

Министерство образования и науки Российской Федерации
ГОУ ВПО САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО (САРАТОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

УДК 621.373
№ госрегистрации
Инв.№

УТВЕРЖДАЮ
Ректор Саратовского университета

профессор _____ Л.Ю. Коссович
«___» _____ г.

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ
по государственному контракту от 06 сентября 2010 г. № 14.740.11.0074

В рамках федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры
инновационной России» на 2009-2013 годы

по теме:
НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ, ВОЗДЕЙСТВИЕ ФЛУКТУАЦИЙ,
МУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТЬ И СИНХРОНИЗАЦИЯ В СОСРЕДОТОЧЕННЫХ И
РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМАХ РАДИОФИЗИКИ
(промежуточный, этап № 1)

Наименование этапа: «Стохастические колебания и мультистабильность»

Руководитель НИР,
д-р физ.-мат. наук, проф.

В. С. Анищенко

подпись, дата

Саратов 2010

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководитель,
профессор, д.ф.-м.н.

Анищенко В.С. (разд. 1)

Исполнители

(подпись, дата)

Студент

Боев Я.И. (разд. 1)

(подпись, дата)

Профессор, д.ф.-м.н.

Четвериков А.П. (разд. 2)

(подпись, дата)

Доцент, д.ф.-м.н.

Шабунин А.В. (разд. 3)

(подпись, дата)

Аспирант

Коблянский С.А. (разд. 3)

(подпись, дата)

Студент

Литвиненко А.Н. (разд. 3)

(подпись, дата)

Студент

Слепнев А.В. (разд. 3)

(подпись, дата)

Профессор, д.ф.-м.н.

Вадивасова Т.Е. (разд. 4)

(подпись, дата)

Зав. уч. лабораторией

Маляев В.С. (разд. 4)

(подпись, дата)

Студент

Семенов В.В. (разд. 4)

(подпись, дата)

Доцент, к.ф.-м.н.

Стрелкова Г.И. (разд. 5)

(подпись, дата)

Аспирант

Феоктистов А.В. (разд. 5)

(подпись, дата)

Аспирант

Астахов С.В. (разд. 5)

(подпись, дата)

Аспирант

Захарова А.С. (разд. 5)

(подпись, дата)

Доцент, д.ф.-м.н.

Павлов А.Н. (разд. 6)

(подпись, дата)

Ассистент, к.ф.-м.н.

Павлова О.Н. (разд. 6)

(подпись, дата)

Студент

Назимов И.А. (разд. 6)

(подпись, дата)

Нормоконтроллер

Пура Е.Н.

(подпись, дата)

Реферат

Отчет 82 с., 57 рис., 75 источников.

ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС, СИНХРОНИЗАЦИЯ ХАОСА, ФЛУКТУАЦИИ, НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ, ХАОС И СТРУКТУРЫ

Объектом исследования являются фундаментальные научные проблемы современной радиофизики и нелинейной динамики.

Цель работы - выявление закономерностей и свойств волновых и колебательных процессов в нелинейных системах и средах в присутствии внешних регулярных и шумовых воздействий.

Разработка новых методов диагностики сложных сигналов и защиты информации

Анализ колебательных и бифуркационных явлений в нелинейных системах и средах в условиях действия внешних шумов различной статистики. Выявление закономерностей формирования локализованных волн и транспорта заряженных частиц на двумерных нелинейных решетках.

Определение механизмов и особенностей эффектов синхронизации нелинейных мультистабильных систем и сред и анализ методов управления мультистабильностью и синхронизацией. Разработка и совершенствование методов частотно-временного анализа нестационарных автоколебаний и способов защиты передаваемой цифровой информации.

СОДЕРЖАНИЕ

	Список основных исполнителей	2
	Реферат	4
	Обозначения и сокращения	7
	Введение	8
1	Исследование стохастических колебаний с параметрической шумовой накачкой и анализ влияния характеристик шума на эффект параметрической неустойчивости автоколебаний	8
1.1	Введение	8
1.2	Исследование параметрических колебаний в осцилляторе Дуффинга, возбуждаемом шумом	9
1.3	Выводы	14
2	Анализ динамики локализованных волн в «холодной» решетке потенциально взаимодействующих заряженных частиц	15
2.1	Введение	15
2.2	Математическая модель нелинейной двумерной решетки и алгоритм численного решения	16
2.3	Динамика уединенных локализованных движущихся волн	19
2.4	Взаимодействие встречных солитонов	21
2.5	Выводы	22
3.	Исследование влияния внешних регулярных и шумовых воздействий на автоколебательную среду с развитой мультистабильностью. Анализ синхронизации автоколебаний в мультистабильных системах со сложной динамикой	24
3.1	Введение	24
3.2	Исследуемая система	25
3.3	Бифуркационный анализ колебательных режимов при отсутствии расстройки по параметрам	26
3.4	Влияние расстройки по параметру возбуждения генераторов на бифуркационный механизм синхронизации и подавления колебаний	31
3.5	Исследование влияния шума на бифуркации удвоения периода в автоколебательной среде	33
3.6	Выводы	40
4	Анализ возможности корректной оценки параметров динамической системы, содержащей источник шума, на основании обработки реализаций одной или нескольких динамических переменных	41
4.1	Введение	41
4.2	Оценка управляющего параметра осциллятора Ван дер Поля с аддитивным гауссовым шумом. Настройка параметров фильтрации и выбор методов оценки	42

4.3	Оценка параметров в зашумленных системах со сложной динамикой. Влияние бифуркаций удвоения периода циклов и перехода к хаосу	45
4.4	Выводы	49
5	Изучение динамики возбудимых систем под действием внешнего шумового и периодического сигналов. Вынужденная и взаимная синхронизация стохастических колебаний	50
5.1	Введение	50
5.2	Исследуемая система и ее математическая модель	51
5.3	Исследование когерентного резонанса	53
5.4	Внешняя синхронизация системы ФитцХью-Нагумо гармоническим сигналом в режиме когерентного резонанса	55
5.5	Обоснование автоколебательного характера стохастических колебаний в системе ФХН	56
5.6	Влияние внешнего периодического воздействия на систему ФХН	59
5.7	Выводы	63
6.	Критический обзор спектральных методов частотно-временного анализа нестационарных колебательных процессов	64
6.1	Обзор классических методов частотно-временного анализа	64
6.2	Используемый базис	72
6.3	Исследование нелинейных процессов	73
6.4	Наличие завершенной теории	74
6.5	Выводы	75
	Заключение	76
	Список использованных источников	77

Обозначения и сокращения

ГИН - генератор с инерционной нелинейностью

НЧ - низкочастотный

ВЧ - высокочастотный

ФС - фазовая синхронизация

ФХН - ФитцХью-Нагумо

Введение

Данный научный отчет включает информацию о научных результатах, полученных сотрудниками научно-образовательного центра по нелинейной динамике и биофизике Саратовского государственного университета в период с 6.09.10 по 30.11.10. в ходе выполнения государственного контракта 14.740.11.0074 по программе Министерства образования и науки РФ «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009 – 2013 годы». Основной задачей является проведение фундаментальных исследований

по нелинейной динамике и биофизике с целью выявления закономерностей и свойств волновых и колебательных процессов в нелинейных системах и средах в присутствии внешних регулярных и шумовых воздействий; разработка новых методов диагностики сложных сигналов и защиты информации. Выполнение НИР должно обеспечить закрепление в сфере науки и образования научных и научно-педагогических кадров в процессе подготовки студентов, аспирантов и докторантов в Саратовском университете.

За отчетный период исследования проводились в соответствии с техническим заданием на 2010 год. Работы выполнялись в соответствии с календарным планом работ по контракту. Отчет включает краткую информацию об основных научных результатах, полученных исполнителями проекта на 1 этапе работы по теме «Стохастические колебания и мультистабильность».

1. Исследование стохастических колебаний с параметрической шумовой накачкой и анализ влияния характеристик шума на эффект параметрической неустойчивости автоколебаний

1.1. Введение

Среди множества различных колебательных процессов в природе и технике можно выделить в качестве принципиально важного класса колебаний так называемые автоколебательные процессы. По определению А.А. Андропова, автоколебания обладают независимостью от начальных условий и их характеристики определяются исключительно параметрами системы. В фазовом пространстве динамической системы образом автоколебаний является аттрактор, который для систем с одной степенью свободы представляет собой предельный цикл Андронова-Пуанкаре. В классической радиофизике системы, способные работать в режиме автоколебаний называют генераторами или автогенераторами [1]. Согласно классическим представлениям энергия нелинейной диссипативной системы в режиме автоколебаний пополняется за счет постоянного источника, однако это положение не является определяющим свойством автоколебаний. Отказавшись от него мы можем обобщить понятие автоколебаний на широкий класс неавтономных систем, например на стохастические осцилляторы, колебания которых возникают в результате действия шума [2,3]. В то же время в радиофизической литературе принято выделять класс так называемых параметрических генераторов. В таких системах колебания возбуждаются за счет параметрической неустойчивости при модуляции некоторого параметра внешним сигналом. Изменяемый параметр должен определять накопленную в колебательной системе энергию (например, это может быть емкость или индуктивность). Возникает вопрос: являются ли параметрические колебания разновидностью автоколебательного режима? Для ответа в свете недавно полученных результатов [2]

необходимо подтвердить выполнение двух условий. Первое - необходимо установить наличие аттрактора в неавтономной параметрически возбуждаемой системе. Во-вторых - показать, что параметрические колебания демонстрируют явление синхронизации, которое можно рассматривать как одно из фундаментальных свойств автоколебательной системы [4].

Очевидно, что параметрические колебания, возникающие в результате периодической накачки не могут быть синхронизованы, так как в этом случае между частотой накачки ω_n и частотой параметрических колебаний ω_k должно выполняться соотношение: $\omega_k = n\omega_n/2$, $n=1,2,3,\dots$. Захват частоты колебаний внешним сигналом нарушил бы необходимое соотношение частот. Однако известно, что параметрическая неустойчивость может возникать в результате шумовой модуляции параметра [5]. В этом случае спектр сигнала накачки является сплошным в некотором диапазоне частот и строгое соотношение между частотами колебаний и накачки отсутствует. Мы не можем однозначно исключить, что стохастические колебания возникающие в осцилляторе с шумовой модуляцией параметра являются особой разновидностью автоколебаний. Известно несколько примеров нелинейных диссипативных систем в которых индуцированные шумом колебания удовлетворяют двум отмеченным выше условиям автоколебаний. Одним из них является возбуждаемая система ФитцХью-Нагумо, в которой под действием шума возникают стохастические колебания, обладающие свойствами автоколебательного процесса: система имеет аттрактор и демонстрирует эффекты внешней и взаимной синхронизации [6,7]. Целью настоящих исследований является проверка указанных условий применительно к нелинейному осциллятору Дуффинга, в котором за счет модуляции частоты внешним шумовым сигналом возникают параметрические стохастические колебания.

1.2. Исследование параметрических колебаний в осцилляторе Дуффинга, возбуждаемом шумом

Рассмотрим осциллятор Дуффинга с внешней шумовой модуляцией частоты:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\alpha y - \omega_0^2 [1 + K\xi(t)]x - \beta x^3 \end{aligned} \quad (1.1)$$

В уравнениях (1) α - параметр потерь в контуре ($\alpha > 0$), β - коэффициент нелинейности (было выбрано значение $\beta = 1$), ω_0 - резонансная частота контура в линейном приближении, $\xi(t)$ - сигнал накачки, K - коэффициент, управляющий амплитудой сигнала накачки. При выбранных знаках слагаемых во втором уравнении в отсутствие сигнала накачки система имеет единственное состояние равновесия в начале координат, которое всегда устойчиво. Похожие задачи, связанные с шумовым параметрическим возбуждением нелинейных осцилляторов, рассматривались в работах [3,8], где делался вывод об автоколебательном характере

индуцированного шумом режима. Однако вопрос о синхронизации колебаний в этих работах не рассматривался.

В качестве сигнала накачки в наших исследованиях использовались белый и цветной шум. Необходимо отметить, что возможность возникновения параметрической неустойчивости в случае накачки белым шумом в [5] отрицается. Однако численное моделирование свидетельствует об обратном: устойчивая точка равновесия становится неустойчивой для широкого класса шумовых сигналов накачки, включая не только белый шум, но и низкочастотный цветной шум. С точки зрения целей исследования полученные для белого и цветного шума результаты были качественно идентичными. Рассмотрим случай, когда сигналом накачки служит цветной шум, получаемый в результате линейной фильтрации белого шума (процесс Орнштейна-Уленбека):

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \eta \\ \dot{\eta} &= -\gamma\eta - \omega_1^2\xi + \sqrt{2D}n(t) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Уравнения (2) представляют собой уравнения линейного осциллятора, возбуждаемого аддитивным белым гауссовым шумом $n(t)$ ($\langle n(t) \rangle \equiv 0$, $\langle n(t)n(t+\tau) \rangle = \delta(\tau)$), где угловые скобки означают статистическое среднее, $\delta(\tau)$ - функция Дирака). Параметр D определяет интенсивность шума. Осциллятор имеет резонансную частоту ω_1 и характеризуется затуханием γ . В результате фильтрации на выходе контура имеет место цветной гауссов шум $\xi(t)$. При малом затухании процесс $\xi(t)$ представляет собой узкополосный ("гармонический") шум, который и используется в качестве сигнала параметрической модуляции. Его спектральная плотность имеет форму, близкую к лоренциану с максимумом на резонансной частоте ω_1 и шириной спектра на уровне половинной мощности $\Delta\omega = \gamma$. Дисперсия процесса есть $\sigma_\xi^2 = D/(\gamma\omega_1^2)$.

Полагая частоту нелинейного осциллятора $\omega_0 = 1$, выберем $\omega_1 = 2$ с целью обеспечить оптимальные условия параметрического возбуждения колебаний. На рис. 1.1 представлены результаты расчета старшего ляпуновского показателя λ_1 системы (1.1) с шумом (1.2) в зависимости от интенсивности сигнала накачки K . Ляпуновский показатель рассчитывался как для точки равновесия (кривая 1), так и для траектории, выходящей из некоторой произвольно выбранной точки, отличной от точки равновесия (кривая 2). Начиная с некоторого порогового значения $K = K_{\text{п}} \approx 0.2$ старший ляпуновский показатель точки равновесия становится из отрицательного положительным (кривая 1). Это означает, что точка равновесия теряет устойчивость. При этом, возникающие при $K > K_{\text{п}}$ стохастические колебания также характеризуются положительным ляпуновским показателем (кривая 2), что соответствует хаотическому поведению.

На рис. 1.2 приведены спектр стохастических параметрических колебаний и проекция фазового портрета на плоскость переменных x, y . В силу селективных свойств осциллятора стохастические параметрические колебания, возбуждаемые гармоническим шумом, являются узкополосными (рис. 1.2а). Благодаря нелинейному ограничению колебаний в системе возникает стационарное вероятностное распределение. Расчеты показывают, что плотность вероятности $p(x)$ максимальна в окрестности нуля (по-видимому в нуле она обращается в бесконечность) и монотонно убывает с ростом аргумента. Таким образом, стохастические траектории, стартующие из любых начальных точек, вращаются вблизи неустойчивого равновесия.

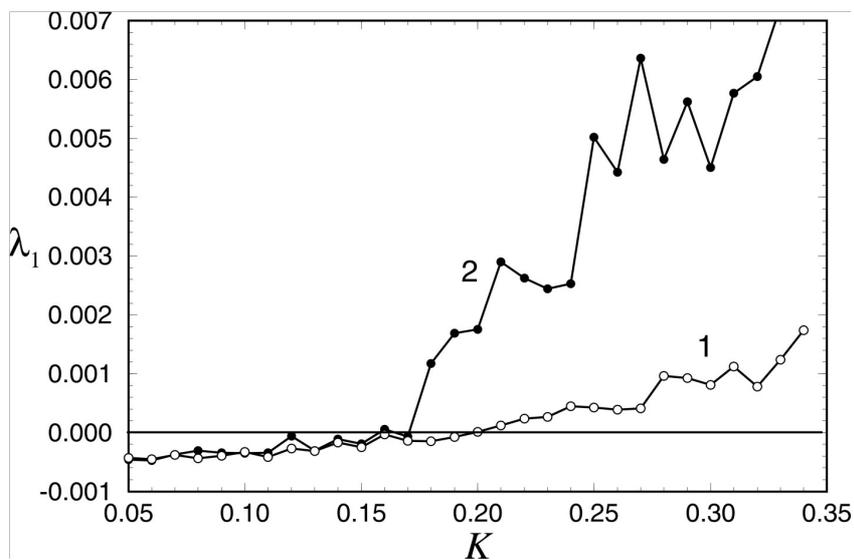


Рисунок 1.2. Зависимость старшего ляпуновского показателя от интенсивности K шумового сигнала накачки в системе (1) с шумом (2) при $\gamma = 0.2$, $D = 0.01$: для точки равновесия в начале координат (кривая 1); для произвольно выбранной траектории (кривая 2)

Можно выделить ограниченную область фазовой плоскости, вероятность нахождения в которой для любой траектории спустя некоторый период установления будет близка к единице (рис. 1.2б). Эту область можно понимать как стохастический аттрактор системы. Отметим, что спектр и вероятностное распределение параметрических колебаний слабо чувствительны к изменениям интенсивности сигнала накачки K и ширине спектра накачки, определяемой параметром γ . По крайней мере в интервалах $0.02 < K < 0.5$ и $0.2 < \gamma < 0.5$ результаты качественно эквивалентны представленным на рис. 1.2. Была предпринята попытка синхронизовать параметрические колебания внешним гармоническим сигналом.

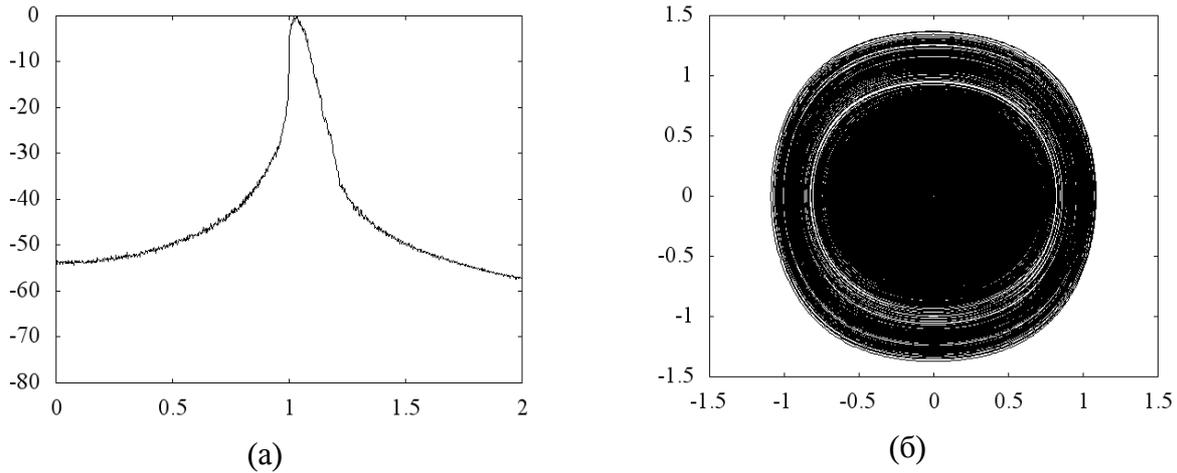


Рисунок 1.2. Нормированный спектр мощности параметрических колебаний (а) и проекция фазовых траекторий на плоскость $xу$ (б) в системе (1) с шумом (2) при $\gamma = 0.2$, $K = 0.25$, $D = 0.01$

С этой целью во второе уравнение системы (1.1) аддитивно вводился внешний гармонический сигнал $F(t) = B \sin \omega_{вн} t$. Спектры результирующего сигнала системы, рассчитанные по переменной $x(t)$, представлены на (рис. 1.3а,б). При фиксированной амплитуде воздействия изменялась частота воздействия $1 - \Delta \leq \omega_{вн} \leq 1 + \Delta$ (рис. 1.3а,б), а также при фиксированной частоте $\omega_{вн} = 0.92$ изменялась амплитуда воздействия $0.001 \leq B \leq 0.01$.

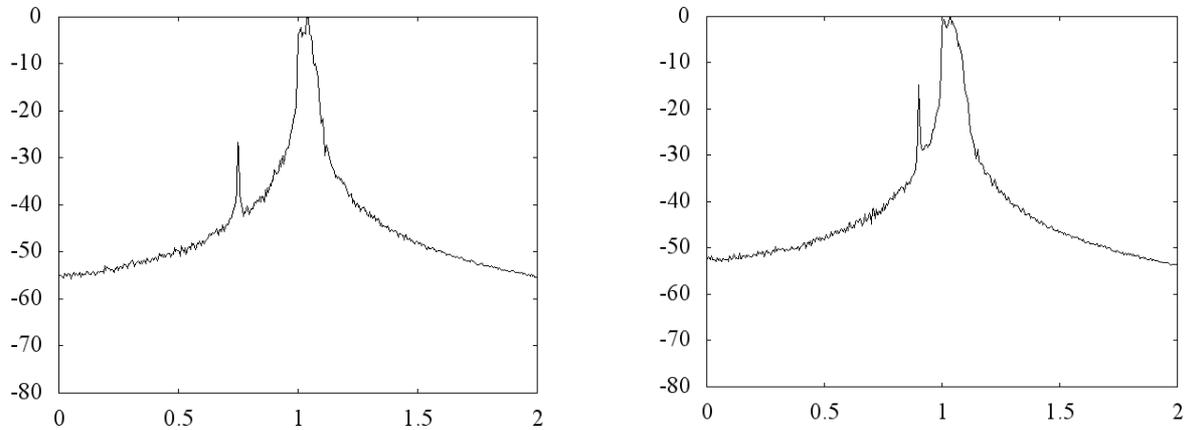


Рисунок 1.3. Нормированный спектр мощности параметрических колебаний в присутствии внешнего сигнала с амплитудой $B = 0.002$ и частотой $\omega_{вн} = 0.75$ (а) и $\omega_{вн} = 0.9$ (б)

Ни в первом, ни во втором случаях эффекта синхронизации зарегистрировано не было. При изменении параметров сигнала накачки и сигнала синхронизации наблюдались лишь небольшие изменения формы и ширины спектра мощности.

Теперь рассмотрим колебания, возбуждённые белым гауссовым шумом. Исследуемые уравнения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\alpha y - \omega_0^2 \{x - \sqrt{2D}n(t)\} + \beta x^3 \end{aligned} \quad (1.3)$$

В уравнениях (1.3) α - параметр потерь в контуре ($\alpha > 0$), β - коэффициент нелинейности (было выбрано значение $\beta = 1$), ω_0 - резонансная частота контура в линейном приближении, $n(t)$ - белый гауссов шум, D - амплитуда белого шума. При выбранных знаках слагаемых во втором уравнении в отсутствие сигнала накачки система имеет единственное состояние равновесия в начале координат, которое всегда устойчиво. Положим частоту нелинейного осциллятора равной $\omega_0 = 1$. Аналогично возбуждению цветным шумом при возбуждении белым шумом колебания имеют порог возбудимости. На рис. 1.4 можно увидеть, что с увеличением интенсивности белого гауссова шума состояние равновесия теряет свою устойчивость, при $D = 0.002$.

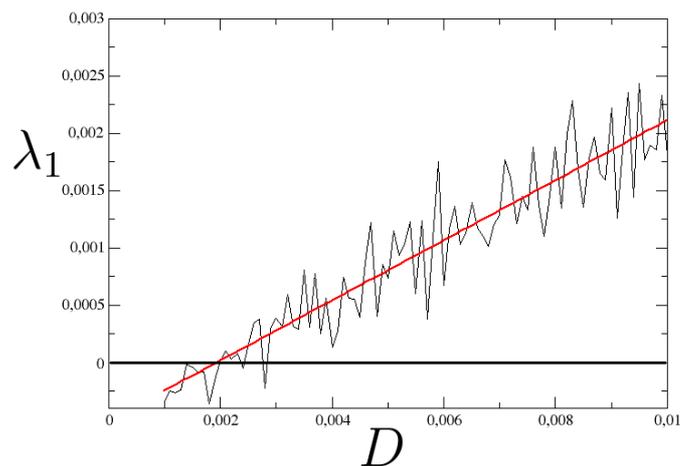


Рисунок 1.4. Зависимость старшего ляпуновского показателя от интенсивности D шумового сигнала накачки в системе (1.3): для точки равновесия в начале координат, красная линия – аппроксимация.

Аналогично случаю цветного шума можно выделить ограниченную область фазовой плоскости, вероятность нахождения в которой для любой траектории спустя некоторый период установления будет близка к единице (рис. 1.5б). Эту область можно понимать как стохастический аттрактор системы. Попробуем синхронизовать колебания внешним гармоническим сигналом. С этой целью во второе уравнение системы (1.3) аддитивно вводился внешний гармонический сигнал $F(t) = B \sin \omega_{вн} t$. Спектры результирующего сигнала системы, рассчитанные по переменной $x(t)$, представлены на (рис. 1.6а,б). При фиксированной амплитуде воздействия изменялась частота воздействия $1 - \Delta \leq \omega_{вн} \leq 1 + \Delta$ (рис. 1.6а,б), а также при фиксированной частоте $\omega_{вн} = 0.65$ изменялась амплитуда воздействия $0.01 \leq B \leq 0.015$.

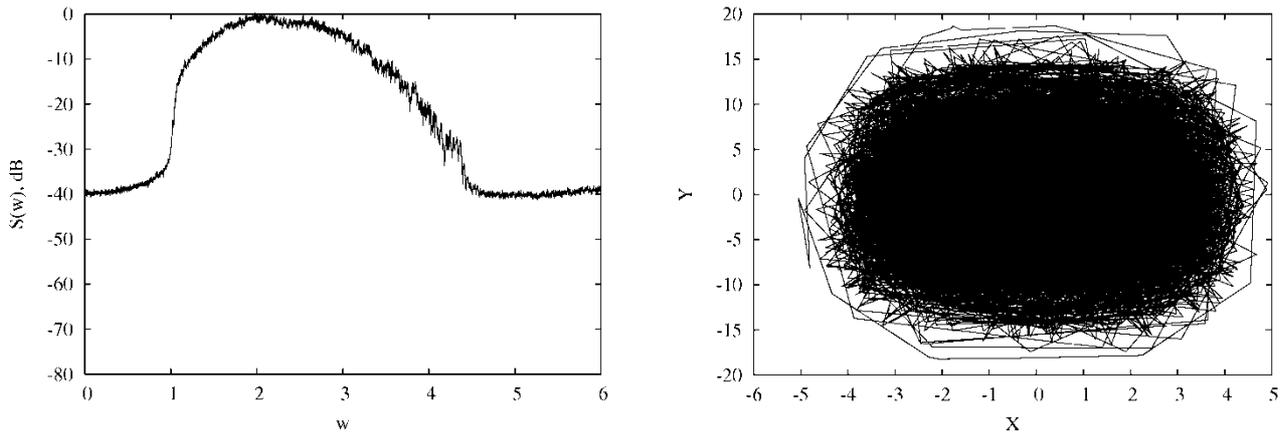


Рисунок 1.5. Нормированный спектр мощности параметрических колебаний (а) и проекция фазовых траекторий на плоскость xu (б) в системе (3) при $D=0.0035$.

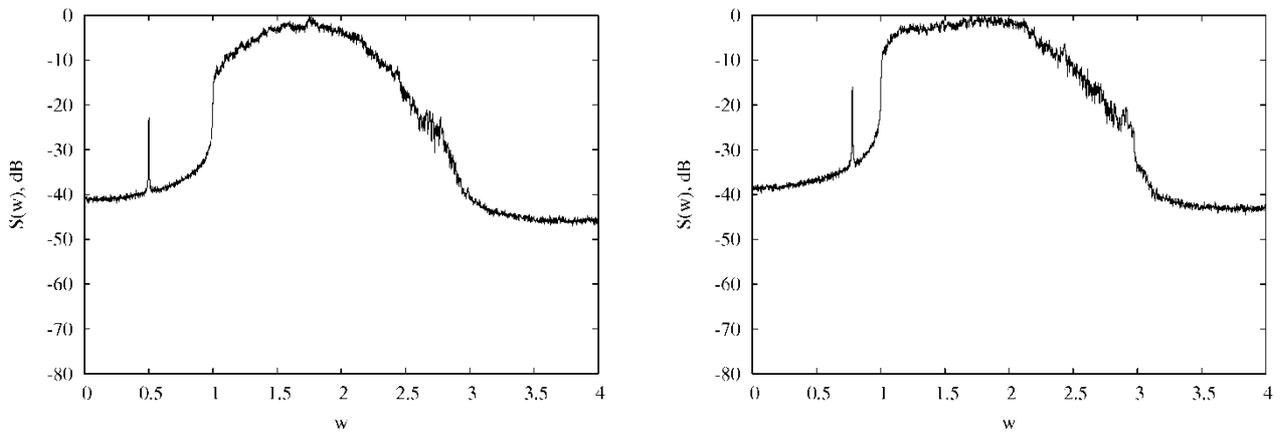


Рисунок 1.6. Нормированный спектр мощности параметрических колебаний в присутствии внешнего сигнала с амплитудой $B = 0.01$ и частотой $\omega_{\text{вн}} = 0.50$ (а) и $\omega_{\text{вн}} = 0.78$ (б) Так же как и при цветном шуме, ни в первом (изменение частоты при фиксированной амплитуде), ни во втором (изменение амплитуды при фиксированной частоте) случаях эффекта синхронизации зарегистрировано не было. При изменении параметров сигнала накачки и сигнала синхронизации наблюдались лишь небольшие изменения формы и ширины спектра мощности.

