

01

Исследование переходной фазовой динамики с помощью метода переустановки фазы

© А.Н. Павлов

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: pavlov@chaos.ssu.runnet.ru

Поступило в Редакцию 16 июня 2006 г.

Рассматривается метод изучения переходных процессов от синхронного режима динамики взаимодействующих осцилляторов к несинхронному при разрушении синхронизации с помощью последовательностей коротких импульсов, приводящих к переустановкам фазы. Исследуется возможность применения данного метода для определения коэффициента связи между взаимодействующими системами путем анализа генерируемых ими сигналов.

PACS: 05.45.-a, 05.45.Pq, 05.45.Tr

Синхронизация колебаний является одним из универсальных механизмов самоорганизации в динамике взаимодействующих систем [1–5], представляя собой важный эффект с точки зрения различных приложений и давая ключ к разработке новых методов диагностики. Эффекты „подстройки“ ритмов, например, играют важную роль в функционировании нефронов почек [4], причем они существенно отличаются для организмов с нормальным и с повышенным артериальным давлением [4,6]. Синхронизация ритмической деятельности может играть и негативную роль в динамике живых систем, приводя к различным заболеваниям [7]. В таких случаях важное значение приобретает задача разрушения синхронизации с помощью внешних стимулов, и данный подход уже начал успешно применяться. Импульсная стимуляция приводит к нестационарной динамике и переходным процессам от синхронного к несинхронному режиму и наоборот. В работах Питера Тасса [7,8] был предложен метод изучения соответствующих переходов на основе анализа сигналов взаимодействующих систем. Данный метод базировался на технике переустановки фазы за счет подачи импульсов большой амплитуды. Актуальной задачей, имеющей ряд

практических приложений, является извлечение различной информации об анализируемых системах из переходных процессов, вызванных стимуляцией. Цель настоящей работы состоит в исследовании возможности применения метода [7,8] для оценки параметров взаимодействующих систем, которые не могут быть измерены в натуральных экспериментах, в частности для оценки коэффициента связи между системами путем анализа генерируемых ими сигналов.

Несмотря на то что подход, предложенный П. Тассом, был ориентирован прежде всего на конкретные приложения, идеология данного метода может быть использована при решении более широкого круга задач. Рассмотрим основную идею метода на примере очень простой модели, к которой при определенных условиях может быть сведена динамика двух осцилляторов с фазами ψ_1, ψ_2 и постоянной амплитудой [7]:

$$\dot{\psi}_j = \omega_j - K \sin(\psi_j - \psi_k) + X(t)S_j(\psi_j) + F_j(t). \quad (1)$$

В данной системе уравнений $j, k = 1, 2$, $\omega_{1,2} = \omega \pm \mu/2$ — собственные частоты, K — коэффициент связи, $S_j(\psi_j)$ — 2π -периодические, не зависящие от времени функции, моделирующие внешнее воздействие. Рассмотрим воздействия с одинаковыми амплитудами и смещением по фазе: $S_1(\psi_1) = I \cos(\psi_1)$, $S_2(\psi_2) = I \cos(\psi_2 + \pi)$. Функция $X(t)$, принимающая два состояния (0 и 1), осуществляет включение и выключение внешнего воздействия. Для простоты ограничимся случаем, когда воздействие на обе системы подается одновременно. Последнее слагаемое в системе (1) характеризует случайную силу; в качестве $F_j(t)$ можно выбрать нормально-распределенный случайный процесс, для которого выполняются соотношения: $\langle F_j(t) \rangle = 0$ и $\langle F_j(t)F_k(\tilde{t}) \rangle = D\delta_{jk}(t - \tilde{t})$. Для удобства проведем нормировку фазы:

$$\phi_j(t) = \frac{\psi_j(t)}{2\pi} \pmod{1}, \quad \varphi_{n,m}(t) = \frac{n\psi_1(t) - m\psi_2(t)}{2\pi} \pmod{1}. \quad (2)$$

