

Мультифрактальный анализ хаотической динамики взаимодействующих систем

А.Н. Павлов, О.В. Сосновцева, А.Р. Зиганшин

Мы рассматриваем методы исследования мультифрактальности и скейлинга в применении к явлению синхронизации хаоса в двух связанных автоколебательных системах. С помощью алгоритмов DFA и WTMM анализируется структура последовательностей времен возврата в секущую Пуанкаре для различных модельных систем и для экспериментальных данных. В терминах мультифрактального формализма обсуждаются типичные эффекты, к которым приводит синхронизация хаотических колебаний.

Введение

Синхронизация автоколебаний представляет собой одно из фундаментальных явлений природы [1, 2, 3]. В рамках классической теории, разработанной для периодических процессов, эффект синхронизации проявляется либо в захвате частот и, следовательно, стабилизации фазового сдвига между взаимодействующими модами, либо в подавлении собственной динамики одной из систем. Взаимодействие нелинейных систем с хаотическим поведением способно демонстрировать значительно более широкий спектр явлений, которые можно рассматривать как частные случаи синхронной динамики. Примерами служат полная синхронизация [4], обобщенная синхронизация [5], фазовая синхронизация [6] и так называемая *lag*-синхронизация [7].

За последние годы было разработано множество подходов, позволяющих диагностировать наличие синхронности хаотических колебаний. Арсенал средств, которые могут применяться при исследовании эффектов взаимодействия нелинейных систем, включает спектральный анализ [8], различные методы расчета мгновенных фаз колебательных процессов [2], функцию когерентности (или взаимный спектр) [8], среднее время возврата в секущую Пуанкаре, коэффициент диффузии разности фаз [9] и т.д.

Взаимодействие автоколебательных систем, демонстрирующих хаотическую динамику, приводит к изменению структуры аттракторов, существующих в отсутствие взаимодействия. В свою очередь, эти изменения отражаются в структуре характерных временных интервалов, таких как времена возврата в секущую Пуанкаре. Согласно работе [10], распределение времен возврата динамической системы может характеризоваться мультифрактальными свойствами, то есть демонстрировать различный локальный скейлинг [11, 12].

На практике особенности скейлинга во временной динамике могут изучаться при помощи разных подходов, начиная с классического корреляционного (или спектрального) анализа. К числу очевидных недостатков классических методов следует отнести их применимость только к стационарным данным. Поскольку большинство процессов в природе являются сильно неоднородными и нестационарными, привлекательность выбора того или иного численного метода в значительной степени определяется его универсальностью и возможностью эффективного применения к реальным процессам различной природы. Среди достаточно универсальных методов обработки временных рядов можно выделить так называемые методы *"detrended fluctuation analysis"* (DFA)

[13] и "wavelet transform modulus maxima" (WTMM) [14]. Первый подход представляет собой вариант дисперсионного анализа одномерных случайных блужданий, позволяющий исследовать эффекты длительных корреляций в нестационарных временных рядах. В рамках алгоритма DFA анализируется среднеквадратическая ошибка линейной аппроксимации обобщенной модели случайных блужданий от размера аппроксимируемого участка. Идеология метода WTMM базируется одновременно на термодинамическом формализме и вейвлет-преобразовании и предполагает изучение мультифрактальных свойств в терминах спектра сингулярности $D(h)$, где D - фрактальная размерность подмножества, характеризующегося экспонентой Хелдера h . Значения Хелдеровских экспонент описывают локальный скейлинг коэффициентов вейвлет-преобразования и, как правило, не совпадают для различных участков неоднородного процесса.

В данной работе методы исследования мультифрактальности и скейлинга рассматриваются в применении к явлению синхронизации хаоса в двух связанных автоколебательных системах. С помощью алгоритмов DFA и WTMM мы анализируем структуру последовательностей времен возврата в секущую Пуанкаре для различных модельных систем и для экспериментальных данных. В качестве модели, демонстрирующей сравнительно простую динамику, нами выбраны две связанные системы Ресслера. Каждая подсистема этой модели имеет одну четко выраженную базовую частоту (или временной масштаб). Далее мы исследуем особенности мультифрактального описания динамики систем с несколькими характерными временными масштабами и рассматриваем связанные системы Лоренца и модель двух взаимодействующих нефронов почки. Хаотические колебания, соответствующие аттрактору Лоренца, характеризуются двумя частотами, первая из которых определяется вращением вокруг одного из неустойчивых фокусов, а вторая соответствует процессу переключений (если рассматривать систему Лоренца как бистабильную). Модель нефрона является примером системы, демонстрирующей колебания с двумя различными временными масштабами: медленные колебания проксимального давления и сравнительно быстрые колебания радиуса приносящей артериолы. Путем выбора разных фазовых переменных (или различного задания уравнения секущей плоскости) эти два масштаба могут изучаться по-отдельности. Мы показываем, что в терминах мультифрактального формализма эффект фазовой синхронизации может сопровождаться понижением степени мультифрактальности в последовательностях времен возврата и переходом от коррелированной к анти-коррелированной динамике характерных временных интервалов. Эффекты, наблюдаемые при анализе модели взаимодействующих нефронов, сопоставляются с результатами обработки экспериментальных записей давления крови в случаях, когда нефроны демонстрируют синхронную и несинхронную динамику.

1. Методы исследования

1.1. DFA

Метод DFA относится к числу алгоритмов, базирующихся на идеологии перехода от исходного временного ряда $z(i), i = 1, \dots, N$ к обобщенной модели одномерных случайных блужданий. В рамках этого алгоритма вначале осуществляется приведение данных к нулевому среднему (вычитание среднего значения \bar{z} из временного ряда $z(i)$) и строится случайное блуждание: $y(k) = \sum_{i=1}^k [z(i) - \bar{z}]$. Затем ряд значений $y(k), k = 1, \dots, N$ разбивается на неперекрывающиеся отрезки (участки) длины n , в пределах каждого из которых методом наименьших квадратов определяется уравнение прямой, аппроксимирующей последовательность $y(k)$. Найденная аппроксимация $y_n(k)$ рассматривается в

качестве *локального тренда*. Далее вычисляется среднеквадратическая ошибка линейной аппроксимации

$$F(n) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [y(k) - y_n(k)]^2}. \quad (1)$$

и соответствующие расчеты проводятся в широком диапазоне значений n . Считается, что зависимость $F(n)$ часто имеет степенной характер $F(n) \sim n^\alpha$, а наличие линейного участка в двойном логарифмическом масштабе $\lg F(\lg n)$ позволяет говорить о существовании скейлинга. На практике величина α (называемая скейлинговой экспонентой DFA-метода) может отличаться для разных n , что свидетельствует об изменении свойств скейлинга при увеличении масштаба. В данной ситуации целесообразно проводить анализ *локальных экспонент*.

Численные значения α характеризуют различные типы коррелированной динамики, если $\alpha \neq 0.5$ и некоррелированное поведение при $\alpha = 0.5$. Например, диапазон $0 < \alpha < 0.5$ соответствует анти-корреляциям (чередование больших и малых величин в анализируемых данных); $0.5 < \alpha < 1$ определяет коррелированную динамику (большие по сравнению со средним величины чаще следуют за большими, малые - за малыми). Частный случай $\alpha = 1$ наблюдается для $1/f$ -шума. В определенном диапазоне значений α существует взаимосвязь между скейлинговыми характеристиками DFA-метода и законом спада автокорреляционной функции (или функции спектральной плотности) [13].