1.3. Выводы

При использовании в качестве сигнала накачки цветного и белого шума в осцилляторе Дуффинга возбуждаются стохастические параметрические колебания, характеризующиеся неким порогом по отношению к интенсивности сигнала накачки. Параметрическим колебаниям отвечает стохастический аттрактор в фазовом пространстве системы, характеризующийся положительным старшим показателем Ляпунова ($\lambda_1 > 0$). Режим вызванных шумовой накачкой параметрических колебаний не поддается внешней синхронизации гармоническим сигналом. Вариация параметров системы и синхронизирующего сигнала приводит лишь к некоторым

незначительным изменениям ширины и формы спектра мощности результирующих параметрических колебаний.

Таким образом, параметрически возбуждаемые шумовым сигналом колебания в осцилляторе Дуффинга характеризуются наличием аттрактора (т.е. не зависят от начальных условий), но не реализуют эффекта синхронизации, типичного для автоколебательных систем. В связи с этим можно сделать вывод, что данный вид колебаний не является автоколебательным режимом.

2. Анализ динамики локализованных волн в «холодной» решетке потенциально взаимодействующих заряженных частиц

2.1. Введение

В последние годы активно изучаются проблемы транспорта энергии и заряда в регулярных дискретных средах решеточного некристаллического типа [9-18]. К их числу относятся органические макромолекулы, молекулы ДНК, полимерные волокна, молекулярные проволоки. В решетках «некристаллического» типа составляющие их элементы связаны значительно слабее, чем в кристаллах твердых тел, поэтому частицы при возбуждении решетки могут сильно отклоняться от положений равновесия. При этом проявляются нелинейные свойства потенциала взаимодействия между частицами, а распространяющиеся в решетках возмущения являются нелинейными волнами, в частности, локализованными нелинейными волнами солитонно-подобного типа (в дальнейшем, для простоты, солитонами).

Распространяющиеся солитоны плотности могут формировать солитоны электрического потенциала в решетках, состоящих из заряженных частиц. В движущиеся потенциальные ямы солитонов могут захватываться частицы противоположного знака, в результате чего формируется нелинейный солитонный механизм транспорта потенциально взаимодействующих частиц, с которым, как предполагается, связаны свойства проводимости отмеченных выше сред. Исследование характеристик такого механизма является одной из целей проекта. В настоящем разделе излагаются результаты изучения нелинейных волн в «холодных», т.е. не находящихся в контакте с внешней нагретой средой, двумерных решетках.

Отметим, что большая часть исследований солитонно-подобных нелинейных волн в дискретных средах к настоящему времени выполнена в рамках одномерных теоретических моделей [9-20]. Результаты изучения локализованных волн, способных обеспечить транспорт частиц в двумерных дискретных средах, крайне ограничены [21-23]. Поэтому актуальным является развитие теории нелинейных волн в двумерных решетках, которые являются простейшими неодномерными структурами, а реальным воплощением которых являются, например, так называемые молекулярные монослои.

2.2. Математическая модель нелинейной двумерной решетки и алгоритм численного решения

При обобщении теории одномерных решеток на двумерные естественным кажется на первый взгляд рассмотрение модели квадратичной решетки, в которой каждая частица взаимодействует с четырьмя соседями. Однако квадратичная решетка не является решеткой с минимальной потенциальной энергией, даже если частицы находятся на равновесных расстояниях σ друг от друга. Поэтому при возмущении частиц квадратичная решетка (с локальным минимумом потенциальной энергии) способна трансформироваться в треугольную решетку с минимальной потенциальной энергией (глобальным потенциальным минимумом), в которой каждая частица взаимодействует с шестью соседями в равновесном состоянии. Более того, в процессе эволюции частицы в решетках некристаллического типа с нежесткими связями могут образовывать конфигурации с различным количеством эффективно взаимодействующих частиц. Понятие «эффективно взаимодействующие частицы» возникает вследствие того, что для каждой частицы можно определить «сферу взаимодействия» радиуса r_{sc} , такую что взаимодействием данной частицы с частицами, находящимися вне этой сферы, можно пренебрегать.

В настоящей работе будут рассматриваться решетки с потенциалом Морзе, который качественно похож на реальный молекулярный потенциал Леннарда-Джонса, а с другой стороны, асимптотически подобен нелинейному потенциалу Тоуды, решетки с которым хорошо, причем имеется большой объем аналитических результатов и оценок [20]

$$V(r) = D(e^{-2br} - 2e^{-br}) \quad (2.1)$$

Здесь $r = x - \sigma$, x – расстояние между частицами, b – коэффициент жесткости связи, D – глубина потенциальной ямы (рисунок 2.1). Для предотвращения различных нефизических эффектов при численном моделировании решеток с нежесткой связью ($B = b\sigma \sim 2-5$) используется модифицированная форма потенциала Морзе с более быстрым спаданием потенциала на больших расстояниях $x > 1.5\sigma$.

$$V(r) = D \left[e^{2br} - e^{-2br} \right] \frac{1}{1 + e^{(r-d)/2\sigma}} \quad (2.2)$$

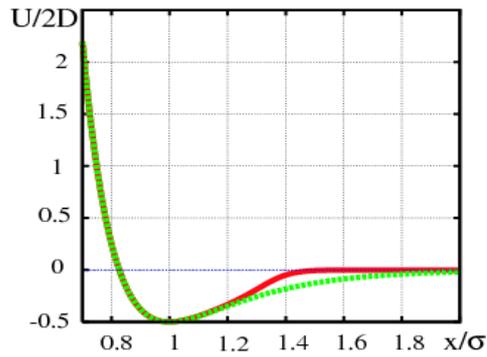


Рисунок 2.1. Потенциал Морзе (зеленая кривая) и его аппроксимация (красная кривая). $B=4$, $d=1.35\sigma$, $v=0.025$

Совокупность частиц решетки рассматривается как ансамбль, в котором каждая частица может в принципе взаимодействовать с любой другой частицей, если расстояние между ними не превышает 1.5σ . Динамика частиц при численном моделировании рассматривается в прямоугольной области с периодическими граничными условиями (в ячейке моделирования), размеры которой выбираются, чтобы обеспечить нужную геометрию решетки. Например, для ансамбля $N=100$ частиц размеры ячейки моделирования для треугольной решетки $x/\sigma=10$, $y/\sigma=(\sqrt{3}/2)*10$ (рисунок 2.2).

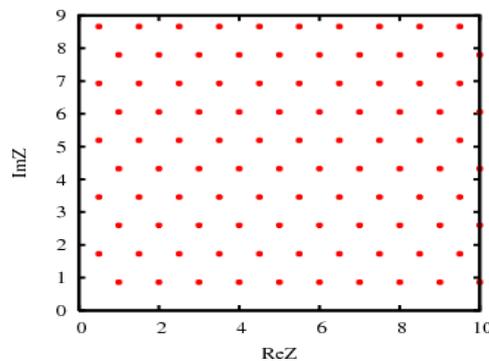


Рисунок 2.2. Конфигурация ячейки моделирования равновесной треугольной решетки с $N=100$ частицами

Гамильтониан такой системы записывается в виде

$$H = \frac{M}{2} \sum_n v_n^2 + \sum_{i,j} V(|R_i - R_j|) \quad (2.3)$$

где M – масса каждой частицы решетки, которые полагаются идентичными, v – их скорости, R – соответствующие радиус-векторы, а уравнение движения – в следующей форме:

$$\ddot{Z}_n = \sum_k F_{nk} (|Z_{nk}|) z_{nk} \quad (2.4)$$

Здесь введена комплексная безразмерная координата частиц $Z_n = (x_n + iy_n)/\sigma$, x, y – координаты в прямоугольной системе, соответствующие радиус-вектору R , $Z_{nk} = Z_n - Z_k$, F_{nk} – модуль силы взаимодействия между n -ой и k -ой частицами, z_{nk} – соответствующий единичный вектор, определяющий направление этой силы, точкой над символом обозначена производная по безразмерному времени $\tau = \omega_M t$, где ω_M – частота малых осцилляций частицы вблизи минимума потенциала Морзе [16]

Уравнения (2.4) решаются численно методом Рунге-Кутты 4-го порядка. В процессе компьютерных симуляций изучается эволюция начальных возмущений, задаваемых начальными значениями комплексных координат частиц Z_{n0} и скоростей V_{n0} , основной целью которых является определение условий, при которых возможно распространение локализованных волн. Точность расчетов контролируется проверкой выполнения условия сохранения полной энергии системы. Типичный шаг интегрирования $\Delta\tau = 0.001$. В процессе моделирования определяются траектории частиц $Z_n(\tau)$ и их скорости $V_n(\tau)$, на основании которых можно рассчитать значения усредненных по ансамблю кинетической и потенциальной энергий частиц, а также соответствующие средние во времени величины. Для наглядного представления локализованных волн плотности находится распределение плотности массы ансамбля на основании предположения о том, что каждая точечная частица моделирует объемный объект, плотность которого в простейшем приближении может быть задана Гауссовой функцией

$$\rho(Z) = \sum_{n, (|Z-Z_n| \leq 0.5)} e^{-\frac{|Z-Z_n|^2}{2\lambda^2}} \quad (2.5)$$

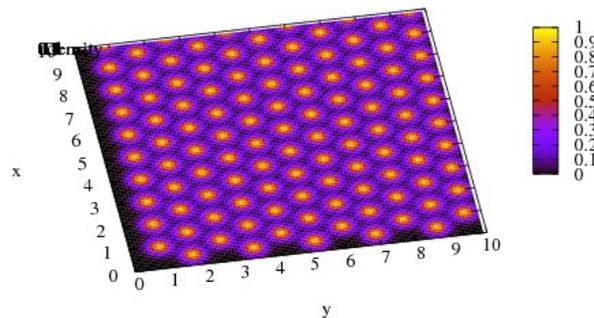


Рисунок 2.3. Распределение плотности частиц в равновесной треугольной решетке, соответствующей представленной на рисунке 2. $N=100$, $\lambda=0.35$

Значения параметра λ выбираются таким образом, чтобы при равновесном расположении частиц они не «чувствовали» друг друга, т.е. распределение ρ в точках дислокации частиц была бы практически такой же, как если бы каждая частица была единственной в ансамбле, а именно $\rho=1$ (рисунок 2.3)

2.3. Динамика уединенных локализованных движущихся волн

Рассмотрим сначала эволюцию начального возмущения, представляющего собой фрагмент плоской волны с длиной фронта $\Delta n=4$, ориентированной таким образом как показано на рисунке 2.4, причем значения координат частиц и скоростей в каждой цепи этой волны, ориентированной вдоль оси x (горизонтальной оси), задаются соответствующими одномерному солитону Морзе [20], т.е. смещения горизонтальные смещения q_n частиц от их равновесных значений (и соответствующие значения скоростей) задаются рекуррентными формулами

$$e^{3(q_n - q_{n+1})} = 1 + \frac{\beta^2}{ch^2(\kappa n - \beta t)} \Big|_{t=0} \quad (2.6)$$

Здесь $\beta = \text{sh}(\kappa)$, параметр χ характеризует ширину солитона и в одномерном случае однозначно определяет его скорость и энергию (амплитуду).

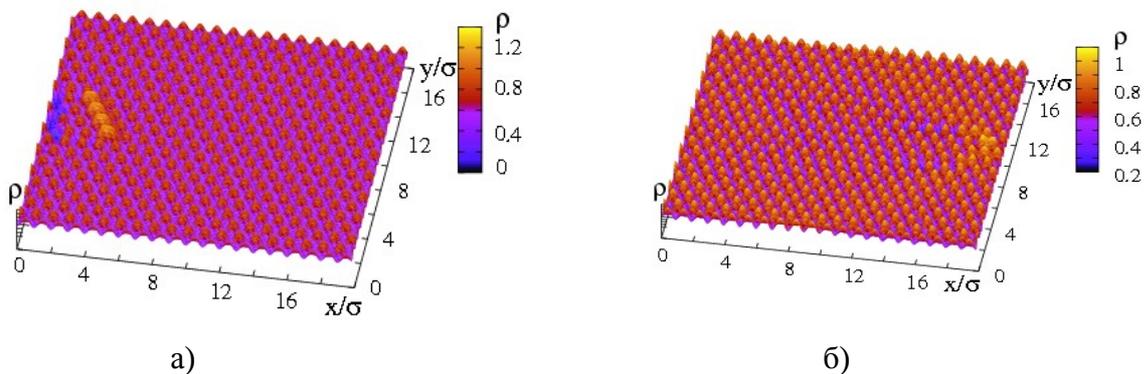


Рисунок 2.4. Трансформация начального локализованного возмущения плотности $\rho(x, y)$ в форме фрагмента плоской солитон-подобной волны в подково-образную двумерную волну в треугольной решетке $N=400$ частиц. Показано начальное распределение плотности (а) и через время $\tau=8$ (б). $V=4$, $\lambda=0.3$.

Кроме распределений плотности в отдельные моменты времени, как на рисунке 4, для изучения эволюции волны к картинам типа представленных на этом рисунке применяется «амплитудный фильтр», т.е. показываются только значения плотности, превышающие 1 ($\rho' = \rho - 1$, если $\rho > 1$ и $\rho' = 0$, если $\rho \leq 1$), и картины, соответствующие последовательным интервалам времени (с определенным шагом) накладываются друг на друга (рисунок 5).

Из рисунков 2.4, 2.5 видно, что преобразовавшаяся в подково-образную форму волна, которая напоминает известный двумерный солитон в системе Кадомцева-Петвиашвили [24], тем не менее не стабилизируется. Она рассеивается благодаря взаимодействию частиц, принадлежащих крайним возбужденным цепочкам, с первоначально невозбужденными смежными цепочка-

ми. При этом «время жизни» примерно пропорционально длине фронта, как показывают расчеты с различными значениями

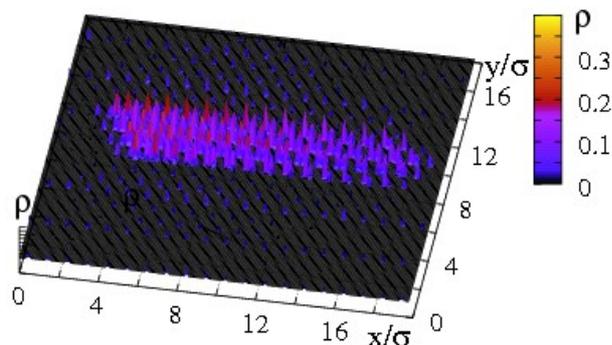


Рисунок 2.5. Трансформация начального локализованного возмущения плотности $\rho(x,y)$ в форме фрагмента плоской солитон-подобной волны в подково-образную двумерную волну в треугольной решетке $N=400$ частиц. Показана суперпозиция обработанных амплитудным фильтром распределений плотностей в течение времени $\tau=8$, начиная с начального состояния. $V=4$, $\lambda=0.3$.

длины фронта. Поэтому время жизни солитона с параметрами одномерного солитона, возбужденного в единственной цепочке двумерной треугольной решетки, оказывается совсем маленьким (~ 1 в используемых безразмерных переменных).

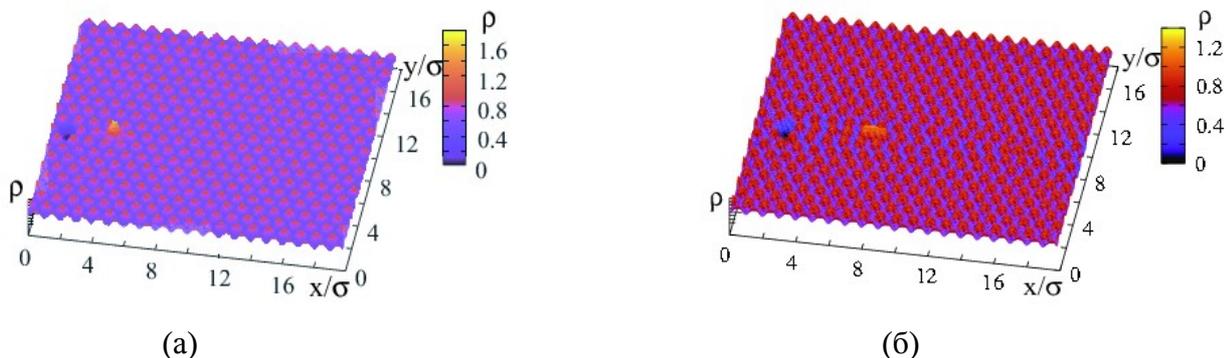


Рисунок 2.6. Эволюция начального локализованного возмущения плотности $\rho(x,y)$ с энергией, равной энергии солитона представленного на рисунке 5, но возбужденного в единственной цепочке треугольной решетки $N=400$ частиц. Показаны начальное состояние (а) и состояние через время $\tau=6$ (б). $V=4$, $\lambda=0.3$.

Однако если увеличивать амплитуду солитона при сохранении значений прочих параметров, обнаруживается что время жизни существенно увеличивается (рисунок 2.6). На рисунке 2.6. показаны распределения плотности, соответствующие начальному возбуждению солитона в единственной цепочке решетки с энергией, равной энергии «4-слойного» солитона, представленного на рисунке 2.5 (т.е. энергия возмущения в одной цепочке теперь в 4 раза выше энергии в одной цепочке рассмотренного выше возмущения). Показаны начальное состояние системы (а) и состояние через время $\tau=6$ (б), в течение которого он прошел расстояние 24, двигаясь со скоростью, в 2.8 раза превышающую скорость звука в треугольной решетке (скорость звука в треугольной решетке в $\sqrt{2}$ раз выше скорости звука в одномерной решетке, которая в используе-

мых переменных равна 1). При этом он пересекает границу ячейки моделирования, а его форма практически не изменилась. И хотя посредством численных симуляций в относительно небольшой использовавшейся ячейке моделирования нельзя доказать, что возбужденная волна стационарная, т.е. имеет бесконечное время жизни, но что она по крайней мере квазистационарная, с большим временем жизни, можно утверждать уверенно. А то, что обнаруженная квазистационарная локализованная волна обладает свойствами солитона, доказывается результатами компьютерного эксперимента, в котором рассматривается взаимодействие двух движущихся навстречу друг другу солитонов

2.4. Взаимодействие встречных солитонов

Исследуем динамику решетки с двумя возбужденными в ней вначале встречными солитонами, как с единичной длиной фронта (рисунок 2.7), так и возбужденных в 4 смежных цепях каждый (рисунок 2.8)

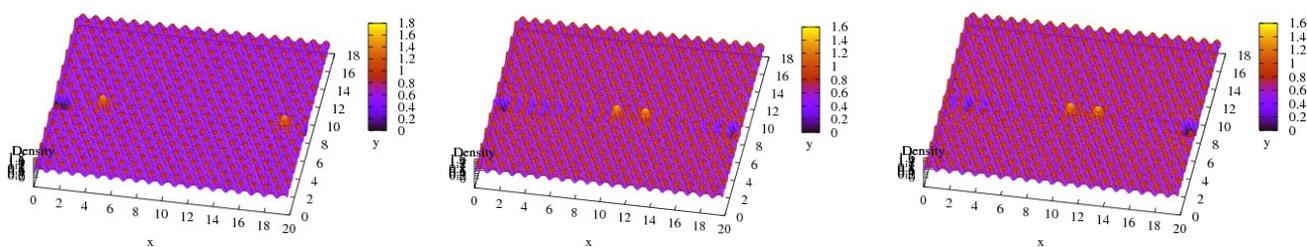


Рисунок 7. Эволюция двух встречных солитонов плотности $\rho(x,y)$ в единственной цепочке треугольной решетки $N=400$ частиц. Каждый из солитонов тождественен представленному на рисунке 6. Показаны начальное состояние (а), состояние перед встречей солитонов (б) и после встречи (в). $V=4$, $\lambda=0.3$.

Видно, что форма начального возбуждения практически не изменяется за время их движения навстречу друг другу и они остаются недеформированными после встречи. Последнее является типичным признаком нелинейных волн солитонного типа [20].

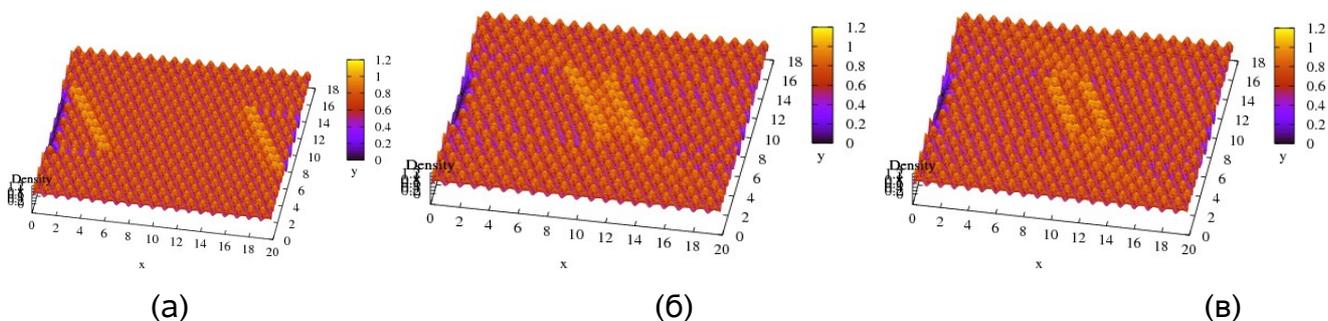


Рисунок 2.8. Эволюция двух встречных солитонов плотности $\rho(x,y)$ с начальной длиной фронта 8 в треугольной решетке $N=400$ частиц. Показаны начальное состояние (а), состояние перед встречей солитонов (б) и после встречи (в). $V=4$, $\lambda=0.3$.

Для того чтобы понять, почему энергия солитонов рассеивается слабо, несмотря на связь частиц, принадлежащих возбужденным цепочкам, с частицами смежных слоев, на рисунках представлены зависимости поперечных смещений (рисунок 2.9) и скоростей (рисунок 2.10)

частиц в смежных цепях, прилегающих к цепочке с возбужденным солитоном, как на рисунке 7, в одном поперечном сечении ячейки моделирования при $x=7$.

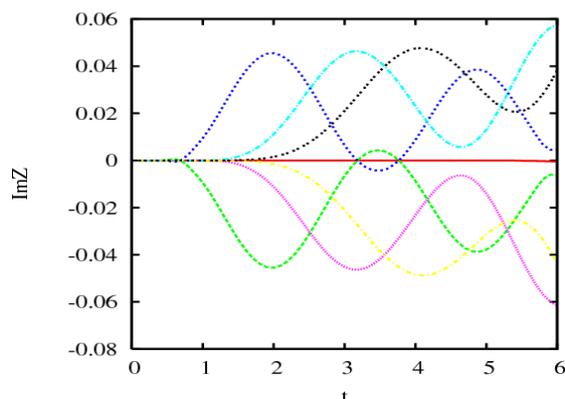


Рисунок 2.9 – Поперечные смещения частиц цепочки, в которой распространяется солитон (красная кривая) и трех смежных цепочках выше и ниже возбужденной в сечении $x=7$ в треугольной цепочке с $N=400$ частиц. $V=4$. Параметры солитона такие как у представленного на рисунке 2.7.

Из рисунка 2.9 видно, что частицы цепочки с солитоном не испытывают поперечных смещений, а следовательно, не имеют поперечной скорости, а смещения частиц в смежных цепочках по обеим сторонам возбужденной, симметричны, причем частицы в смежных слоях с каждой стороны движутся практически в противофазе. Последнее подтверждается и зависимостями от времени поперечных скоростей в смежных цепочках. Это следует из рисунка 2.10, где представлены такие зависимости только для частиц 7 смежных слоев, но только с одной стороны в силу их симметрии. Такое соотношение фаз движений смежных частиц характерно для бризеров, недвижущихся нелинейных локализованных объектов. В бризерах, как известно [25], наблюдаются колебания частиц с большой амплитудой в ограниченной области системы, причем энергия колебаний не «вытекает» из области локализации благодаря противофазному возбуждению колебаний в смежных элементах, так что групповая скорость возбуждений близка к нулю. Это означает, что распространяющийся солитон возбуждает колебания (паразитные, «с точки зрения» солитона) в узком «коридоре» смежных цепочек, причем отношение энергии солитона к энергии возбуждений в этом «коридоре» быстро падает с увеличением его энергии. Последнее следует из данных компьютерных экспериментов, подобных описанным выше, для солитона в одной цепочке при варьировании его энергии (рисунок 2.11). Солитон на рисунке 11(a) имеет энергию в 4 раза выше, чем солитон на рисунке б, однако амплитуда его поперечных скоростей примерно в два раза меньше (~ 0.1 на рисунке 2.10 и ~ 0.05 на рисунке 2.11(a)), т.е. отношение продольной и поперечной энергий увеличилось в 16 раз при повышении энергии солитона в 4 раза и в 60 раз при повышении в 6 раз.

Это означает, что с увеличением энергии солитона доля энергии, затрачиваемой на возбуждение колебаний в смежных цепочках, становится все меньше, а время жизни солитона в единственной возбужденной цепочке все больше. Его значение существенно превышает время

перемещения солитона на расстояние порядка σ , следовательно, такие объекты могут использоваться в качестве транспортировщиков заряда, если рассматриваемые частицы решетки являются заряженными.

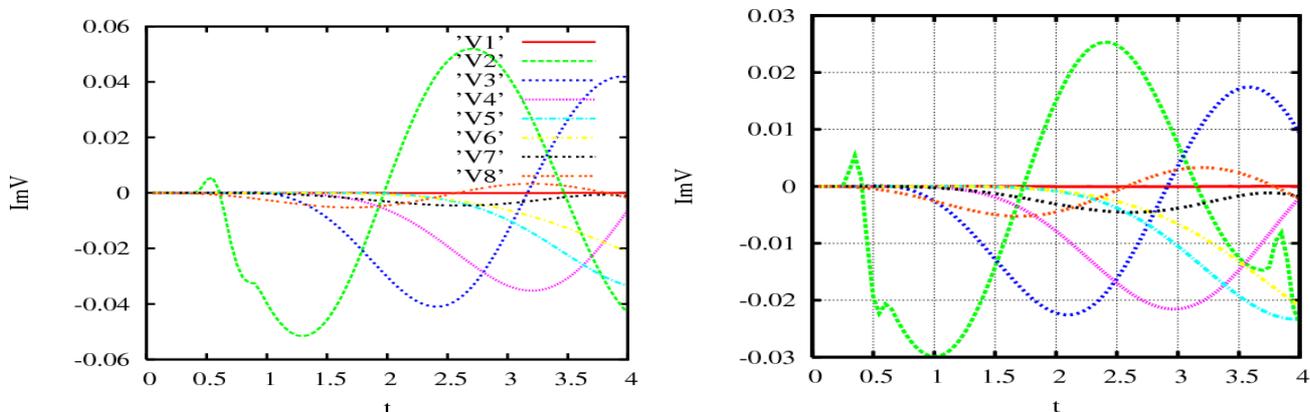


Рисунок 2.10 – Поперечные скорости частиц цепочки, в которой распространяется солитон (красная кривая) и семи смежных цепочках ниже возбужденной в сечении $x=7$ в треугольной цепочке с $N=400$ частиц и энергией в 4 раза (а) выше, чем у солитона, представленного на рис.6, и в 6 раз (б). $V=4$

В этом случае солитоны плотности формируют солитоны потенциала (движущиеся со сверхзвуковой скоростью потенциальные ямы), которые захватывают и переносят заряды противоположного знака. Исследование этих вопросов, и прежде всего процессов естественного формирования солитонов за счет энергии тепловых колебаний в нагрываемой решетке (термических солитонов), будет выполнено на следующем этапе настоящей работы.

2.5. Выводы

Таким образом, в результате выполнения данного этапа работы:

- 1) Разработана концепция модели для исследования нелинейных локализованных волн в двумерных решетках потенциально взаимодействующих частиц, основанная на представлении решетки в виде ансамбля частиц с конечным эффективным радиусом взаимодействия. Модель предусматривает возможность модернизации для исследования решеток, находящихся в контакте с внешней нагретой средой, а также включение в ее состав компонента, описывающего взаимодействие внешней заряженной частицы с возмущениями решетки.
- 2) Сформулированы уравнения движения частиц ансамбля с введением комплексных координат и скоростей
- 3) Выявлено, что рассматриваемые возбуждения могут быть по крайней квазистационарными локализованными волнами с характерными для солитонов характеристиками и длительным временем жизни, что дает надежду на использование их в качестве носителей внешних заряженных частиц.