При исследовании откликов на стимул ($X(t) = 1$) нас будет интересовать наличие участков, на которых фазы $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$ или их разность $\varphi_{n,m}(t)$ демонстрируют характерную (шаблонную) динамику. С этой целью предлагается провести серию из некоторого числа l идентичных коротких импульсов (стимулов) в случайные моменты времени $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_l$. При изучении ансамблей откликов на последовательность стимулов удобно проводить перенормировку времени для

каждого отклика в отдельности таким образом, чтобы момент включения воздействия (т.е. переход от $X(t) = 0$ к $X(t) = 1$) соответствовал нулевому отсчету времени. Это позволяет „наложить“ все отклики друг на друга в целях проведения статистического анализа характерной динамики фаз. Таким образом, с каждым подаваемым коротким импульсом будет ассоциироваться временное окно $[t_a, t_b]$. Внутри этого окна отрицательным моментам времени соответствует динамика до включения воздействия, положительным — после. В каждый момент времени $t \in [t_a, t_b]$ формируются ансамбли значений: $\{\phi_j(t + \tau_k)\}_{k=1, \dots, l}$, $\{\varphi_{n,m}(t + \tau_k)\}_{k=1, \dots, l}$.

Выполнение равенства $\varphi_{n,m}(t + \tau_i) = \varphi_{n,m}(t + \tau_k)$ для всех $i, k = 1, \dots, l$ соответствует случаю полного захвата фаз. При отсутствии захвата фаз распределение функций ϕ_j и $\varphi_{n,m}$ в каждый момент t будет равномерным. Для вычисления количественного критерия, характеризующего степень синхронизации, в работе [7] предлагается ввести следующую функцию (индекс захвата):

$$\sigma_{1,1}(t) = \left| \frac{1}{l} \sum_{k=1}^l e^{i2\pi\varphi_{1,1}(\tau_k+t)} \right|, \quad (3)$$

которая принимает значения в интервале от 0 до 1 для всех $t \in [t_a, t_b]$. Предполагается, что связь между осцилляторами велика и в отсутствие воздействия система (1) демонстрирует синхронизацию в фазе. При условии $I \gg K$ включение внешних воздействий смещает фазы обеих подсистем, сохраняя разность фаз $\varphi_{1,1} = 0.5$ до момента выключения воздействий. Переход от синхронной динамики к состоянию „удерживаемого“ значения $\varphi_{1,1} = 0.5$ за счет фазового сдвига π сопровождается переходным процессом, длительность которого мала при больших значениях I . Выключение воздействия возвращает динамику системы (1) к исходному состоянию синфазной синхронизации, однако длительность соответствующего переходного процесса уже является сравнительно большой из-за того, что $K \ll I$. Описанные изменения динамики проиллюстрированы на рис. 1, где можно наблюдать два переходных процесса, в течение которых индекс $\sigma_{1,1}(t)$ уменьшается (статистический анализ по 100 стимулам).

Следует отметить, что помимо задачи разрушения синхронизации предложенный в работах [7,8] подход позволяет извлекать различную информацию о характеристиках взаимодействующих систем на основе

