01;09

Анализ корреляционных свойств случайных процессов по сигналам малой длительности

© А.Н. Павлов, О.Н. Павлова

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: pavlov@chaos.ssu.runnet.ru

Поступило в Редакцию 26 июня 2007 г.

Обсуждается возможность исследования корреляционных свойств случайных процессов на основе метода мультифрактального формализма. Показано, что расчет гёльдеровских экспонент позволяет установть соответствие анализируемого сигнала процессу с известными статистическими характеристиками по значительно меньшему объему экспериментальных данных, чем оценка закона спада корреляций при вычислении автокорреляционной функции.

PACS: 05.10.-a, 05.45.Tp

Корреляционный анализ является одним из стандартных методов исследования структуры случайных процессов и широко используется при решении многих практических задач. Наряду со спектром мощности и законом распределения вероятностей, автокорреляционная функция (АКФ) $\Psi(\tau)$ относится к числу базовых характеристик, на основании расчета которых можно сделать вывод о свойствах анализируемого сигнала [1–3]. Для многих приложений возникает необходимость в оценке закона спада корреляций, особенно при больших значениях временнóго аргумента τ, что позволяет изучать эффекты „длительной памяти“ в динамике системы, генерирующей данный сигнал. Однако на практике проведение соответствующих исследований осложняется несколькими обстоятельствами. С одной стороны, корреляционная функция случайного процесса, не являющегося периодическим (или квазипериодическим), спадает до нуля, и в случае работы с зашумленными экспериментальными данными расчет АКФ при больших τ может сопровождаться существенными погрешностями. Начиная с некоторого τ значения $\Psi(\tau)$ будут сопоставимы с ошибками вычисления, и проведение дальнейших расчетов становится нецелесообразным. С другой стороны, при обработке сигналов, регистрируемых в экспериментах, исследователи часто сталкиваются с необходимостью проведения оценок по сравнительно коротким функциям времени, что также приводит к сложностям, связанным с возможным несоответствием расчета АКФ по выборочной функции малой длительности и теоретически ожидаемого результата для бесконечной реализации.

В последние годы проблемы проведения корреляционного анализа широко обсуждаются в научной печати [4–7]. В частности, для исследования эффектов длительных корреляций был разработан специальный подход, основанный на идеологии одномерных случайных блужданий [4,5]. В основе данного подхода лежит идея преобразования спадающей АКФ в некоторую возрастющую функцию, наклон которой позволяет характеризовать корреляционные свойства случайных процессов, в том числе нестационарных. Метод, предложенный в работах [4,5], является эффективным инструментом анализа длительных корреляций, но он требует наличия значительного объема экспериментальных данных.

Одним из вариантов исследования корреляционных свойств случайных процессов по сравнительно коротким фрагментам их реализаций является применение мультифрактального формализма — метода максимумов модулей вейвлет-преобразования (ММВП) [8–10]. Особенностью данного подхода является то, что он представляет собой инструмент „локального“ исследования функций времени, а использование вейвлет-преобразования позволяет игнорировать наличие медленной нестационарности. Эффективность привлечения мультифрактального формализма как инструмента корреляционного анализа по сравнительно малой выборке была кратко отмечена в нашей предыдущей работе [11]. В данной статье мы приводим более детальное сопоставление техники ММВП с расчетами автокорреляционной функции. Подробное описание мультифрактального формализма, основанного на вейвлет-преобразовании, можно найти в работах [9,11,12]. Данный метод предполагает описание статистических свойств процесса в терминах спектра сингулярностей $D(h)$, где h — экспонента Гёльдера, а D — фрактальная размерность подмножества данных, которое можно охарактеризовать экспонентой h. Расчет спектр сингулярностей в рамках метода ММВП базируется на вычислении коэффициентов вейвлет-преобразования (1-й этап данного алгоритма). Затем строится частичная функция $Z(q, a)$, которая представляет собой сумму локальных максимумов модулей вейвлет-коэффициентов, возведенных в степень q и рассмотренных на масштабе a. Обычно предполагается [9], что зависимость $Z(q, a)$ от a носит степенной характер: $Z(q, a) \sim a^{\tau(q)}$ и описывается величиной $\tau(q)$, называемой скейлинговой экспонентой. Выбор различных степеней q позволяет получить спектр гёльдеровских экспонент $h = d\tau(q)/dq$ и вычислить размерность D с помощью преобразования Лежандра $D(h) = qh(q) - \tau(q)$. Значения $h(q)$ описывают скейлинг вейвлет-коэффициентов вдоль линий локальных максимумов и характеризуют различные типы коррелированной динамики ($h \neq 0.5$) либо отсутствие корреляций ($h = 0.5$). В частности, $h = 1$ соответствует $1/f$-шуму, $h = 1.5$ — винеровскому процессу и т.д. Таким образом, знание гёльдеровских экспонент позволяет оценивать соответствие анализируемого сигнала процессу с известными статистическими свойствами. Более того, по сигналам малой длительности эти оценки могут проводиться более надежно по сравнению с расчетом АКФ. Рассмотрим для иллюстрации винеровский случайный процесс. Расчеты АКФ (рис. $1, a$) показывают, что при анализе сравнительно коротких реализаций оценки закона спада корреляций могут отличаться примерно в 2 раза для выборочных функций длительностью 3000 точек. Метод ММВП диагностирует наличие винеровского процесса по тем же самым данным с меньшим разбросом вычисляемых характеристик. Отличие значений гёльдеровских экспонент от теоретически ожидаемой величины $h(q) = 1.5$ составляет не более 3–5%.