1.2. WTMM

Другой подход к изучению скейлинга в структуре сигналов предполагает привлечение теории мультифракталов [11, 12]. Изначально данная теория разрабатывалась для сингулярных мер: статистическое описание особенностей их скейлинга проводилось в терминах спектра сингулярности [12]. Однако с точки зрения приложений более привлекательным является анализ сингулярных функций (сигналов). Известно несколько попыток обобщения теории мультифракталов на случай функциональных зависимостей; первой из них является метод структурных функций [15], часто используемый при исследовании турбулентности [16]. Позднее был разработан мультифрактальный формализм, базирующийся на вейвлет-преобразовании (метод *wavelet transform modulus maxima* или WTMM) [14]. В настоящее время он является более популярной техникой для изучения особенностей сложного скейлинга в нестационарных и неоднородных процессах.

Анализ некоторой функции $f(x)$ в рамках WTMM-метода осуществляется следующим образом. На первом этапе проводится расчет коэффициентов вейвлет-преобразования:

$$T_\psi[f](x_0, a) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi\left(\frac{x - x_0}{a}\right) dx. \quad (2)$$

Часто в качестве $f(x)$ выбирается функция распределения, a служит параметром масштаба, ψ - базисная функция вейвлет-преобразования, которая может иметь произвольную форму, но должна быть солитоноподобной и с нулевым средним значением. В данной работе мы использовали МНАТ-вейвлет, представляющий собой вторую производную функции Гаусса:

$$\psi = \frac{d^2}{dx^2} \left[\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \right]. \quad (3)$$

Наличие локального сингулярного поведения $f(x)$ в точке x_0 приводит к возрастанию $|T_\psi[f](x, a)|$ при $x \rightarrow x_0$ и может быть описано экспонентой Хелдера $h(x_0)$, которая определяет скейлинг вейвлет-коэффициентов для малых значений a : $T_\psi[f](x_0, a) \sim a^{h(x_0)}$.

На втором этапе WTMM-алгоритма проводится статистическое описание локальных сингулярностей с использованием понятий спектра сингулярности $D(h)$ и частичной функции $Z(q, a)$ [14]. Функция $Z(q, a)$ представляет собой сумму q -х степеней локальных максимумов модулей вейвлет-коэффициентов, соответствующих масштабу a . Как правило, ожидается, что при малых значениях a частичная функция демонстрирует степенную зависимость

$$Z(q, a) \sim a^{\tau(q)}, \quad (4)$$

которая количественно характеризуется скейлинговыми экспонентами $\tau(q)$. Выбирая различные степени q , можно получить линейную функцию $\tau(q)$ с постоянным значением экспоненты Хелдера $h(q) = d\tau(q)/dq = const$ в случае монофрактальных объектов и нелинейную функцию с большим числом локальных экспонент в случае мультифракталов. По аналогии с термодинамическим формализмом, спектр сингулярности вычисляется на основе преобразования Лежандра:

$$D(h) = qh(q) - \tau(q). \quad (5)$$

Расчеты функции $Z(q, a)$ позволяют отслеживать по-отдельности скейлинг для больших флуктуаций ($g > 0$) и для малых флуктуаций ($g < 0$). Также, как и в рамках предыдущего метода, значения Хелдеровских экспонент дают возможность делать выводы о наличии анти-коррелированной динамики ($0 < h < 0.5$), коррелированном поведении ($h > 0.5$) или об отсутствии корреляций ($h = 0.5$) [17].

2. Динамика времен возврата

2.1. Связанные системы Ресслера

Рассмотрим систему двух связанных моделей Ресслера

$$\begin{aligned} \frac{dx_{1,2}}{dt} &= -\omega_{1,2}y_{1,2} - z_{1,2} + \gamma(x_{2,1} - x_{1,2}), \\ \frac{dy_{1,2}}{dt} &= \omega_{1,2}x_{1,2} + Ay_{1,2}, \\ \frac{dz_{1,2}}{dt} &= B + z_{1,2}(x_{1,2} - \mu), \end{aligned} \quad (6)$$

в которой параметры A , B и μ определяют режим динамики каждой подсистемы, γ - параметр связи, $\omega_1 = \omega_0 + \delta$ и $\omega_2 = \omega_0 - \delta$ представляют собой базовые частоты и δ - расстройка между ними. В нашей работе расчеты проводились при следующих значениях параметров: $A = 0.15$, $B = 0.2$, $\gamma = 0.02$, $\mu = 6.8$, $\omega_0 = 1.0$. Система (6) демонстрирует многообразие сосуществующих синхронных режимов, а также различные типы несинхронной динамики. Детальный анализ модели (6) был проведен в статье [18]. В соответствии с этой работой, мы будем обозначать синхронные хаотические аттракторы как CA , а несинхронный хаотический режим (тор-хаос) как CA_t . Строго говоря, внутри области синхронизации существует целый набор хаотических режимов с различными сдвигами фаз между колебаниями во взаимодействующих подсистемах. Поэтому было

бы более корректным приписать CA некоторый индекс, который бы характеризовал принадлежность к тому или иному семейству аттракторов. Однако режимы фазовой мультистабильности демонстрируют очень похожие свойства скейлинга [19], в связи с чем данный аспект не является существенным для проводимого исследования.

Переход через границу области синхронизации (от CA к CA_t), который происходит при увеличении параметра расстройки δ , приводит к изменению структуры последовательностей характерных временных интервалов. Для иллюстрации рассмотрим секущую плоскость $x_2 = 0$ и проанализируем форму спектров сингулярности $D(h)$, вычисленных для двух аттракторов (рис. 1а). Очевидно, что зависимость $D(h)$ в случае несинхронного режима CA_t значительно шире, чем для CA (в последнем случае спектр сингулярности состоит из одной точки). Это означает, что фазовая синхронизация хаотических колебаний для рассматриваемой модели сопровождается потерей мультифрактальности (сложного скейлинга) в динамике времен возврата: особенности скейлинга в структуре последовательностей временных интервалов несинхронного аттрактора описываются большим числом Хелдеровских экспонент (рис. 1б). Однако, динамика времен возврата в секущую плоскость для синхронного режима характеризуется постоянным (в пределах ошибки вычислений) значением $h(q)$.

Ширина спектров сингулярности для различных синхронных режимов может варьироваться. Наиболее типичная ситуация состоит в том, что последовательность времен возврата не будет описываться постоянным значением $h(q)$. Кроме того, вычисления Хелдеровских экспонент при больших значениях q демонстрируют заметную чувствительность к выбору параметров счета (например, диапазона, в котором проводится аппроксимация $\tau(q)$). В связи с этим целесообразнее рассматривать степень мультифрактальности вместо того, чтобы делать заключения о наличии моно- или мультифрактальной структуры. Проводя анализ особенностей скейлинга для различных режимов колебаний в системе (6), мы обнаружили, что степень мультифрактальности значительно меньше у любых типов синхронной динамики по сравнению с режимами вне области синхронизации. Так, на рисунке 1в приведены расчеты спектров сингулярностей для синхронной гиперхаотической динамики и для двумерного тора. Видно, что несинхронный режим требует большего диапазона Хелдеровских экспонент для описания структуры времен возврата в терминах мультифрактального формализма.

Другое отличие между спектрами сингулярности, изображенными на рис. 1а, состоит в увеличении $h(q)$ для несинхронных колебаний, что свидетельствует о смене типа корреляций. Изменения скейлинговых характеристик можно отслеживать по смещению максимума зависимости $D(h)$, соответствующего значению $q = 0$. Поскольку фрактальные размерности D близки к 1 в обоих случаях (при $q = 0$), достаточно знать набор экспонент $h(q)$, чтобы охарактеризовать положение спектра сингулярности и степень мультифрактальности. В связи с этим далее мы ограничимся только зависимостями $h(q)$ и не будем анализировать форму $D(h)$.