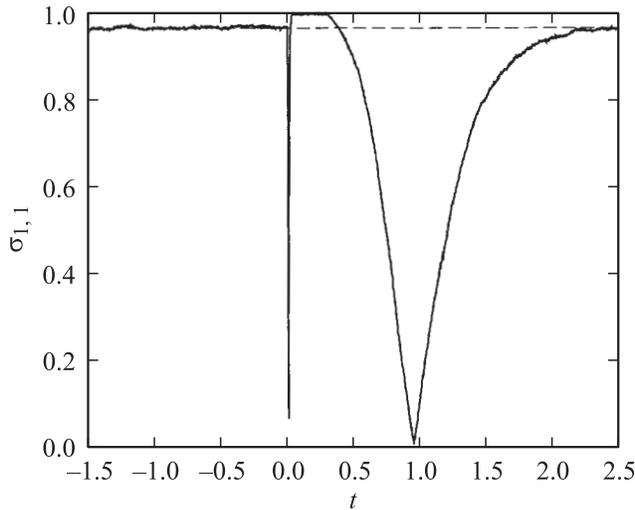


Рис. 1. Временная зависимость индекса захвата $\sigma_{1,1}$, иллюстрирующая два переходных процесса — от синхронного режима к режиму удерживаемой разности фаз (в окрестности $t \approx 0$) и возвращение к исходному режиму синфазной синхронизации [0.3,2.2]. Включение внешнего воздействия (импульсов длительности 0.3) соответствует моменту времени $t = 0$. Были выбраны следующие параметры системы (1): $K = 2$, $\omega = 2\pi$, $\mu = 0.04$, $D = 0.5$, $l = 27$, $l = 100$.

обработки экспериментальных данных. В частности, величина $\sigma_{1,1}(t)$ позволяет довольно четко оценивать длительность переходного процесса к синхронному состоянию. В последние годы появилась серия работ, посвященных определению характеристик связи систем по временным рядам, в частности направления связи [9–11] или величины задержки в связи [12]. Привлечение метода [7,8] может позволить расширить арсенал средств для экспериментального оценивания характеристик взаимодействующих систем. Рассмотрим возможность определения коэффициента связи на основе анализа сигналов системы (1). Как видно из рис. 1, в отсутствие внешнего воздействия индекс синхронизации $\sigma_{1,1}$ флуктуирует вблизи некоторого значения, определяемого интенсивностью шума D (чем меньше D , тем ближе $\sigma_{1,1}$ к 1). Переустанов-

ка фазы при включении воздействия увеличивает значения данного индекса, поскольку $I \gg K$, и шум в этом случае оказывает меньше влияния на динамику системы (1). Выключение воздействия приводит к переходному процессу, в ходе которого $\sigma_{1,1}$ падает почти до нуля, а затем возвращается к значению, которое было изначально (при $t < 0$). Длительность переходного процесса T в данном случае можно оценить как время, в течение которого $\sigma_{1,1}$ достигает уровень, составляющий, например, 99% от первоначального. Очевидно, что эта длительность будет зависеть от параметра K — коэффициента связи.

Рис. 2, *a* иллюстрирует зависимость величины T от параметра K при различных значениях интенсивности шума. Видно, что в некотором диапазоне по параметру D шум не оказывает принципиального влияния на характер данной зависимости, которая может быть приближенно описана функцией $T = AK^{-\alpha}$, где $A \approx 3.2$, $\alpha \approx 0.6$ (рис. 2, *b*). Данная функция дает хорошее приближение в широком диапазоне значений K и D , позволяя оценить коэффициент связи по измеренной длительности переходного процесса. Погрешность такой оценки приведена на рис. 3, *a*. Как следует из рис. 2, *b*, зависимость $T(K)$ заметно меняется в диапазоне сравнительно малых значений K (например, $K < 4$), в то время как при больших K оценить величину связи по измеренной длительности переходного процесса проблематично (в широком диапазоне K величина T меняется слабо, и из-за наличия погрешности вычисления T в присутствии шума оценки K могут быть не слишком надежными). Кроме того, соответствующие зависимости могут искажаться при большом уровне шума ($D > 2$). Поэтому практическое значение в данном случае имеют результаты, полученные при $D < 1$ и $K < 4$.

После получения результатов, представленных на рис. 2 и 3, *a*, был проведен анализ чувствительности зависимости $T(K)$ к изменению разных параметров системы (1). Было обнаружено, что зависимость вида рис. 2, *b* слабо меняется в широком диапазоне значений $\omega_{1,2}$ и расстройки между ними, а также при вариации параметров воздействия. Если вместо взаимной связи осцилляторов рассмотреть случай однонаправленной связи, то длительность переходного процесса будет возрастать (что ожидаемо), хотя качественное поведение $T(K)$ остается похожим (рис. 3, *b*).

