

01;12

Определение динамических характеристик хаотических колебаний при анализе "точечных процессов"

© А.Н. Павлов, В.С. Анищенко

Саратовский государственный университет
E-mail: wadim@chaos.ssu.runnet.ru

Поступило в Редакцию 4 апреля 2000 г.

Исследуется возможность вычисления максимального ляпуновского показателя при анализе так называемых "точечных процессов" ("point processes" [1]). Рассматриваются две математические модели, описывающие генерацию импульсов сенсорными нейронами. Обсуждаются условия, при которых динамические характеристики хаотических колебаний, определяемые по выходной последовательности импульсов, сохраняются при линейных преобразованиях сигнала на входе нейрона.

Изучение процессов обработки информации живыми организмами представляет собой одну из актуальнейших задач естествознания. Данная задача включает в себя широкий круг различных проблем, в том числе проблему кодирования информации нервными клетками. Каждая клетка (сенсорный нейрон) представляет собой пороговое устройство, на вход которого поступает сигнал сложной структуры $S(t)$, а на выходе регистрируется последовательность идентичных импульсов — "спайков" (рис. 1, a). Поскольку форма выходных импульсов не зависит от внешнего воздействия, информация о свойствах сигнала $S(t)$ может содержаться только во временных интервалах между импульсами ("interspike intervals" или "ISI" [2,3]).

Насколько детально можно охарактеризовать входной сигнал, проанализировав последовательность "спайков"? В последние годы интерес к данной проблеме возник с точки зрения реконструкции динамических систем (ДС). Чтобы применять реконструкцию к анализу "точечных процессов" (т.е. процессов, в которых носителями информации являются времена тех или иных событий), необходимо ответить на вопрос [1]: если входной сигнал является детерминированным и генерируется ДС

с маломерной динамикой, может ли состояние данной системы быть задано из выходной последовательности ISI?

Ответ на этот вопрос впервые был предложен Зауэром. Согласно его работе [1], ISI могут быть рассмотрены в качестве точек новой координаты состояния, позволяющих характеризовать маломерную динамику на входе нервных клеток. Зауэр также доказал теорему вложения для временных интервалов [4], распространив тем самым строгие математические результаты Такенса [5] на случай "точечных процессов". Численные исследования возможности реконструкции были проведены в работах [6–9].

К настоящему времени известны различные модели, описывающие процессы генерации "спайков". Достаточно популярными (и в то же время биологически обоснованными) являются модели "integrate-and-fire" (IF) и "threshold-crossing" (TC) [8]. В рамках первой из них в качестве сигнала $S(t)$ часто рассматривается функция переменных маломерной динамической системы. Времена T_i , соответствующие моментам генерации "спайков" (рис. 1, *a*), определяются уравнением:

$$\int_{T_i}^{T_{i+1}} S(t) dt = \theta, \quad I_i = T_{i+1} - T_i, \quad (1)$$

где θ — пороговый уровень, I_i — временные интервалы (IF ISI). При достижении порога значение интеграла обнуляется.

Модель "threshold-crossing" предполагает введение порогового уровня Θ , который определяет уравнение секущей $S = \Theta$, где $S(t)$ представляет собой одну из координат ДС. Генерация импульсов соответствует моментам пересечения порога сигналом $S(t)$ в одном направлении (например, снизу вверх). С точки зрения теории динамических систем временные интервалы между "спайками" (TC ISI) представляют собой времена возврата фазовой траектории в секущую плоскость.

Целью настоящей работы является ответ на вопрос: каким образом величина порогового уровня и структура временных интервалов влияют на результат реконструкции? Преобразование непрерывного входного сигнала в последовательность импульсов является нелинейным. Более того, оно сопровождается частичной потерей информации о свойствах внешнего воздействия (например, о форме сигнала в случае TC-модели). Можно ли проводить расчет характеристик входного сигнала по последовательности ISI и если да, то при каких условиях?