В целях более детального сравнения возможностей метода ММВП и классического корреляционного анализа рассмотрим процесс Орнштейна–Уленбека, который описывается простейшим стохастическим дифференциальным уравнением вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = \gamma x(t) + \xi(t)$$

и моделирует броуновское движение частицы под воздействием большого числа случайных толчков в вязкой жидкости (здесь $x(t)$ — координата броуновской частицы, $\xi(t)$ — случайная сила). При аппроксимации случайной силы нормальным белым шумом данный процесс характеризуется экспоненциально спадающей корреляционной функцией $\Psi(\tau) \sim \exp(-\gamma|\tau|)$. На рис. 2 изображены теоретически ожидаемая нормированная АКФ (пунктир) и результаты расчета $\Psi(\tau)$ по выборочным функциям длительностью 3000 точек. Отметим, что

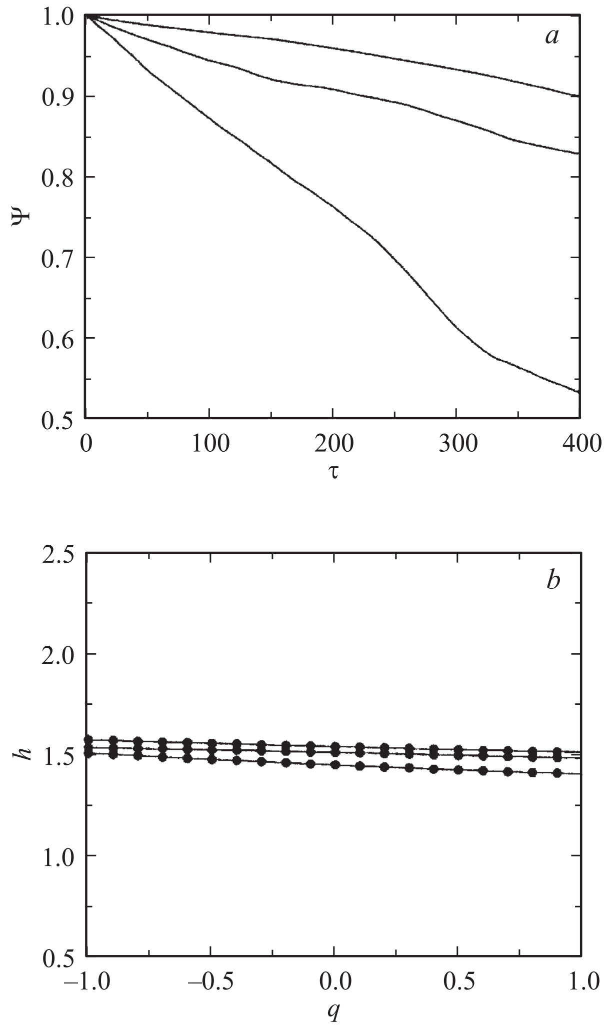

Рис. 1. *a* — расчет автокорреляционной функции по 3 произвольно выбранным реализациям винеровского случайного процесса длительностью 3000 точек (в данном случае временно́й интервал τ соответствует числу точек). *b* — значения гёльдеровских экспонент, вычисленные по тем же реализациям.