Таким образом, в данной работе высказана идея о возможности применения метода [7,8] для оценки коэффициента связи взаимодействующих систем. На очень простом примере показано, что этот

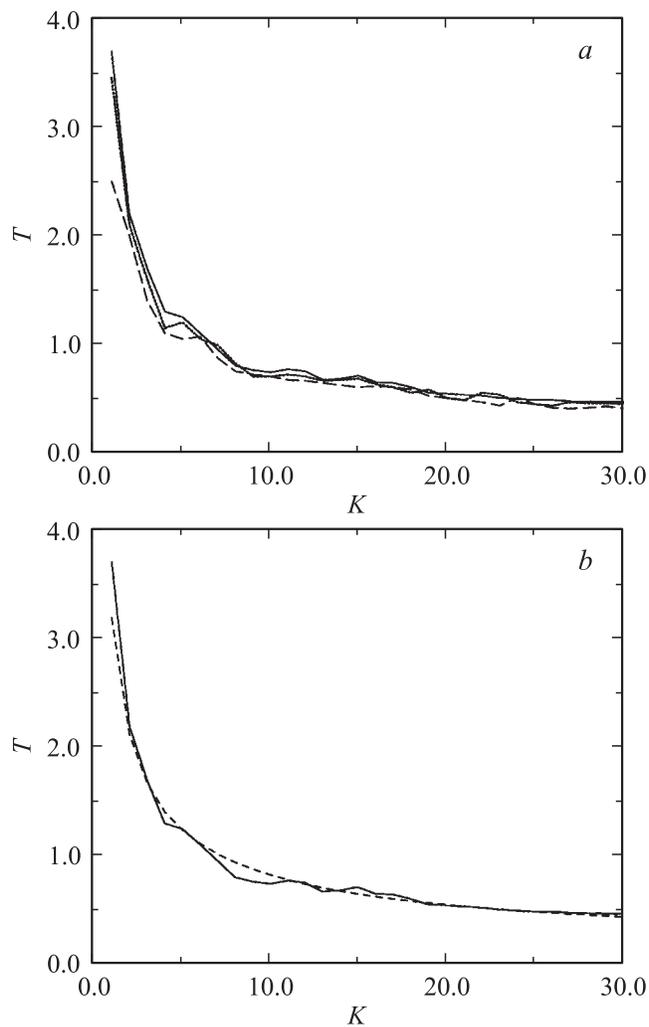


Рис. 2. *a* — зависимость длительности переходного процесса T от коэффициента связи K при разной интенсивности шума $D = 0.5$ (сплошная линия), $D = 1$ (точки), $D = 1.5$ (пунктир); *b* — результат аппроксимации зависимости для $D = 0.5$ функцией $T = AK^{-\alpha}$.