3 Исследование влияния внешних регулярных и шумовых воздействий на автоколебательную среду с развитой мультистабильностью. Анализ синхронизации автоколебаний в мультистабильных системах со сложной динамикой.

3.1. Введение

Явления взаимной синхронизации и гашения колебаний (или «амплитудной смерти») в диссипативно связанных автоколебательных системах известны очень давно и наблюдаются в системах самой различной природы. Их описание и история открытий широко представлены и в научных монографиях, и в учебной литературе. Простейшей математической моделью связанных автоколебательных систем, которая охватывает не только явление синхронизации, но и эффект гашения, когда увеличение связи и расстройки по собственным частотам приводит к подавлению автоколебаний в каждом из генераторов, является система связанных укороченных уравнений ван дер Поля для комплексных амплитуд, которые также называются уравнениями Ландау–Стюарта. Явления синхронизации и гашения изучались не только в простейших базовых моделях, но и в более реалистичных системах различной природы. Так, например, гашение автоколебаний в связанных химических системах рассматривалось в работе [27]. В работе [28] дан подробный бифуркационный анализ синхронных режимов (включая и эффект гашения колебаний) для модели химической системы с предельным циклом на фазовой плоскости. Исследования проводились для двух взаимодействующих колебательных систем в широкой (охватывающей языки синхронизации с различными числами вращения) области расстроек по собственным частотам.

Модели диссипативно связанных автоколебательных систем с одинаковыми параметрами возбуждения могут демонстрировать вырожденные бифуркации. Так, например, при выходе из области гашения автоколебаний наблюдается бифуркация, в результате которой из неподвижной точки рождается притягивающий двумерный тор и два седловых предельных цикла, расположенных вне тора. О таких нетипичных бифуркациях в диссипативно связанных генераторах ван дер Поля в виде системы укороченных уравнений для амплитуд и фаз и в виде полной системы связанных осцилляторов сообщалось, например, в работе [29]. В этой работе было показано, что введение неидентичности по параметру возбуждения в парциальных генераторах устраняет вырожденную ситуацию. Бифуркационная линия, разделяющая область гашения от области квазипериодических колебаний, расщепляется на три: бифуркация Андронова–Хопфа для устойчивого состояния равновесия (рождение устойчивого предельного цикла), бифуркация Андронова–Хопфа для неустойчивого состояния равновесия (рождение седлового предельного цикла) и вторичная бифуркация Андронова–Хопфа (или бифуркация Неймарка–Сакера в отображении) рождения притягивающего двумерного тора из предельного цикла. Указанные результаты были получены при описании основного языка синхронизации (1 : 1).

В работе [30] были проведены детальные исследования режимов синхронизации и гашения автоколебаний в двух диссипативно связанных генераторах ван дер Поля и осцилляторах ван

дер Поля–Дуффинга при различных значениях параметров возбуждения (как в области квазигармонических, так и ангармонических автоколебаний парциальных систем) и в широкой области расстроек по собственным частотам. Для обозначения характерных режимов, наблюдающихся между областями гашения колебаний и квазипериодической динамики был предложен термин «широкополосная синхронизация». Вопросы о бифуркационных механизмах данных эффектов и перестройке структуры бифуркационных множеств, формирующих области синхронизации с различными числами вращения и области «амплитудной смерти», при переходе от случая идентичных по параметру возбуждения генераторов к случаю неидентичных остаются открытыми.

В данной работе представлены результаты исследования бифуркационных переходов к режимам синхронизации и гашения колебаний в системе двух диссипативно связанных генераторов с инерционной нелинейностью. Индивидуальный генератор имеет трехмерное фазовое пространство и два управляющих параметра, при вариации которых он способен демонстрировать суперкритическую бифуркацию Андронова–Хопфа и переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода. Для двух связанных генераторов на плоскости управляющих параметров «коэффициент связи – расстройка по частоте» построены соответствующие линии бифуркационных значений как для случая идентичных по параметру возбуждения парциальных генераторов, так и для случая слабой неидентичности. Показано, что в исследуемой системе языки синхронизации могут быть двух типов: в одних имеется и область захвата, и область подавления, а в других – только область захвата. При слабой неидентичности по параметру возбуждения языки, имеющие области подавления, объединяются и появляется возможность перехода из одного языка синхронизации в другой без каких–либо бифуркаций устойчивого предельного цикла. Переходы между режимами синхронизации с разными числами вращения могут происходить эволюционным образом.

3.2. Исследуемая система

Рассмотрим бифуркационные механизмы синхронизации автоколебаний и амплитудной смерти в диссипативно связанных генераторах с инерционной нелинейностью в следующей форме:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1,2} &= m_1 x_1 - p x_1 + p y_1 + \varepsilon(x_{2,1} - x_{1,2}) + A_{1,2} \cos(\omega t) \\ \dot{y}_{1,2} &= -x_{1,2} \\ \dot{z}_{1,2} &= -g(z_{1,2} - f(x_{1,2})) \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $x_{1,2}$, $y_{1,2}$, $z_{1,2}$ – динамические переменные первой и второй подсистемы; $m_{1,2}$ – параметры, управляющие возбуждением автоколебаний в парциальных генераторах;

g – параметр инерционности, который был зафиксирован при $g = 0.2$; $p = \omega_1 / \omega_2$ – параметр расстройки по собственным частотам парциальных генераторов; ε – коэффициент связи.

В отсутствие взаимодействия ($\varepsilon = 0$) в парциальных генераторах при отрицательных значениях параметра возбуждения ($m_{1,2}$) имеется единственное устойчивое состояние равновесия, расположенное в начале координат. При $m_{1,2} = 0$ состояние равновесия теряет устойчивость, происходит суперкритическая бифуркация Андронова–Хопфа. В системе мягко возбуждаются автоколебания, амплитуда которых растет пропорционально корню из надкритичности. При малых значениях параметра возбуждения наблюдаются квазигармонические автоколебания. Парциальный генератор при вариации управляющих параметров способен демонстрировать как периодические, так и хаотические автоколебания. Переход к хаосу осуществляется через каскад бифуркаций удвоения периода. Динамика генератора с инерционной нелинейностью в виде кусочной функции $f(x) = 0.25(|x| + x)^2$ подробно описана в литературе. Генератор с нелинейностью в виде $f(x) = \exp(x) - 1$ ведет себя качественно аналогичным образом.

3.3. Бифуркационный анализ колебательных режимов при отсутствии расстройки по параметрам

Рассмотрим динамику взаимодействующих генераторов (3.1) без расстройки по параметру возбуждения при $m_1 = m_2 = m = 0.1$ в зависимости от величины связи ε и расстройки p . При указанных $m_{1,2}$ парциальные генераторы демонстрируют квазигармонические автоколебания. Вначале исследуем устойчивые и неустойчивые состояния системы и их бифуркации, относящиеся к основной области синхронизации 1 : 1.

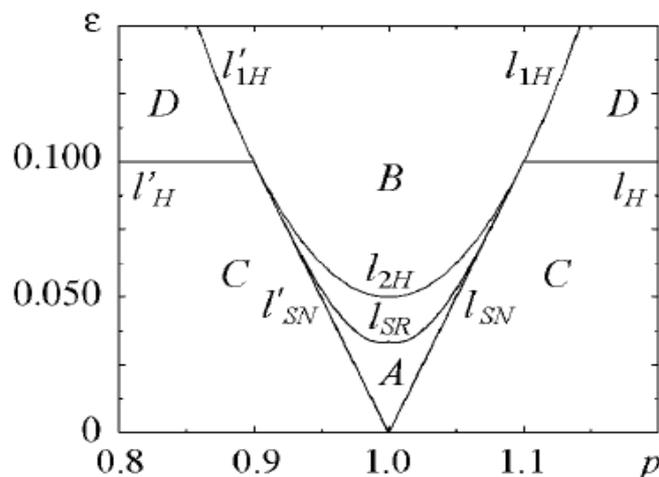


Рисунок 3.1. Линии бифуркаций при отсутствии расстройки по параметрам

На рис. 3.1 на плоскости параметров ($\varepsilon - p$) построены бифуркационные линии устойчивых и неустойчивых предельных циклов и неподвижных точек, относящихся к основной области синхронизации. Синхронные автоколебания наблюдаются в областях А и В, которые окружают

области квазипериодических колебаний C и области гашения автоколебаний D (или «амплитудной смерти»).

При значениях параметров из области A , ограниченной бифуркационными линиями I_{SN} , I_{SN} и I_{SR} , в фазовом пространстве системы существуют неустойчивая неподвижная точка P_R , три седловых предельных цикла C_S , C_P , C_R и устойчивый предельный цикл C_N (рис. 3.2).

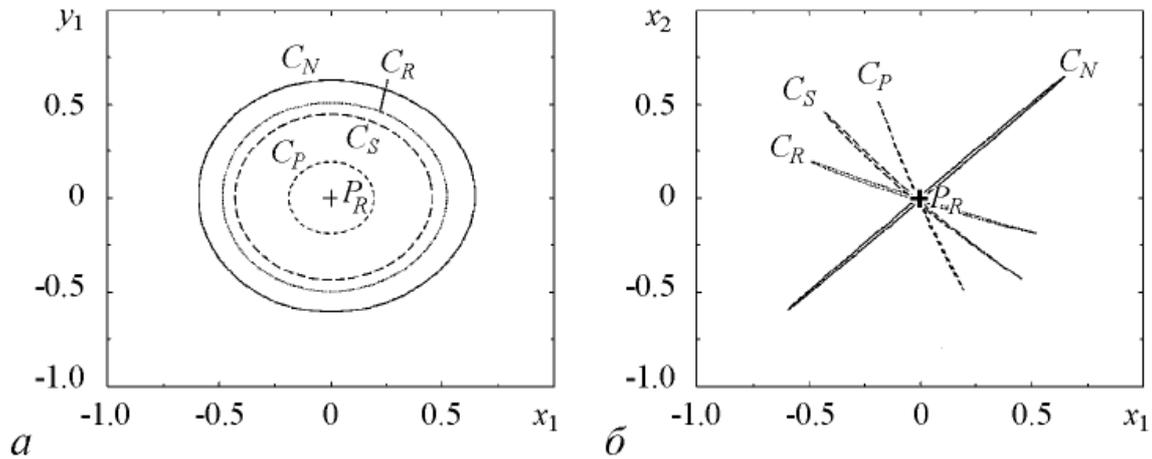


Рисунок 3.2. Проекция фазового портрета на плоскость $(y_1 - x_1)$ (а) и на плоскость $(x_2 - x_1)$ (б) при значениях параметров $m_1 = m_2 = 0.1$, $g = 0.2$, $\varepsilon = 0.025$, $p = 1.001$.

Предельные циклы соответствуют синхронным движениям с разными сдвигами фаз между временными реализациями в парциальных генераторах. Устойчивый цикл C_N отвечает режиму синфазной синхронизации периодических автоколебаний (строго синфазные колебания наблюдаются при $p = 1$). Седловой цикл C_S соответствует неустойчивым противофазным колебаниям. При эволюции изображающей точки на седловых циклах C_R и C_P парциальные системы совершают колебания, сдвиг фаз между которыми лежит в пределах от 0 до π для C_R , и от π до 2π для C_P . Седловые циклы C_P и C_R располагаются в фазовом пространстве симметрично друг другу относительно цикла C_S , как видно из рис.3.2б. Вычисление собственных значений неподвижной точки P_R показывает, что она является седлом.

На рис. 3.3 представлена бифуркационная диаграмма для предельных циклов и неподвижной точки в зависимости от параметра расстройки p при фиксированном значении коэффициента связи ε . На диаграмме по оси ординат отложены максимальные значения динамической переменной ($x_1 = x_{\max}$) соответствующих предельных циклов и неподвижной точки (для точки PR динамические переменные равны нулю). В середине интервала синхронизации устойчивый цикл C_N и седловой C_S имеют по две пары комплексно-

сопряженных мультипликаторов по модулю меньше единицы, и по одному действительному мультипликатору соответственно меньше и больше единицы.

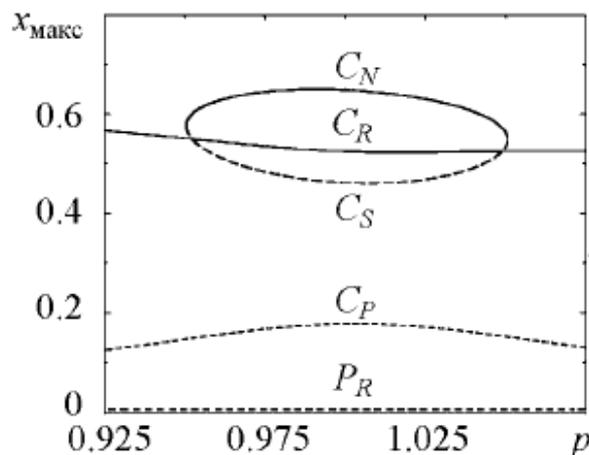


Рисунок 3.3. Бифуркационная диаграмма предельных циклов и состояния равновесия

Седловые циклы C_R и C_P имеют по паре действительных больших единицы мультипликаторов, по паре комплексно–сопряженных по модулю меньших единицы и по одному действительному меньшему единицы мультипликатору. Лежащие на торе предельный цикл C_N и седловой цикл C_S сближаются друг с другом по мере приближения управляющего параметра p к бифуркационным линиям l_{SN} и l'_{SN} . На этих линиях они сливаются, по одному действительному мультипликатору принимают значение $+1$ и за точкой бифуркации (в области C на рис. 3.1) исчезают. Теперь в фазовом пространстве имеется притягивающий эргодический двумерный тор. Фазовые траектории покрывают его, нигде не замыкаясь. При эволюции изображающей точки на этом двумерном торе в системе наблюдается режим квазипериодических колебаний с двумя несоизмеримыми частотами. Седловые циклы C_R , C_P и неподвижная точка P_R при выходе из области синхронизации A с изменением расстройки p никаких бифуркаций не претерпевают и по–прежнему имеют трехмерные устойчивые и трехмерные неустойчивые многообразия. Таким образом, в области квазипериодических колебаний C фазовый портрет системы образуют притягивающий эргодический тор, седловые предельные циклы C_R и C_P и, расположенная в начале координат, неустойчивая неподвижная точка P_R .

Рассмотрим теперь, что происходит при увеличении связи ε . Зафиксируем $m = 0.1$, $p = 1.034$ и будем следить за бифуркациями указанных выше предельных множеств. Бифуркационная диаграмма представлена на рис. 3.4. При слабой связи в фазовом пространстве имеется притягивающий тор, седловые циклы C_P и C_R , неустойчивая неподвижная точка P_R . С увеличением ε при пересечении линии l_{SN} (см. рис. 3.1) на торе рождается устойчивый предельный цикл C_N и седловой цикл C_S . На бифуркационной диаграмме (рис. 3.4) это соответствует точке b_{SN} , из которой выходят две ветви. Сплошная линия образована

значениями динамической переменной на устойчивом цикле C_N , а линия из длинных штрихов – значениями на седловом цикле C_S . При дальнейшем увеличении связи на линии l_{SR} плоскости параметров $(\varepsilon - p)$ (см. рис. 3.1) происходит субкритическая бифуркация вил. Седловые циклы C_P и C_R приближаются к седловому циклу C_S и на линии l_{SR} влипают в него. Выше точки бифуркации остается седловой предельный цикл C_S уже с другим характером устойчивости. Анализ мультипликаторов циклов показывает, что до точки бифуркации седловые циклы C_P и C_R имеют трехмерные устойчивые многообразия и трехмерные неустойчивые многообразия, а седловой цикл C_S – четырехмерные устойчивые и двумерные неустойчивые многообразия, последние замыкаются на устойчивый предельный цикл, образуя двумерный тор. За точкой субкритической бифуркации вил седловой цикл C_S превращается в седловой предельный цикл с трехмерными устойчивыми и трехмерными неустойчивыми многообразиями, что приводит к разрушению двумерного тора, на котором лежали резонансные циклы. На бифуркационной диаграмме рис. 3.4 точка бифуркации вил обозначена как b_p .

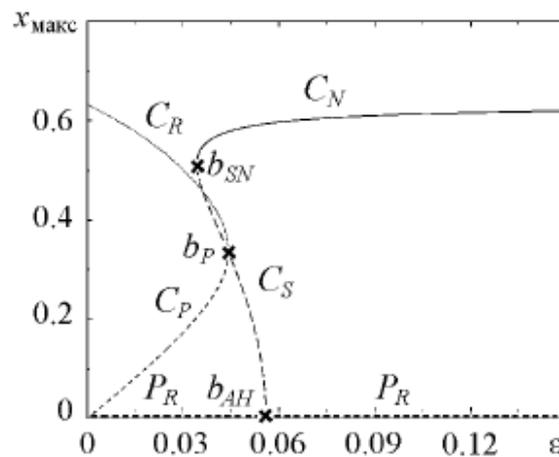


Рисунок 3.4. Бифуркационная диаграмма для предельных циклов и точки равновесия в зависимости от коэффициента связи ε при фиксированных значениях параметров $m_1 = m_2 = 0.1, g = 0.2, p = 1.034$

При значениях коэффициента связи из области, ограниченной линиями l_{SR} и l_{2H} на плоскости параметров рис. 3.1, фазовый портрет системы образуют неустойчивая неподвижная точка P_R , седловой цикл C_S и устойчивый цикл C_N . Двумерного тора выше линии l_{SR} уже нет, он был разрушен в результате субкритической бифуркации вил седлового цикла C_S . С этой бифуркацией связан переход из области захвата А в область подавления В основного языка синхронизации на рис. 3.1. При дальнейшем увеличении ε радиус седлового предельного цикла C_S уменьшается, и на линии l_{2H} он стягивается в неустойчивую неподвижную точку P_R , происходит бифуркация Андронова–Хопфа.

При сильной связи, выше линии l_{2H} в области синхронизации В на рис. 3.1, в фазовом пространстве системы имеется устойчивый предельный цикл C_N и неустойчивая точка P_R . В этом случае увеличение расстройки p приводит к эффекту гашения автоколебаний (или «амплитудной смерти»). По мере увеличения расстройки по собственным частотам p амплитуда автоколебаний в каждом из генераторов плавно уменьшается до нуля. На рис. 3.5 представлена бифуркационная диаграмма для предельного цикла и неподвижной точки. При совпадении собственных частот парциальных генераторов ($p = 1$) радиус устойчивого предельного цикла C_N отвечающий режиму синхронизации, имеет максимальное значение. С увеличением или уменьшением параметра расстройки p радиус предельного цикла плавно уменьшается, и на бифуркационных линиях l_{1H} и l'_{1H} (см. рис. 3.1) цикл стягивается в точку равновесия в начале координат. При переходе из области В в область D неподвижная точка P_R превращается из неустойчивого седло–фокуса в устойчивый фокус. Здесь имеет место суперкритическая бифуркация Андронова–Хопфа. В области D в фазовом пространстве системы имеется только устойчивая неподвижная точка P_R . Автоколебания в системе отсутствуют, взаимодействие привело к гашению колебаний, хотя каждый из парциальных генераторов при выключенной связи находится в возбужденном состоянии. При переходе из области D в область В (см. рис. 3.1), например, при фиксированной связи ε с изменением расстройки p плавно возбуждаются периодические автоколебания. Однако при переходе из области D в область С, например, с уменьшением величины связи при фиксированной расстройке p в системе мягко возбуждаются квазипериодические автоколебания. Границей перехода от режима гашения к режиму квазипериодических колебаний являются бифуркационные линии l_H и l'_H .

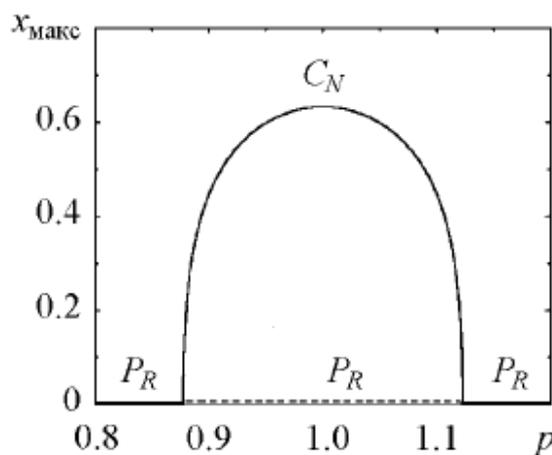


Рисунок 3.5. Бифуркационная диаграмма для предельного цикла и точки равновесия в зависимости от расстройки p при фиксированных значениях $m_1 = m_2 = 0.1$, $g = 0.2$ и $\varepsilon = 0.125$

На линиях l_H и l'_H действительные части комплексно–сопряженных собственных значений обращаются в ноль (две пары чисто мнимых собственных значений), а ниже линий

становятся положительными. В результате, в окрестности неподвижной точки P_R мягким образом рождаются притягивающий тор T и седловые циклы C_P и C_R . С уменьшением связи эти предельные множества (неподвижная точка, два предельных цикла и притягивающий тор) расходятся друг от друга.

Описанный бифуркационный переход рождения из неподвижной точки притягивающего тора и двух седловых циклов относится к числу вырожденных. Обусловлено это идентичностью парциальных генераторов, поскольку параметры возбуждения m_1 и m_2 равны. Идентичность по параметрам, управляющим бифуркацией рождения цикла в несвязанных генераторах, приводит не только к этой вырожденной ситуации, но и к бифуркации вил, которая происходит на линии l_{SR} основного языка синхронизации (см. рис. 3.1), и в которой участвуют седловые циклы C_S , C_P , C_R (см. бифуркационную диаграмму на рис. 3.4). Введение неидентичности генераторов по параметру m устраняет эти вырождения вполне определенным образом и приводит к типичным бифуркационным переходам.

3.4. Влияние расстройки по параметру возбуждения генераторов на бифуркационный механизм синхронизации и подавления колебаний.

Рассмотрим динамику слабо неидентичных связанных генераторов в окрестности основного языка синхронизации более подробно. На рис. 3.6 на плоскости параметров ($\epsilon - p$) построены линии бифуркационных значений основной области синхронизации для слабо неидентичных генераторов. Здесь также как в идентичном случае, область синхронизации через захват обозначена буквой A , область синхронизации через подавление – B , область квазипериодических колебаний – C , область гашения колебаний – D . Видно, что слабая неидентичность приводит к существенному изменению структуры пространства параметров. На границе перехода между областями C и D появился канал, в котором существует устойчивый предельный цикл, отвечающий режиму синхронизации, в широком интервале расстроек по собственным частотам. Произошло частичное изменение характера бифуркационных переходов. Проанализируем эти изменения более детально.

В области A фазовый портрет системы такой же как и в предыдущем случае (см. рис. 3.2). Его образуют неустойчивая неподвижная точка P_R , седловые циклы C_P , C_R и резонансные циклы на торе – седловой C_S и устойчивый C_N . Выход из режима синхронизации при малом ϵ по-прежнему происходит на линиях l_{SN} и l_{SN} через седло–узловые бифуркации циклов C_N и C_S . Здесь в фазовых портретах и бифуркационных переходах по сравнению с симметричным случаем никаких изменений не произошло.

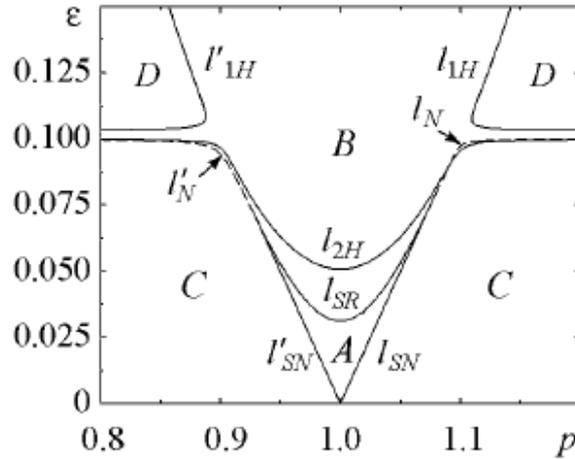


Рисунок 3.6. Линии бифуркационных значений на плоскости управляющих параметров «коэффициент связи – расстройка по собственным частотам» при $m_1 = 0.105$, $m_2 = 0.1$, $g = 0.2$

Изменения в структуре пространства параметров наблюдаются в области больших значений ε . На рис. 3.7 представлена бифуркационная диаграмма для предельных циклов и точки равновесия с ростом коэффициента связи ε при малой фиксированной расстройке по частотам ($p = 1.034$). При слабой связи, левее точки b_{SN} (на рис. 3.6 ниже линии l_{SN}), имеется неустойчивая неподвижная точка P_R , два седловых цикла C_P , C_R и притягивающий двумерный тор. С увеличением ε в точке b_{SN} происходит бифуркация и на торе рождается пара циклов C_N и C_S . С дальнейшим ростом связи седловой цикл C_S с двумерными неустойчивыми и четырехмерными устойчивыми многообразиями сближается с другим седловым циклом C_R , у которого трехмерные устойчивые и трехмерные неустойчивые многообразия.

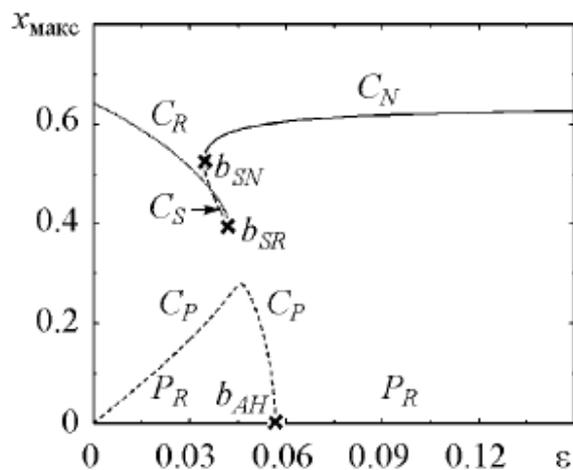


Рисунок 3.7. Бифуркационная диаграмма для предельных циклов и точки равновесия в зависимости от коэффициента связи ε в случае расстройки генераторов по параметру возбуждения ($m_1 = 0.105$, $m_2 = 0.1$) и при фиксированных значениях $g = 0.2$, $p = 1.034$

В точке b_{SR} они сливаются и исчезают за бифуркационной точкой, что приводит к разрушению тора, на котором лежали резонансные циклы – устойчивый C_N и седловой C_S . Далее по параметру происходит еще одна бифуркация. Из рис. 3.7 видно, что с увеличением связи

седловой цикла C_P вначале увеличивается в размере, а затем плавно уменьшается. В точке b_{AH} происходит бифуркация Андронова–Хопфа. Состояние равновесия P_R из неустойчивого седло–фокуса с двумя парами комплексно–сопряженных собственных значений с положительными действительными частями превращается в неустойчивый седло–фокус, у которого одна пара комплексно–сопряженных собственных значений с отрицательными действительными частями и одна с положительными. (Два оставшихся действительных и отрицательных собственных значения при данной бифуркации не меняются.) В области синхронизации B в фазовом пространстве имеется неустойчивая точка P_R и устойчивый предельный цикл C_N . Таким образом, небольшая расстройка по m привела к устранению бифуркации вил. Разрушение тора при переходе из области синхронизации через захват в область синхронизации через подавление происходит теперь в результате седло–седло бифуркации двух циклов C_S и C_R .

3.5. Исследование влияния шума на бифуркации удвоения периода в автоколебательной среде

Для того, чтобы сконструировать модель автоколебательной среды со сложной динамикой, в качестве элементарной ячейки среды был взят генератор с инерционной нелинейностью Анищенко-Астахова (ГИН), задаваемый уравнениями

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = mx + y - xz, \\ \frac{dy}{dt} = -x, \\ \frac{dz}{dt} = -gz + g\Phi(x), \end{cases} \quad (3.2)$$

где $\Phi(x) = \frac{x}{2}(x + |x|)$; x, y, z - безразмерные динамические переменные; t - безразмерное время; а m и g - управляющие параметры системы. Замкнув цепочку из N таких генераторов с диффузионной (резистивной) связью в кольцо и перейдя к $N \rightarrow \infty$ и бесконечно малому размеру ячейки, можно получить модель автоколебательной среды в виде следующей системы уравнений в частных производных:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = mx + y - xz + \gamma \frac{\partial^2(x - y)}{\partial s^2}, \\ \frac{\partial y}{\partial t} = -x, \\ \frac{\partial z}{\partial t} = -gz + g\Phi(x), \end{cases} \quad (3.3)$$

где x, y, z являются уже не только функциями времени, но и безразмерной пространственной координаты s ; γ - коэффициент диффузии, определяемый величиной связи между соседними ячейками.

Среда исследовалась с периодическими граничными условиями с периодом L , где L – длина системы. Во всех численных экспериментах фиксировались $L = 100$ безразмерных единиц, коэффициент диффузии $\gamma = 0.1$ и параметр $g = 0.2$. Параметр m изменялся от 0.9 до 1.5.

