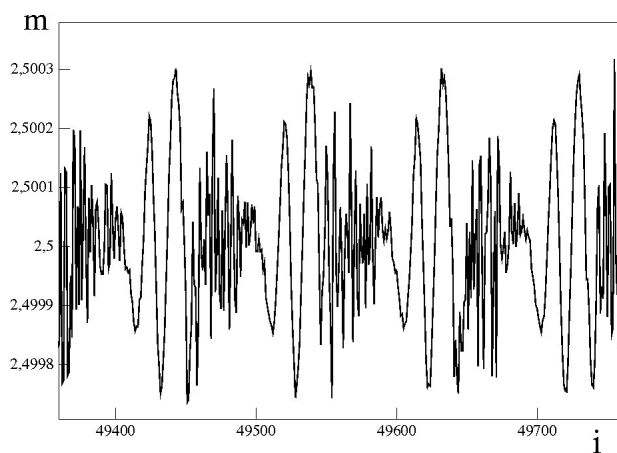
Рассмотрим более сложный случай, когда расчет оценок проводится с использованием лишь одной временной реализации с одной динамической переменной ($y(t)$). Тогда выражение (6.2) примет вид :

$$m_i = \dot{y}_i - \alpha y_i - \frac{\alpha \ddot{y}_i - \dot{y}_i - \ddot{y}_i - b}{\alpha \dot{y}_i - \ddot{y}_i - y_i} . \quad (6.4)$$

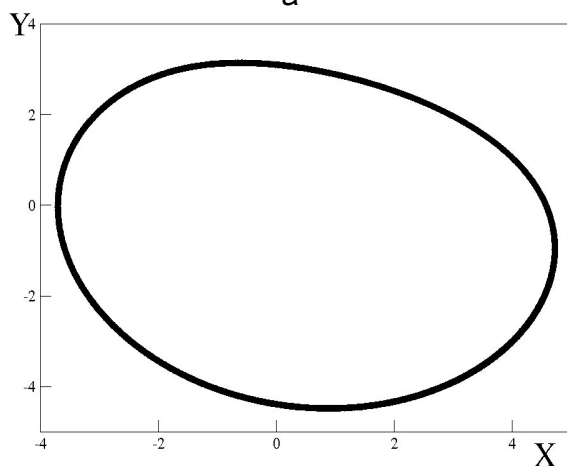
Для расчета m необходимо знать производные с первого по третий порядок, которые последовательно рассчитываются из уравнения (6.3). Если на систему не действует шум (детерминированный случай), то оценка параметра получается приемлемой, как в случае использования нескольких динамических переменных. Относительная ошибка не превышает 1%. Ситуация меняется коренным образом, если подать шум небольшой интенсивности. Так как производные рассчитываются последовательно: для последующей производной используются результаты предыдущей, то и возникающая при подсчетах ошибка многократно возрастает из-за влияющего на систему шума. Относительная ошибка становится более 30% и перестает быть приемлемой. На рисунках 6.4, 6.5 представлены графики для случая без шума (6.4а, 6.4б, 6.5а) и в присутствии шум (6.4в, 6.4г, 6.5б). Разброс оценок m_i в присутствии шума на два порядка больше, чем в отсутствие.