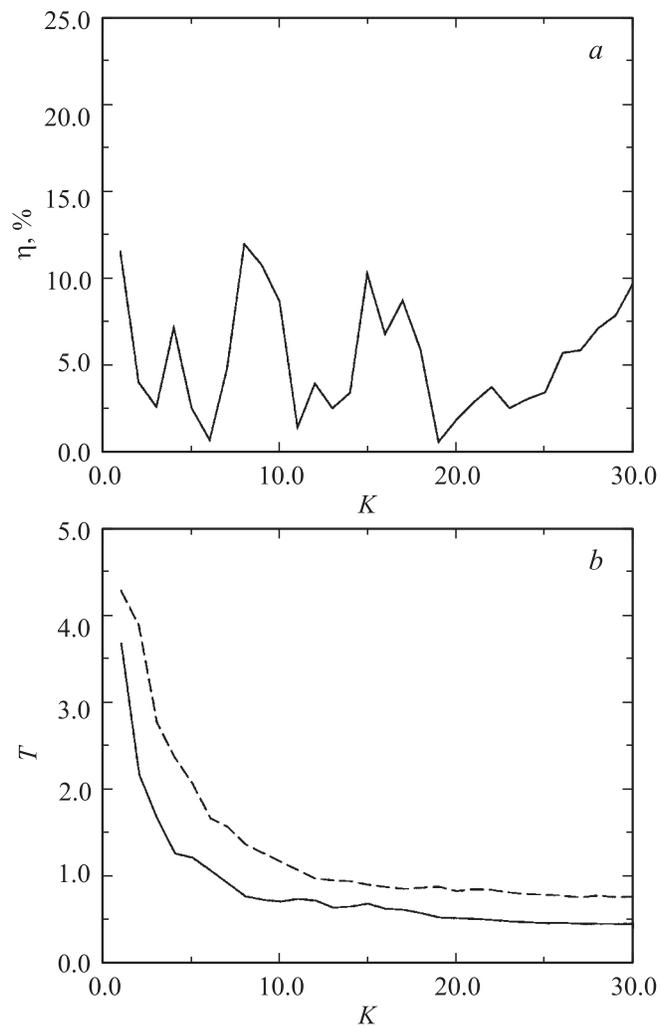


Рис. 3. *a* — относительная погрешность оценки величины коэффициента связи по временным рядам для модели (1) в случае $D = 0.5$; *b* — сопоставление зависимостей $T(K)$ для случая взаимной (сплошная линия) и однонаправленной связи (пунктир) для случая $D = 0.5$.

подход в принципе способен давать дополнительную информацию о взаимодействии систем из анализа генерируемых ими сигналов. С точки зрения перспектив применения данного метода в исследованиях более сложных систем представляется целесообразным на различных моделях проанализировать, насколько сильно вид зависимости $T(K)$ будет варьироваться для той или иной модели. Вероятные изменения данной зависимости приводят к тому, что оценка конкретных значений коэффициента связи может быть недостоверной. Тем не менее, несмотря на данный недостаток, использование идеологии метода П. Тасса может представлять интерес в ряде конкретных задач, когда важно не абсолютное значение коэффициента связи между взаимодействующими элементами, а проведение оценок типа „больше или меньше“ связь между данными элементами, чем между другими. В частности, актуальной задачей является установление архитектуры нейронных сетей при кодировании информации малыми группами клеток. Применение метода [7,8] может способствовать выявлению характерных шаблонов взаимодействия групп нейронов при кодировании и передаче информации о внешних стимулах. С этой точки зрения метод переустановки фазы и оценка связи между взаимодействующими элементами может рассматриваться как возможный инструмент экспериментального анализа архитектуры малых нейронных сетей.

Проводимые исследования были поддержаны Министерством образования и науки РФ по программе „Развитие научного потенциала высшей школы (2006–2008 гг.)“, а также грантами CRDF Y1-P-06-06 и РФФИ 04-02-16769.

Список литературы

- [1] *Блехман И.И.* Синхронизация динамических систем. М.: Наука, 1971.
- [2] *Kuramoto Y.* Chemical oscillations, waves and turbulence. Berlin: Springer-Verlag. 1984.
- [3] *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences. Cambridge nonlinear science series 12, Cambridge University Press. 2001.
- [4] *Mosekilde E., Maistrenko Yu., Postnov D.* Chaotic synchronization: applications to living systems. Singapore: World Scientific, 2002.
- [5] *Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Postnov D.E., Safonova M.A.* // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 1992. V. 2. P. 633–644.

- [6] *Sosnovtseva O.V., Pavlov A.N., Mosekilde E., Holstein-Rathlou N.-H.* // *Physical Review E.* 2002. V. 66. P. 061909(7).
- [7] *Tass P.A.* // *Europhys. Lett.* 2002. V. 57. P. 164–170.
- [8] *Tass P.A.* // *Europhys. Lett.* 2002. V. 59. P. 199–205.
- [9] *Mrowka R., Cimponeriu L., Patzak A., Rosenblum M.G.* // *Am. J. of Physiology Regul. Comp. Integr. Physiol.* 2003. V. 285. P. R1395–R1401.
- [10] *Smirnov D., Bezruchko B.* // *Physical Review E.* 2003. V. 68. P. 046209.
- [11] *Palus M., Stefanovska A.* // *Physical Review E.* 2003. V. 67. P. 055201(R).
- [12] *Cimponeriu L., Rosenblum M.G., Pikovsky A.S.* // *Phys. Rev. E.* 2004. V. 70. P. 046213.