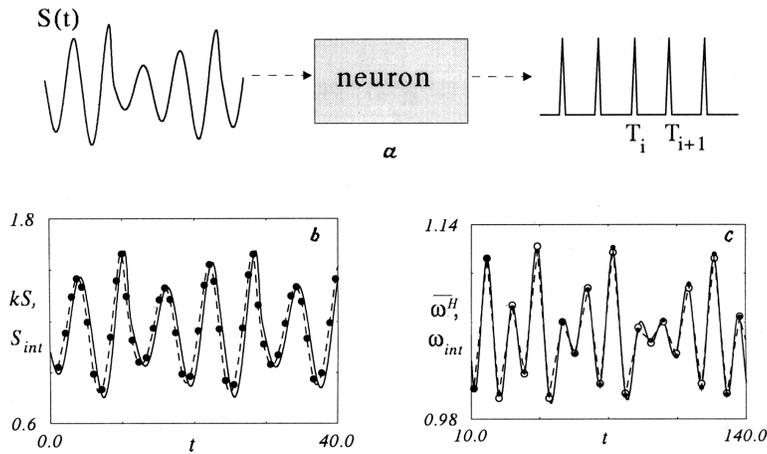


Рис. 1. *a* — преобразование входного сигнала сенсорным нейроном; *b* — линейное преобразование входного сигнала $\frac{1}{\theta}S(t)$ — сплошная линия и временная зависимость $S_{int}(t)$ — результат интерполяции точек $\frac{1}{T_i}(T_i)$ — пунктир; *c* — точки усредненной мгновенной частоты по Гильберту в моменты времени, соответствующие пересечению порога, — $\bar{\omega}^H(T_i)$ (черные кружочки, соединенные пунктирной линией) и значения $\frac{2\pi}{T_i}(T_i)$ в те же моменты времени (белые кружочки, соединенные гладкой функцией $\omega_{int}(t)$).

Наши исследования базировались на вычислении максимального ляпуновского показателя λ_1 , который является, пожалуй, наиболее информативным инвариантом сложного динамического процесса. Мы обсудим условия, при которых значение λ_1 может быть определено при анализе "точечного процесса".

Рассмотрим вначале IF-модель. Как показано в работе [6], в приближении высокой частоты генерации импульсов IF ISI представляют собой нелинейное преобразование входного сигнала:

$$I_i \approx \theta/S_i, \quad S_i = S(T_i). \quad (2)$$

Поскольку старший ляпуновский показатель является инвариантом нелинейных преобразований, значение λ_1 , вычисленное по последовательности I_i , должно совпадать с соответствующими расчетами показателя по сигналу $S(t)$. Используемый нами подход к вычислению

ляпуновского показателя состоит в следующем [10,11]. Если последовательность IF ISI известна, в соответствии с (2):

$$\frac{1}{I_i} \approx \frac{1}{\theta} S_i = kS(T_i), \quad (3)$$

т. е. в фиксированные моменты T_i могут быть определены значения входного сигнала, умноженные на некоторую постоянную k . Для перехода к сигналу с равномерной выборкой во времени точки $1/I_i(T_i)$ интерполируются гладкой функцией $S_{int}(t)$ (например, кубическим сплайном). Это позволяет восстановить в некотором приближении линейное преобразование входного сигнала, т. е. $S_{int}(t) \approx kS(t)$ (рис. 1, *b*). Следовательно, сигнал $S_{int}(t)$ будет сохранять как геометрические, так и динамические характеристики аттрактора, соответствующего входному воздействию. Конечно, все вышесказанное справедливо лишь приближенно. Однако, как видно из рис. 2, *a*, значение λ_1 , вычисленное методом [12] по сигналу $S_{int}(t)$, совпадает с результатами расчета λ_1 непосредственно по $S(t)$. (В качестве входного сигнала по аналогии с [6] рассматривалось линейное преобразование первой координаты системы Ресслера в хаотическом режиме: $S(t) = x(t) + C$, $\theta = 35$, $C = 40$).

Увеличение величины порога приводит к росту среднего значения временного интервала \bar{I} , и, как следствие, равенство (2) становится менее точным. На рис. 2, *b* представлены результаты расчета λ_1 в зависимости от выбора константы C для той же самой тестовой системы (изменение C эквивалентно смещению порогового уровня). Как видно из данного рисунка, величина показателя практически не меняется, если $C > 30$. Это соответствует $\bar{I} < T_0/5 \div T_0/4$, где T_0 — базовый период колебаний сигнала $x(t)$ (см. также рис. 2, *c*). Для меньших значений C величина временного окна, занимаемого вектором состояния, начинает превышать время корреляции сигнала; при этом достоверно определить динамические характеристики внешнего воздействия не представляется возможным [8].