Изменения корреляций в структуре времен возврата можно проиллюстрировать с помощью метода DFA (рис. 2). В синхронном режиме зависимость $\lg F(\lg n)$ описывается одним числом $\alpha \approx 2 \cdot 10^{-3}$, которое соответствует сильным анти-корреляциям. Данная ситуация в целом типична для слабого хаоса, возникшего на базе каскада бифуркаций удвоения периода. В несинхронном режиме зависимость $\lg F(\lg n)$ имеет более сложный вид. В окрестности $\lg n = 2.0$ локальное значение α приближается к 1.0 (коррелированное поведение, близкое к $1/f$ -шуму в терминах работ [13]), т.е. мы наблюдаем более "гладкую" последовательность времен возврата по сравнению с синхронными колебаниями. В области длительных корреляций (большие n), также как и

для относительно коротких корреляций (малые n) локальные экспоненты уменьшаются. Поэтому в данном случае можно ввести в рассмотрение количественную характеристику, позволяющую оценивать диапазон локальных скейлинговых характеристик. Далее мы будем обозначать ширину спектра сингулярности WTMM-метода как Δ_h , а диапазон локальных экспонент DFA-метода - Δ_α .

Отметим одно важное обстоятельство. Методы DFA и WTMM разрабатывались для случая анализа случайных процессов с *неэкспоненциальным* характером поведения автокорреляционной функции. В частности, подход DFA обычно предусматривает наличие степенной зависимости огибающей АКФ от временного аргумента. В случае стохастической динамики нелинейных систем либо для реальных сигналов в природе, когда экспоненциальное спадание АКФ нарушается, интерпретация результатов, полученных в рамках рассматриваемых подходов, является вполне корректной. В более простой же, казалось бы, ситуации (динамика нелинейных систем без шума) возникает больше проблем с интерпретацией результатов, поскольку появление сложного скейлинга может быть следствием особенностей степенной аппроксимации экспоненциального закона поведения. Кроме того, известно, например, что метод WTMM позволяет получать структуру спектра сингулярности, соответствующую мультифрактальным объектам, даже при отсутствии фрактальных свойств у анализируемого процесса [20]. Поскольку основной целью нашего исследования является привлечение методик анализа структуры сигналов к изучению динамики реальных (биологических) систем (где идеология рассматриваемых алгоритмов не вызывает нареканий), и простые математические модели нас интересуют лишь с точки зрения выявления основных эффектов, которых можно ожидать при исследовании явления синхронизации в реальной жизни, далее мы не будем акцентировать внимание на наличии некоторых нюансов в возможной интерпретации результатов для модельных систем в отсутствие флуктуаций. Заметим, однако, что для режима несинхронного хаоса (рис.3) наблюдается наличие двух четко выраженных экспонент в поведении автокорреляционной функции. Для синхронного хаоса поведение автокорреляционной функции можно описать одной экспонентой (при не слишком больших τ АКФ практически не спадает). В этом смысле можно говорить о потере мультискейлинговой структуры.

Характеристики, вычисляемые в рамках рассматриваемых алгоритмов, четко диагностируют границу перехода от несинхронного к синхронному режиму (рис. 4). Видно, что фазовая синхронизация устраняет различия в динамике взаимодействующих подсистем: вне области синхронизации скейлинговые характеристики несколько отличаются, в синхронном режиме они совпадают.

Рассмотрим кратко влияние флуктуаций на структуру последовательностей времен возврата. В нашей работе мы добавляли в первое уравнение системы (6) слагаемое $I\xi(t)$, где $\xi(t)$ - нормально распределенный случайный процесс, а I - его интенсивность. Поскольку шум может приводить к "перескокам" между сосуществующими аттракторами в области фазовой мультистабильности, ожидается, что скейлинговые характеристики стохастической динамики будут отличаться от детерминированного случая. Проведенные расчеты подтверждают это. В частности, сильная чувствительность к внешним флуктуациям наблюдается в случае сосуществующих периодических колебаний. Данные режимы не имеют фрактальных свойств в детерминированном случае, однако процесс перемежаемости между различными режимами, вызванный внешними флуктуациями, индуцирует мультифрактальность в динамике последовательностей времен возврата (рис. 5а). Хаотические синхронные режимы также демонстрируют чувствительность к флуктуациям, поэтому может быть сложно диагностировать различные типы

стохастической динамики. Однако, если интенсивность шума не очень велика (например, $I < 10^{-1}$) и мы не рассматриваем окрестность границы области синхронизации, то скейлинговые характеристики WTMM-метода не совпадают для синхронных и несинхронных режимов при отрицательных q (рис. 5а). При больших интенсивностях шума режимы динамики становятся неотличимы (рис. 5б).

2.2. Связанные системы Лоренца

Динамика модели Ресслера характеризуется одним временным масштабом (базовым периодом колебаний или базовой частотой). Рассмотрим более сложную ситуацию: одновременное наличие нескольких временных масштабов. В качестве первого примера нами была выбрана модель связанных систем Лоренца:

$$\begin{aligned}\frac{dx_{1,2}}{dt} &= \sigma(y_{1,2} - x_{1,2}) + \gamma(x_{2,1} - x_{1,2}), \\ \frac{dy_{1,2}}{dt} &= r_{1,2}x_{1,2} - x_{1,2}z_{1,2} - y_{1,2}, \\ \frac{dz_{1,2}}{dt} &= x_{1,2}y_{1,2} - z_{1,2}b,\end{aligned}\tag{7}$$

где $\sigma = 10$, $r_1 = 28.8$, $r_2 = 28$, $b = 8/3$. Каждая из подсистем может рассматриваться в качестве бистабильной системы, демонстрирующей переключения между состояниями "+1" и "-1", которые можно ввести следующим образом:

$$\hat{x}_{1,2} = \begin{cases} +1, & x_{1,2} > 0 \\ -1, & x_{1,2} < 0 \end{cases}\tag{8}$$

Средний период переключений $\langle T^s \rangle$ (или средняя частота $\langle f^s \rangle = 2\pi / \langle T^s \rangle$) представляет собой один статистический временной масштаб, который описывает динамику каждой подсистемы. Другой статистический временной масштаб соответствует вращениям фазовой траектории вокруг одного из неустойчивых фокусов. Соответствующую частоту вращений (колебаний) обозначим $\langle f^\circ \rangle$. Рис. 6 демонстрирует поведение этих частот в зависимости от параметра связи γ . Согласно данному рисунку, до значения $\gamma \approx 2.0$ увеличение связи приводит к неожиданному эффекту - увеличению разности между соответствующими частотами обеих подсистем (т.е. эффекту *десинхронизации*). Такая особенность в динамике систем Лоренца отмечалась в работе [21]. Дальнейший рост γ приводит вначале к синхронизации переключений, а затем - к синхронизации колебаний.

Рассмотрим, как синхронизация временных масштабов отражается в структуре последовательностей времен возврата (мы выбрали текущие плоскости $z_1 = 30$ и $z_2 = 30$). Согласно рис. 7а, скейлинговые экспоненты DFA-метода уменьшаются в области синхронизации ($\gamma > 6$). Это означает, что рост γ приводит к увеличению вероятности чередования между большими и малыми значениями в структуре времен возврата (усилению анти-корреляций). Мы предполагаем, что сложная форма зависимости среднего значения скейлинговой экспоненты $\bar{\alpha}$ от параметра связи с "полочками" в районе $\gamma \approx 3 - 4$ и $\gamma > 6$ может быть связана с наличием двух временных масштабов. Согласно этому рисунку, скейлинговые характеристики синхронных колебаний практически совпадают для взаимодействующих подсистем при сильной связи ($\gamma > 6$).