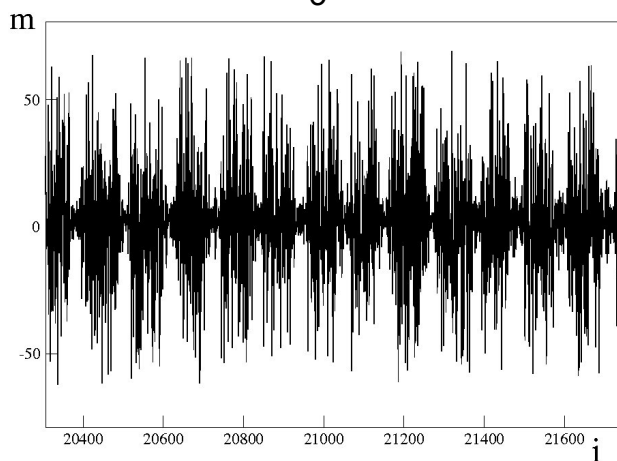
а



б



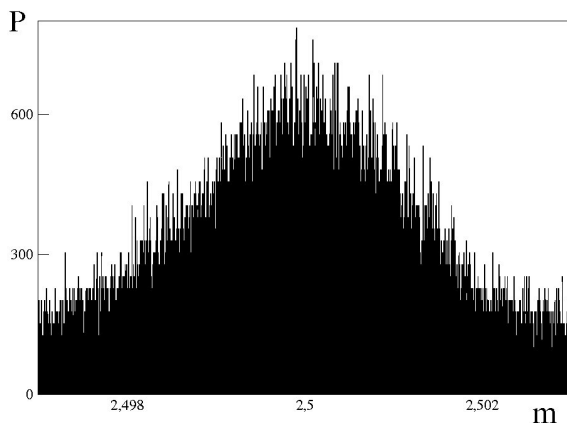
в



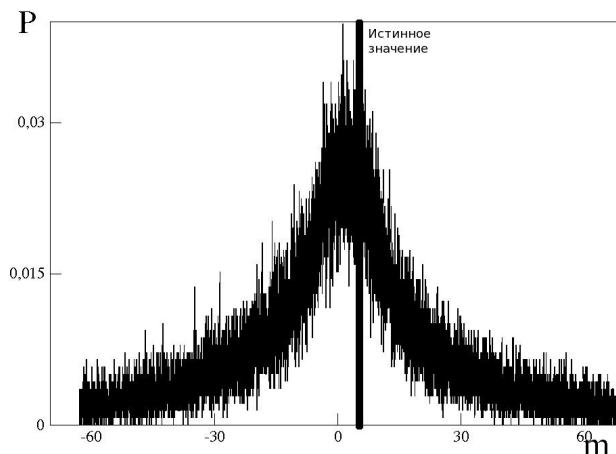
г

Рисунок 6.4: Случай расчета оценки параметра по одной динамической переменной $y(t)$ а - фазовый портрет без шума, б - оценка в каждой точке временной последовательности m_i при отсутствии шума; $m = 2.50$; в — фазовый портрет системы с шумом $D=0.0001$, г - оценка в каждой точке временной последовательности m_i в присутствии шума;

Таким образом можно сделать предварительный вывод о том, что введение шума делает невозможным оценку параметров по реализации одной динамической переменной.



а



б

Рисунок 6.5: Случай расчета оценки параметра по одной динамической переменной $y(t)$
а — распределение значений m_i без шума, б — распределение значений m_i в присутствии шума; истинное значение равно 2.5

6.3. Оценка управляющего параметра осциллятора Ресслера в натурном эксперименте

В рамках работ по расчетам оценок параметров была создана экспериментальная установка представляющая собой генератор Ресслера, с возможностью подключения шума в любой из каналов. Также возможно подключение одновременно нескольких источников шума на разные каналы. Принципиальная схема установки представлена на рисунке 6.6 и описывается системой:

$$\begin{aligned} R_0 C \dot{x} &= -y - z + \sqrt{2D} n(t) \\ R_0 C \dot{y} &= x + ay \\ R_0 C \dot{z} &= b + z(x - m) \end{aligned} \quad (6.5)$$

где $a=R_0/R_1$, $b=U_1/5$, $c=U_2$, $R_0=R_2, R_3 \dots R_{10}$. U_1, U_2 - напряжение в Вольтах.

Генератор Ресслера подключается к измерительному оборудованию, настраивается на нужный режим работы, затем с помощью АЦП и компьютера записывается в файлы в реальном времени. По полученным данным проводится расчет оценки управляющего параметра m так же, как и в случае численного интегрирования.

На рисунке 6.7 представлены результаты расчета оценки управляющего параметра по экспериментальным данным. Исследовались режимы периодических колебаний без внешнего шума (рис. 6.7а), режим двупериодических колебаний без внешнего шума (рис. 6.7б) и режим двупериодических колебаний с внешним источником шума ($D=0.75V$). Строились плотности

распределения значений m_i и подсчитывалась относительная ошибка для каждого случая (рис.6.7а $\Delta=0.83\%$, рис.6.7б $\Delta=1.03\%$, рис.6.7в $\Delta=0.87\%$).