Реконструкция ДС по последовательности времен возврата является более сложной проблемой. Возможный подход к ее решению был предложен в нашей работе [9] и состоит в следующем: 1) осуществляется переход от временных интервалов I_i к точкам $\omega(T_i) = 2\pi/I_i$, соответствующим значениям мгновенной частоты, усредненной за время I_i ; 2) точки $\omega(T_i)$ интерполируются гладкой функцией (также кубическим сплайном) $\omega_{int}(t)$ для перехода к сигналу с равномерной выборкой,

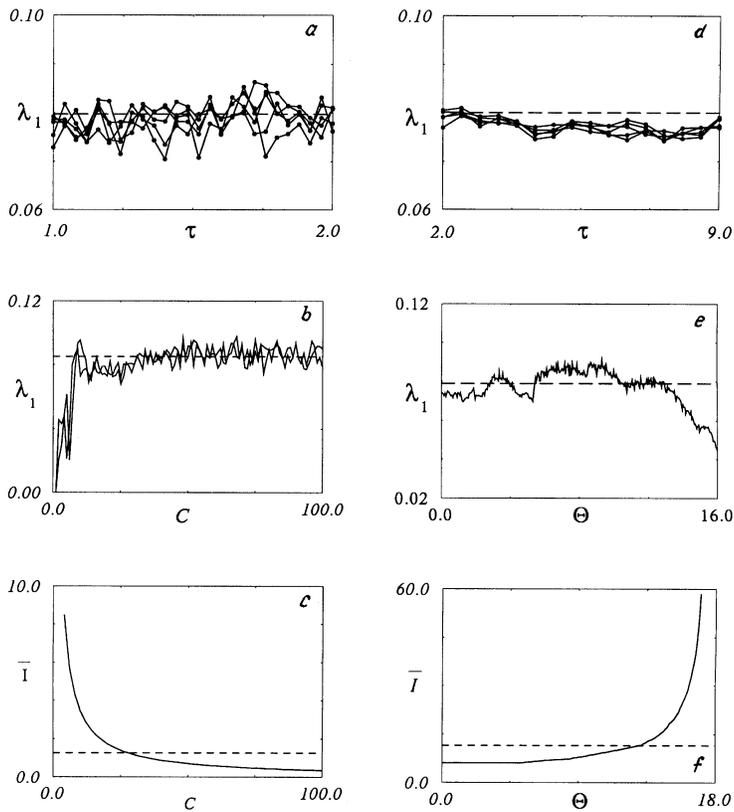


Рис. 2. *a, d* — значения максимального показателя Ляпунова в зависимости от выбора задержки τ , вычисленные для разных размерностей пространства вложения по последовательности IF ISI и TC ISI соответственно (в качестве источника хаотических колебаний рассматривалась система Ресслера); пунктиром обозначено значение показателя, вычисленное по данной системе уравнений; *b, e* — зависимости ляпуновского показателя от величины порогового уровня для моделей IF и TC соответственно (в первом случае вместо смещения порога менялась константа C , что эквивалентно — см. текст); *c, f* — зависимости среднего значения временного интервала для моделей IF и TC от величины порога (в первом случае — от величины смещения входного сигнала). Динамические характеристики хаотических колебаний могут быть определены, если \bar{I} не превышает значения T_c , обозначенного пунктиром.

используемому при реконструкции аттрактора. Полученная временная зависимость позволяет описывать поведение усредненной мгновенной частоты $\bar{\omega}^H(t)$ (рис. 1, *c*), а восстановленный аттрактор сохраняет динамические характеристики хаотических колебаний $S(t)$ (рис. 2, *d*). (Для модели ТС в качестве сигнала $S(t)$ рассматривалась первая координата системы Ресслера $x(t)$).