Помимо параметра связи мы меняли расстройку между r_1 и r_2 . Метод WTMM демонстрирует, что положение спектров сингулярности для двух подсистем не совпадает

вне области синхронизации в отличие от синхронной динамики (рис. 7б). Мы вновь видим, что фазовая синхронизация сближает скейлинговые свойства индивидуальных подсистем. Значения $h(0)$ меняются довольно плавно с ростом расстройки, не демонстрируя резких "скачков". Минимальное значение $h(0)$ соответствует идентичной динамике ($r_1/r_2 = 1$), в этом случае наблюдаются наиболее сильные анти-корреляции по сравнению с другими значениями r_1/r_2 .

По аналогии со связанными системами Ресслера, переход от несинхронного к синхронному режиму может уменьшать степень мультифрактальности $\text{citer}2$. Однако следует отметить, что взаимодействие в системах с несколькими временными масштабами не всегда приводит к данному эффекту. В некоторых ситуациях изменение r_1/r_2 в модели (7) устраняет различия в скейлинговых характеристиках взаимодействующих подсистем и уменьшает их численные значения $(\bar{\alpha}, h(0))$ без заметного понижения степени мультифрактальности Δ_h . Таким образом, с помощью модели (7) мы можем обнаружить различные отражения эффекта фазовой синхронизации в структуре последовательностей времен возврата.

2.3. Связанные нефроны

Сложные колебания с несколькими временными масштабами достаточно типичны для динамики живых систем. В качестве примера рассмотрим модель нефрона [23] и проанализируем данные реальных экспериментов.

2.3.1. Математическая модель

Нефрон представляет собой функциональную единицу почки, играющую важную роль в процессе фильтрации крови. Кровь поступает в нефрон по так называемой *приносящей артериоле*, затем проходит через *капсулу Боумана*, выполняющую роль фильтра. Далее кровь попадает в выносящую артериолу, а фильтрат отводится в проксимальную трубку, диаметр которой составляет порядка 20 мкм. На самом деле процесс фильтрации является более сложным, но в данной работе мы не будем рассматривать его детали. Математически авторегуляция движения крови в отдельном нефроне описывается следующей системой 6 уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{P}_t &= G(P_t, r), & \dot{X}_1 &= 3(F_H(P_t) - X_1)/T, \\ \dot{r} &= v_r, & \dot{X}_2 &= 3(X_1 - X_2)/T, \\ \dot{v}_r &= V_{\beta, T}(P_t, r, \beta, X_3), & \dot{X}_3 &= 3(X_3 - X_3)/T. \end{aligned} \quad (9)$$

Первое уравнение характеризует изменения гидростатического давления P_t в проксимальной трубке. Следующие два уравнения моделируют процесс регуляции радиуса артериолы. Три последние уравнения описывают задержку T в так называемой *петле Хенли*. Более детальную информацию о модели, ее нелинейных функциях и параметрах можно найти в работах [23, 24].

Эксперименты, проведенные на крысах, показали, что давление P_t демонстрирует близкие к периодическим колебания с периодом 20-40 секунд; для крыс с повышенным артериальным давлением эти колебания становятся хаотическими [23].

Соседние нефроны часто имеют общий подводящий кровеносный сосуд. В этом случае имеет смысл анализировать их взаимную динамику. Мы будем рассматривать взаимодействие через электрические управляющие сигналы в цепи регуляции диаметра приносящей артериолы.

С помощью модели парных нефронов можно проанализировать переходы к синхронной хаотической динамике для быстрых (v_r) и медленных (P_t or $X_j, j = 1, 2, 3, \dots$) колебаний по-отдельности. Выбирая секущие плоскости $P_t = 1.6kPa$ и $v_r = 0$, для каждой из двух связанных моделей (9) мы проводили исследования структуры последовательностей времен возврата.

На рисунке 8 представлены основные результаты для слабого хаоса ($\beta = 27.3$, остальные параметры те же, что и в работе [24]). Переход к синхронному режиму для быстрых колебаний уменьшает диапазон локальных скейлинговых экспонент: несинхронная динамика (треугольники на рис. 8а) характеризуется различными наклонами зависимости $\lg F(\lg n)$, и, следовательно, разными значениями α для $\lg n < 2.5$ и $\lg n > 2.5$. Эта зависимость становится близка к линейной в синхронном режиме (кружочки на рис. 8а), то есть Δ_α значительно уменьшается.

В данном случае отличия в структуре последовательностей времен возврата соответствуют области длительных корреляций (большие n). Поэтому эти отличия могут не обнаруживаться в помощь WТММ-метода (рис. 8в), который представляет собой более подходящий инструмент для исследования структуры сигналов на меньших масштабах.

В соответствии с методом DFA, уменьшение $\bar{\alpha}$ и Δ_α наблюдается и при синхронизации медленных колебаний (рис. 8б), но уменьшения степени мультифрактальности при этом не происходит (рис. 8г). Заметим также, что скейлинговые характеристики динамики обеих подсистем достаточно близки в синхронном режиме в отличие от несинхронной динамики.

В режиме развернутого хаоса ($\beta = 28.0$) наблюдаются другие особенности. Для быстрых фазовых переменных помимо уменьшения мультифрактальности и возрастания вероятности анти-коррелированного поведения, синхронизация устраняет различия в структуре последовательностей времен возврата взаимодействующих подсистем (рис. 9а и 9в). Случай медленной динамики является более сложным. В соответствии с алгоритмом DFA, средние значения экспонент $\bar{\alpha}$ уменьшаются только для одной подсистемы при переходе к синхронному режиму (рис. 9б, черные кружочки по сравнению с черными треугольниками), для второй подсистемы может наблюдаться даже некоторое возрастание $\bar{\alpha}$ (рис. 9б, белые кружочки). Очевидные различия в индивидуальной динамике подсистем наблюдаются как в несинхронном, так и в синхронном режиме, то есть в отличие от быстрых фазовых переменных, синхронизация может не устранять различия в медленной динамике модели связанных нефронов. В то же время мы наблюдаем уменьшение мультифрактальности в режиме фазовой синхронизации (рис. 9г). Иными словами, переходы к синхронному режиму для рассматриваемого набора параметров увеличивают вероятность анти-коррелированного поведения в медленной динамике только одной из взаимодействующих подсистем и уменьшает степень мультифрактальности для обеих подсистем. Это отражает разнообразное проявления эффекта фазовой синхронизации в сложной структуре характерных временных интервалов. Заметим, что во всех рассмотренных примерах синхронизация сопровождается упрощением структуры последовательностей времен возврата.

2.3.2. Анализ экспериментальных данных

Помимо математической модели нами проводился анализ экспериментальных данных, полученных в университете Копенгагена и предоставленных нам профессором N.-H. Holstein-Rathlou.

На рис. 10 изображен пример временных зависимостей проксимального давления P_t (*tubular pressure*), которое наблюдается в динамике парных нефронов крыс с повышенным артериальным давлением. Рис. 10а и 10б иллюстрируют примеры синхронной и несинхронной динамики (синхронизация исследовалась путем расчета разности мгновенных фаз на основе преобразования Гильберта и методами взаимного вейвлет-анализа [25]). Результаты мультифрактального анализа в рамках WTMM-алгоритма представлены на рис. 11. В связи с техническими проблемами корректного извлечения характерных временных интервалов из нестационарных данных и сравнительно небольшой длительности сигналов наблюдается достаточно сильная чувствительность Хелдеровских экспонент к выбору секущей плоскости и параметрам алгоритма (особенно при $q < 0$). Поэтому мы проводили расчеты и представляем результаты только для положительных q . В данном примере скейлинговые характеристики взаимодействующих подсистем достаточно близки в случае синхронной динамики (кружочки на рис. 11) и не совпадают в несинхронном режиме (треугольники). Однако, уменьшение степени мультифрактальности не происходит (как и для случая слабого хаоса в модели).