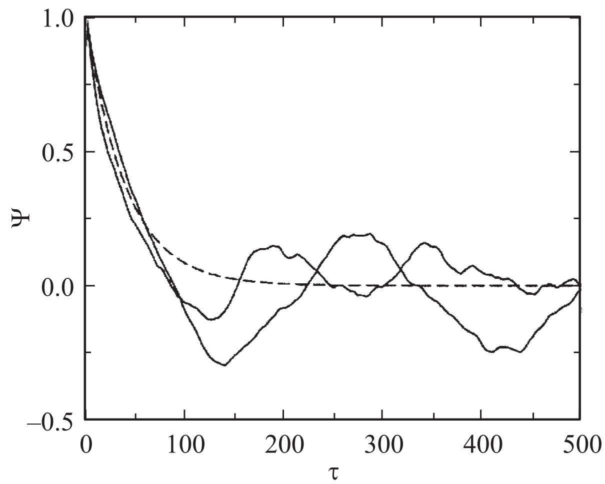

Рис. 2. Расчет автокорреляционной функции по 2 произвольно выбранным реализациям процесса Орнштейна–Уленбека ($\gamma = 1$) длительностью 3000 точек (сплошная линия) и теоретически ожидаемая зависимость (пунктир). Видно, что в области $\tau > 100$ наблюдаются значительные отклонения от теоретической зависимости.

наличие сравнительно короткой выборки приводит в данном случае к значительным погрешностям при попытке аппроксимировать закон спада корреляций по рассчитанным оценочным характеристикам. Как можно видеть из рис. 2, дисперсии оценок скорости спада АКФ будут отличаться для малых и больших значений τ. В области сравнительно длительных корреляций (в данном примере $\tau > 100$) расчет закона спада АКФ по выборочной функции приводит к существенным отклонениям от теоретически ожидаемого.

На рис. 3 приводится сопоставление классического корреляционного анализа и метода ММВП с точки зрения дисперсии оценок вычисляемых характеристик. Для представления результатов на одном графике мы приводим величину относительной погрешности расчета скорости спада АКФ и экспонент Гёльдера в зависимости от длительности выборочной функции (результат усреднения по 200 реализациям процесса Орнштейна–Уленбека). Метод ММВП обеспечивает мень-