По аналогии с моделью IF мы проводили детальное исследование зависимости качества реконструкции от выбора порогового уровня Θ . Смещение порога имеет наглядную физическую интерпретацию: предположим, что мы меняем амплитуду входного сигнала. С точки зрения теории ДС это не нарушает ни геометрии, ни динамики хаотических колебаний. В то же время изменение амплитуды существенно меняет структуру выходной последовательности TS ISI (функцию распределения временных интервалов и отображение времен возврата). Эти изменения являются настолько значительными, что ранее полагалось невозможным проводить оценку характеристик хаотического сигнала для больших Θ (т.е. для входных сигналов малой амплитуды) [7,8]. Однако, как видно из рис. 2, *e*, старший ляпуновский показатель не зависит от выбора порога при условии, что \bar{I} не превышает характерный временной масштаб T_c хаотических колебаний (в данном случае время предсказуемости $T_c \approx 1/\lambda_1$ [13]). Поэтому, несмотря на то, что оценить геометрию множества не представляется возможным [8], динамические характеристики могут быть вычислены по последовательности ISI. (Конечно, говоря о сохранении тех или иных характеристик, мы понимаем это не в строгом математическом смысле, а с точки зрения численного эксперимента, т.е. мы можем достоверно оценить ту или иную характеристику в пределах $\approx \pm 10\%$).

Основные выводы проведенного исследования состоят в следующем. Динамические характеристики сигнала маломерной динамической системы, поступающего на вход нейрона, могут быть определены по выходной последовательности ISI, если среднее значение временного интервала не превышает характерный временной масштаб T_c . Временные масштабы отличаются для разных типов математических моделей генерации "спайков": в случае IF-модели T_c не превышает время достижения первого нуля корреляционной функцией (для сигналов с ярко выраженной базовой частотой в спектре это соответствует четверти основного периода колебаний). В случае ТС-модели характерный временной масштаб значительно больше и приблизительно

равен времени предсказуемости. В настоящей работе были представлены результаты для системы Ресслера. Серия экспериментов, проведенных на целом ряде других источников хаотических колебаний, подтвердила сделанные выводы. Таким образом, динамические характеристики хаотических колебаний, определяемые по выходной последовательности ISI, сохраняются при линейных преобразованиях сигнала на входе нейрона, и точность их определения при сформулированных ограничениях не зависит от структуры выходной последовательности "спайков".

А.Н.Павлов благодарит INTAS за поддержку (грант № YSF 99–4050). Проводимые исследования были поддержаны также грантом Королевского общества Лондона.

Список литературы

- [1] *Sauer T.* // Phys. Rev. Lett. 1994. V. 72. P. 3911–3914.
- [2] *Longtin A., Bulsara A., Moss F.* // Phys. Rev. Lett. 1991. V. 67. P. 656–659.
- [3] *Pierson D., Moss F.* // Phys. Rev. Lett. 1995. V. 75. P. 2124–2127.
- [4] *Sauer T.* // Nonlinear Dynamics and Time Series / Eds C. Culter and Kaplan, Fields Institute Communications. V. 11. American Mathematical Society, Providence, RI. 1997. P. 63–75.
- [5] *Takens F.* // Dynamical Systems and Turbulence. Lecture Notes in Mathematics. Berlin: Springer-Verlag, 1981. P. 366–381.
- [6] *Racicot D.M., Longtin A.* // Physica D. 1997. V. 104. P. 184–204.
- [7] *Hegger R., Kantz H.* // Europhys. Lett. 1997. V. 38. P. 267–272.
- [8] *Castro R., Sauer T.* // Phys. Rev. 1997. V. 55. P. 287–290.
- [9] *Janson N.B., Pavlov A.N., Neiman A.B., Anishchenko V.S.* // Phys. Rev. E. 1998. V. 58. P. R4–R7.
- [10] *Pavlov A.N., Sosnoutseva O.V., Mosekilde E., Anishchenko V.S.* // Phys. Rev. E. 2000. V. 61 (in press).
- [11] *Pavlov A.N., Mosekilde E., Anishchenko V.S.* // Stochaos: Stochastic and Chaotic Dynamics in the Lakes / Eds D.S. Broomhead, E.A. Luchinskaya, P.V.E. McClintock and T. Mullin, American Institute of Physics. Melville, N.Y., USA, 2000. P. 611–616.
- [12] *Wolf A., Swift J.B., Swinney H.L., Vastano J.A.* // Physica D. 1985. V. 16. P. 285–317.
- [13] *Brindley J., Kapitaniak T.* // Chaotic, Fractal and Nonlinear Signal Processing / Ed. R.A. Katz. American Institute of Physics, Woodbury, N.Y., USA, 1996. P. 605–611.