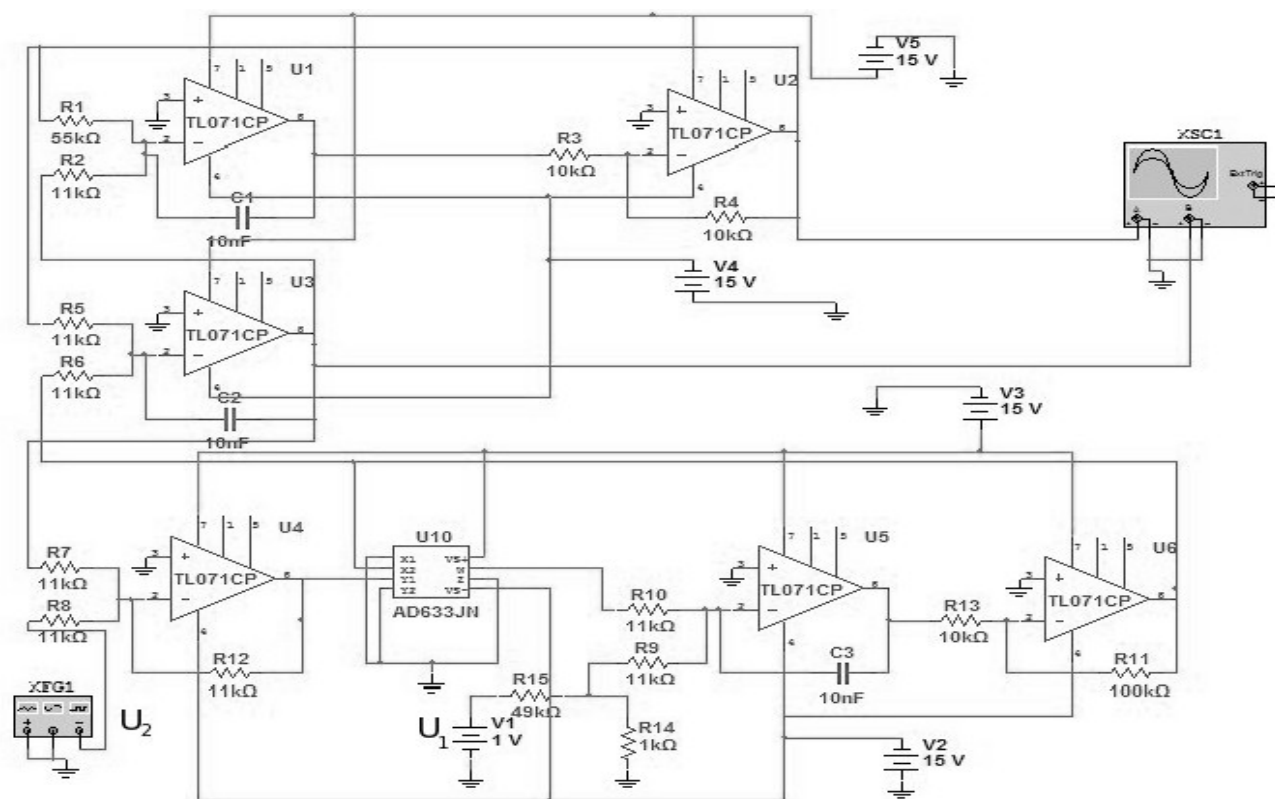


Рисунок 6.6: Принципиальная схема установки

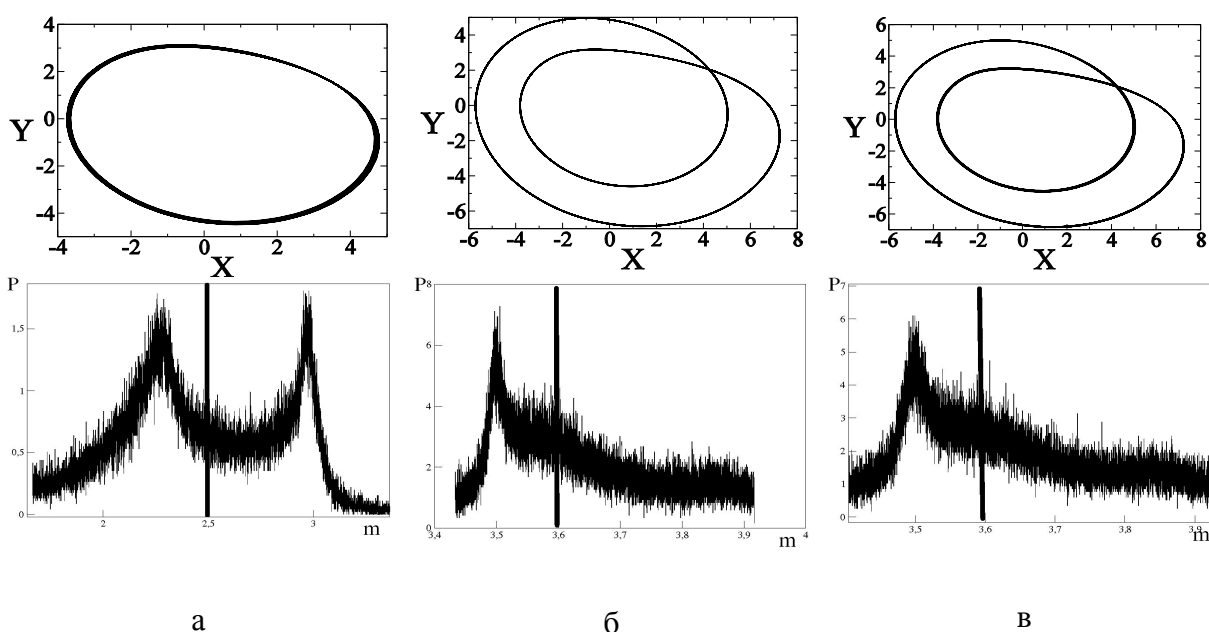


Рисунок 6.7. Расчет оценки управляющего параметра по экспериментальным данным: а) без внешнего шума, режим периодических колебаний, б) без внешнего шума, режим дупериодических колебаний, в) с внешним шумом $D=0.75V$, режим дупериодических

колебаний

6.4. Выводы

Проведенные численные и экспериментальные исследования подтвердили, что возможно получить оценки управляющего параметра с высокой точностью даже при большой интенсивности шума как для численной модели с шумом, так и для экспериментально полученных данных. Приемлемая точность оценки сохраняется для различных режимов колебаний системы.

В случае расчета оценок для численной модели Ресслера без шума возможно использование временной реализации лишь одной динамической переменной (в нашем случае $y(t)$). Введение шума делает невозможным получение приемлемой оценки управляющего параметра из-за чувствительности расчета производных к флуктуациям. Поэтому для получения оценок как в случае численной модели Ресслера с шумом так и в случае эксперимента необходимо использовать временные реализации двух динамических переменных ($x(t)$ и $z(t)$).

Как показал эксперимент, при параметрическом узкополосном шуме, когда характерная частота лежит в пределах спектра передаваемого сигнала, восстановление модулирующего параметр сигнала затруднено, поскольку происходит его сильное искажение.

Модернизирован метод корректной оценки параметров динамической системы, содержащей источники шума. Создан алгоритм, позволяющий автоматически пересчитывать плотность распределения искомой величины за счет отсека фона (хвостов распределения) и сужения области расчета.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведения научных исследований получены следующие принципиальные научные результаты:

- 1) Разработана модель движения потенциально взаимодействующих частиц двумерной решетки, находящейся под действием стохастической силы.
- 2) Разработан способ визуализации локализованных волн плотности солитонного типа в двумерной решетке.
- 3) Разработана методика численного интегрирования уравнений модели нелинейных локализованных волн в двумерных решетках потенциально взаимодействующих частиц.
- 4) Выявлены условия возбуждения солитоно-подобных волн в двумерных нелинейных решетках потенциально взаимодействующих частиц.
- 5) Разработан новый метод управления фазовой мультистабильностью в двух связанных генераторах, основанный на затягивании колебаний в нужный режим при помощи внешних гармонических сигналов на частоте суб-гармоники, прикладываемых к подсистемам.
- 6) Выявлены закономерности синхронизации автоколебаний при би-фазном гармоническом воздействии.
- 7) Разработан метод управления переходом к хаосу в автоколебательной среде с помощью шумового воздействия.

По материалам исследований опубликованы работы [37-43].

Результаты исследований могут быть будут использованы для подготовки студентов, магистров, молодых кандидатов и докторов наук по специальностям «радиофизика и электроника», «физика» и «медицинская физика» на физическом факультете СГУ; модернизации существующих учебных курсов «Основы теории колебаний», «Статистическая радиофизика», «Введение в нелинейную динамику», «Методы численного анализа экспериментальных данных», «Теория дискретных систем», «Детерминированный хаос», «Синхронизация колебаний», «Основы теории распределенных систем», «Анализ временных рядов» и лабораторного практикума «Электронное моделирование сложных систем и процессов».