Система (3.3) интегрировалась с использованием спектрального метода. Для каждого исследуемого режима число учитываемых пространственных гармоник подбиралось таким образом, чтобы дальнейшее увеличение числа гармоник уже не приводило к существенным изменениям формы колебаний в пространстве и времени. Чем более сложным был исследуемый режим, тем большее число пространственных гармоник учитывалось. Приемлемая точность вычислений в режиме динамического хаоса достигается только при очень большом количестве учитываемых гармоник. По этой причине хаотическая динамика среды в рамках данной работы практически не рассматривалась. В результате численного интегрирования строились проекции фазовых траекторий в отдельных точках среды, а также мгновенные пространственные профили для одной из переменных.

Мгновенным пространственным профилем колебаний среды будем называть распределение $x(s)$ в фиксированный момент времени t_0 , соответствующий определенному состоянию среды в точке $s = 0$. В проведенных расчетах обычно выбиралось состояние, в котором $x(0, t_0) = 0 \pm 10^{-3}$, $y(0, t_0) > 0$. В установившемся режиме периодических во времени колебаний пространственный профиль данной моды полностью повторяется через период колебаний. Если колебания не являются периодическими (квазипериодический или хаотический режим), то даже для установившихся колебаний мгновенный профиль не повторяется, и каждый раз, при заданном состоянии в точке $s = 0$, мы получаем новый профиль.

Выбор той или иной устойчивой моды первоначально достигался заданием пространственного периода гармонических начальных условий. "Настройка" на нужную моду проводилась в квазигармоническом режиме, затем выбранный режим отслеживался при движении с малым шагом по параметру.

При значениях параметров, указанных выше, в системе сосуществует несколько устойчивых пространственных мод с различными волновыми числами: $k = 0$ (пространственно-однородный режим) и $k = 2\pi n/L$ (пространственно-неоднородные режимы, т.е. режимы бегущих волн), где $n = 1, 2, 3$ число длин волн укладывающихся на длине системы в квазигармоническом режиме (рисунок 3.8).

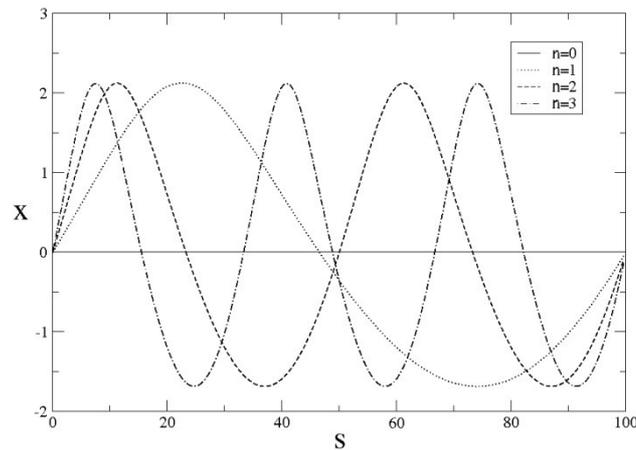


Рисунок 3.8. Мгновенные пространственные профили режимов сосуществующих в среде (3.3) при $m = 0.966$

Одной из основных характеристик режима, служащей важным инструментом исследования, является мгновенное распределение сдвига фазы пространственных колебаний вдоль длины системы. Его зависимость от пространственной координаты рассчитывалась по формуле:

$$\varphi(s) = \Phi(0) - \Phi(s), \Phi(s) = \arctg \frac{y(s, t_0)}{x(s, t_0)} \pm \pi i, \quad (3.4)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, t_0 = const,$$

где значение i выбиралось исходя из условия непрерывности функции $\Phi(s)$. С помощью этой характеристики из условия

$$n = \frac{\varphi(L)}{2\pi} \quad (3.5)$$

можно определить число n в данном режиме.

В случае квазигармонических колебаний, когда пространственный профиль имеет форму, близкую к синусоидальной, n показывает, сколько раз длина волны укладывается вдоль длины системы и может быть легко определено по виду мгновенного профиля (рисунок 3.8). Однако с ростом параметра возбуждения m профиль любого из сосуществующих режимов сильно усложняется, и определить числа n и k по виду профиля становится невозможным. Выражение (4) позволяет определять n в любом режиме. Будем называть число n , задаваемое выражением (4), номером моды. С помощью числа n можно различать и отслеживать различные моды при любом характере колебаний во времени и для любого вида пространственного профиля.

При значении параметра $m = 0.966$ в каждом элементе среды наблюдаются квазигармонические колебания во времени, аналогичные колебаниям в одиночном генераторе Анищенко-Астахова при тех же параметрах.

Пространственно-однородный режим $n = 0$ соответствует колебаниям всех точек среды в одной фазе: $\varphi(s) = 0$. В силу однородности самой среды ($m = \text{const}, g = \text{const}, \gamma = \text{const}$) колебания во всех её точках в этом случае совершенно одинаковы. Пространственно-неоднородные моды $n = 1, 2$ и 3 в квазигармоническом режиме колебаний во времени представляют собой бегущие волны с квазигармоническим пространственным профилем и различной длиной волны $\lambda = L/n$ (рисунок 3.8). Сдвиг фазы линейно нарастает вдоль среды (рисунок 3.9). Для моды $n = 1$ в квазигармоническом режиме на длине системы укладывается одна волна ("одноволновая" мода). Для $n = 2$ на длине системы укладывается две длины волны ("двухволновая" мода) и т.д.

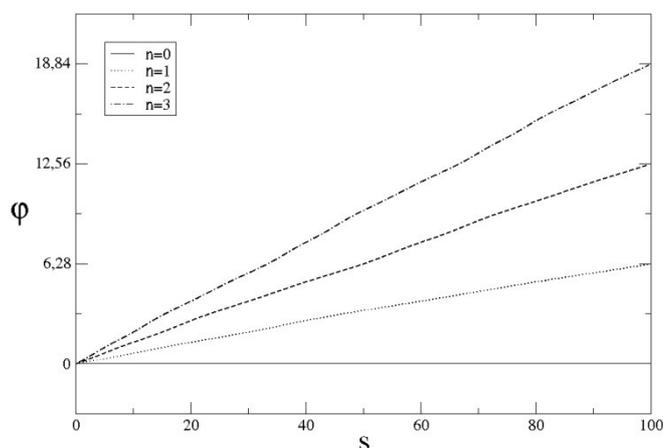


Рисунок 3.9 – Мгновенные распределения сдвига фазы $\varphi(s)$ вдоль длины системы при $m = 0.966$

Рассматривалось воздействие аддитивного шума на среду в режимах с различными номерами n . Будем исследовать шум, представляющий собой воздействие одной и той же случайной -коррелированной во времени силы $F(t) = \sqrt{2D}n(t)$ на все точки среды. Здесь $n(t)$ – нормированный источник гауссова белого шума (со средним значением $\langle n(t) \rangle \equiv 0$ и корреляцией $\langle n(t)n(t + \tau) \rangle = \delta(\tau)$), D – константа, характеризующая интенсивность шума. Если воздействовать такой силой только на некоторый участок среды, то качественных изменений наблюдаемых эффектов не будет. Уменьшение длины участка, подверженного действию случайной силы, оказывается эквивалентным уменьшению интенсивности шума. Проведенные исследования показали, что разные моды по-разному устойчивы к шуму. Чем больше номер n , тем меньшей интенсивности шума D достаточно, чтобы данный режим перестал существовать. При этом система переключается в режим с номером $n - 1$. При этом система не возвращается в режим с номером n ни с течением времени, ни при изменении начальных условий. Таким образом, можно говорить о том, что шум подавляет

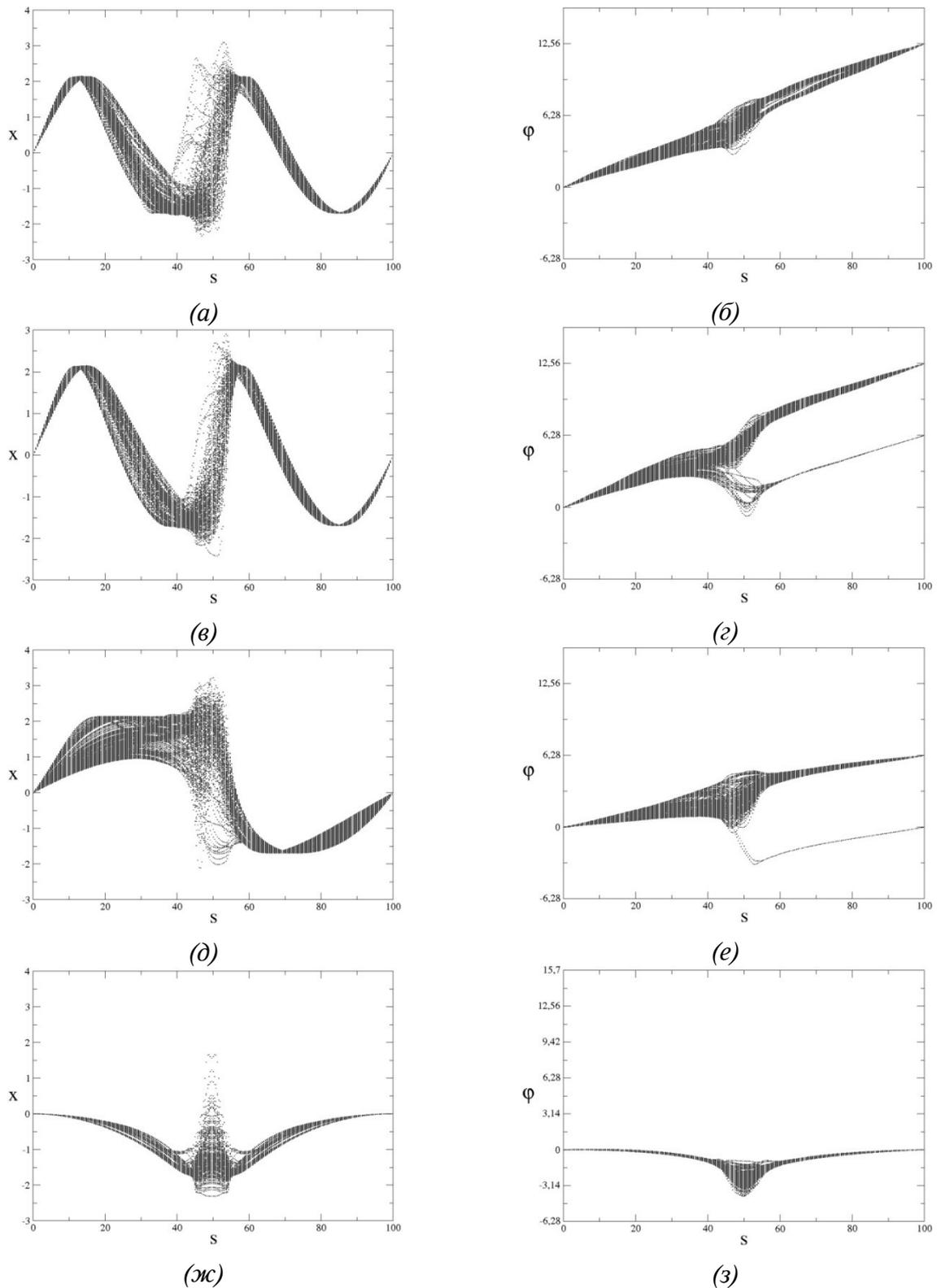


Рисунок 3.10. Пространственные профили (а,в,д,ж) и распределения сдвигов фазы (б,г,е,з) для $n = 2$ при различных интенсивностях шума ($D = 0.0120, 0.0130, 0.0140$ и 0.0150 , сверху вниз)

пространственно-неоднородные моды, начиная с больших значений номера n (рисунок 3.10).

При достаточно сильном шуме в кольце можно наблюдать только зашумленный пространственно-однородный режим, которому соответствует нулевой средний сдвиг фазы на

всей длине системы: $\bar{\varphi}(L) = 0$ (рисунок 3.9з). Похожие эффекты наблюдались в кольце периодических генераторов и, по-видимому, носят достаточно общий характер.

Выберем значение интенсивности шума D таким, чтобы все устойчивые моды, наблюдаемые без шума, еще сохранялись, и рассмотрим, как влияет шум на удвоения периода колебаний. Если зафиксировать значение m , соответствующее колебаниям удвоенного периода для данной моды, то увеличивая интенсивность шумового воздействия можно наблюдать, что с ростом шума фазовые портреты колебаний "замазываются" таким образом, что становится невозможно различить два витка на предельном цикле (рисунок 3.10). Такое же поведение под действием шума имеет место в сосредоточенных системах малой размерности и отображениях последования.

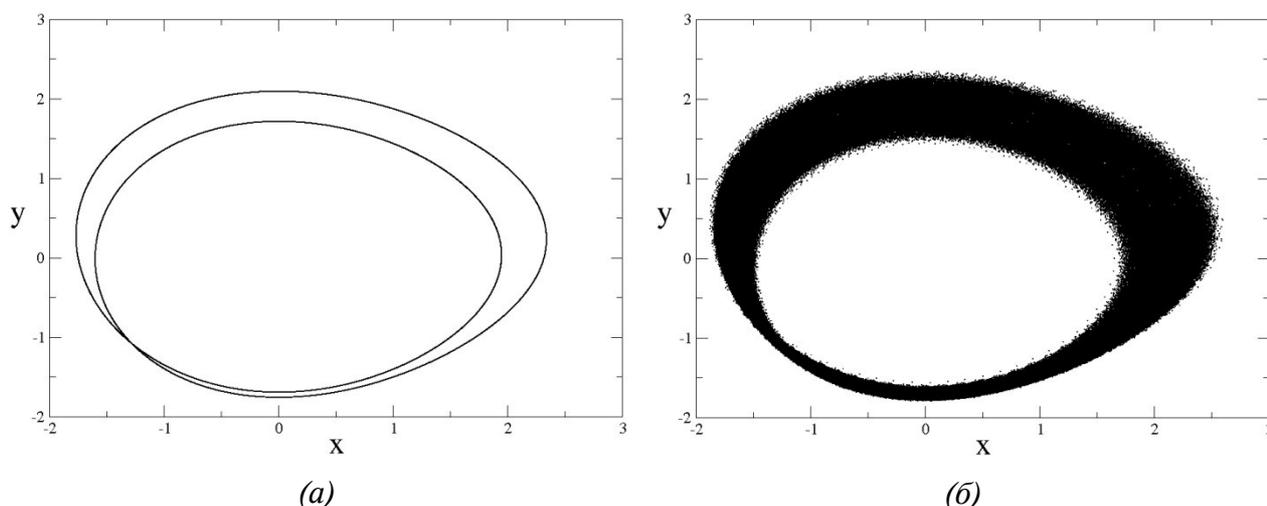


Рисунок 3.11. Фазовые портреты колебаний моды $n = 0$ в точке $s = 25$ при $m = 0.972$ без шума (а) и при действии шума с интенсивностью $D = 0.0001$ (б)

В среде с ростом интенсивности шума имеют место стохастические бифуркации связанности (или обратные бифуркации удвоения). Они представляют собой бифуркации феноменологического типа (так называемые Р-бифуркации), состоящие в качественном преобразовании плотности вероятности динамических переменных. Рассмотрим эволюцию распределения переменной $x(s, t)$ в точке пространства s . Если без шума имели место колебания удвоенного периода, то при достаточно малом шуме практически во всех точках среды устанавливается стационарное распределение $p(x, s)$, имеющее четыре локальных максимума. С ростом интенсивности шума D происходит постепенная эволюция распределения, приводящая к изменению числа максимумов: их становится два. Значение $D = D_c$, при котором происходит изменение числа максимумов, соответствует стохастической бифуркации.

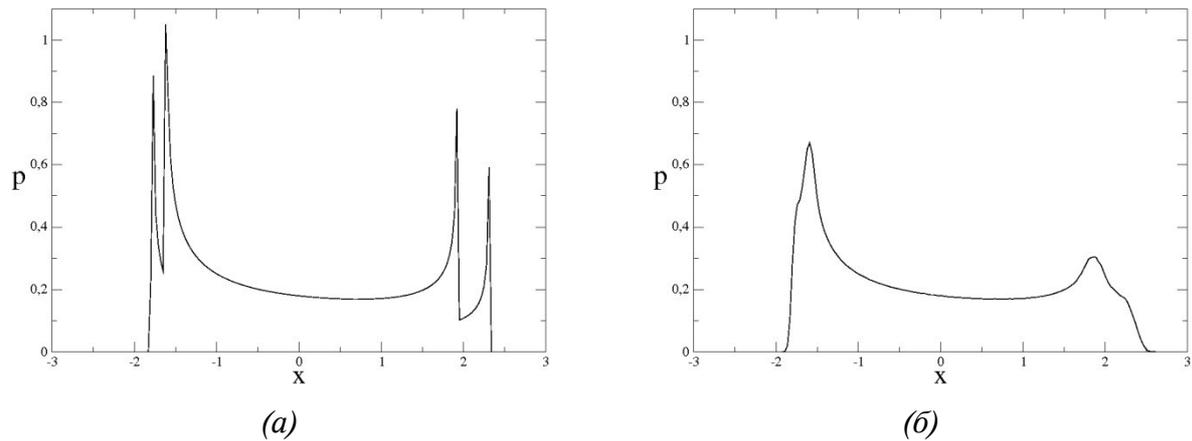


Рисунок 3.12. Вызванные шумом бифуркации связанности в среде при $m = 0.972$: а, б – плотности вероятности $p(x, s)$ в точке $s = 25$, полученные для однородного режима $n = 0$ при однородном шуме с интенсивностью $D = 0.0000001$ (а) и $D = 0.0001$ (б)

Стохастические бифуркации связанности наблюдались для всех существующих устойчивых мод. На рисунке 3.11 приведены примеры распределений $p(x, s)$ в фиксированных точках s , полученные для моды $n = 0$ при различных значениях интенсивности шума D . Они иллюстрируют стохастические бифуркации связанности. Проведенные исследования показывают, что изменение числа максимумов распределения $p(x, s)$ происходит одновременно во всех точках среды как для однородной моды $n = 0$ так и для неоднородных мод. Одновременность наблюдается даже при локальном характере шумового воздействия и несмотря на то, что для $n \neq 0$ расстояние между витками траектории на фазовом портрете сильно меняется в зависимости от координаты s ! Если и существует бифуркационный интервал значений $D_c(s)$, то он очень мал. Во всяком случае, для всех значений s переход от распределения с четырьмя максимумами к распределению с двумя максимумами наблюдался для очень близких значений интенсивности D_c , различия между которыми укладывались в пределы ошибки численного эксперимента.

Имеется некоторая особенность шумового воздействия на неоднородные моды в режиме удвоенного периода вблизи его возникновения. Шум как бы "возвращает" систему в квазипериодический режим, порождая медленную модуляцию колебаний во времени и характерные медленные изменения пространственной структуры точек сечения. Однако огибающая в данном случае является не периодическими колебаниями, а медленным случайным процессом (рисунок 3.12).

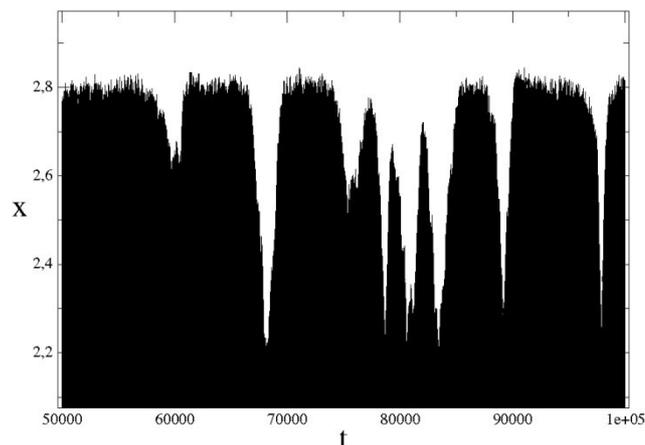


Рисунок 3.13. Режим медленной случайной модуляции, наблюдающийся для моды $n = 1$ при $m = 1.03$ в результате действия шума с интенсивностью $D = 0.00001$: фрагмент зависимости переменной x от времени в точке $s = 40$

Если зафиксировать интенсивность шума и увеличивать параметр m , то число максимумов распределения при некотором бифуркационном значении параметра будет удваиваться. То есть вместо бифуркаций связанности в этом случае правильнее говорить о стохастических бифуркациях удвоения. В действительности это одни и те же бифуркации, которым на плоскости параметров m, D соответствуют одни и те же бифуркационные линии, разделяющие области с разным числом экстремумов. Соответствующие линии, построенные для разных мод, представлены на рисунке 3.13.

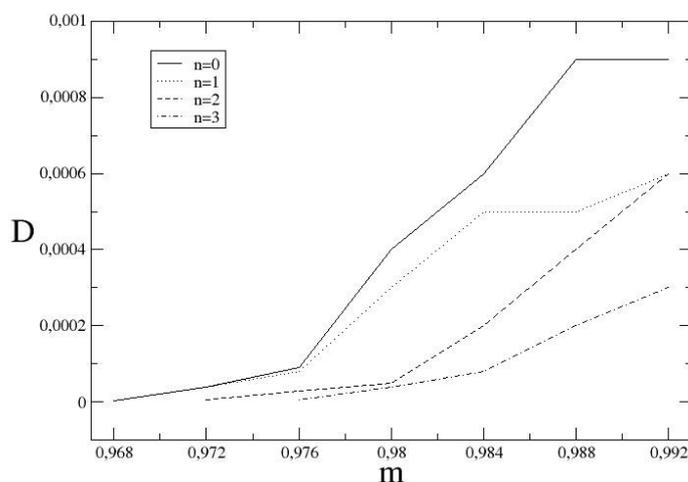


Рисунок 3.14. Зависимость критического значения интенсивности шума D_c от параметра возбуждения m для мод с различным числом n

Можно видеть, что бифуркации удвоения с ростом интенсивности шума все больше "запаздывают", смещаясь в сторону больших m . Это же происходит с ростом номера моды: удвоение происходит позже, а бифуркация связанности с ростом D наблюдается раньше.

3.6. Выводы

Исследована динамика двух диссипативно связанных генераторов с инерционной нелинейностью, в которой наблюдается развитая мультистабильность. Исследованы

бифуркационные переходы к режимам синхронизации и бифуркационный механизм эффекта гашения колебаний. На плоскости управляющих параметров построены соответствующие линии бифуркационных значений как для случая идентичных по параметру возбуждения парциальных генераторов, так и для случая слабой неидентичности. Показано, что в системе с мультистабильностью механизмы синхронизации отличаются от соответствующих механизмов в системах с простым устройством фазового пространства.

4. Анализ возможность корректной оценки параметров динамической системы, содержащей источник шума, на основании обработки реализаций одной или нескольких динамических переменных

4.1 Введение

Оценка параметров динамических систем, содержащих источники шума, по реализациям динамических (фазовых) переменных является частью глобальной задачи реконструкции динамических систем и, на данный момент, сравнительно мало изучена. Актуальность задач такого характера связана с использованием методов реконструкции в устройствах защиты и передачи секретной информации. При этом требуется достаточно точная оценка управляющих параметров динамической системы. В рассмотренных ранее задачах реконструкции шум, как правило, добавлялся к сигналу системы, которая полагалась детерминированной. Разработаны и постоянно совершенствуются методы выделения полезного сигнала из шума. В то же время, проблемы, связанные с реконструкцией систем, содержащих источники шума, пока еще исследованы недостаточно. В ней исследуется возможность оценки параметров на примере осциллятора Ван дер Поля в режиме зашумленных автоколебаний. Однако предлагаемый в алгоритм оценки является слишком сложным и малоэффективным. Кроме того, на основании исследования лишь одной динамической системы в одном заданном режиме невозможно сделать достаточно общие выводы о возможностях оценки параметров зашумленных динамических систем в различных режимах колебаний.

В данном разделе исследуются методы корректной оценки параметров систем с источником шума при использовании численного моделирования исследуемых сигналов и их последующей обработки. Рассматривается следующая задача. Пусть модель динамической системы задана, то есть известны уравнения, определяющие в каждый момент времени состояние системы в отсутствие шума. Требуется определить значение управляющих параметров. Если система является детерминированной, то данная задача легко решается, так как значения параметров можно выразить через значения динамических переменных и их производных. Это можно сделать с высокой точностью, ограниченной только точностью алгоритма численного интегрирования и ошибками округления. Однако, если система

подвергается воздействию случайной силы, которое невозможно учесть, то оценки параметров в разные моменты времени оказываются случайными и могут сильно отличаться от истинного значения. Задача о корректной оценке параметров в этом случае оказывается не такой уж простой. Известно, что даже слабый шум может приводить к существенным изменениям в поведении динамической системы. Система особенно чувствительна к случайным воздействиям, если она находится вблизи бифуркационных состояний или в режиме негиперболического хаоса. Таким образом, возникает целый ряд вопросов. Возможна ли вообще достаточно точная оценка параметров нелинейной динамической системы при наличии случайного воздействия? Если такая оценка возможна, то как можно наиболее точно и быстрее ее определить? Как влияет на точность оценки уровень шума? Насколько чувствительной окажется точность оценки параметров к происходящим в системе бифуркациям и переходу в режим динамического хаоса? Цель данной работы — дать ответ на указанный ряд вопросов, используя простые классические модели нелинейной динамики

4.2. Оценка управляющего параметра осциллятора Ван дер Поля с аддитивным гауссовым шумом. Настройка параметров фильтрации и выбор методов оценки

Рассмотрим классическую модель автогенератора, добавив в нее источник шума:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = (\varepsilon - x^2)\dot{x} + \sqrt{2D}n(t),$$

где $n(t)$ — нормированный источник белого гауссова шума, для которого $\langle n(t) \rangle = 0$, $\langle n(t)n(t+\tau) \rangle = \delta(t)$ (скобки $\langle \dots \rangle$ означают усреднение по ансамблю реализаций), D — интенсивность шума, ω — частота собственных колебаний автогенератора. Можно представить модель в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = (\varepsilon - x^2)y - \omega_0^2 x + \sqrt{2D}n(t). \end{cases} \quad (4.1)$$

Для простоты будем оценивать только один параметр системы — ε , который является управляющим. Частоту колебаний положим постоянной и строго заданной: $\omega = 1$.

Система (4.1) интегрировалась методом Гюна с учетом случайного возмущения с шагом $h = 0.0001$. Для оценки значения параметра ε проводилась выборка полученных в результате интегрирования значений $x(t)$ и $y(t)$. Шаг выборки Δt был выбран в соответствии с

наилучшей получаемой оценкой параметра. Он составил $\Delta t = 1500$ (т.е. 1500 шагов интегрирования). Параметр \mathcal{E} оценивался по формуле:

$$\varepsilon_i = \frac{\dot{y}_i + \omega_0^2 x_i + x_i^2}{y_i}, \quad (4.2)$$

где $\mathcal{E} = 1, 2, \dots, n$ — номер шага выборки. Производная \dot{y}_i аппроксимировалась выражением:

$$\dot{y}_i = \frac{1}{12h} (y_{i-2} - 8y_{i-1} + 8y_{i+1} - y_{i+2}), \quad (4.3)$$

Разброс значений текущих оценок \mathcal{E} даже при оптимизации шага выборки оказывается очень большим (рис.4.1а). Проводилась фильтрация массива \mathcal{E} , из которого выбрасывались значения существенно отклоняющиеся от среднего. После такой фильтрации применялась оценка \mathcal{E} методом наименьших квадратов. Однако настройка и использование такого фильтра не всегда дают желаемый результат. Итоговая оценка параметра ε_0 по профильтрованному массиву ε_i определенная с помощью метода наименьших квадратов может в некоторых случаях давать очень большую (аномальную) ошибку $\Delta = |\varepsilon_0 - \varepsilon|$. Это связано с тем, что в (4.2) появляется деление на очень малую величину y_i .