Заключение.

В течение последних лет мультифрактальность (или сложный скейлинг) во временной динамике нелинейных систем активно обсуждается в международной печати. В данной работе мы изучали возможность мультифрактального описания явления синхронизации в двух связанных системах с хаотической динамикой и проанализировали, как переходы между различными типами синхронной и несинхронной динамики отражаются в структуре последовательностей времен возврата. Основные результаты состоят в следующем.

Фазовая синхронизация в связанных системах Ресслера сопровождается значительными изменениями последовательностей времен возврата, включая: (1) уменьшение степени мультифрактальности; (2) уменьшение "гладкости" последовательностей времен возврата, которое характеризуется значением $\bar{\alpha}$; (3) сближением динамики взаимодействующих подсистем.

Проявление эффектов синхронизации в системах с несколькими временными масштабами является более разнообразным. В частности, скейлинговые характеристики могут заметно отличаться для разных фазовых переменных. Основные эффекты, наблюдаемые для связанных систем Ресслера, встречаются и при наличии нескольких временных масштабов, но в этом случае мы можем наблюдать их различные комбинации. Иногда они проявляются одновременно. В других случаях фазовая синхронизация увеличивает вероятность анти-коррелированного поведения в последовательностях времен возврата и устраняет индивидуальные различия в динамике подсистем без изменения мультифрактальных свойств. Наконец, степень мультифрактальности может уменьшаться, но скейлинговые характеристики не будут совпадать в синхронном режиме. Таким образом, проявление фазовой синхронизации в структуре последовательностей характерных временных интервалов может быть разнообразным, но при этом сохраняется набор достаточно общих эффектов. Приложение методов изучения мультискейлинговой структуры к исследованию экспериментальных данных продемонстрировало результаты, сходные с результатами анализа медленной динамики в модели парных нефронов для случая слабого хаоса.

Авторы выражают признательность проф. N.-H. Holstein-Rathlou за предоставленные экспериментальные данные и проф. E. Mosekilde за обсуждение результатов. Ра-

бота была частично поддержана грантами INTAS 01-2061, CRDF (REC-006) и РФФИ (01-02-16709).

Список литературы

- [1] Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence* (Springer-Verlag, Berlin, 1984).
- [2] A. Pikovsky, M. Rosenblum, J. Kurths, *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*, Cambridge Nonlinear Science Series 12 (Cambridge University Press, 2001).
- [3] E. Mosekilde, Yu. Maistrenko, D. Postnov, *Chaotic Synchronization: Applications to Living Systems* (World Scientific, Singapore, 2002).
- [4] H. Fujisaka, Y. Yamada, Stability theory of synchronized motions in coupled oscillatory systems// *Progr. Theor. Phys.* 1983. Vol. 69, P. 32; В.С. Афраймович, Н.Н. Веричев, М.И. Рабинович, Стохастическая синхронизация колебаний в диссипативных системах// *Изв. вузов, Радиофизика.* 1989, том 29, No. 9, стр. 1050; L.M. Pecora, T.L. Carroll, Synchronization in chaotic systems// *Phys. Rev. Lett.* 1990. Vol. 64, P. 821.
- [5] N.F. Rulkov, M.M. Sushchik, L.S. Tsimring, H.D.I. Abarbanel, Generalized synchronization of chaos in unidirectionally coupled chaotic systems// *Phys. Rev. E.* 1995. Vol. 51, P. 980; L. Kocarev, U. Parlitz, Generalized synchronization, predictability, and equivalence of unidirectionally coupled dynamical systems// *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 76, P. 1816.
- [6] M.G. Rosenblum, A.S. Pikovsky, J. Kurths, Phase synchronization of chaotic oscillators// *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 76, P. 1804.
- [7] M.G. Rosenblum, A.S. Pikovsky, J. Kurths, From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 78, P. 4193.
- [8] V.S. Anishchenko, T.E. Vadivasova, D.E. Postnov, M.A. Safonova, Synchronization of chaos// *Int. J. Bifurcation Chaos.* 1992. Vol. 2, P. 633.
- [9] A. Neiman, A. Silchenko, V. Anishchenko, and L. Schimansky-Geier, Stochastic resonance: Noise enhanced phase coherence// *Phys. Rev. E.* 1998. Vol. 58, P. 7118.
- [10] N. Hadyn, J. Luevano, G. Mantica, S. Vaienti, Multifractal properties of return time statistics// *Phys. Rev. Lett.* 2002. Vol. 88, P. 224502.
- [11] B.B. Mandelbrot, *Fractals and Multifractals: Noise, Turbulence and Galaxies*, Selecta Vol. 1 (Springer-Verlag, New York, 1989); A. Bunde, S. Havlin (Eds.), *Fractals in Science* (Springer, Berlin, 1994).
- [12] T. Tel, Fractals, multifractals, and thermodynamics.// *Z. Naturforsch.* 1988. Vol. 43a, P. 1154; T.C. Halsey, M.H. Jensen, L.P. Kadanoff, I. Procaccia, B.I. Shraiman, Fractal measures and their singularities: the characterization of strange sets.// *Phys. Rev. A.* 1986. Vol. 33, P. 1141.

- [13] C.-K. Peng, S. Havlin, H.E. Stanley, A.L. Goldberger, Quantification of scaling exponents and crossover phenomena in nonstationary heartbeat time series.// *CHAOS*. 1995. Vol. 5, P. 82; H.E. Stanley, L.A.N. Amaral, A.L. Goldberger, S. Havlin, P.Ch. Ivanov, C.-K. Peng, Statistical physics and physiology: monofractal and multifractal approaches.// *Physica A*. 1999. Vol. 270, P. 309.
- [14] J.F. Muzy, E. Bacry, A. Arneodo, Wavelets and multifractal formalism for singular signals: application to turbulence data.// *Phys. Rev. Lett.* 1991. Vol. 67, P. 3515; J.F. Muzy, E. Bacry, A. Arneodo, The multifractal formalism revisited with wavelets// *Int. J. Bifurcation Chaos*. 1994. Vol. 4, P. 245.
- [15] U. Frish, G. Parisi, in *Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics*, eds. M. Ghil, R. Benzi, G. Parisi (North-Holland, Amsterdam, 1985), p. 71.
- [16] R. Benzi, L. Biferale, G. Paladin, A. Vulpiani, M. Vergassola, Multifractality in the statistics of the velocity gradients in turbulence.// *Phys. Rev. Lett.* 1991. Vol. 67, P. 2299.
- [17] P.Ch. Ivanov, L.A.N. Amaral, A.L. Goldberger, S. Havlin, M.G. Rosenblum, Z. R. Struzik, H.E. Stanley, Multifractality in human heartbeat dynamics.// *Nature*. 1999. Vol. 399, P. 461.
- [18] D.E. Postnov, T.E. Vadivasova, O.V. Sosnovtseva, A.G. Balanov, V.S. Anishchenko, E. Mosekilde, Role of multistability in the transition to chaotic phase synchronization// *Chaos*. 1999. Vol. 9, P. 227.
- [19] A.N. Pavlov, O.V. Sosnovtseva, E. Mosekilde, Scaling features of multimode motions in coupled chaotic oscillators, *Chaos, Solitons and Fractals*, 2003, in press.
- [20] D. Veneziano, G.E. Moglen, R.L. Bras, Multifractal analysis: pitfalls of standard procedures and alternatives.// *Phys. Rev. E*. 1995. Vol. 52, P. 1387.
- [21] V.S. Anishchenko, A.N. Silchenko, I.A. Khovanov, Synchronization of switching processes in coupled Lorenz systems // *Phys. Rev. E*. 1998. Vol. 57, P. 316.
- [22] A.N. Pavlov, O.V. Sosnovtseva, A.R. Ziganshin, N.-H. Holstein-Rathlou, E. Mosekilde, Multiscality in the dynamics of coupled chaotic systems// *Physica A*, 2002. Vol. 316, P. 233.
- [23] E. Mosekilde, *Topics in Nonlinear Dynamics. Applications to Physics, Biology and Economic Systems*, World Scientific, 1996; M. Barfred, E. Mosekilde, N.-H. Holstein-Rathlou, Bifurcation analysis of nephron pressure and flow regulation// *Chaos*, 1996. Vol. 6, P. 280.
- [24] D.E. Postnov, O.V. Sosnovtseva, E. Mosekilde, N.-H. Holstein-Rathlou, Cooperative phase dynamics in coupled nephrons// *Int. J. Mod. Phys. B*, 2001. Vol. 15, P. 3079.
- [25] O.V. Sosnovtseva, A.N. Pavlov, E. Mosekilde, N.-H. Holstein-Rathlou, Bi-mode oscillations in nephron autoregulation // *Phys. Rev. E*. 2003, in press.