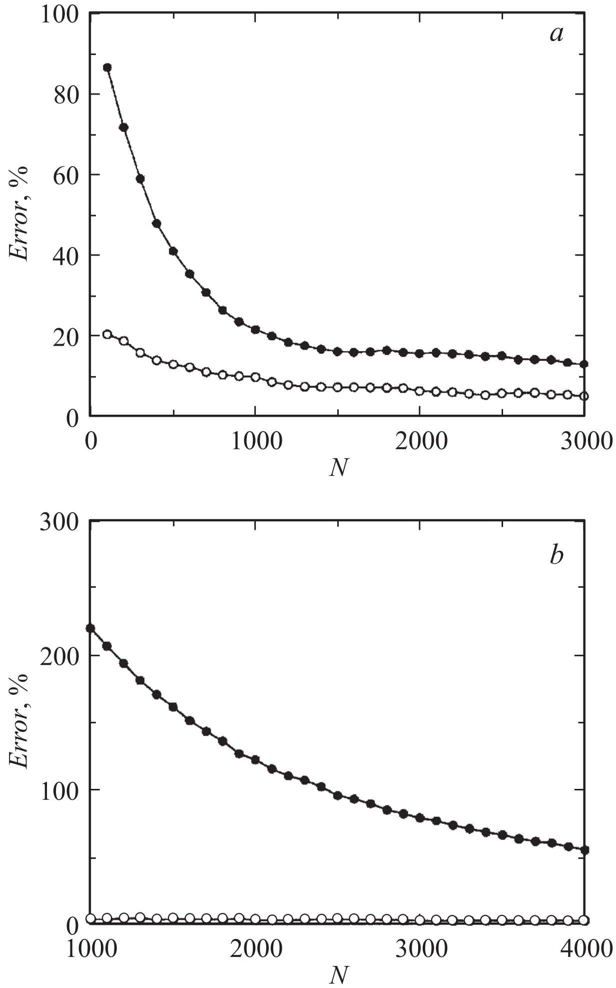

Рис. 3. Величина относительной ошибки определения характеристик для классического корреляционного анализа (черные кружочки) и метода мультифрактального формализма (белые кружочки) в зависимости от числа точек анализируемого временнóго ряда. Результаты приводятся после усреднения по 200 реализациям процесса Орнштейна–Уленбека $(\gamma = 1)$ для области $\tau < 50$ (a) и $\tau > 100$ (b).

шую дисперсию оценки гёльдеровских экспонент в случае корреляций малой длительности (с точки зрения метода это означает $q < 0$; в наших расчетах рассматривались $q \in [-5, -1]$ — рис. 3, *a*). Еще более значительное преимущество метод ММВП демонстрирует при анализе корреляций большей длительности (рис. 3, *b*), что соответствует положительным значениям $q \in [1, 5]$. Относительная погрешность расчета оцениваемых характеристик в случае мультифрактального анализа более чем на порядок меньше, чем для классической АКФ. Таким образом, метод мультифрактального анализа, базирующийся на вейвлет-преобразовании, может рассматриваться в качестве инструмента исследования корреляционных свойств в случаях, когда малая длительность экспериментальных данных ограничивает надежность проведения оценок на основе стандартного корреляционного анализа. Метод ММВП эффективен при анализе корреляций различной длительности, что позволяет проводить исследование структуры сложных сигналов, для которых закономерности спада корреляций нельзя описать с помощью одного числа (показателя экспоненты). Отметим, что одним из недостатков данного подхода является сложность сопоставления оцениваемых гёльдеровских экспонент с характеристиками, более привычными в статистической радиофизике (время корреляции и т. д.). Однако возможность установить соответствие сигнала тому или иному процессу с известными статистическими свойствами по малой выборке (даже в случае нестационарных данных) представляет несомненную ценность при проведении экспериментальных исследований, если условия проведения эксперимента ограничивают длительность регистрируемых сигналов.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках программы „Развитие научного потенциала высшей школы (2006–2008 гг.)“ и фонда „Династия“.

Список литературы

[1] *Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника. М.: Радио и связь, 1982.
[2] *Бендат Дж.С., Пирсол А.Дж.* Прикладной анализ случайных данных. М.: Мир, 1989.
[3] *Гардинер К.В.* Стохастические методы в естественных науках. М.: Мир, 1986.
[4] *Peng C.-K., Havlin S., Stanley H.E., Goldberger A.L.* // Chaos. 1995. V. 5. P. 82.

[5] *Peng C.-K., Buldyrev S.V., Havlin S., Simons M., Stanley H.E., Goldberger A.L.* // Phys. Rev. E. 1994. V. 49. P. 1685.

[6] *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Окрокверцхов Г.А., Стрелкова Г.И.* // УФН. 2005. Т. 175. С. 163.

[7] *Anishchenko V.S., Astakhov V.V., Neiman A.B., Vadivasova T.E., Schimansky-Geir L.* Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems. Tutorial and Modern Development. 2nd ed. Berlin: Springer, 2007.

[8] *Muzy J.F., Bacry E., Arneodo A.* // Phys. Rev. Lett. 1991. V. 67. P. 3515.

[9] *Muzy J.F., Bacry E., Arneodo A.* // Int. J. Bifurcation Chaos. 1994. V. 4. P. 245.

[10] *Ivanov P.Ch., Nunes Amara L.A., Goldberger A.L., Havlin S., Rosenblum M.G., Struzik Z.R., Stanley H.E.* // Nature. 1999. V. 399. P. 461.

[11] *Павлов А.Н., Анищенко В.С.* // УФН. 2007. Т. 177(8). С. 859.

[12] *Павлов А.Н., Зиганшин А.Р., Анищенко В.С.* // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2001. Т. 9 (3). С. 39.