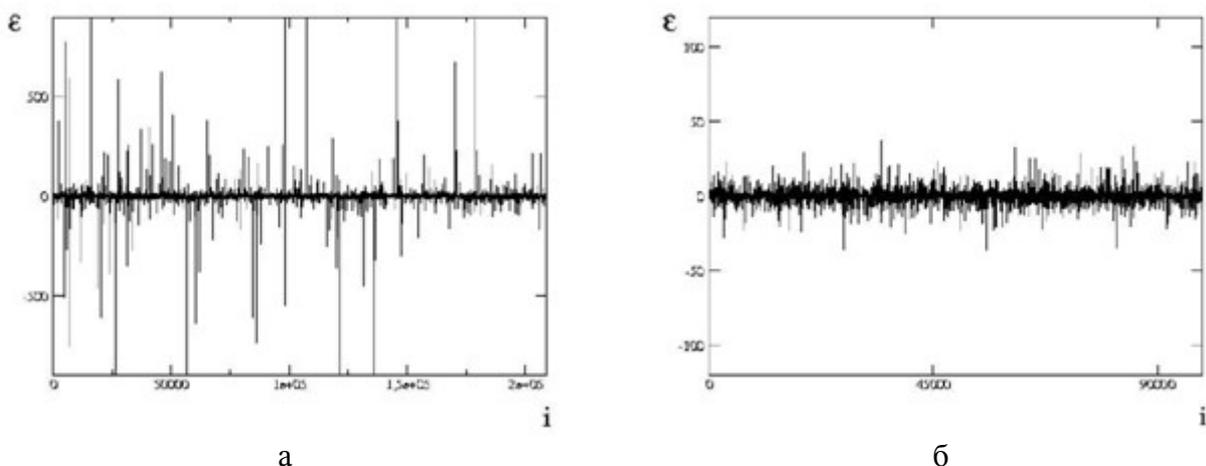


Рисунок 4.1. Массив текущих оценок параметра \mathcal{E} в системе (1); а - без фильтра малых значений y_i , б - с фильтром малых значений y_i . Результаты получены при интенсивности шума $D = 0.0001$

Чтобы уменьшить ошибку связанную с делением на малую величину в системах, где возникает такая необходимость, требуется фильтрация массива исходных данных (в рассматриваемом случае массива y_i . Для настройки такого фильтра необходимо выбрать конечный диапазон (в нашем случае $[-0.001; 0.001]$). Если значение координаты y_i текущей точки попадает в указанный диапазон, то такая точка исключается из дальнейшего рассмотрения. Следует заметить, что при расчете (4.3) нужно учитывать появившиеся «разрывы» последовательности и рассчитывать только те значения y_i , для которых существуют соседние точки. Массив

текущих оценок ε_i , полученный с применением фильтра малых величин, приведен на рис.4.16. Из приведенных данных видно, что разброс текущих оценок уменьшился на порядок.

Рассмотрим распределение текущих оценок ε_i полученных с использованием профильтрованных данных. Плотность вероятности $P(\varepsilon_i)$ приведена на рис.4.2а. Данное распределение является унимодальным и симметричным, поэтому среднее значение оценки $\langle \varepsilon_i \rangle = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \varepsilon_i$ совпадает с наивероятным значением ε_m , которое в соответствии с критерием максимального правдоподобия, должно служить оценкой параметра ε_0 .

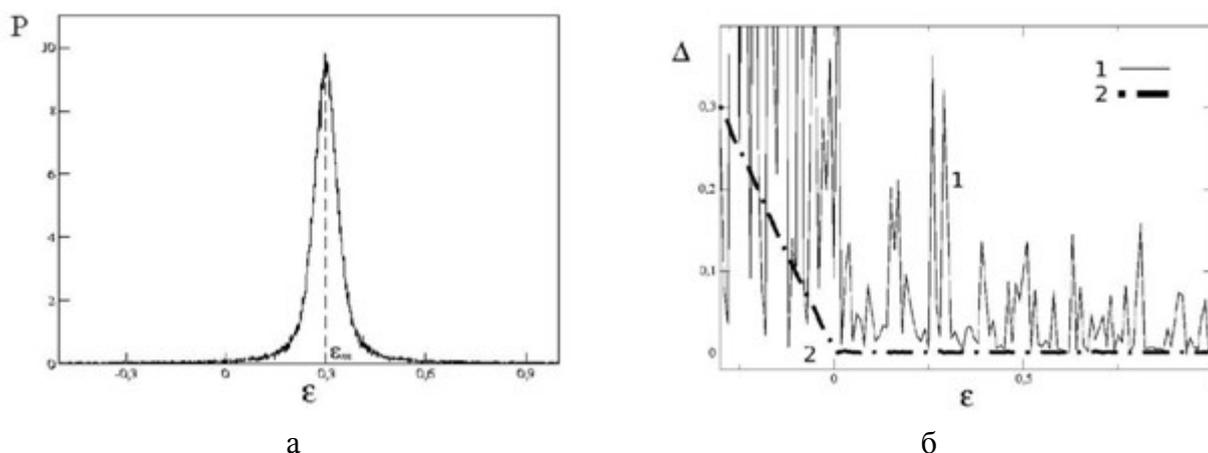


Рисунок 4.2. Результаты расчетов для системы (1): а - распределение значений ε_i при $D = 0.0001$; б - зависимость ошибки Δ от истинного значения ε при $D = 0.0001$, полученная без применения фильтра малых значений (кривая 1) и с применением фильтра (кривая 2).

На рис.4.2б приведены значения ошибки оценки $\Delta = |\varepsilon_0 - \varepsilon|$ в зависимости от истинного значения параметра ε , полученные без применения фильтра малых \mathcal{Y}_i и после его применения. Видно, что без фильтра ошибка Δ в некоторых точках и, особенно до порога генерации ($\varepsilon < 0$), оказывается очень велика (кривая 1). После применения фильтра ошибка становится заметно меньше (кривая 2), а для режима генерации ($\varepsilon > 0$) не превосходит 10^{-2} .

Однако, при отрицательных значениях ε (в области существования устойчивой точки равновесия в нуле координат) оценка параметра и после применения фильтра малых значений оказывается значительно хуже, чем в области генерации. В то же время можно утверждать, что сама бифуркация Андронова-Хопфа в точке $\varepsilon = 0$ слабо влияет на точность оценки.

Для определения точности оценки параметра с ростом интенсивности воздействующего на систему шума введем в рассмотрение относительную ошибку $\Lambda = \frac{\Delta}{\varepsilon}$, где ε — истинное значение управляющего параметра. На рис.4.3 представлена зависимость относительной

ошибки оценки Δ от интенсивности шума D . Из полученного графика можно определить, что воздействующий в достаточно большом диапазоне интенсивностей шум не влияет на величину относительной ошибки, которая не превосходит 0.04 единицы или 4%.

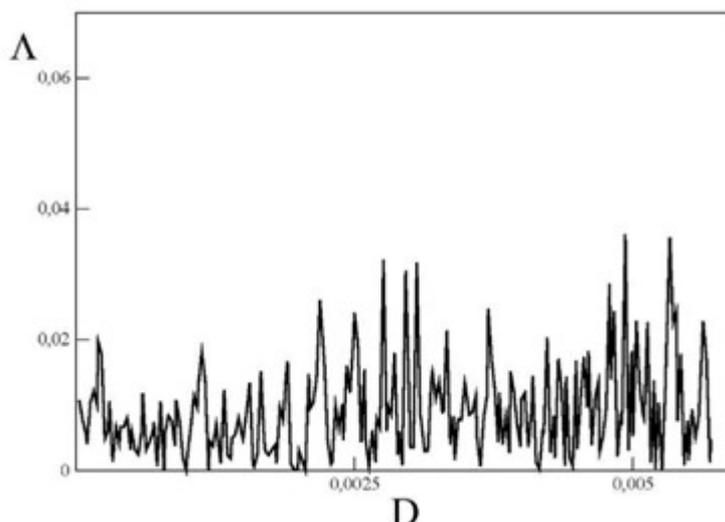


Рисунок 4.3. Влияние интенсивности шума D на величину относительной ошибки Δ в оценке управляющего параметра ε системы (1) ($\varepsilon = 0,4$).

4.3. Оценка параметров в зашумленных системах со сложной динамикой. Влияние бифуркаций удвоения периода циклов и перехода к хаосу

Отработанные для модели (4.1) методы оценки одного из параметров системы с шумом были применены к двум моделям генераторов, демонстрирующих бифуркации удвоения периода и переход к хаосу. Первая модель представляет собой генератор с инерционной нелинейностью Анищенко-Астахова:

$$\begin{cases} \dot{x} = m x + y - x z + \sqrt{2D}n(t), \\ \dot{y} = -x, \\ \dot{z} = -g z + g I(x)x^2, \end{cases} \quad I(x) = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x \leq 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

а второй — осциллятор Ресслера:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z + \sqrt{2D}n(t), \\ \dot{y} = x + ay, \\ \dot{z} = b + z(x - m), \end{cases} \quad (4.5)$$

где a, b, m — управляющие параметры. Обе модели дополнены источником аддитивного гауссова белого шума интенсивности D .

Рассмотрим модель (4). Будем оценивать управляющий параметр m , зафиксировав заданным второй параметр $g = 0.2$. Текущая оценка на i -м шаге дается формулой:

$$m_i = \frac{\dot{x}_i - y_i + x_i z_i}{x_i} \quad (4.6)$$

m_i , полученных по профильтрованным данным, приведено на рис.4.4,а. Оно, так же как и в случае с Ван дер Полем, является унимодальным и симметричным, поэтому за итоговую оценку m_0 можно принять среднее значение $\langle m_i \rangle$. Зависимости ошибки $\Delta = |m_0 - m|$ от истинного значения m в системе (4.4) при различных интенсивностях шума D приведены на рис.4.4б. В данном случае m_0 определялось как наиболее вероятное значение.

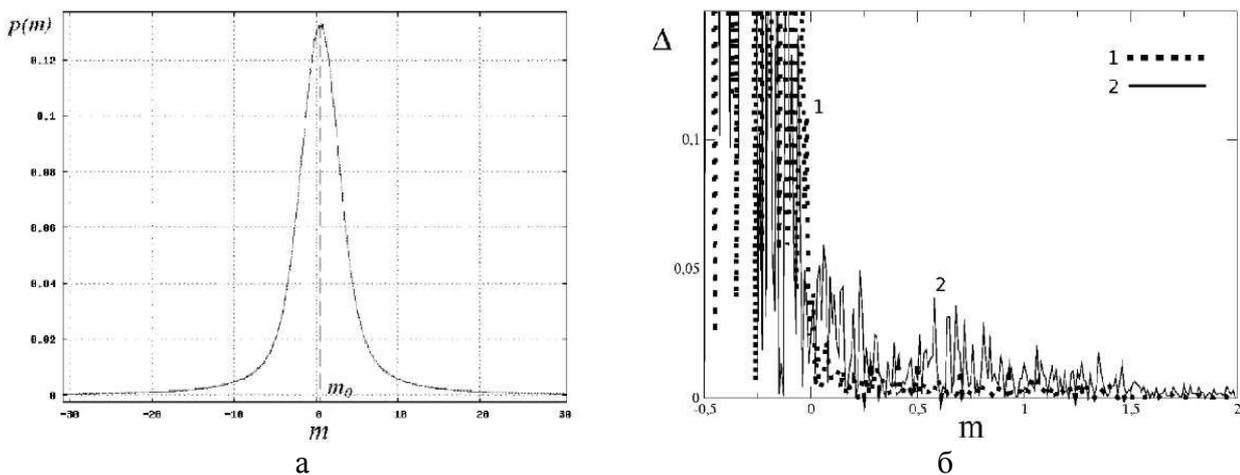


Рисунок 4.4. Результаты расчетов для системы (4): а - распределение значений m_i при $D = 0.0002$, $m = 0.4$; б - зависимость ошибки Δ от истинного значения m для различных значений интенсивности шума D : $D = 0.0001$ (кривая 1), $D = 0.001$ (кривая 2).

В области генерации ($m > 0$) даже при шуме $D = 0.001$ максимальная ошибка не превышает 0.06 и уменьшается с ростом m .

Важным вопросом, рассмотренным в данной работе, является влияние бифуркаций и перехода к хаосу на возможности оценки управляющего параметра зашумленной системы. В отсутствие шума в системе (4.4) имеют место следующие бифуркации: при $m = 0$ происходит суперкритическая бифуркация Андронова-Хопфа, приводящая к потере устойчивости состояния равновесия в начале координат и возникновению периодических автоколебаний; при $0 < m < 0.96$ существуют устойчивые периодические автоколебания со слабо зависящим от параметра m периодом T ; при дальнейшем увеличении m происходит каскад удвоений периода в соответствии со сценарием Фейгенбаума ($m_I \approx 0.966$, $m_{II} \approx 1.294$, $m_{III} \approx$

1.359 ...), приводящий к возникновению хаоса при $m_{кр} \approx 1.38$. Проведенные исследования показывают, что до возникновения автоколебаний оценка параметра m характеризуется значительной ошибкой, связанной с наличием в обрабатываемой последовательности данных большого количества значений x_i , близких к нулю. При переходе в режим автоколебаний ошибка оценки становится существенно меньше. Приведенные на рис.4.4 графики свидетельствуют об отсутствии заметной чувствительности оценки значений параметра m к бифуркациям удвоения периода и переходу в область хаоса. Ошибка оценки параметра m в хаотическом режиме незначительно растет с ростом m (в масштабе рис.4.2б этот рост неразличим).

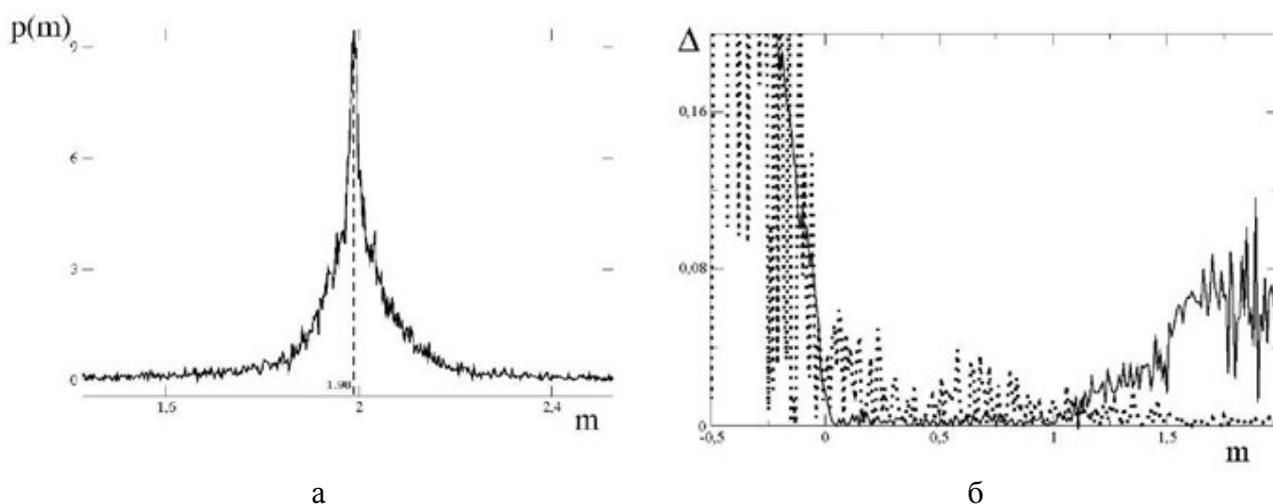


Рисунок 4.5. Результаты расчетов для системы (4): а - распределение значений m_i в хаотическом режиме при $D = 0.0002$, $m = 1.99$; б - зависимость ошибки оценки Δ параметра m от его истинного значения (линия - расчет по среднему значению, точки - расчет по максимуму плотности распределения).

Когда параметр m соответствует области хаоса, наблюдается расхождение ошибок по среднему значению и максимуму плотности вероятности (рис.4.5а). Причиной этого является потеря симметрии распределения, как видно на рис.4.5а, в результате чего среднее значение смещается вправо от наивероятного значения и оценка параметра по среднему значению оказывается слегка завышенной (рис.4.5б).

В целом, в области хаоса относительная ошибка оценки по среднему значению не превосходит 6%, а по максимальной плотности вероятности 2%.

Рассмотрим модель (4.5). Зафиксируем параметры $a = b = 0.2$ и будем оценивать управляющий параметр m :

$$m_i = x_i - \frac{\dot{z}_i - b}{z_i} \quad (4.7)$$

В осцилляторе Ресслера переменная z , на значение которой производится деление в (7), всегда положительна и вероятность очень малых значений пренебрежимо мала. Таким образом, можно

обойтись без фильтра малых значений. Распределение m_i , оказывается близким к гауссову (рис. 4.6а).

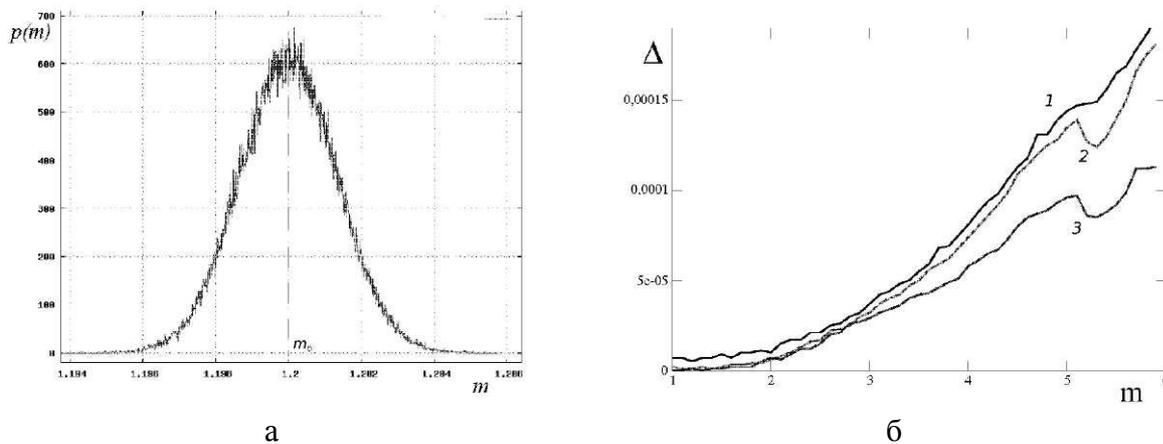


Рисунок 4.6. Результаты расчетов для системы (5) в режиме периодических колебаний: а - распределение значений m_i при $D = 0.0005$, $m = 1.19$; б - зависимость ошибки Δ от истинного значения m для различных значений интенсивности шума D : $D=0.001$ (кривая 1); $D=0.0001$ (кривая 2); $D=0.00001$ (кривая 3).

В отличие от генераторов Анищенко-Астахова и Ван дер Поля, для осциллятора Ресслера оценка управляющего параметра m в соответствии с (4.7) практически никогда не приводит к делению на бесконечно малую величину, поскольку переменная z может принимать только положительные значения. Данное свойство сохраняется при включении шума в первое уравнение системы: очень малые значения z имеют очень малую совокупную вероятность. Таким образом, при использовании оценки (4.7) для системы Ресслера не возникает необходимости фильтровать массив данных, а получаемые в результате вычислений графики зависимости ошибки оценки Δ от параметра m оказываются гладкими, без выбросов. Зависимости ошибки оценки Δ от m , полученные при различных значениях интенсивности шума D , приведены на рис. 4.6б. Они показывают, что оценка значений параметра в системе (4.5) оказывается очень точной и лишь незначительно ухудшается с ростом интенсивности шума. На всем рассмотренном интервале $m \in [1; 6]$ относительная ошибка при максимальном шуме $D = 0.001$ не превосходит 10%.

Гладкий характер кривых свидетельствует о нечувствительности оценки m_0 к бифуркациям удвоения периода, имеющим место в интервале $2.5 < m < 4.2$. Однако в целом, усложнение динамического режима и переход в область хаоса сопровождаются ростом ошибки оценки. Отметим участок немонотонности зависимости Δ от m , хорошо заметный на графиках в интервале $5.2 < m < 5.5$ при $D = 0.00001$, $D = 0.0001$ и $D = 0.001$. Он совпадает с окном периодичности в области хаотической динамики. Фрагмент зависимости старшего

ляпуновского показателя λ_1 от управляющего параметра m , приведенный на рис.4.7, показывает наличие данного окна.

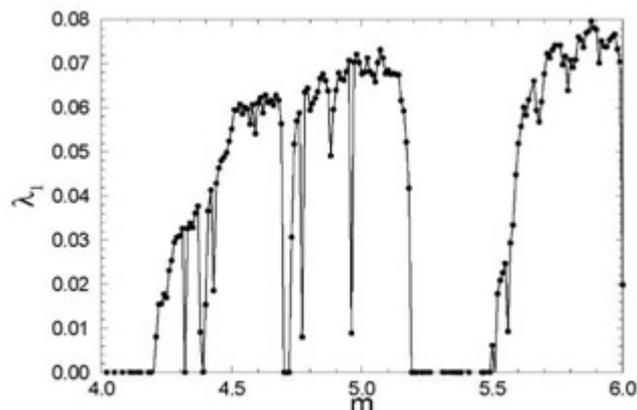


Рисунок 4.7. Фрагмент зависимости старшего ляпуновского показателя λ_1 от управляющего параметра m

4.4. Выводы

Проведенные исследования показали, что на основе статистической обработки экспериментально получаемых реализаций нелинейных динамических систем, содержащих внутренние источники шума, возможно получить оценки управляющего параметра с высокой точностью даже при большой интенсивности шума. Влияние шума в определенном диапазоне значений не оказывает существенного воздействия на точность оценки. При этом в некоторых случаях требуется применять определенную фильтрацию массива данных, исключающую деление на малые значения динамических переменных.

Достаточно точные оценки значений управляющего параметра возможно получать не только в случае устойчивых периодических колебаний, но также для генераторов вблизи бифуркаций удвоения периода и в режиме хаотической динамики. Ошибка оценки «не чувствует» бифуркаций удвоения периода и характер зависимости ошибки от управляющего параметра в области бифуркаций остается идентичным режимам устойчивых колебаний.

В большинстве случаев распределение текущих оценок параметра является симметричным с единственным максимумом, практически совпадающим с истинным значением. В этом случае итоговую оценку целесообразно определять по среднему значению. Однако в сложных динамических режимах может возникнуть асимметрия в распределении текущих оценок. При этом более точную итоговую оценку нужно определять по максимуму распределения.

В данной работе была исследована задача оценки параметра только в системах с аддитивным белым шумом и только при наличии мягких локальных бифуркаций (суперкритическая бифуркация Андронова-Хопфа, бифуркации удвоения периода). Остается ряд вопросов, связанных с влиянием на оценку параметров мультипликативного и цветного шума, а

также жестких бифуркаций в динамической системе. Рассмотрению этих проблем предполагается посвятить дальнейшие исследования.

5. Изучение динамики возбудимых систем под действием внешнего шумового и периодического сигналов. Вынужденная и взаимная синхронизация стохастических колебаний

5.1. Введение

Одной из актуальных проблем современной нелинейной динамики является изучение свойств так называемых возбудимых систем. Под действием относительно малого шума в таких системах происходят процессы возбуждения и релаксации, в результате которых возникают незатухающие стохастические колебания. При некоторой (оптимальной) интенсивности шума эти колебания обладают высокой степенью когерентности (регулярности). Данный эффект получил название когерентного резонанса (КР) [31,32].

Интерес к возбудимым системам во многом обусловлен задачами моделирования в нейродинамике [33]. Классической моделью возбудимых систем является осциллятор ФитцХью-Нагумо (ФХН) [34,35], представляющий собой упрощенную модель нейрона Ходжкина-Хаксли. Исследованию возбудимых систем, в частности осцилляторов типа ФХН и ансамблей таких осцилляторов, посвящено значительное количество работ [36-40]. Был установлен важный факт: стохастические колебания в условиях КР демонстрируют эффект фазо-частотной синхронизации [38-40]. Известно, что эффект синхронизации является характерной чертой автоколебательных систем. Возникает принципиальный вопрос – можно ли рассматривать индуцированные шумом колебания возбудимых систем в качестве особого типа автоколебаний, а именно, в качестве стохастических автоколебаний? Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо выяснить, в чем состоит отличие стохастических колебаний в возбудимых системах от стохастических колебаний, возникающих в результате преобразований случайного внешнего воздействия нелинейными системами. Примером последних могут служить вынужденные колебания в пассивных нелинейных контурах, возникающие под действием случайных сил. Установим эти различия, мы сможем понять, почему именно для возбудимых стохастических осцилляторов характерны эффекты синхронизации.

В данной работе методами физического и численного экспериментов проведены детальные исследования КР и эффектов внешней синхронизации в системе ФХН. Обсуждается вопрос об аттракторе неавтономной системы ФХН, анализируются особенности энергетических характеристик колебаний. Целью исследования является обоснование введения понятия стохастических автоколебаний и, соответственно, стохастических автоколебательных систем. По мнению авторов, этот вопрос является фундаментально важным, так как связан с

обобщением понятия автоколебаний по Андронову, введенному применительно к автоколебательным системам [41], на неавтономные системы со случайным воздействием.

5.2. Исследуемая система и ее математическая модель

За основу была выбрана оригинальная система, предложенная ФитцХью и Нагумо, изображенная на рис. 5.1 [34]. В схеме в качестве нелинейного элемента с N – образной вольт-амперной характеристикой используется туннельный диод.

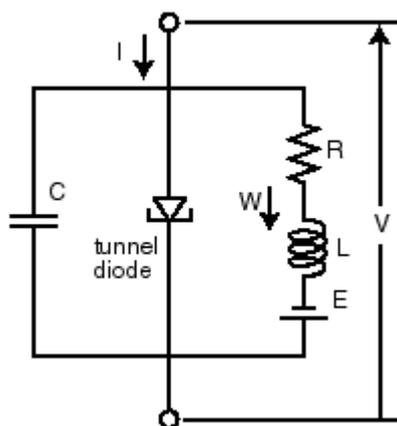


Рисунок 5.1. Принципиальная схема осциллятора ФитцХью-Нагумо.

Для более стабильной работы мы видоизменили оригинальную схему и использовали схему, приведенную на рис. 5.2 [42]. Предложенная нами схема отличается лишь блоком R_n ,

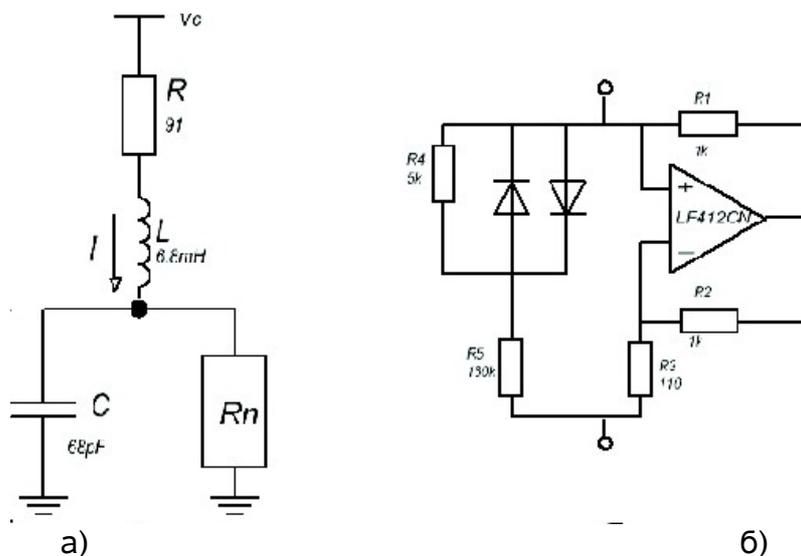


Рисунок 5.2. Используемая в эксперименте схема (а) и схема нелинейного элемента R_n .

который моделирует нелинейность N-типа иным способом (рис. 5.2б).

Экспериментально измеренная вольт-амперная характеристика нелинейного элемента представлена на рис.5.3. Эта характеристика качественно повторяет характеристику туннельного диода, обеспечивает стабильную работу схемы и, что не менее важно, допускает

наиболее простую аппроксимацию при математическом моделировании динамической системы в виде полинома $I(U) = \alpha U^3 - \gamma U$.

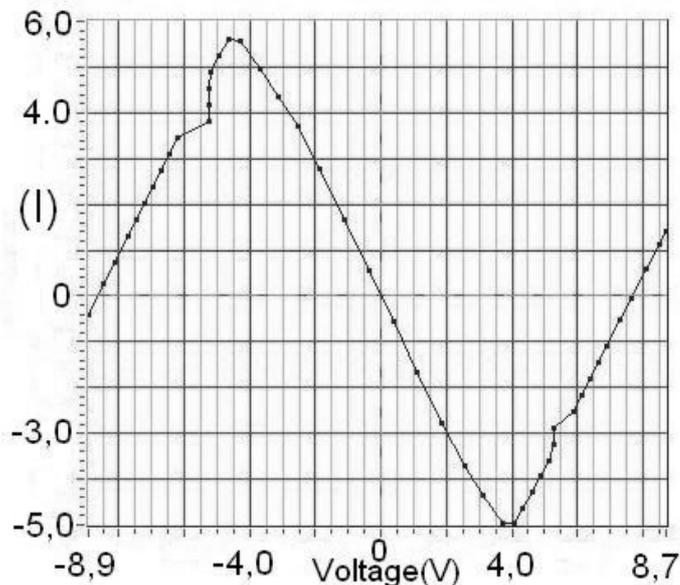


Рисунок 5.3. Экспериментальная N-характеристика элемента Rn.

Уравнения модели. На основе законов Кирхгофа нетрудно получить уравнения, описывающие динамику системы с учетом введения источника шумового напряжения (как это показано на рис. 5.4). Уравнения получаются в виде:

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \frac{1}{L} (Vc - RI - U) + \frac{A_\xi}{L} \xi(t), \\ \frac{dU}{dt} &= \frac{1}{C} (I - I(U)), I(U) = \alpha U^3 - \gamma U \end{aligned} \quad (5.1)$$

где номинальные значения элементов схемы, напряжение питания и параметры нелинейной характеристики соответствуют рис. 5.4, A_ξ – среднеквадратичная величина напряжения шумового генератора.