Подписи к рисункам.

Рис. 1.

Спектры сингулярности (а) и значения Хелдеровских экспонент (б,в) последовательностей времен возврата синхронного хаотического аттрактора CA , несинхронного аттрактора CA_t , а также двумерного тора $4T^2$ и гиперхаотического синхронного режима CA_Σ .

Рис. 2.

DFA-анализ последовательностей времен возврата синхронного хаотического аттрактора CA и несинхронного аттрактора CA_t .

Рис. 3.

Зависимость логарифма нормированной корреляционной функции от временной задержки, демонстрирующая наличие двух наклонов в режиме несинхронного хаоса CA_t .

Рис. 4.

Изменения скейлинговых характеристик при переходе через границу области синхронизации.

Рис. 5.

Анализ скейлинговых характеристик в случае воздействия флуктуаций. Здесь, $4C_j$ и CA_j обозначают вызванную шумом перемежаемость между со-существующими периодическими и хаотическими аттракторами в области фазовой мультистабильности.

Рис. 6.

Зависимости средних частот переключений и вращений от параметра связи для двух взаимодействующих систем Лоренца.

Рис. 7.

Скейлинговые характеристики последовательностей времен возврата для двух взаимодействующих систем Лоренца.

Рис. 8.

Скейлинговые характеристики последовательностей времен возврата для двух связанных нефронов в случае слабого хаоса. (а,в) - быстрая динамика, (б,г) - медленная динамика. Кружочки соответствуют синхронному режиму, треугольники - несинхронному.

Рис. 9.

Скейлинговые характеристики последовательностей времен возврата для двух связанных нефронов в случае развернутого хаоса. Обозначения те же, что и на рис. 8.

Рис. 10.

Экспериментальные данные (временные зависимости проксимального давления P_t) для связанных нефронов в режиме синхронной (а) и несинхронной (б) хаотической динамики.

Рис. 11.

Мультифрактальный анализ экспериментальных данных. Треугольники соответствуют несинхронной динамике, кружочки - синхронной.

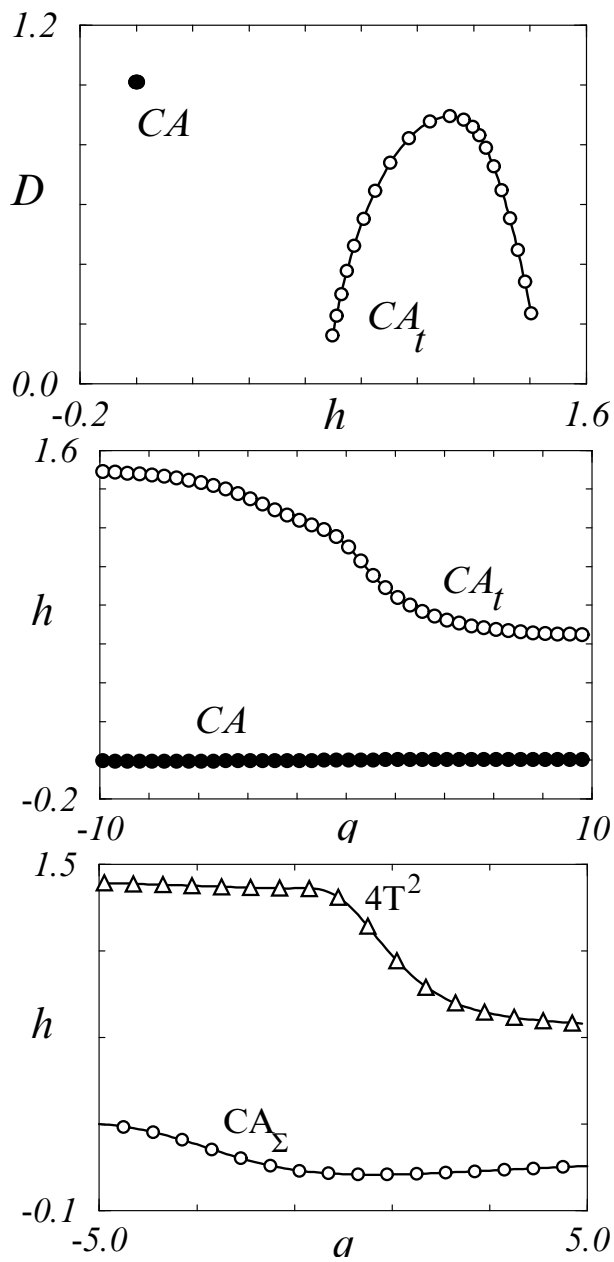


Рис. 1.

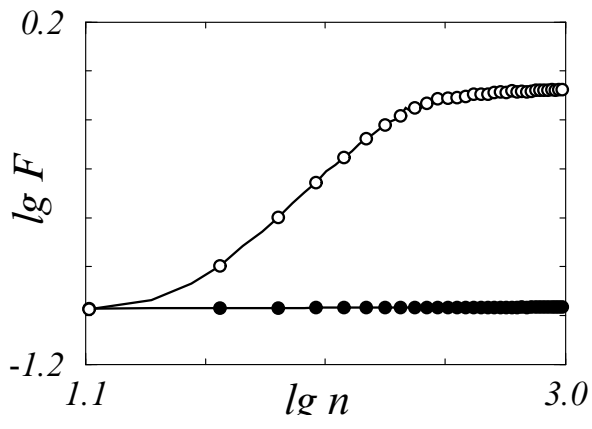


Рис. 2.

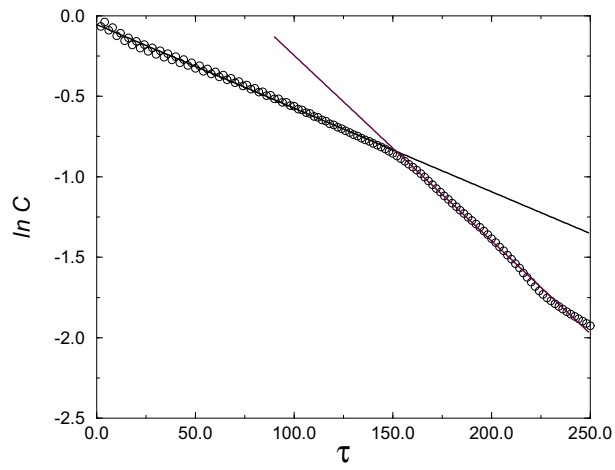


Рис. 3.