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Никитин Н.Н., Разевич В.Д. Методы цифрового моделирования стохастических дифференциальных уравнений и оценка их погрешностей// Журнал вычислительной математики и математической физики. -1978. -Том 18. -№1. –С.106-117.
- 2 Arecchi F.T., Meucci R., Puccioni G., Tredicce J. Experimental Evidence of Subharmonic Bifurcations, Multistability, and Turbulence in a Q-Switched Gas Laser. // Phys. Rev. Lett. -1982. -Том 49. -С. 1217-1220.
- 3 Prengel F., Wacker A. Scholl E. Simple model for multistability and domain formation in semiconductor superlattices. // Phys. Rev. B. -1994. -Том 50. -С. 1705-1712.
- 4 Sun N.G., Tsironis G.P. Multistability of conductance in doped semiconductor superlattices. // Phys. Rev. B. -1995. -Том 51. -С. 11221-11224.
- 5 Астахов В.В., Безручко Б.П., Гуляев Ю.П., Селезнев Е.П. Мультистабильные состояния в диссипативно связанных Фейгенбаумовских системах. // Письма в ЖТФ. -1989. -Том 15. -№ 3. -С. 60-65.
- 6 Астахов В.В., Безручко Б.П., Ерастова Е.Н., Селезнев Е.П. Формы колебаний и их эволюция в диссипативно связанных фейгенбаумовских системах. // Журнал Технической Физики. -1990. -Том 60. -№ 10. -С. 19-26.
- 7 Bezruchko B.P., Prokhorov M.D., Seleznev E.P. Oscillation types, multistability, and basins of attractors in symetrically coupled period-doubling systems. // Chaos, Solitons and Fractals. -2003. -Том 15. -С. 695-711.
- 8 Lai Y.C. Driving trajectories to a desirable attractor by using small control. // Phys. Lett. A. -1996. -Том 221. -С. 375-383.
- 9 Macau E.E.N., Grebogi C. Driving trajectories in complex systems. // Phys. Rev. E. -1999. -Том 59. -С. 4062-4070.
- 10 Pisarchik A.N., Goswami B.K. Annihilation of One of the Coexisting Attractors in a Bistable System. // Phys. Rev. Lett. -2000. -Том 84. -С. 1423-1426.
- 11 Егоров Е.Н., Короновский А.А. К вопросу об управлении динамическими режимами в системе, демонстрирующей мультистабильность. // Письма в ЖТФ. -2004. -Том 30. -№ 5. -С. 30-38.
- 12 Shraiman B.I. et al. Spatiotemporal chaos in the one-dimensional complex Ginzburg-Landau equation // Physica D. – 1992. – Vol. 57. – P. 241–248.

- 13 Aranson I.S., Kramer L. The world of the complex Ginzburg-Landau equation // *Rev. Mod. Phys.* – 2002. – Vol. 74. – P. 99–143.
- 14 Shabunin A.V., Astakhov V.V., Anishchenko V.S. Developing Chaos on Base of Traveling Waves in a Chain of Coupled Oscillators with Period-Doubling. Synchronization and Hierarchy of Multistability Formation // *Int. J. of Bif. and Chaos.* – 2002. – Vol. 12. – N8. – P. 1895–1908.
- 15 Шабунин А.В., Акопов А.А., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е. Бегущие волны в дискретной ангармонической автоколебательной среде // *Изв. вузов. ПНД.* – 2005. – Том 13. – №4. – С. 57–55.
- 16 Shabunin A.V. et al. Phase multistability and phase synchronization in an array of locally coupled period-doubling oscillators // *Phys. Rev. E.* – 2009. – Vol. 80. – id. 026211.
- 17 Слепнев А.В., Вадивасова Т.Е., Листов А.С. Мультистабильность, удвоения периода и подавление бегущих волн шумовым воздействием в сильно нелинейной автоколебательной среде с периодическими граничными условиями // *Нелинейная динамика.* – 2010. – Том 6. – №4. – С. 755–767.
- 18 Слепнев А.В. Бифуркации удвоения периода и эволюция пространственных структур в модели автоколебательной среды. // В материалах Международной школы-семинара StatInfo-2009. – Саратов. – 2009. – С. 34–38.
- 19 Астахов В.В., Безручко Б.П., Пономаренко В.И. Формирование мультистабильности, классификация изомеров и их эволюция в связанных фейгенбаумовских системах // *Изв. вузов. Сер. Радиофизика.* – 1991 – Том 34(1). – С. 35–39.
- 20 Pecora L.M. Synchronization conditions and desynchronizing patterns in coupled limit-cycle and chaotic systems // *Phys. Rev. E.* 1998. – Vol. 58. – N1. – P. 347–360.
- 21 Grossman A., Morlet J. Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape // *SIAM J. Math. Anal.* – 1984. – Том 15. – С. 723–736.
- 22 Daubechies I. Ten lectures on wavelets. – Philadelphia: S.I.A.M., 1992. – 380с.
- 23 Meyer Y. Wavelets: Algorithms and applications. – Philadelphia: S.I.A.M., 1993. – 420с.
- 24 Gabor D. Theory of communications // *J. Inst. Electr. Eng.* – 1946. – Том 93. – С. 429–457.
- 25 Ville J. Theorie et applications de la notion de signal analytique // *Cables et Transm.* – 1948. – Vol. 2A. – P. 61–74.
- 26 Дремин И.М., Иванов О.В., Нечитайло В.А. Вейвлеты и их применение // *Успехи физических наук.* – 2001. – Том 171. – С. 465–501.