Для проверки компьютерных расчетов уравнения (5.1) путем соответствующей перенормировки сводились к безразмерной форме вида:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(b - cx - y) + \sqrt{2D}\eta(t), \\ \dot{y} &= g[x - F(y)], F(y) = \alpha y^3 - \gamma y \end{aligned} \quad (5.2)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{i_0}{U_0} \sqrt{\frac{C}{L}}, b = \frac{V_c}{V_0}, c = R \frac{i_0}{U_0}, \\
 g &= \frac{U_0}{i_0} \sqrt{\frac{L}{C}}, D = \frac{U_0^2 C}{2i_0^2 L} A^2 \xi, \alpha = \frac{\alpha' U_0^3}{i_0}, \\
 \gamma \frac{\gamma' U_0}{i_0}, \eta(t) &= \frac{1}{U_0} \xi \sqrt{LC} \tau, \tau = \frac{t}{\sqrt{LC}}, \\
 U_0 &= 1V, i_0 = 1A.
 \end{aligned}
 \tag{5.3}$$

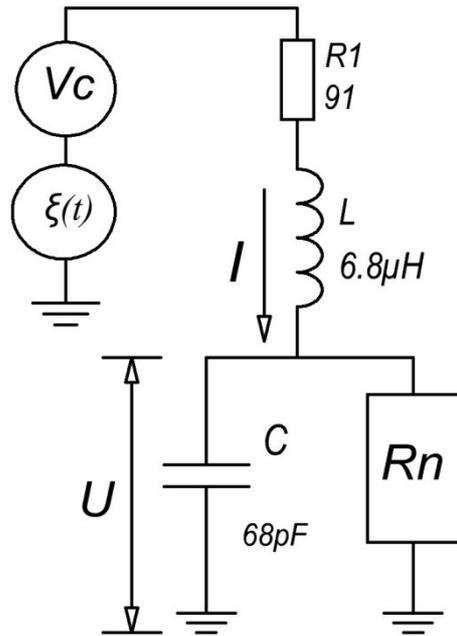


Рисунок 5.4. Схема экспериментальной системы с включением источника шумового напряжения $\xi(t)$ и номинальные значения элементов схемы. $R=100\Omega$, $L=6.8 \cdot 10^{-3}H$, $C=6.8 \cdot 10^{-11}F$, $V_c=7.2V$, $\alpha'=2.22 \cdot 10^{-5}\Omega^{-3}$, $\gamma'=1.61 \cdot 10^{-3}\Omega^{-1}$.

5.3. Исследование когерентного резонанса

Рассмотрим индуцированные шумом стохастические колебания в системе изображенной на рис. 5.4. С этой целью будем регистрировать спектр мощности колебаний $S_i(f)$ тока $i(t)$ при вариации среднеквадратичного напряжения шумовой накачки A_ξ . На рис. 5.5 представлены экспериментальные результаты эволюции спектра $S_i(f)$ с ростом интенсивности шума A_ξ . Как видно из рис. 5.5, с ростом интенсивности шума вначале возбуждаются стохастические колебания с достаточно широким спектром (рис.5а). Далее формируется ярко выраженный пик в спектре колебаний (рис. 5.5б), который имеет минимальную ширину при оптимально уровне шума и далее ширина этого пика вновь увеличивается. На основании измерения представленных частично на рис.5.5, были построены графики зависимостей ширины полосы спектра $S_i(f)$ и спектральной плотности мощности в максимуме спектральной функции. Результаты представлены на рис. 5.6, а и рис. 5.6 б.

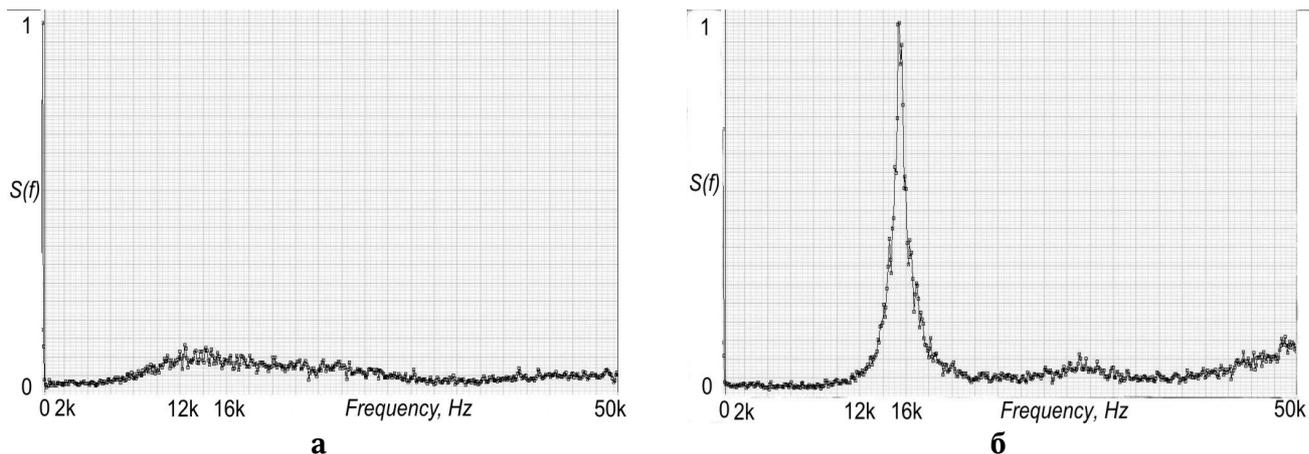


Рисунок 5.5. Эволюция спектров мощности колебаний при увеличении шумового напряжения: (а) – вблизи порога возбуждения колебаний, $A_{\xi} = 900\text{mV}$; (б) – в режиме когерентного резонанса, $A_{\xi} = 1300\text{mV}$.

Эффект когерентного резонанса иллюстрирует главным образом рис. 5.6 а, который свидетельствует о наличии оптимального уровня шума ($A_{\xi} = 1300\text{mV}$), при котором ширина спектра минимальна, и, следовательно, достигается наивысшая степень когерентности колебаний. Эффекту увеличения степени когерентности отвечает рост степени периодичности, о котором свидетельствуют реализации процессов колебаний. Представленные выше экспериментальные данные полностью подтверждаются результатами компьютерного моделирования динамической системы (5.2).

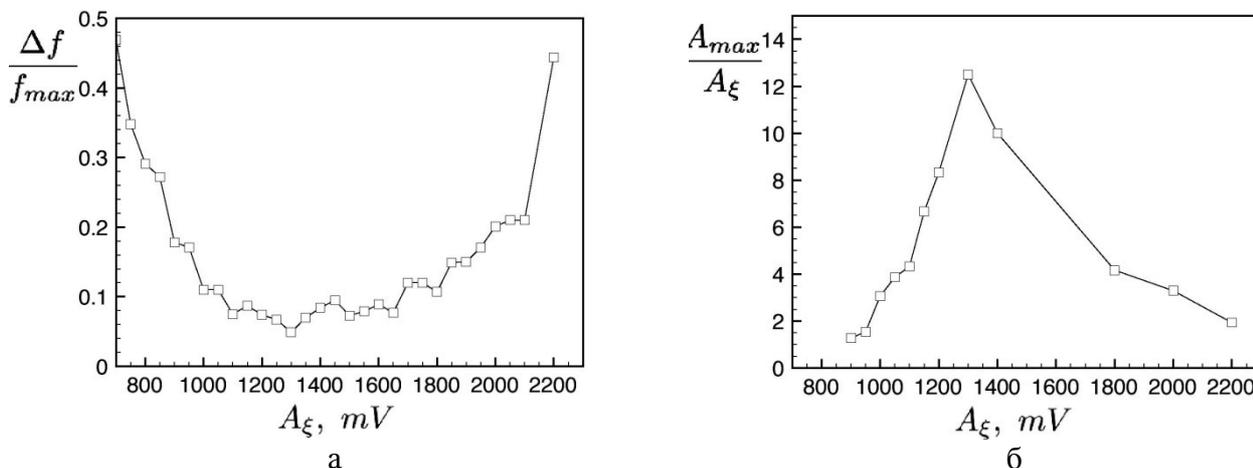


Рисунок 5.6 - Зависимость относительной ширины спектра от уровня шума (а) и нормированной амплитуды спектральной плотности мощности (б) от величины шумового среднеквадратичного напряжения накачки A_{ξ} .

Имеет место хорошее качественное совпадение экспериментальных и расчетных данных. В качестве примера на рис.5.7 представлены результаты расчетов ширины спектра от уровня шума, полученные в численном эксперименте для значений параметров, отвечающих условиям физического эксперимента (рис.5.7)

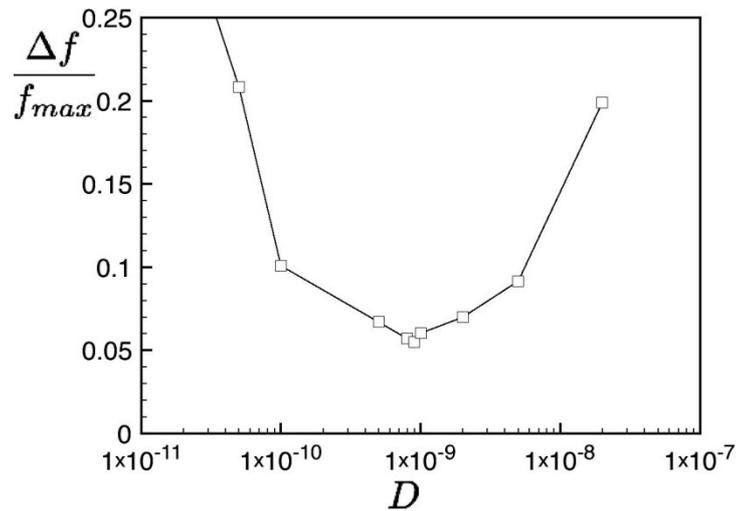


Рисунок 5.7. Эффект когерентного резонанса в численном эксперименте.

5.4. Внешняя синхронизация системы ФитцХью-Нагумо гармоническим сигналом в режиме когерентного резонанса

С целью синхронизации колебаний внешний гармонический сигнал вводился так, как это показано на рис. 5.8.

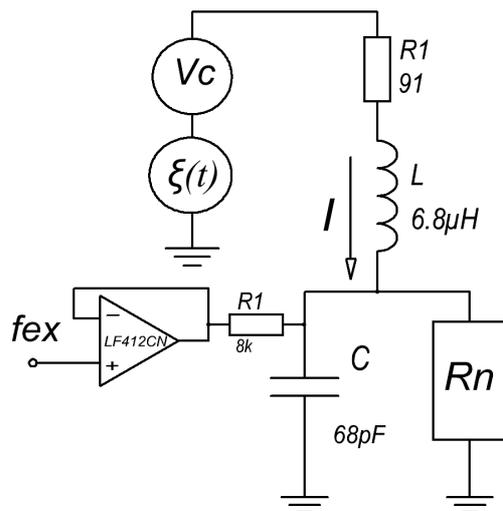


Рисунок 5.8. Схема установки для исследования внешней синхронизации гармоническим сигналом $A_{ex}\sin(f_{ex}t)$ и значения параметров элементов цепи. $R=91\Omega$, $L=6.8 \cdot 10^{-3}H$, $C=6.8 \cdot 10^{-11}F$, $Vc=7.2V$, $\alpha'=2.22 \cdot 10^{-5}\Omega^{-3}$, $\gamma'=1.61 \cdot 10^{-3}\Omega^{-1}$.

Уровень шума соответствовал режиму когерентного резонанса. С целью наблюдения эффекта синхронизации проводились измерения спектра мощности колебаний $S_i(f)$ при вариации амплитуды внешнего сигнала для постоянной величины расстройки по частоте $f_{ex} = f_0 + \Delta$, ($\Delta = 1450$ Гц) и при вариации частоты f_{ex} при фиксированной амплитуде $A_{ex} = 510mV$. Результаты представлены на рис. 5.9 и рис. 5.10.

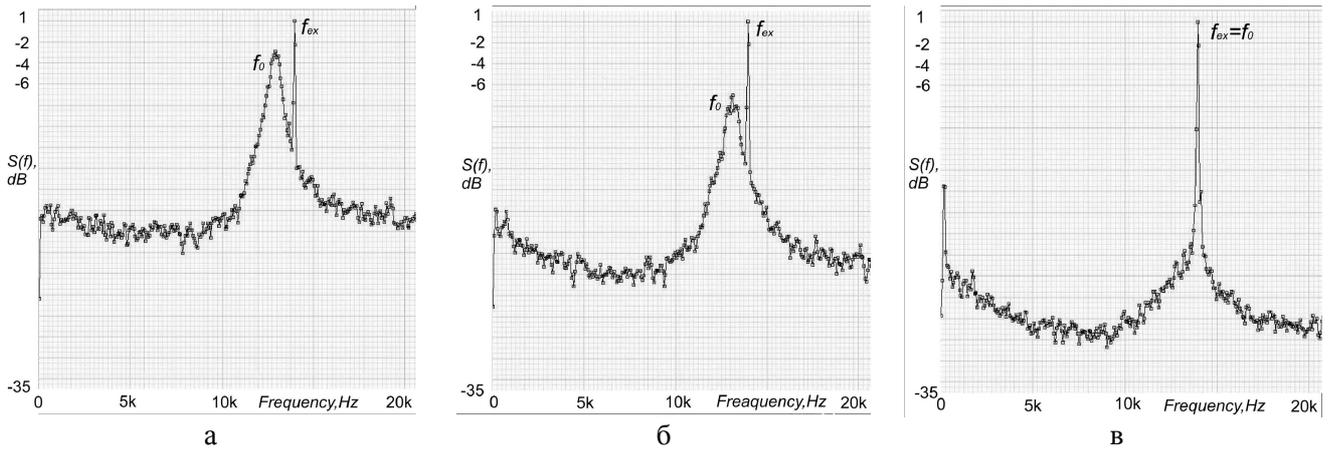


Рисунок 5.9. Эффект захвата частоты осциллятора ФХН внешней силой $A_{ex}\sin(f_{ex} t)$ при постоянной расстройке $\Delta = f_0 - f_{ex} = 1450 \text{ Гц}$, $f_0 = 12550 \text{ Гц}$ с увеличением амплитуды A_{ex} : (а) - $A_{ex} = 400 \text{ мВ}$, (б) - $A_{ex} = 500 \text{ мВ}$, (в) - $A_{ex} = 900 \text{ мВ}$.

Как видно из рис. 5.9 при достижении амплитудой значения $A_{ex} = 900 \text{ мВ}$ наблюдается захват частоты; а именно спектр колебаний системы ФХН смещается вправо и совпадает с частотой воздействующего сигнала.

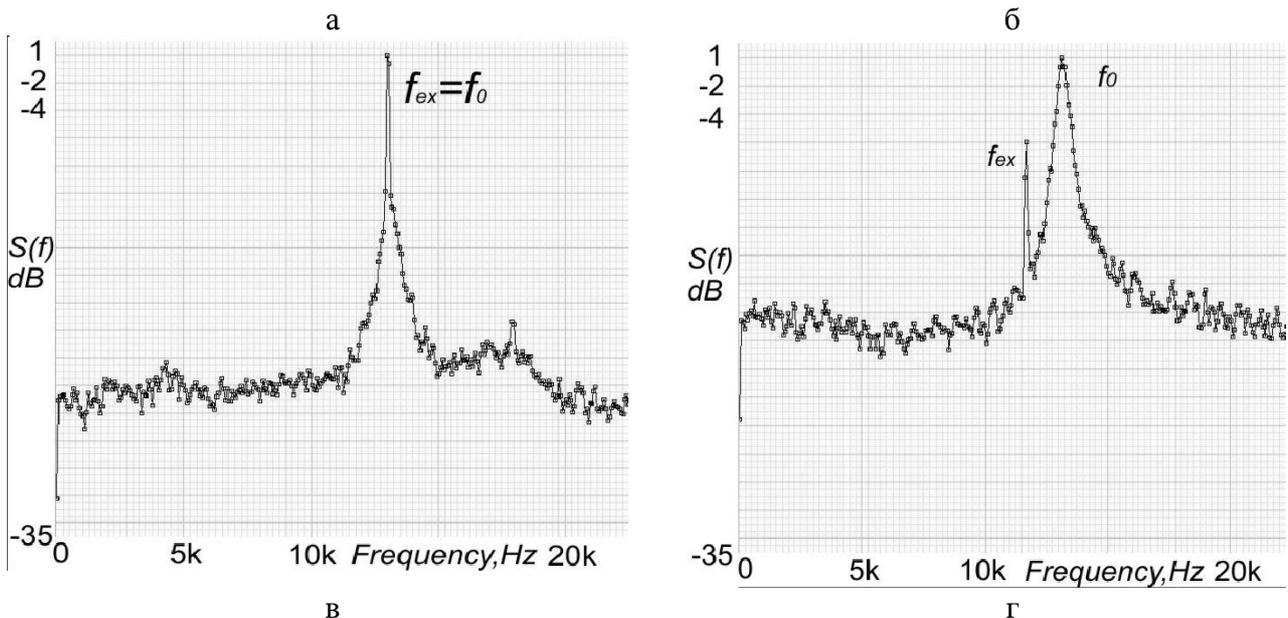


Рисунок 5.10. Эффект захвата частоты в системе ФХН при вариации частоты внешнего сигнала: (а) – отсутствие захвата частоты ($f_{ex} = 14800 \text{ Гц}$); (б) – эффект захвата частоты, при котором спектральная линия колебаний системы смещается вправо и совпадает с частотой f_{ex} ($f_{ex} = 13950 \text{ Гц}$); (в) – захват частоты в области синхронизации, когда частота системы ФХН следует за частотой f_{ex} ($f_{ex} = 13050 \text{ Гц}$); (г) – выход из области синхронизации ($f_{ex} = 11700 \text{ Гц}$).

5.5. Обоснование автоколебательного характера стохастических колебаний в системе ФХН

Данные экспериментов, изложенные выше, свидетельствуют, что несмотря на то, что колебания в системе ФХН возникают и поддерживаются только при наличии внешнего шумового сигнала, они характеризуются полным набором свойств, присущих автоколебательным процессам. Обсудим это более детально.

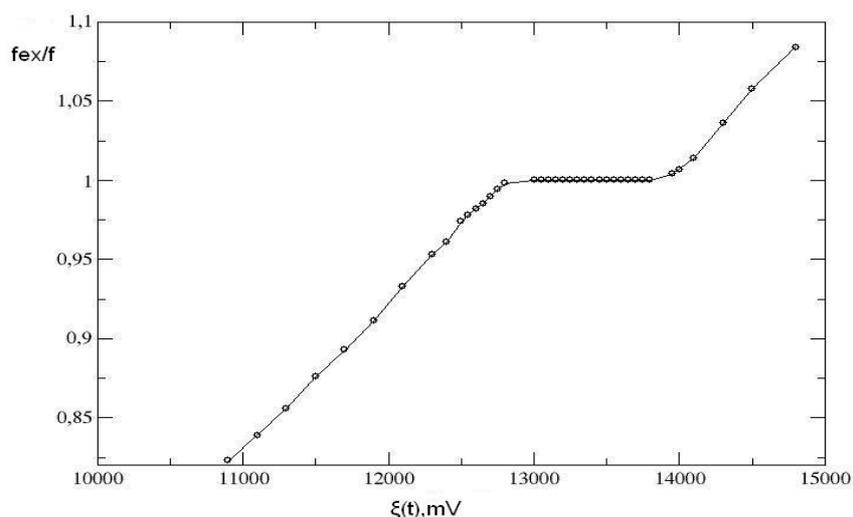


Рисунок 5.11. Экспериментальная зависимость отношения частот f_{ex} / f_0 при вариации частоты внешнего сигнала f_{ex} при фиксированной амплитуде $A_{ex} = 510 \text{mV}$.

Вначале рассмотрим вопрос об аттракторе режима колебаний в условиях когерентного резонанса. Определение аттрактора неавтономной системы введено в работе [13], где показано, что об аттракторе в этом случае необходимо говорить, привлекая понятие предельного множества в функциональном (гильбертовом) пространстве применительно ко всем возможным решениям $x = f(x_0, t)$. К сожалению не существует возможности геометрического изображения подобного предельного множества. Можно использовать метод проектирования решений на плоскость фазовых переменных. Эта проекция будет зависеть от времени наблюдения решений. Однако, в случае наличия аттрактора в функциональном пространстве, его проекция на плоскость фазовых переменных системы ФХН практически не будет видоизменяться. При вариации достаточно большого времени наблюдения. Эксперименты этот факт подтвердили. На рис. 5.12а представлена проекция предельного множества на плоскость переменных x и y , вид которого напоминает слабо зашумленный периодический режим. Рис. 5.12б иллюстрирует факт независимости предельного множества фазовых траекторий в проекции на плоскость от начальных данных. Вертикальные линии на рис. 5.12б есть фазовые траектории, отвечающие различным начальным данным из области притяжения аттрактора. Эксперименты показали, что никаких других предельных множеств в конечной окрестности аттрактора рис. 5.12а система ФХН не имеет.

На основании данных расчетов рис.12 можно сделать вывод о существовании аттрактора у системы ФХН. Наличие аттрактора еще не доказывает того, что процесс является автоколебательным. Для этого необходимо обсудить проблему подкачки энергии в систему. С этой целью рассмотрим выражение для дивергенции векторного поля F системы (5.2):

$$\operatorname{div}F = \frac{dx}{dx} + \frac{dy}{dy} = (\gamma g - ac) - 3\alpha g y^2 \quad (5.5)$$

Дивергенция векторного поля F в линейном приближении характеризует наличие подкачки ($\operatorname{div}F > 0$) или диссипации ($\operatorname{div}F < 0$) энергии. Как видно из выражения (8) $\operatorname{div}F$ является функцией переменной y и может менять знак. Из (5.8) следует, что $\operatorname{div}F = 0$ при $y^2 = (\gamma g - ac)/3\alpha g$. При значениях параметров, отвечающих рис. 5.12, а, получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{div}F &> 0, \text{ если } |y| \leq 5.16, \\ \operatorname{div}F &< 0, \text{ если } |y| > 5.16. \end{aligned} \quad (5.6)$$

На рис. 5.12а выделена область значений координаты y , в которой дивергенция векторного поля положительна. Это означает, что в этой области имеет место подкачка энергии от источника. В областях, где $\operatorname{div}F < 0$ (для $|y| > 5.16$) полученная энергия диссипирует.

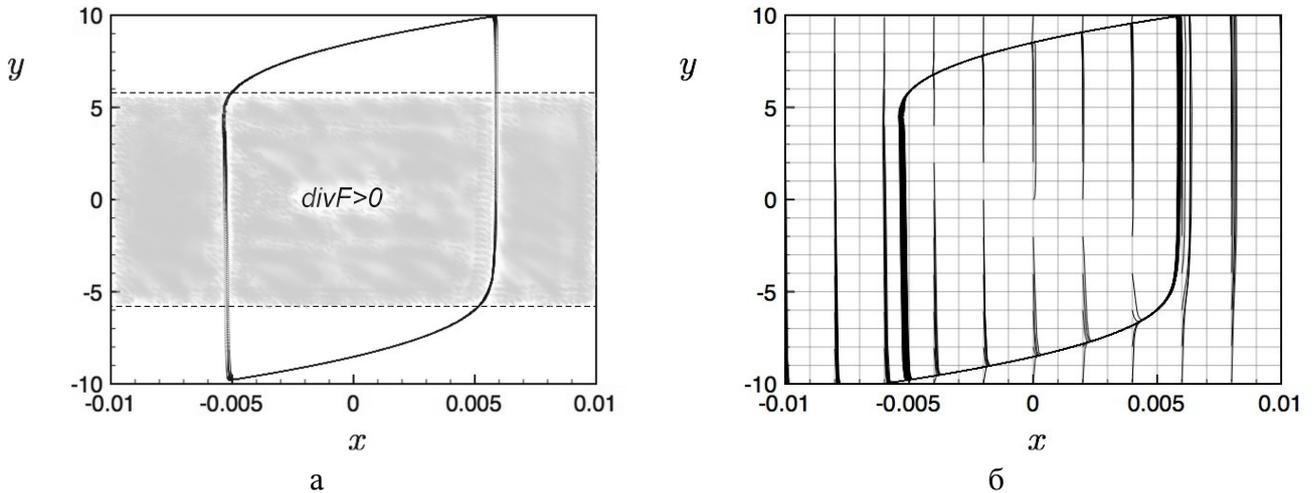


Рисунок 5.12. Проекция аттрактора системы ФХН на плоскость переменных, отвечающая времени интегрирования $\tau=1000$ (а), результат интегрирования с различными начальными данными, свидетельствующий о наличии области притяжения аттрактора (б).

С физической точки зрения условия подкачки энергии выполняются, когда начальное положение рабочей точки отвечает значениям падающего участка рис.3. На этом участке $-4 \leq U \leq 4$ V система характеризуется отрицательным сопротивлением и энергия источника увеличивает энергию колебаний.

Приведенные рассуждения свидетельствуют о том, что под действием шума система ФХН поддерживает колебательный режим, осуществляя синхронную нелинейную подкачку энергии от источника. Расчеты и измерения подтвердили важный факт: мощность колебательного процесса, которая пропорциональна $x^2(t)$, существенно превышает мощность источника шума. В численных экспериментах это превышение составляло три и более порядков в зависимости от уровня порога возбуждения системы ФХН. В физическом эксперименте мы получили превышение примерно в 20 раз. Это отличие объяснимо, так как в физическом эксперименте

подключение измерительных приборов к цепи ФХН шунтировало схему и приводило к расстройке управляющих параметров.

5.6. Влияние внешнего периодического воздействия на систему ФХН

Будем проводить анализ динамики системы ФХН с помощью метода нульклин. U -нульклина представляет собой кривую на которой $\frac{du}{dt}$ меняет свой знак и определяется из условия $\frac{du}{dt} = 0$. i -нульклина представляет собой кривую на которой $\frac{di}{dt}$ меняет свой знак и определяется из условия $\frac{di}{dt} = 0$. Точка пересечения нульклин является точкой равновесия, поскольку в ней выполняется условие $\frac{du}{dt} = \frac{di}{dt} = 0$. В зависимости от значения управляющих параметров в системе ФХН возможны одно, два или три состояния равновесия [3]. Нас же интересует только случай, когда в системе существует единственное состояние равновесия.

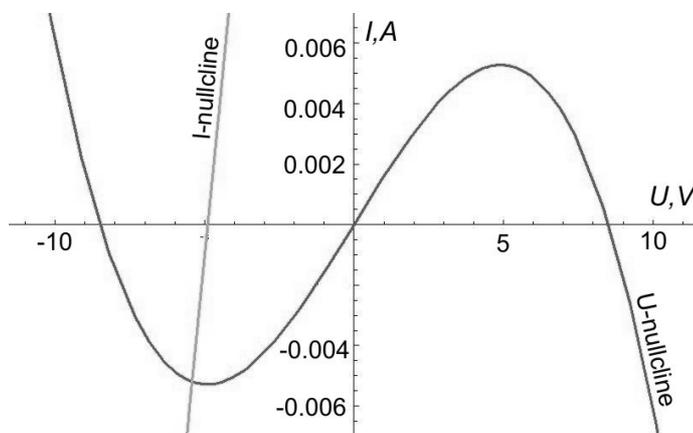


Рисунок 5.13. Нульклин системы ФХН при $V_c = -4.4$ В.

Анализ расположения точки пересечения нульклин дает информацию о динамике системы. Возьмем плоскость, на которой по оси абсцисс отложим напряжение, а по оси ординат ток и построим на ней нульклин для системы ФХН. U -нульклина представляет собой инвертированную N-образную кривую симметричную относительно нуля, которая пересекает ось абсцисс в точках $-8,49$; 0 ; $8,49$. i -нульклина представляет собой прямую с угловым коэффициентом $-1/r$, где r - активное сопротивление всей цепочки, примерно равное значению резистора R на схеме рис.1. С физической точки зрения U -нульклина соответствует N-образной характеристике нелинейного элемента R_n , а i -нульклина соответствует нагрузочной прямой. Нульклин точно совпадут с N-характеристикой и нагрузочной прямой если инвертировать ось ординат.

Рассмотрим рис. 5.13 на нем представлены нульклин системы ФХН для отрицательного значения напряжения смещения V_c , при котором в системе нет генерации. Уменьшение этого напряжения по модулю до такого значения, когда точка пересечения нульклин попадет на среднюю часть U -нульклины приведет систему в режим генерации (рис. 14). Поскольку состояние равновесия, получаемое в результате пересечения нульклин, в области между

минимумом и максимумом U -нульклина является неустойчивым, то эта область соответствует области генерации. Как только мы выбираем значение напряжения смещения таким, что точка пересечения нульклин находится левее минимума или правее максимума U -нульклина, то мы выходим из области генерации, в таком режиме состояние равновесия устойчиво. В режиме генерации, в зависимости от значений параметров L и C а также формы N -характеристики нелинейного элемента Rn , вид колебаний может меняться от синусоидальных до релаксационных, причем чем больше значение L , меньше значение C и острее N -характеристика, тем колебания более релаксационны.