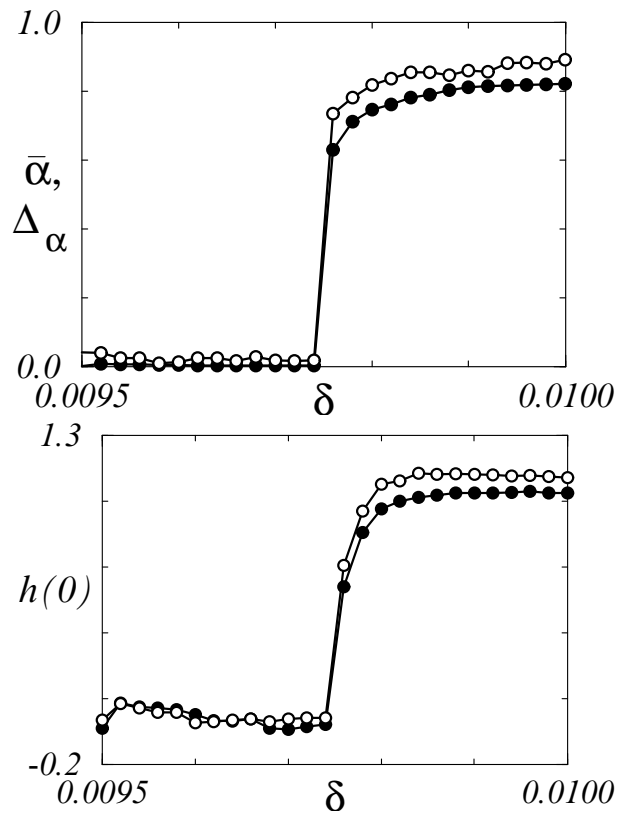


Рис. 4.

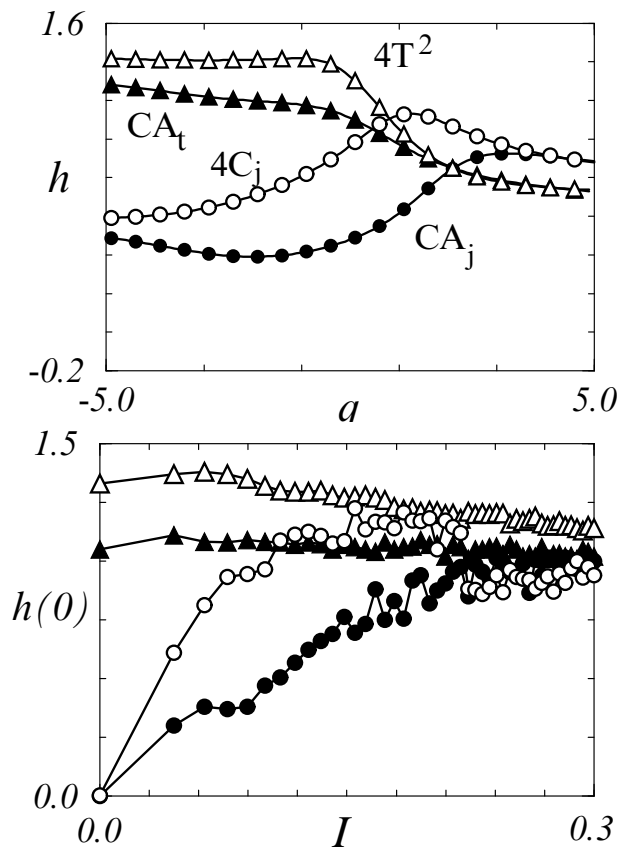


Рис. 5.

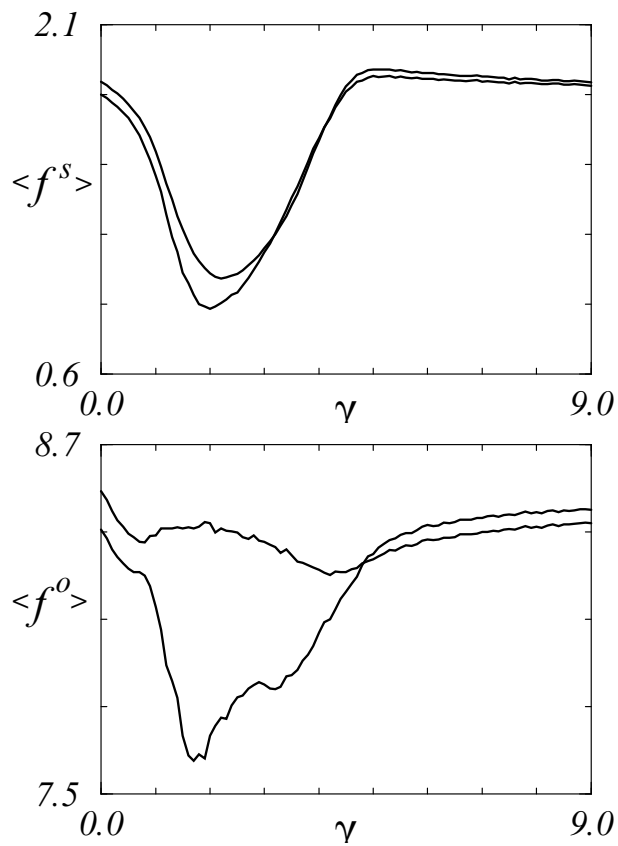


Рис. 6.

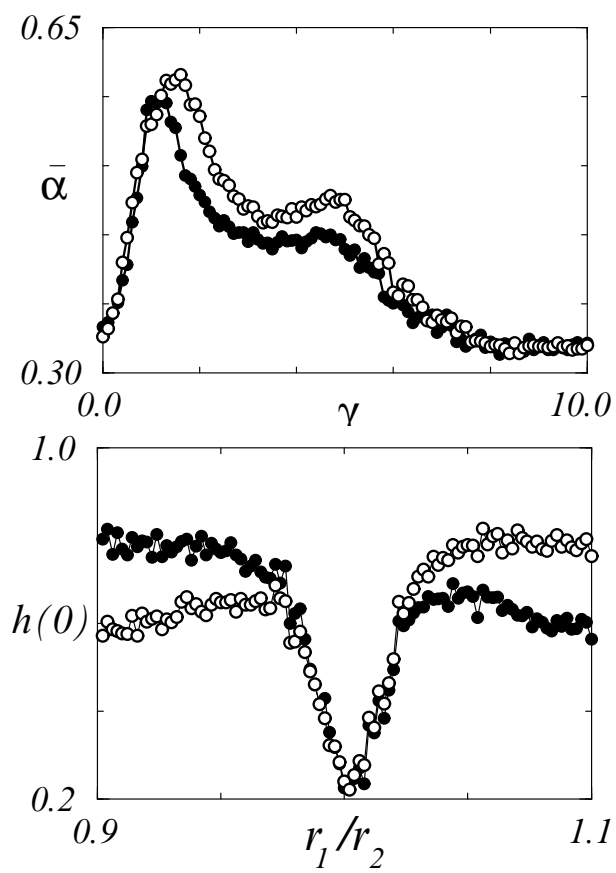


Рис. 7.