- 27 Van den Berg J.C. Wavelets in physics. – Cambridge: Cambridge University Press, 1993. – 454с.
- 28 Addison P.S. The illustrated wavelet transform handbook: applications in science, engineering, medicine and finance. – Bristol; Philadelphia: IOP Publishing, 2002. – 362с.
- 29 Астафьева Н.М. Вейвлет-анализ: основы теории и примеры // Успехи физических наук. – 1996. – Том 166. – № 11. – С. 1145–1170.
- 30 Maraun D., Kurths J. Cross wavelet analysis. Significance testing and pitfalls // Nonlin. Proc. Geoph. – 2004. – Vol. 11. – P. 505–514.
- 31 Muzy J.F., Bacry E., Arneodo A. The multifractal formalism revisited with wavelets // Int. J. Bifurcation Chaos. – 1994. – Vol. 4. – P. 245–302.
- 32 Mallat S. G. A wavelet tour of signal processing. – New York: Academic Press, 1998. – 630с.
- 33 Тычинский В.П. Когерентная фазовая микроскопия внутриклеточных процессов // Успехи физических наук. – 2001. – Том 171. – № 4. – С. 649–662.
- 34 Sosnovtseva O.V., Pavlov A.N., Brazhe N.A., Brazhe A.R., Erokhova L.A., Maksimov G.V., Mosekilde E. Interference microscopy under double-wavelet analysis: a new approach to studying cell dynamics // Physical Review Letters. – 2005. – Vol. 94. – P. 218103.
- 35 Brazhe N.A., Brazhe A.R., Pavlov A.N., Erokhova L.A., Yusipovich A.I., Maksimov G.V., Mosekilde E., Sosnovtseva O.V. Unraveling cell processes: interference imaging weaved with data analysis // Journal of Biological Physics. – 2006. – Vol. 32. – P. 191–208.
- 36 Маляев В. С., Вадивасова Т. Е. Оценка параметров зашумленных динамических систем// Нелинейная динамика. - 2010. -Том 6. -№ 2. -С. 267-276.
- 37 Анищенко В.С., Хайрулин М.Е. Влияние индуцированного шумом кризиса аттракторов на характеристики времен возврата Пуанкаре.// Письма в ЖТФ. -2011. -Том 37. -№ 12. -С. 35 — 43.
- 38 Анищенко В.С., Боев Я.И., Вадивасова Т.Е. Индуцированные шумом параметрические колебания в нелинейном осцилляторе. // Письма в ЖТФ. -2011. -Том 37. -№ 4. -С. 87 — 94.
- 39 Nazimov A.I., Pavlov A.N. Classification of spiking events with wavelet neural networks.// Complex dynamics and fluctuations in biomedical photonics VIII, Proc. of SPIE. -2011. -Vol. 7898. -P. 789815(5) .
- 40 Шабунин А.В., Литвиненко А.Н., Астахов В.В. Управление мультистабильностью с помощью би-фазного резонансного воздействия. // Прикладная нелинейная динамика. -2011. -Том. 19. -№ 1. -С. 25 — 39.

- 41 Кочанов А.А., Вадивасова Т.Е., Анищенко В.С. Индуцированная шумом параметрическая неустойчивость и стохастические колебания в осцилляторе с нелинейным трением. // Прикладная нелинейная динамика. -2011. -Том 19. -№ 2. С. 43—55
- 42 Chetverikov A., Ebeling W., Velarde M.G. Soliton-like excitations and sollectrons in two-dimensional nonlinear lattices. // European Physical Journal B. -2011.-Vol. 80. –P.137-145.
- 43 Павлов А.Н. Вейвлет-анализ структуры сигналов: нестационарные, короткие и зашумленные процессы. – Saarbrücken: Lambert Academic Publishing, 2011. – 232 p.