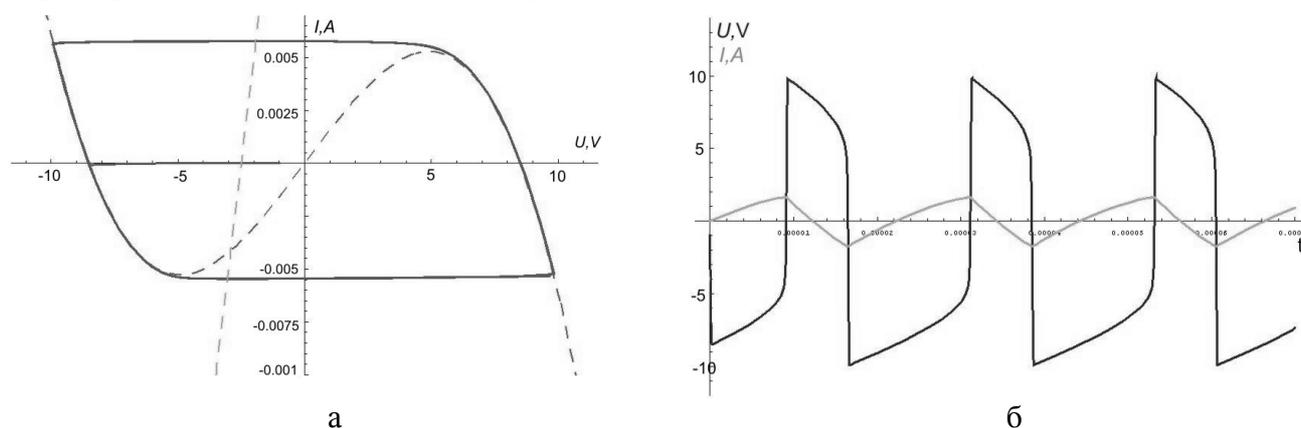


Рисунок 5.14. Предельный цикл и нульклина (а) и временная реализация напряжения и тока (б) в системе ФХН для $V_c = -2.7$ В.

Следует отметить, что для того, чтобы в системе наблюдался эффект когерентного резонанса необходимо, чтобы в режиме генерации колебания были релаксационными. Пример релаксационных колебаний в системе ФХН приведен на рис. 5.14а,б.

Как уже отмечалось выше, система ФХН находится в режиме генерации в том случае, если точка пересечения нульклин находится в области между экстремумами N -характеристики. Остановимся более детально на способах достижения этого результата, не изменяя параметры самой системы, а лишь с помощью внешнего воздействия. Подадим на систему (5.1) внешнее гармоническое воздействие с амплитудой A и частотой ω_{ex} ($\omega_{ex} = 2\pi f_{ex}$), что физически означает добавку напряжения к напряжению смещения V_c , которое меняется по гармоническому закону. Получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \frac{1}{L} (V_c - RI - U + A \sin(\omega_{ex} t)), \\ \frac{dU}{dt} &= \frac{1}{C} (I - I(U)), \quad I(U) = \alpha U^3 - \gamma U \end{aligned} \quad (5.7)$$

На рис. 5.15 представлена 3-х мерная картина изменения точки пересечения нульклин для системы (5.7) с течением времени, причем начальная точка выбрана в области отсутствия генерации ($V_c = -4.5$ В), но очень близко к границе входа в область генерации. Можно видеть, что один полупериод внешнего синусоидально воздействия заводит систему в режим

генерации, передвигая точку пересечения нульклин в область генерации на величину равную амплитуде синусоиды за вычетом расстояния от начального местоположения этой точки до граница генерации, назовем его активным полупериодом. Второй полупериод на такое же расстояние плюс расстояние от начального положения до границы областей еще дальше уводит точку пересечения нульклин от границы генерации, назовем его нейтральным полупериодом. Если же мы выберем напряжение смещения V_c равное 4.5 В, т.е. начальная точка пересечения нульклин будет находиться правее средней части U -нульклина, то качественно динамика системы не поменяется поскольку мы будем точно таким же способом заходить в область генерации только не слева (как при отрицательном напряжении смещения), а справа. А вот воздействие полупериодов внешнего гармонического воздействия поменяется. Первый полупериод будет нейтральным, а второй активным. Таким образом, внешнее периодическое воздействие поданное на систему ФХН от источника напряжения двигает i -нульклин вдоль оси абсцисс не меняя ее угол наклона.

Теперь рассмотрим как будет вести себя система ФХН если на нее подать внешнее гармоническое воздействие с амплитудой A и частотой ω_{ex} ($\omega_{ex} = 2\pi f_{ex}$), но уже не от источника напряжения, а от источника тока. Уравнения системы запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \frac{1}{L}(V_c - RI - U), \\ \frac{dU}{dt} &= \frac{1}{C}(I - I(U) + A \sin(\omega_{ex} t)), \quad I(U) = \alpha U^3 - \gamma' \end{aligned} \quad (5.8)$$

На рис.5.16 представлен такой случай. Можно видеть, что теперь i -нульклина остается неподвижной, а вот U -нульклина начинает перемещаться по синусоидальному закону вдоль оси ординат с течением времени. При отрицательном значении напряжения V_c первый полупериод внешнего синусоидального воздействия активный, а второй полупериод нейтральный. При положительном значении напряжения V_c полупериоды меняются ролями. Следует отметить, что начальное положение точки пересечения нульклин, как в случае внешнего воздействия напряжением, так и в случае внешнего воздействия током, можно задавать либо параметром V_c , либо добавкой постоянного токового смещения, либо обоими способами одновременно.

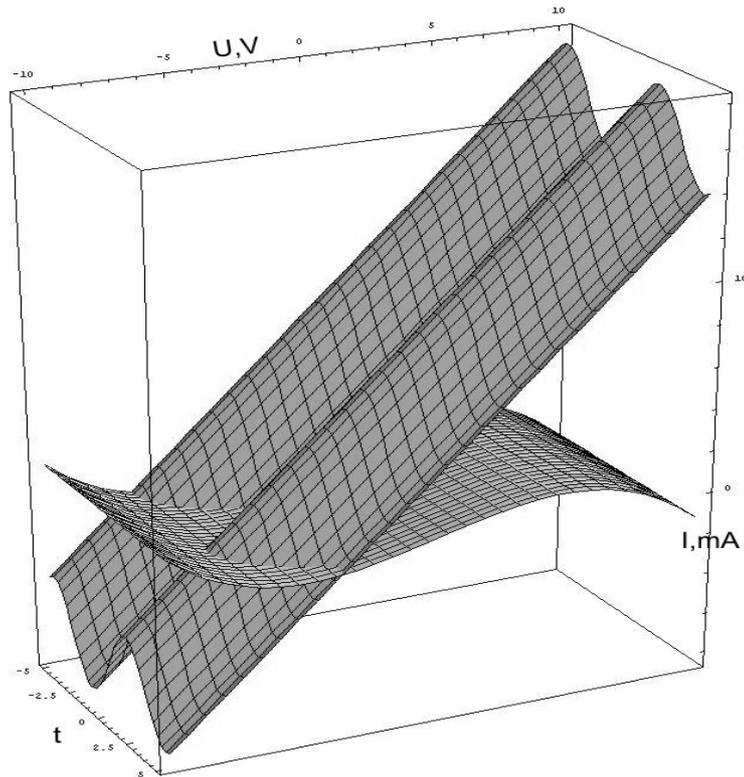


Рисунок 5.15. Изменение i -нульклины с течением времени по синусоидальному закону при $V_c = -4.5$ В.

Таким образом с помощью внешнего периодического воздействия, в данном случае, синусоидального, возможно переключение системы ФХН из состояния покоя в состояние генерации спайков и обратно. Поскольку система ФХН имеет свой собственный временной масштаб, определяемый параметрами системы, то выбирая необходимый период сигнала внешнего воздействия можно получить точное количество спайков за активный полупериод сигнала внешнего воздействия или же включить или выключить систему на точно заданное время. В свою очередь в зависимости от начальных условий системы ФХН активный полупериод может быть использован не полностью. Снизу рабочая часть определяется за счет удаленности начальной рабочей точки от порога генерации, а сверху определяется размерами самой области генерации. Если амплитуда сигнала внешнего воздействия велика и превышает размеры области генерации, то та часть активного полупериода, где амплитуда превышает правую границу (при отрицательном V_c) остается неиспользуемой. Так же важным является вопрос о соотношении полупериода внешнего воздействия и собственного временного масштаба системы. До тех пор пока полупериод внешнего воздействия не превышает собственный период системы динамика системы такова как показано выше. Предельный случай совпадения полупериода внешнего воздействия и собственного периода системы ФХН, дает появление одного спайка за активный полупериод. Если же полупериод внешнего воздействия становится меньше собственного периода системы, то внешнее воздействие влияет на траекторию фазовой точки во время ее медленных движений, искажая тем самым форму

спайка, причем при достаточно большой амплитуде внешнего воздействия можно заметить периодичность искажений.

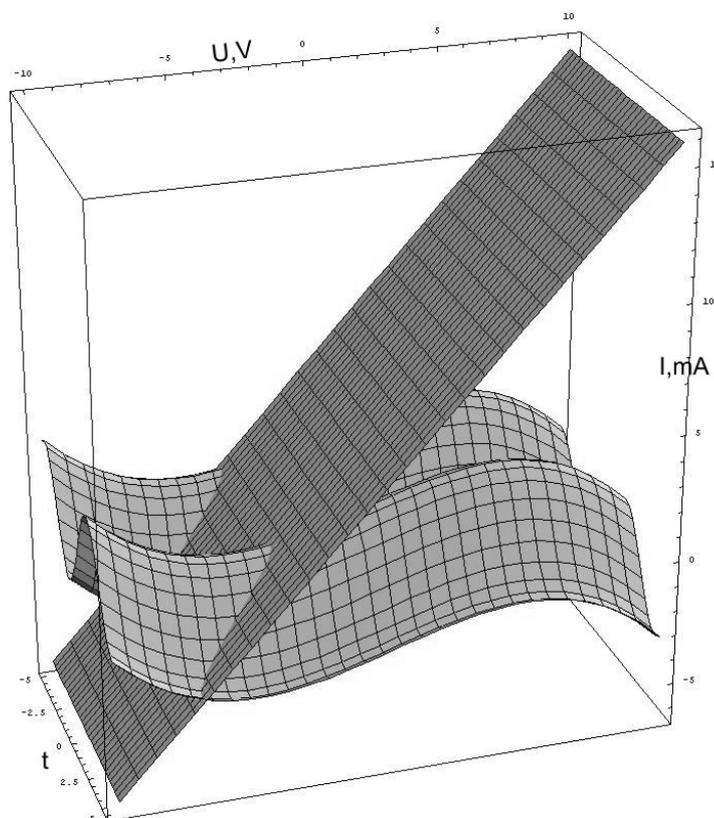


Рисунок 5.16. Изменение U -нульклина с течением времени по синусоидальному закону при $V_c = -4.5 \text{ В}$.

5.7. Выводы

Таким образом, приведенные выше результаты позволяют сделать важный вывод: неавтономный режим функционирования системы ФХН реализует автоколебательный процесс, преобразуя энергию источника в режим незатухающих почти периодических колебаний, независимо от начальных условий. Роль шума заключается в том, что под действием флуктуаций система «выбивается» из устойчивого состояния равновесия в область фазового пространства, где включается нелинейный процесс подкачки энергии, приводящий к автоколебаниям.

Теперь становятся понятными результаты экспериментов по анализу внешней и взаимной синхронизации. Хорошо известно, что синхронизация возможно исключительно в автоколебательных системах. Наличие эффекта синхронизации как при подаче внешнего гармонического сигнала на одиночную систему ФХН, так и при взаимодействии двух связанных систем убедительно доказывают автоколебательный характер процессов в этих системах. В связи с изложенным мы можем констатировать: индуцированные шумом колебания в нелинейных диссипативных системах, для которых существует аттрактор и которые демонстрируют эффект синхронизации, можно назвать стохастическими автоколебаниями

6. Критический обзор спектральных методов частотно-временного анализа нестационарных колебательных процессов

6.1. Обзор классических методов частотно-временного анализа

Проблема анализа динамики систем с меняющимися во времени характеристиками является одной из актуальных задач цифровой обработки сигналов. Классический подход к проведению исследований таких систем состоит в предположении квазистационарности – медленного изменения параметров во времени. В этом случае небольшие фрагменты регистрируемых процессов можно рассматривать как почти стационарные сигналы, применяя к ним классические вероятностные и спектральные методы. Однако такой подход, несомненно, является эффективным лишь при решении ограниченного круга проблем цифровой обработки сигналов, преимущественно в случае нестационарности, носящей характер низкочастотного тренда [43,44]. Данная ситуация не представляет принципиальной сложности, так как спектральные области, соответствующие тренду и динамике, представляющей интерес для исследователя, не перекрываются, и их можно разделить, применяя различные приемы цифровой фильтрации [45]. Значительно сложнее случай, когда избавиться от проблемы нестационарности с помощью фильтров не представляется возможным, например, если нестационарными являются изучаемые ритмические процессы. Еще с начала прошлого века исследователям было понятно, что широко используемый спектральный анализ, предусматривающий разложение по базису гармонических функций, не применим к системам с меняющимися во времени характеристиками. Так, в работах Л.И. Мандельштама упоминалось о том, что преобразование Фурье целесообразно применять при изучении систем с постоянными параметрами, а при переходе к случаю переменных параметров необходимо использовать функции, отличные от гармонических [46].

Действительно, преобразование Фурье предусматривает интегрирование сигнала $x(t)$ в диапазоне $(-\infty, \infty)$ для получения спектральной информации на заданной частоте, и эта процедура не подразумевает возможности изменения характеристик сигнала на отдельных участках. Фактически, обеспечивается расчет усредненной спектральной информации о сигнале, когда количество спектральных линий не обязательно соответствует числу колебательных мод. Известно, например, что преобразование Фурье не способно отличить случай переключений частоты гармонической функции от сигнала, содержащего два гармонических колебания с разными частотами [47, 48]. В обоих случаях будет получен спектр, содержащий два пика, и из анализа данного спектра нельзя установить, присутствуют ли ритмические процессы с независимыми частотами одновременно, или они возникают последовательно. Результатом классического спектрального анализа является одномерная зависимость спектральной функции (или спектральной плотности мощности) от частоты,

которая не содержит информации о времени, то есть не учитывает возможность временной эволюции спектральных характеристик и их изменения.

Отметим, что данные ограничения классического спектрального анализа сохраняются и в том случае, когда анализируется реалистичная ситуация – процесс конечной длительности. Моделирование конечной длительности экспериментальных данных проводится путем представления фрагмента сигнала в виде произведения бесконечного процесса и прямоугольного импульса, что приводит к появлению эффектов утечки энергии [43, 44], для устранения которых широко применяются оконные функции. Возможность выбора размера окна формально позволяет проводить локализованный спектральный анализ, то есть изучать спектральные характеристики сигнала $x(t)$ на отдельных участках, но на практике качество таких оценок является невысоким вследствие того, что размер окна фиксированный и не зависит от частоты, на которой проводятся расчеты спектральной плотности мощности.

Для узкополосных процессов отсутствие отмеченной зависимости не является принципиальным – всегда можно подобрать размер окна, «оптимальный» для качественного оценивания спектральных характеристик. Однако для широкополосных процессов ситуация меняется принципиальнейшим образом – существует диапазон частот, в пределах которого обеспечивается получение локализованной спектральной информации (если в пределы оконной функции попадает несколько периодов колебаний), диапазон, где обеспечивается недостаточно высокое качество локализации (десятки периодов) и область отсутствия локализации (сотни периодов).

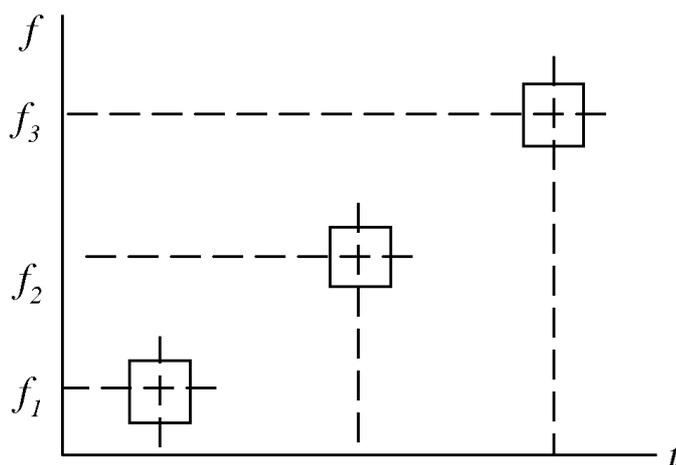


Рисунок 6.1. Оконный спектральный анализ, демонстрирующий постоянство размера окна во временной и в частотной областях. Ширина спектральных линий не меняется при проведении оценок спектра мощности на частотах f_1, f_2 и f_3 .

Именно постоянство во временной области окна преобразования является главным ограничением классического спектрального анализа (рисунок 6.1), так как информацию о быстрых изменениях в структуре сигналов важно извлекать из коротких фрагментов

экспериментальных данных, а информацию о медленных изменениях – из более длительных участков [49, 50]. Такую идеологию использует вейвлет-анализ, подвижное частотно-временное окно которого подстраивается под анализируемый масштаб наблюдения (рисунок 6.2). Теория вейвлетов начала активно развиваться в конце 1980-х годов, хотя исторические предпосылки для ее появления возникли намного раньше. В частности, можно отметить работы 40-х – 50-х годов прошлого века, когда впервые была озвучена идея разложения по так называемым «атомам» с помощью смещенных друг относительно друга функций Гаусса [51]. Этот подход уже принципиально отличался от идеологии разложения по базису, построенному из функций, отличных от гармонических (например, функций Уолша [52]). Ключевым аспектом работы [51] являлась возможность проведения локализованного анализа структуры сигналов (за счет использования ограниченных во времени функций), что важно при изучении нестационарных процессов.

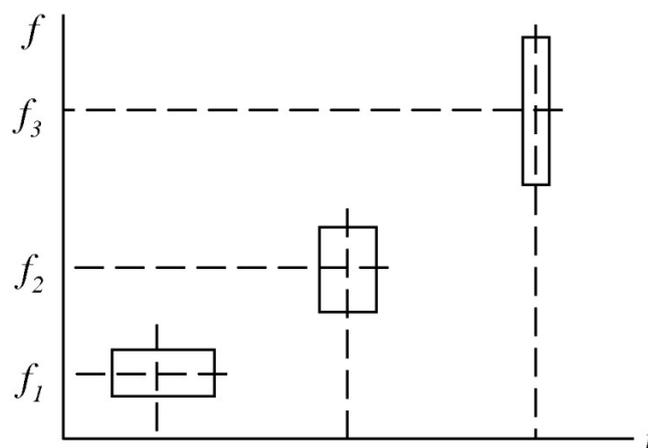


Рисунок 6.2. Частотно-временной анализ с использованием вейвлетов, в рамках которого проводится подстройка окна под выбранный масштаб наблюдения. Ширина спектральных линий при проведении оценок спектра мощности на частотах f_1 , f_2 и f_3 демонстрирует изменения – при увеличении частоты данная ширина увеличивается. Это приводит к «расплыванию» спектральных линий для высокочастотной области.

Примерно к тому же периоду времени относится и идеология распределения Вигнера-Вилля [53,54], предусматривающая возможность введения в рассмотрение частотно-временного представления анализируемого сигнала и обеспечивающая при этом высокое разрешение, как по времени, так и по частоте. Однако данные первые попытки создания методов частотно-временного анализа имели очевидные и весьма серьезные недостатки. Так, распределение Вигнера-Вилля приводит к появлению интерференций, существенно усложняющих возможность адекватной расшифровки информации, полученной в результате проведения расчетов. Интерференции усложняют возможность получения неискаженной информации о структуре сигнала и, в частности, об изменениях во времени частотных характеристик сигнала.

Устранение интерференций распределения Вигнера-Вилля возможно путем осуществления сглаживания с подходящим ядром [55], но это сопровождается заметным ухудшением спектрального разрешения. Считается, что распределение Вигнера-Вилля целесообразно применять только для очень коротких сигналов [55], но даже в этом случае оно уступает по своим возможностям теории вейвлетов. Вследствие отмеченных ограничений этот подход не нашел широкого распространения при решении задач цифровой обработки сигналов, полученных при осуществлении натуральных экспериментов.

Фактически, только в конце 1980-х годов сформировалось отдельное новое направление в задачах цифровой обработки сигналов, называемое вейвлет-анализом [55-59]. Оно использует многие известные ранее идеи и методы, например, известную в радиотехнике идеологию субполосного кодирования [60], ставшую основой процедуры пирамидального разложения в рамках быстрого алгоритма дискретного вейвлет-преобразования; известные в физике и математике идеологии когерентных состояний и интегральных операторов Зигмунда-Кальдерона [61], позволяющих существенно упростить решение ряда дифференциальных уравнений, в частности, в физике твердого тела и т.д. [46]. Но, базируясь частично на известных идеях, вейвлет-анализ стал серьезным прорывом в теории цифровой обработки сигналов, предпринятым за последние несколько десятилетий.

Существуют две формы вейвлет-преобразования – непрерывное и дискретное. В отличие от классического спектрального анализа, основанного на преобразовании Фурье, дискретное вейвлет-преобразование не сводится к простой дискретизации интегралов, вычисляемых в рамках непрерывного преобразования. Отличия между двумя формами преобразования являются более глубокими. В частности, непрерывное вейвлет-преобразование использует идеологию разложения по базису функций, которые не являются ортогональными, что приводит к сильной коррелированности вычисляемых коэффициентов и к избыточности самого преобразования. Поэтому для непрерывного вейвлет-преобразования сложнее решать задачу обратного восстановления сигнала по набору вейвлет-коэффициентов, чем реализовать аналогичную процедуру восстановления сигнала с помощью преобразования Фурье.

Важно отметить, что функции, используемые для построения базиса непрерывного вейвлет-преобразования, отличаются от функций, применяемых в рамках дискретного вейвлет-преобразования. В первом случае функции имеют аналитическую форму записи (например, они строятся путем дифференцирования функции Гаусса – рисунок 6.3). Эта ситуация принципиально отличается от дискретного вейвлет-преобразования, где используемый базис не может быть выражен в виде аналитических функций – вейвлеты задаются с помощью матриц чисел, полученных в результате решения некоторых функциональных уравнений. При этом обеспечивается ортогональность базиса, то есть возможность более компактного представления

сигнала в виде набора коэффициентов преобразования (за исключением некоторых отдельных ситуаций, когда специально применяют неортогональные базисы, обеспечивающие возможность получения избыточной информации, необходимой, в частности, для систем передачи данных в условиях наличия помех).



Рисунок 6.3. (а) WAVE-вейвлет, (б) МНАТ-вейвлет, представляющие собой первую и вторую производную функции Гаусса

По аналогии с классическим спектральным анализом, дискретное вейвлет-преобразование допускает реализацию в виде быстрого алгоритма разложения, что важно при проведении расчетов в режиме реального (или почти реального) времени. По этой причине дискретное вейвлет-преобразование нашло многочисленные применения в технике, включая задачи передачи информации, сжатия данных, цифровую фильтрацию и т.д. Непрерывное вейвлет-преобразование, являясь избыточным, для таких целей непригодно. Однако не следует считать, что избыточность является исключительно недостатком метода. Отсутствие избыточности, например, приводит к появлению ошибок в передаче сообщений при наличии помех, поэтому при решении задач передачи информации часто используют «почти ортогональные» базисы («фреймы») [55]. Избыточность является полезным свойством и при проведении научных исследований, целью которых служит выявление детальной информации о структуре сложных сигналов. Непрерывное вейвлет-преобразование является более предпочтительным при проведении частотно-временного анализа нестационарных процессов, так как оно позволяет оперировать с величинами, которые являются привычными в радиофизике. С помощью непрерывного вейвлет-преобразования с комплексными базисами можно ввести в рассмотрение такие характеристики как мгновенные амплитуды, мгновенные частоты и фазы колебаний. Математический аппарат вейвлет-преобразования позволяет изучать данные характеристики для случая многомодовой динамики, включающей ритмические процессы с удаленными друг от друга частотами, то есть для широкой полосы спектра.

Это принципиальным образом отличает вейвлет-анализ от классического метода аналитического сигнала, использующего преобразование Гильберта. В последнем случае необходимо рассматривать только узкополосные процессы для того, чтобы получить результаты, имеющие физический смысл. Но даже для узкополосных процессов преобразование Гильберта уступает вейвлет-преобразованию. Известно, что при обработке нестационарных процессов могут возникать нефизические результаты, если среднее значение исследуемого сигнала отлично от нуля [62]. В частности, если рассмотреть в качестве анализируемого сигнала процесс вида $\cos(\omega t + c t^2)$ в зависимости от выбора постоянной c возможны различные ситуации (рисунок 6.4).

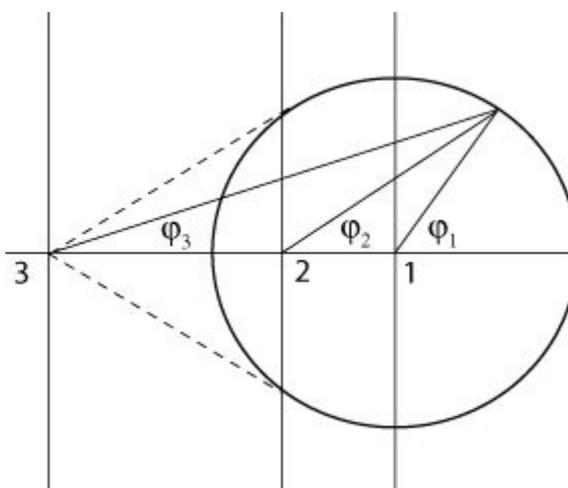


Рисунок 6.4. Иллюстрация изменения скорости приращения фазы гармонических колебаний при варьировании среднего уровня: $c=0$ (обозначен цифрой 1), (цифра 2), (цифра 3). Для последнего уровня фазовый угол не выходит за границы значений, обозначенных пунктирными линиями. Результаты представлены на плоскости координата и преобразование Гильберта.

Если $c=0$, то мгновенная частота колебаний, характеризующая скорость изменения фазового угла, является постоянной величиной. В этом случае наблюдается линейный рост фазы, что полностью соответствует динамике линейного консервативного осциллятора. При малых ненулевых значениях c , скорость изменения фазы является величиной, зависящей от текущего значения, что приводит к периодическим изменениям мгновенной частоты во времени. При этом величина ω принимает положительные значения, осциллируя относительно некоторого среднего уровня. Эта ситуация существенно меняется для значений $c > 1$, когда фаза колебаний принимает значения только в пределах некоторого диапазона (изображенного пунктирами на рисунке 6.4). Так как на некоторых участках времени происходит уменьшение фазы (это можно наблюдать, проанализировав временную эволюцию значений фазового угла, формальный расчет мгновенной частоты колебаний приведет к появлению отрицательных значений. Безусловно, такой результат следует признать нефизическим – причиной является наличие постоянной составляющей сигнала, приводящей к неравномерности роста фазового угла. Существенные смещения постоянной составляющей приводят к тому, что фазовые

траектории перестают вращаться вокруг точки с координатами $(0:0)$, а наличие фрагментов траекторий, не захватывающих данную точку, сопровождается появлением участков с отрицательной производной фазы колебаний.

Рассмотренная ситуация является простой иллюстрацией проблем, возникающих при проведении расчетов мгновенной частоты колебаний. Для устранения этих проблем можно воспользоваться стандартной процедурой – сведением сигнала к нулевому среднему уровню. Этот прием широко используется и при проведении классического спектрального анализа для устранения δ -выброса на нулевой частоте и вычисления спектра мощности флуктуаций. Но простое вычитание среднего значения позволяет избавиться от рассматриваемых проблем только в случае стационарных процессов, характеристики которых не меняются при переносе начала отсчета времени. В отсутствие стационарности среднее значение в общем случае от времени зависит, поэтому отмеченные сложности вполне могут возникнуть на отдельных участках, характеризующихся локальным ненулевым средним уровнем. Более целесообразной представляется процедура проведения цифровой фильтрации, позволяющей устранить не только постоянную составляющую, но и возможный низкочастотный тренд (например, полиномиальный). Поэтому, прежде чем применять концепцию аналитического сигнала и используемое в рамках этой концепции преобразование Гильберта, вначале необходимо убедиться в том, что проведена необходимая предварительная обработка экспериментальных данных, без реализации которой качество полученных результатов может быть недостаточно высоким (а порой будут получаться и некорректные с физической точки зрения результаты). Отметим, что в данном случае мы акцентируем внимание на ограничениях классической концепции аналитического сигнала даже для узкополосных процессов, тогда как для многомодовых колебательных процессов, включающих ритмическую активность с независимыми и удаленными в спектральной области частотами, проблем с получением корректных результатов будет существенно больше, и решать их намного сложнее.