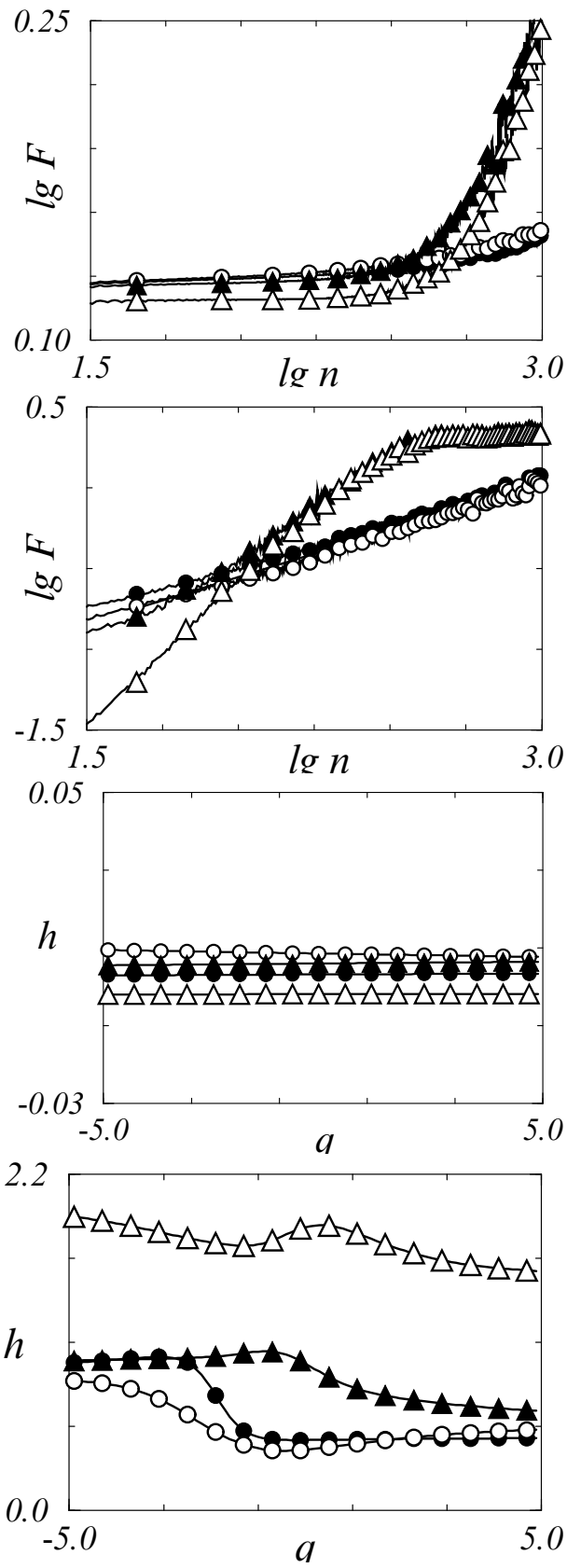


Рис. 8.

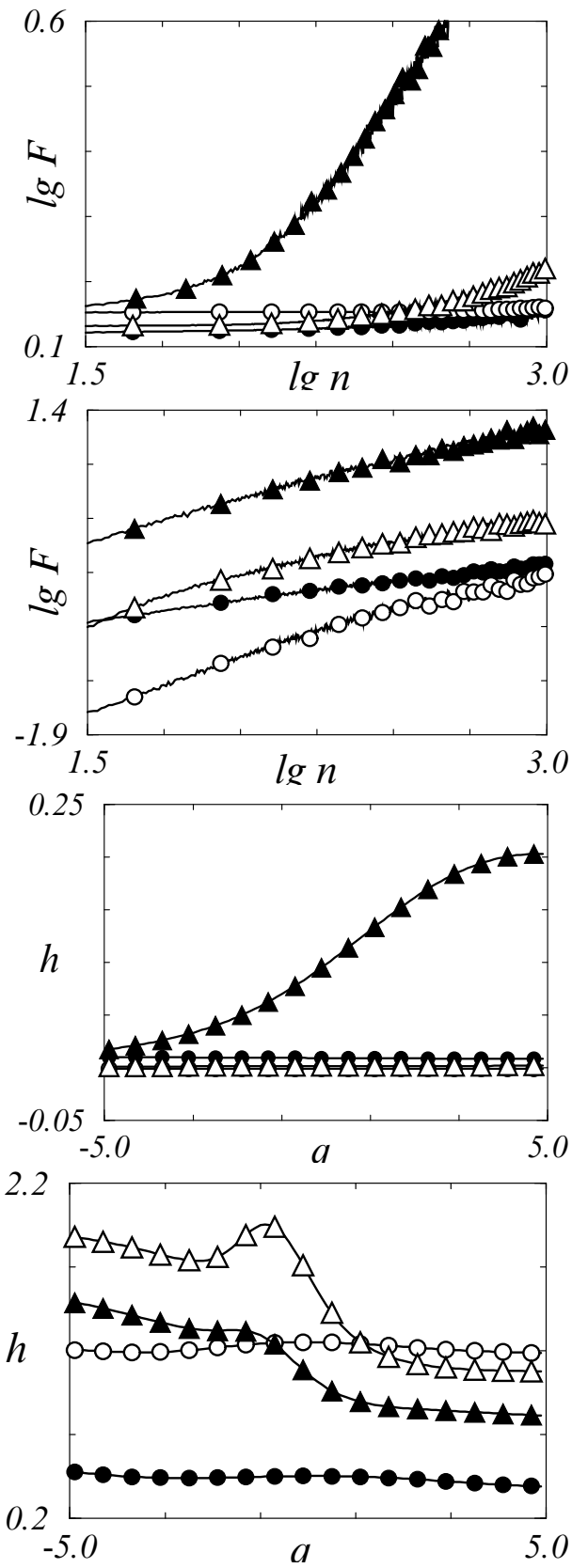


Рис. 9.

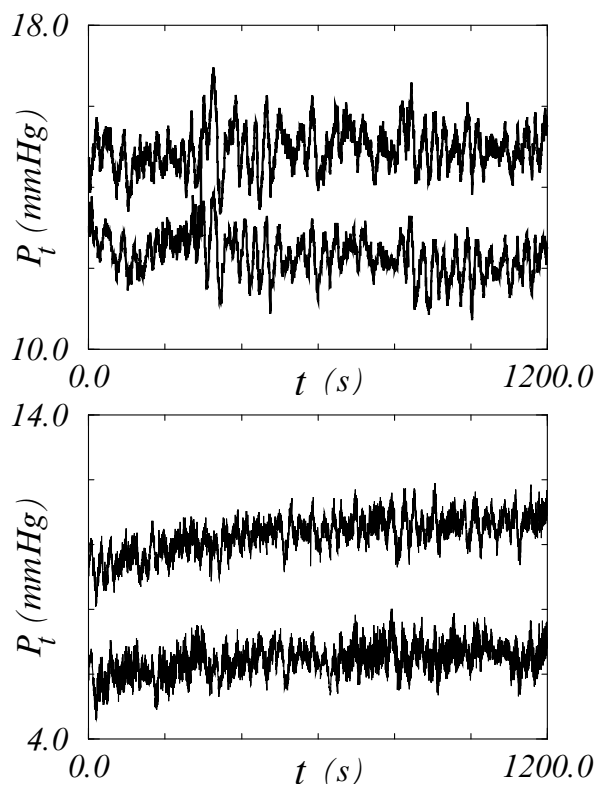


Рис. 10.

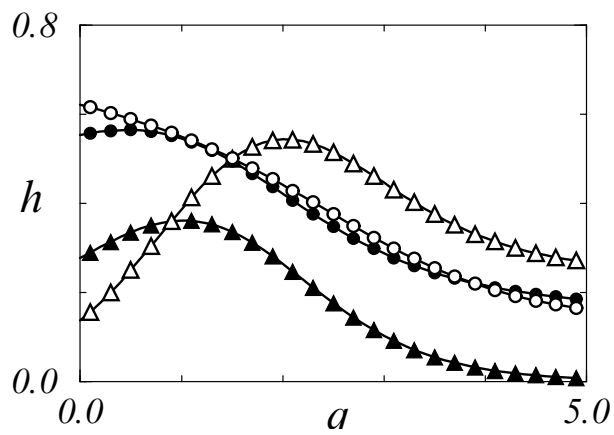


Рис. 11.