Применение вейвлет-анализа является более эффективным математическим аппаратом, способным устранить недостатки концепции аналитического сигнала. Ключевой аспект состоит в том, что система функций разложения (или базис вейвлет-преобразования) представляет собой фактически набор фильтров, позволяющих в автоматическом режиме устранять проблемы низкочастотного тренда и т.п. От исследователя не требуется осуществлять предварительную фильтрацию экспериментальных данных, так как при проведении расчетов на заданной частоте вейвлет-преобразование будет выступать в роли полосового фильтра, характеристики которого определяются базисной функцией преобразования и допускают настройку «вручную» путем задания параметров, задающих частотно-временное разрешение. Такой параметр, в частности, есть у функции Морле, традиционно применяемой в качестве

наиболее популярного вейвлета для осуществления спектральных оценок [48]. Наряду с тем, что функция Морле обладает хорошими свойствами локализации и во временном пространстве, и в частотной области, результаты вейвлет-анализа с помощью данной функции наиболее приближены к результатам классического оконного спектрального анализа, что облегчает исследование и интерпретацию двумерных вейвлет-спектров.

Другой вариант решения проблемы некорректного оценивания мгновенной частоты колебаний был предложен в работе [60] и получил название преобразования Гильберта-Хуанга или метода эмпирических мод. Фактически, для устранения нефизических результатов необходимо обеспечить движение фазовой траектории вокруг начала координат в рассматриваемом фазовом пространстве, так как именно ее смещения приводят к возможному появлению участков флуктуаций мгновенной частоты (вследствие несимметричности формы сигнала) или даже участков с отрицательной мгновенной частотой (при значительных смещениях локального среднего уровня). Именно такой подход и предусматривается в рамках метода [60]. Ключевой аспект преобразования Гильберта-Хуанга состоит в том, что на первом этапе оно предусматривает «выравнивание» локального среднего уровня путем усреднения и последующего вычитания двух огибающих сигнала – верхней, проходящей через локальные максимумы, и нижней, проведенной по локальным минимумам. Процедура выделения и устранения локального среднего уровня реализуется в виде итерационного алгоритма (так как за один шаг в подавляющем большинстве случаев не удастся свести сигнал к симметричному виду), позволяющего разложить сигнал на составляющие («внутренние» или эмпирические моды), характеризующиеся более выраженной симметрией по сравнению с исходным процессом и разными временными масштабами. Для каждой из эмпирических мод процедура расчета мгновенных частот колебаний, проводимая в рамках классического преобразования Гильберта, будет всегда приводить к корректным с физической точки зрения результатам. Метод [60] позволяет, таким образом, применять классическую концепцию аналитического сигнала к многочастотным процессам, если вначале провести представление исходного сигнала в виде суммы осциллирующих составляющих – эмпирических мод. Если применительно к классическому преобразованию Гильберта можно сформулировать ряд принципиальных недостатков при анализе нестационарных процессов, то для метода Гильберта-Хуанга эти недостатки не столь очевидны, и вопрос о преимуществах этого подхода по сравнению с концепцией вейвлетов требует отдельного, более детального рассмотрения.

К настоящему времени опубликован ряд работ [63-65], авторы которых считают, что преобразование Гильберта-Хуанга обеспечивает более качественное частотно-временное разрешение по сравнению с вейвлет-анализом. Для подтверждения данных выводов рассматривается, например, случай частотной модуляции – если частота модулирующего и

модулируемого процессов существенно отличаются друг от друга, то вейвлет-анализ позволяет корректно оценить временные зависимости соответствующих мгновенных частот колебаний. Проблемы возникают в том случае, когда расстояние в спектральной области между частотами становится небольшим, то есть частоты модулируемого и модулирующего процессов сопоставимы. Следствием близких значений частот является возникновение интерференций, служащих отражением факта перекрытия широких спектральных линий, возникающих при расчете непрерывного вейвлет-преобразования по коротким фрагментам сигнала. Более того, чем выше частота, тем шире окно вейвлет-преобразования в спектральной области, и тем сильнее проявляется эффект интерференций. В статьях [63-65] приводятся примеры, свидетельствующие о способности метода эмпирических мод корректно оценивать мгновенные частоты колебаний для взаимодействующих колебательных процессов с незначительно отличающимися периодами, что служит доводом в пользу более эффективного частотно-временного разрешения структуры сигналов с помощью этого метода.

Однако следует принять во внимание, что данные доводы базируются исключительно на отдельных иллюстративных примерах, так как для преобразования Гильберта-Хуанга в значительно меньшей степени разработан математический аппарат, позволяющий строго обосновать возможные преимущества частотно-временного разрешения. В этом аспекте концепция вейвлет-анализа является значительно более серьезно проработанной, и вопрос о разрешении данного метода был решен достаточно давно [55-58]. Современная теория вейвлетов позволяет для различных базисных функций преобразования записать конкретные формулы, по которым можно оценить как ширину спектральных линий на различных частотах, так и определить ограничения спектрального разрешения для близко расположенных спектральных линий. Отсутствие строгой теории для метода Гильберта-Хуанга не позволяет сопоставить этот подход с вейвлетами на уровне конкретных формул. Тем не менее, данный инструмент исследования уже успел хорошо себя зарекомендовать при решении широкого круга задач, и его применение на практике в качестве альтернативного метода анализа частотно-временного состава исследуемых сигналов представляется весьма перспективным направлением в цифровой обработке сигналов.

Проведем сопоставление метода Гильберта-Хуанга и вейвлет-анализа, акцентируя внимание на нескольких особенностях этих подходов.

6.2. Используемый базис

Применительно к вейвлет-анализу проблема выбора базисной функции является одной из ключевых проблем – правильно подобранный «материнский» вейвлет позволит провести детальное исследование структуры сложного сигнала, выявив нужные детали. Очень удачной является современная интерпретация вейвлет-анализа как метода математического микроскопа:

параметр смещения вейвлета аналогичен выбору точки фокусировки микроскопа, параметр масштаба позволяет устанавливать нужное увеличение, а выбор вейвлета аналогичен выбору объектива. Интерпретация вейвлет-анализа как метода математического микроскопа представляется очень удачной, и с ее помощью можно понять ключевые проблемы, возникающие в том случае, когда вейвлет-анализ не позволяет выявить необходимые особенности рассматриваемого процесса. Для того, чтобы используемый «микроскоп» являлся эффективным инструментом исследования, он должен быть настроен – подобраны все параметры, обеспечивающие возможность качественного анализа сложных процессов. После соответствующей настройки метод вейвлет-анализа будет обеспечивать более высокое частотно-временное разрешение, чем в случае произвольно установленных параметров непрерывного вейвлетного преобразования. Очевидным преимуществом метода эмпирических мод является то обстоятельство, что он не требует выбора базиса и настройки параметров. Это позволяет, с одной стороны, проще реализовать пакет прикладных программ для проведения расчетов методом эмпирических мод в виде автоматически выполняемой процедуры. С другой стороны, применение преобразования Гильберта-Хуанга в меньшей степени зависит от таких субъективных факторов как опыт исследователя, который важен для подходящей настройки параметров вейвлетного преобразования. С точки зрения используемого базиса метод эмпирических мод является более простым алгоритмом разложения сигнала на независимые ритмические компоненты.

6.3. Исследование нелинейных процессов

Еще одним недостатком, присущим как классическому спектральному анализу, основанному на финитном преобразовании Фурье, так и вейвлетному преобразованию, является проблема анализа нелинейных процессов, а именно оценка амплитуды колебаний, для которых характерен сложный спектральный состав. Фактически, преобразование Фурье позволяет вычислять только амплитуды отдельных составляющих (гармоник), тогда как метод аналитического сигнала (и преобразование Гильберта-Хуанга как его модернизированная версия) обеспечивают возможность введения в рассмотрения мгновенной амплитуды колебательного процесса, характеризующей процесс в целом, а не его отдельные составляющие. Это позволило авторам работ [62-65] утверждать, что метод эмпирических мод лучше приспособлен для выявления и описания нелинейных процессов. Аналогичные доводы можно привести, проводя сопоставления концепции эмпирических мод и вейвлет-преобразования. Вследствие того, что вейвлеты выступают в роли фильтров, они позволяют изучать временную эволюцию отдельных ритмических составляющих в структуре анализируемого сигнала, и при осуществлении вейвлетного преобразования анализируется узкая частотная область, ассоциирующаяся с размером подвижного частотно-временного окна.

Для нелинейных процессов, включающих гармоники, каждая из этих гармоник анализируется путем перемасштабирования материнского вейвлета. Двумерный частотно-временной спектр вейвлетного преобразования содержит информацию о мгновенных амплитудах и частотах отдельных гармоник. Если же необходимо ввести в рассмотрение мгновенную амплитуду исследуемого процесса в целом (по аналогии с методом аналитического сигнала), то вейвлет-анализ является менее пригодным для этой цели.

6.4. Наличие завершенной теории

По этому показателю метод эмпирических мод, безусловно, уступает как классическому спектральному анализу, так и вейвлет-анализу. Если для концепции вейвлетов детально проработанная теория существует на протяжении примерно двадцати лет (фактически, проработка основ концепции вейвлетов была завершена в конце 1980-х годов), то в случае метода эмпирических мод пока не приходится говорить о наличии аналогичной теории. Ключевые положения концепции вейвлетов сформулированы в виде многочисленных теорем, особенности и возможности вейвлетов при решении широкого круга задач неоднократно обсуждались в научной печати (можно, в частности, отметить, что количество ссылок на источники в сети Интернет, посвященных вейвлет-анализу, уже насчитывает несколько миллионов). Преобразование Гильберта-Хуанга, появившись примерно в тот же период времени (в конце 1980-х годов), пока еще не приобрело такой популярности, и число его применений для решения практических задач уступает применениям вейвлетов. В значительной степени это связано с тем, что метод эмпирических мод не используется в технике, представляя наибольший интерес для научных исследований. Отметим, что незавершенность теории не свидетельствует о меньших потенциальных возможностях метода. Исторически, построение теории вейвлетов представляет собой весьма обширный интервал времени от выдвижения первых идей до их воплощения в виде проработанного математического инструмента исследований сложных сигналов и систем. Идеи, лежащие в основе метода эмпирических мод, появились значительно позже, и их обобщение в виде завершенной математической теории, вероятно, потребует более длительного времени. Важно отметить, что этот подход базируется на совершенно другой идеологии по сравнению с вейвлетами. Так, например, он использует адаптивные базисы; для него в меньшей степени сказываются проблемы, связанные с существованием принципа неопределенности [47] и т.д. Фактически, метод эмпирических мод выступает в роли нового альтернативного (и также обладающего широкими возможностями) инструмента исследования структуры сложных сигналов. Наличие такого инструмента в дополнение к вейвлет-анализу расширяет возможности частотно-временного исследования нестационарных процессов.

6.5. Выводы

При выполнении НИР проводилось сопоставление обсуждаемых методов на ряде конкретных примеров, включая процессы переключения частоты (в том числе, неоднократное переключение частоты за временной интервал, сопоставимый с характерным периодом колебаний), монотонное изменение частоты («чирп»-сигнал, демонстрирующий линейных рост частоты колебаний или сумма линейных чирпов). Во всех рассмотренных примерах было установлено, что частотно-временное разрешение метода эмпирических мод и вейвлет-анализа является сопоставимым, и ни один из этих методов не имеет явных преимуществ с точки зрения диагностики изменений характеристик колебательных процессов во времени. Например, при переключении частоты гармонической функции метод эмпирических мод приводит к заметным погрешностям расчета мгновенного периода колебаний на временных участках, составляющих величину порядка половины периода, после чего оценки мгновенных характеристик проводятся с высокой степенью точности. Аналогичная ситуация возникает и при решении данной задачи с помощью непрерывного вейвлет-преобразования с базисной функцией Морле. Как уже отмечалось, вейвлет-анализ, являясь методом математического микроскопа, требует предварительной настройки (выбора параметров смещения и масштаба, выбора базиса, задания «оптимального» частотно-временного разрешения). «Настроенный» микроскоп по своим характеристикам не уступает концепции эмпирических мод, и выбор конкретного инструмента исследования может основываться на таких факторах, как опыт исследователя или существующие традиции решения конкретного класса задач. Доводом в пользу выбора вейвлет-анализа служит более простая физическая интерпретация результатов. В частности, для сложных процессов, регистрируемых в физиологии, геологии и т.д., метод эмпирически мод позволяет разложить сигнал на большое число «внутренних» мод, характеризующихся близкими мгновенными частотами колебаний. При этом далеко не всегда понятно, с какими процессами эти моды связаны, как из полученного набора осциллирующих составляющих выбрать только те моды, которые ассоциируются с изучаемыми механизмами (или подсистемами), отбросив все «лишние». В этом аспекте следует признать, что вейвлет-анализ способен предоставить более простую информацию для интерпретации сложного спектрального состава исследуемого процесса. Однако отмеченные недостатки являются следствием того, что концепция преобразования Гильберта-Хуанга пока еще только развивается, и есть основания полагать, что с течением времени она может заменить вейвлет-анализ при решении ряда задач цифровой обработки сигналов. Безусловно, любой метод анализа временных рядов имеет свои границы применимости, свои достоинства и недостатки. Обзор известной на сегодняшний день научной литературы в совокупности с результатами расчетов, предпринятых исполнителями НИР, свидетельствуют о том, что в задачах

исследования частотно-временной динамики нестационарных процессов концепции вейвлетов и эмпирических мод являются сопоставимыми по своим потенциальным возможностям, а их применение (в том числе и совместное) способно существенно расширить возможности локализованного анализа процессов с меняющимися во времени характеристиками.

Заключение

В результате проведения научных исследований получены следующие принципиальные научные результаты:

- 1) Выявлены основные свойства стохастических колебаний нелинейного осциллятора, возникающих при шумовом параметрическом воздействии. Установлена существенная зависимость статистических характеристик колебаний от вида и параметров шумовой накачки.
- 2) Разработана математическая модель для исследования нелинейных локализованных волн в двумерных решетках потенциально взаимодействующих частиц, основанная на представлении решетки в виде ансамбля частиц с конечным эффективным радиусом взаимодействия.
- 3) Разработана методика численного интегрирования уравнений модели нелинейных локализованных волн в двумерных решетках потенциально взаимодействующих частиц.
- 4) Установлены стохастические бифуркации связанности, наблюдающиеся при воздействии шума на автоколебательную среду в режиме удвоения периода колебаний для различных волновых мод.
- 5) Разработан метод подавления мультистабильности посредством шумового воздействия на автоколебательную среду.
- 6) Разработана методика и созданы численные алгоритмы корректной оценки параметров динамической системы, содержащей внутренние источники шума, на основании численной обработки реализаций колебаний.
- 7) Создан экспериментальный образец системы двух связанных возбудимых осцилляторов. В натурном эксперименте показано и изучено явление стохастической синхронизации.

По материалам исследований подготовлены научные публикации [65-75].

Результаты исследований могут быть будут использованы для подготовки студентов, магистров, молодых кандидатов и докторов наук по специальностям «радиофизика и электроника», «физика» и «медицинская физика» на физическом факультете СГУ; модернизации существующих учебных курсов «Основы теории колебаний», «Статистическая радиофизика», «Введение в нелинейную динамику», «Методы численного анализа экспериментальных данных», «Теория дискретных систем», «Детерминированный хаос»,

«Синхронизация колебаний», «Основы теории распределенных систем», «Анализ временных рядов» и лабораторного практикума «Электронное моделирование сложных систем и процессов»

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. -М.: Наука, 1981. -560с.
2. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Стрелкова Г.И. Автоколебания динамических и стохастических систем и их математический образ аттрактор // Нелинейная динамика. -2010. -Том 6. -№ 2. -С.1 - 20.
3. Landa P.S., Zaikin A.A. Noise-induced phase transitions in a pendulum with a randomly vibrating axis // Phys. Rev. E. -1996. -Том 54. -С. 3536 - 3544.
4. Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. -М.: Техносфера, 2003. -550с.
5. Ахманов С.А., Дьяковч С.А., Чиркин А.С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. -М.: Наука, 1981. -480с.
6. FitzHugh R.A. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane // Biophys. J. -1961. -Том 1. -С. 445 - 466.
7. Ланда П.С. Возбуждение хаотических и стохастических колебаний в различных системах// Изв. Вузов. Прикладная нелинейная динамика. -2009. -Том 18 -№ 1. -С.3 - 10.
8. Larsson S. Electron transfer in proteins// Biochica et Biophysica Acta. -1998. -С. 294-300.
9. Eremko A., Cruzeiro-Hansson L., Olkhovska Y. Soliton dynamics and Peierls-Nabarro barrier in a discrete molecular chain// Physical Review B. -2000. -Том 61. -С. 1129-1141.
10. Wei H., Wang L.X., Chan K.S., Yijing Y. Trapping and hopping of bipolarons in DNA: Su-Schrieffer-Heeger model calculations// Physical Review B. -2005. -Том 72. -С. 064304-064309.
11. Hennig D., Chetverikov A.P., Velarde M.G. Electron capture and transport mediated by lattice solitons // Physical Review E. -2007. -Том 76. -С. 046602-046611.
12. Balabin I., Beratan D.N., Skourtis S.S. Persistence of Structure Over Fluctuations in Biological Electron-Transfer Reactions// Physical Review Letters. -2008. -Том 101. -С. 158102-158106.
13. Velarde M.G., Ebeling W., Chetverikov A.P. On the possibility of electric conduction mediated by dissipative solitons// Int.J.Bifurc. Chaos. -2005. -Том 15. -С. 245-251.

14. Anharmonicity and its significance to non-Ohmic electric conduction/ V.A.Makarov, M.G.Velarde, A.Chetverikov, W.Ebeling// *Physical Review E*. – 2006. –Том 73. –С. 066626-066638.
15. On soliton - mediated fast electric conduction in a nonlinear lattice with Morse interactions/ M.G.Velarde, W.Ebeling, D.Hennig, C.Neibner// *International Journal of Bifurcation and Chaos*. –2006. –Том 16. –С. 1035 - 1039.
16. Electron trapping by solitons. Classical versus quantum mechanical approach/ M.G.Velarde, W.Ebeling, A.P.Chetverikov, D.Hennig// *International Journal of Bifurcation and Chaos*. –2008. –Том 18. –С. 521 - 526.
17. On the mathematical modeling of soliton-mediated long-range electron transfer/ M.G.Velarde, A.P.Chetverikov, W.Ebeling, D.Hennig, J.J.Kozak// *International Journal of Bifurcation and Chaos*. –2010. –Том 20. –С. 185 - 194.
18. Tuszynski J.A., Paul R. Relationship between Frolich and Davydov models of biological order// *Physical Review A*. –1984. –Том 30. –С.2666-2675.
19. Тода М. Теория нелинейных решеток. - М.: Мир, 1984. -380с.
20. Двумерные солитоны в дискретных системах/ В.К.Мезенцев, С.Л.Мушер, И.В.Рыженкова, С.К.Турицын// *Письма в ЖЭТФ*. –1994. –Том 60. –С. 815-821.
21. Hartman B., Zakrzewski W. The transition of 2-dimensional solitons to 1-dimensional ones on hexagonal lattices// *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*. -2006. –Том 13. –С. 111-116.
22. Efremidis N.K., Christodoulides D.N., Hizanidis K. Two-dimensional discrete Ginzburg-Landau solitons// *Physical Review A*. –2007. -Том 76. -С. 043839-043845.
23. Петвиашвили В.И., Цвелогуб О.Ю. Подковообразные солитоны на стекающей вязкой пленке жидкости// *Доклады АН СССР*. – 1978. -Том 238. –С.1321-1323.
24. Analytic conditions for targeted energy transfer between nonlinear oscillators or discrete breathers/ S. Aubry, G. Kopidakis, A.M. Morgante, G.P. Tsironis// *Physica B*. –2001 -Том 296. –С. 222-236.
25. Velarde M.G., Ebeling W., Chetverikov A.P. Anharmonicity and soliton-mediated electric transport. Is a kind of superconduction possible at room temperature// *World Scientific Series on Nonlinear Science B*. –2010. -Том 15. –С. 8-13.
26. Bar-Eli K. On the stability of coupled chemical oscillators// *Physica D*. -1985. -Том. 14. -С. 242-253.
27. Taylor M., Kevrekidis I. Some common dynamic features of coupled reacting systems// *Physica D*. -1991. -Том 51. -С. 274-295.

28. Synchronization of two non-scalar-coupled limit-cycle oscillators/ G. Osipov, V. Shalfeev, J. Kurths // *Physica D*. -2004. -Том 189. -С. 8-21.
29. Кузнецов А., В. Паксютов О динамике двух осцилляторов ван дер Поля–Дуффинга с диссипативной связью// *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. -2003. -Том 11. -№ 6. -С. 48-56.
30. Pikovsky A.S., Kurths J. Coherence Resonance in a Noise-Driven Excitable// *Phys. Rev. Lett.* -1997. –Том 78. –С. 775-778.
31. Linder B., Schimansky-Geier L. Analytical approach to the stochastic FitzHugh-Nagumo system and coherence resonance// *Phys.Rev.E*. -1999. –Том 60. –С. 7270 - 7276.
32. Izhikevich E. M. *Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting*. Cambridge: MIT Press, 2007. -570с.
33. FitzHugh R. Mathematical models of threshold phenomena in the nerve// *Bull. Math. Biophysics*. -1955. Том. 17. –С. 257-278.
34. Scott A.C. The electrophysics of a nerve fiber// *Rev. Mod. Phys.* -1975. –Том 47. С. 487–533.
35. Longtin A. Stochastic resonance in neuron models// *J. Stat. Phys.* -1993. -Том. 70. С. 309-327.
36. Baltanas J.P., Casado J.M. Bursting behaviour of the FitzHugh-Nagumo neuron model subject to quasi-monochromatic noise// *Phys. D*. -1998. –Том 122. –С. 231-240.
37. Interacting coherence resonance oscillators/ S.K. Han, T.G. Yim, D.E. Postnov, O.V. Sosnovtseva// *Phys.Rev.Lett.* -1999. –Том. 83. –С. 1771-1774.
38. Noise-enhanced phase synchronization in excitable media/ A.Neiman, L.Schimansky-Geier, A.Cornell-Bell, F.Moss// *Phys.Rev.Lett.* -1999. –Том 83. –С. 4896-4899.
39. Hu B., Zhou C. Phase synchronization in coupled nonidentical excitable systems and array-enhanced coherence resonance// *Phys.Rev.E*. -2000. -Том. 61. –С. 1001-1004.
40. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. *Теория колебаний*. -М.: Наука, 1981. -560с.
41. Dissipative Toda-Rayleigh lattice and its oscillatory modes/ V.A.Makarov, E.del Rio, W.Ebeling, M.G. Velarde// *Phys.Rev.E*. -2001. Том. 64. –С. 036601-036615 [14 pages].
42. Отнес Р. *Прикладной анализ временных рядов*. – М.: Мир, 1982. -350с.
43. Бендат Д., Пирсол А. *Прикладной анализ случайных данных*. – М.: Мир, 1989. -310с.
44. *Numerical recipes in C: the art of scientific computing/* W. H. Press, S. A. Teukokolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flanney. – Cambridge: Cambridge University Press, 1992. -320с.
45. Дремин И. М., Иванов О.В., Нечитайло В.А. Вейвлеты и их // *Успехи физических наук*. – 2001. -Том 171. – С. 465–501.
46. Addison P. S. *The illustrated wavelet transform handbook: applications in science, engineering, medicine and finance* –Bristol ; Philadelphia: IOP Publishing, 2002. -450с.
47. Mallat S. G. *A wavelet tour of signal processing*. – New York: Academic Press, 1998. -460с.

48. Torrence C. A, Compo G.P. Practical guide to wavelet analysis// Bull. Amer. Meteor. Soc. – 1998. –Том 79. –С. 61–78.
49. Астафьева Н. М. Вейвлет-анализ: основы теории и примеры// Успехи физических наук. – 1996. -Том 166. -№ 11. – С. 1145–1170.
50. Gabor D. Theory of communications// J. Inst. Electr. Eng. –1946. –Том 93. –С. 429–457.
51. Баскаков С. И. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Высшая школа, 2005. -350с.
52. Ville J. Theorie et applications de la notion de signal analytique// Cables et Transm. – 1948. – Том 2А. -№ 1. –С. 61–74.
53. Wigner E. P. On the quantum correction for thermodynamic equilibrium// Phys. Rev. –1932. – Том. 40. –С. 749–759.
54. Daubechies I. Ten lectures on wavelets. – Philadelphia: S.I.A.M., 1992. -320с.
55. Grossman A., Morlet J. Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape// SIAM J. Math. Anal. –1984. –Том 15. –С. 723–736.
56. Meyer Y. Wavelets: Algorithms and applications. -Philadelphia: S.I.A.M., 1993. -420с.
57. Meyer Y. Wavelets and operators. –Cambridge: Cambridge University Press, 1993. -380с.
58. Van den Berg J. C. Wavelets in physics. –Cambridge: Cambridge University Press, 1993. -410с.
59. Vetterli M., Kovacevic Wavelets and subband coding –NJ: Prentice Hall, 1995. –385с.
60. Meyer Y., . Coifman R. Wavelets. Calderon-Zygmund and multilinear operators. –Cambridge: Cambridge University Press, 1997. -390с.
61. The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis/ N. E. Huang, Z. Shen, S. R. Long, M. C. Wu, H. H. Shih, Q. Zheng, N.-C. Yen, C. C. Tung, H. H. Liu// Proc. R. Soc. London Ser. A –1998. –Том 454. –С. 903–995.
62. Huang N. E., Shen N., Long S.R. A new view of nonlinear water waves: the Hilbert spectrum // Annu. Rev. Fluid Mech. –1999. –Том 31. –С. 417–457.
63. Huang N. E., Shen S.S. Hilbert-Huang transform and its applications. –Singapore: World Scientific, 2005. -420с.
64. Flandrin P., Goncalvés P. Empirical mode decompositions as data-driven wavelet-like expansion// Int. J. Wavelets Multiresolut. – 2004. –Том 2. –С. 477–496.
65. Анищенко В.С., Боев Я.И., Вадивасова Т.Е. Индуцированные шумом параметрические колебания в нелинейном осцилляторе // Письма в журнал технической физики (направлена в печать).
66. Velarde M.G., Ebeling W., Chetverikov A.P. Anharmonicity and soliton-mediated electric transport. Is a kind of superconduction possible at room temperature// World Scientific Series on Nonlinear Science, Series B. –2010. -Том 15. –С. 8-13.

67. Peculiarities of transition to synchronization in coupled systems with amplitude death / V. Astakhov, S. Koblyanskii, A. Shabunin, T. Kapitaniak// Chaos (направлена в печать).
68. Слепнев А.В., Вадивасова Т.Е., Листов А.С. Мультистабильность, удвоения периода и подавление бегущих волн шумовым воздействием в сильно нелинейной автоколебательной среде с периодическими граничными// Нелинейная динамика (принята к печати).
69. Слепнев А.В. Вадивасова Т.Е. Бифуркации удвоения периода и эффекты шумового воздействия в мультистабильной автоколебательной среде// Известия ВУЗов. Прикладная нелинейная динамика (направлена в печать).
70. Феоктистов А.В., Астахов С.В., Анищенко В.С. Когерентный резонанс и синхронизация стохастических автоколебаний в системе ФитцХью-Нагумо // Известия ВУЗов. Прикладная нелинейная динамика (направлена в печать).
71. Anichchenko V., Vadivasova T., Strelkova G. Stochastic self-sustained oscillations of non-autonomous system// European Physical Journal. -2010. –Том 187. -С. 109-125.
72. Chetverikov A., Ebeling W., Velarde M.G. Thermal Solitons and Solectrons in Nonlinear Conducting Chains// Int. J. of Quantum Chemistry. -2010. -Том 110. -№ 1. -С. 46-61.
73. On the mathematical modeling of soliton-mediated long-range electron transfer/ M.G.Velarde, A.P.Chetverikov, W.Ebeling, D.Hennig, J.J.Kozak// Int. J. Bifurcation and Chaos. -2010. -Том 20. -№ 1. -С. 185-194.
74. Velarde M.G., Ebeling W., Chetverikov A.P. Numerical evidence of soliton-mediated electron pairing in heated anharmonic crystal lattices// Int. J. Bifurcation and Chaos (направлена в печать).
75. On electron pairing in one-dimensional anharmonic crystal lattices/ M.G. Velarde, L. Brizhik, A.P. Chetverikov, L. Cruzeiro, W. Ebeling, G. Ripke// Int. J. of Quantum Chemistry (направлена в печать).