

Реконструкция динамических систем в приложении к решению задачи защиты информации

© В.С. Анищенко, А.Н. Павлов, Н.Б. Янсон

Саратовский государственный университет,
410026 Саратов, Россия

(Поступило в Редакцию 16 июня 1997 г.)

Рассматривается метод, позволяющий восстанавливать сигналы, осуществляющие параметрическую модуляцию генератора хаоса, по одномерной реализации процесса его колебаний. На тестовых примерах демонстрируется работоспособность данного метода при решении задач одновременной независимой передачи нескольких информационных сигналов по одному каналу связи.

Введение

Одним из направлений в современной нелинейной динамике является задача реконструкции динамических систем (ДС). Интерес к данной задаче в последние 17 лет был вызван появлением работ [1,2]. В первой из них было показано, что фазовый портрет аттрактора ДС может быть восстановлен по скалярному временному ряду $a_i = a(i\Delta t)$, если в качестве недостающих координат вектора состояния используется тот же самый ряд a_i , взятый с некоторым запаздыванием. В [2] возможность реконструкции фазового портрета аттрактора по одномерной реализации получила теоретическое обоснование в виде теоремы Такенса. Появление работы [2] создало предпосылки для решения на ее основе задач предсказания поведения системы [3,4], расчета метрических [5] и динамических [6] характеристик аттрактора по временному ряду, а в 1987 г. была опубликована работа [7], где предлагался метод восстановления уравнения ДС по ее одномерной реализации. Идея такого метода (метода глобальной реконструкции) получила свое развитие в целом ряде работ (например, [8–10]).

Несмотря на некоторые различия в алгоритмах глобальной реконструкции, используемых различными исследователями, все они предполагают решение задачи моделирования в два этапа. На первом проводится расчет размерности пространства вложения n . После выбора величины n осуществляется реконструкция фазового портрета ДС по скалярному временному ряду. Для этого помимо метода задержки [1,2] может быть использован любой из способов, изложенных в [11]. На втором этапе алгоритма задается общий вид математической модели и осуществляется конкретизация эволюционных уравнений.

В том случае, когда для восстановления фазового портрета используется метод последовательного дифференцирования исходного временного ряда [7–11], математическая модель имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2, & \frac{dx_2}{dt} &= x_3, \dots, \\ \frac{dx_n}{dt} &= f(x_1, x_2, \dots, x_n, \boldsymbol{\mu}), \end{aligned} \quad (1)$$

где f — нелинейная функция, которую необходимо определить; $\boldsymbol{\mu}$ — вектор параметров.

Методика реконструкции предусматривает необходимость априорного задания общего вида функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n, \boldsymbol{\mu})$. Как правило, невозможно заранее определить даже приблизительный вид этой функции, поэтому обычно ее представляют в виде разложения по некоторому базису и численно определяют коэффициенты разложения. Помимо стандартного базиса $1, x_1, x_1^2, x_1x_2, \dots$ аппроксимация нелинейности может осуществляться путем разложения по любому набору ортогональных базисных функций (полиномы Лежандра и т.д.). Однако в любом случае необходимость задания вида функции f является серьезным недостатком метода реконструкции динамической модели системы.

В принципиально иной ситуации мы оказываемся в случае, когда явный вид нелинейной функции f известен заранее, а неизвестными являются лишь коэффициенты разложения. Решить задачу глобального моделирования при этом оказывается возможным с заданной точностью, которая будет определяться количеством точек исходного временного ряда, доступных для наблюдения, малостью шага дискретизации и точностью записи данных. В работе [12] было показано, что следствием решения задачи реконструкции математической модели могут быть интересные приложения, одним из которых является использование методики реконструкции для защиты передачи информации.

Следует отметить, что появление широкого круга прикладных задач в современной нелинейной динамике (в том числе задачи защищенной передачи информации) в последние годы обусловлено развитием представлений о динамическом хаосе, в частности о явлении хаотической синхронизации. Именно эффект хаотической синхронизации использовали авторы пионерских работ по осуществлению конфиденциальности передаваемой информации, применявшие широкополосные колебания генератора хаоса в качестве маскирующего [13–15] либо несущего сигнала [16–18]. В первом случае использовался принцип синхронизации хаотических систем, предложенный в [19]. Альтернативным способом защиты пере-

даваемой информации являлось осуществление экспериментального управления хаосом (например, [20,21]).

В настоящей работе мы излагаем новый метод решения проблемы защищенной передачи информации, базирующийся на технике глобальной реконструкции ДС. Если в [12] данный метод был проиллюстрирован только для одного примера — модифицированного генератора с инерционной нелинейностью (ГИНа) [22,23], то теперь будут представлены результаты его применения с использованием моделей Лоренца и Ресслера. Кроме того, будут приведены результаты, полученные нами для ГИН, которые не нашли полного отражения в предыдущей работе.

Метод

Рассмотрим некоторый генератор динамического хаоса, математическая модель которого известна

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}^0); \quad \mathbf{x} \in R^n, \quad \boldsymbol{\mu}^0 \in R^m, \quad (2)$$

где \mathbf{x} — вектор состояния, \mathbf{F} — вектор правых частей модельной системы, $\boldsymbol{\mu}^0$ — вектор постоянных значений параметров.

Будем осуществлять относительно медленную модуляцию произвольного числа параметров информационными сигналами $\mu_i(t)$, т.е. введем в рассмотрение переменные величины

$$\mu_i^* = \mu_i^0 + \mu_i(t), \quad (3)$$

что позволит реализовать одновременную передачу нескольких сообщений. В этом случае передаваемый по каналу связи сигнал, представляющий собой одномерную реализацию колебательного процесса генератора хаоса, порождается неавтономной динамической системой вида

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}^0 + \boldsymbol{\mu}(t)), \\ \boldsymbol{\mu}^0 &= (\mu_1^0, \mu_2^0, \dots, \mu_m^0), \\ \boldsymbol{\mu}(t) &= (\mu_1(t), \mu_2(t), \dots, \mu_m(t)). \end{aligned} \quad (4)$$

Для решения задачи синтеза ДС по наблюдаемой одномерной реализации система (4) должна быть сведена к виду (1). Это значит, что путем замен переменных необходимо преобразовать правые части таким образом, чтобы вместо вектор-функции \mathbf{F} осталась только одна скалярная нелинейная функция f , которая может иметь очень сложный вид, например

$$\begin{aligned} f &= \frac{P}{Q}, \quad P(\mathbf{x}) = \sum_{l_1, l_2, \dots, l_n=0}^{\nu_1} C_{l_1, l_2, \dots, l_n} \prod_{k=1}^n x_k^{l_k}, \quad \sum_{k=1}^n l_k \leq \nu_1, \\ Q(\mathbf{x}) &= \sum_{l_1, l_2, \dots, l_n=0}^{\nu_2} D_{l_1, l_2, \dots, l_n} \prod_{k=1}^n x_k^{l_k}, \quad \sum_{k=1}^n l_k \leq \nu_2, \quad \nu_2 < \nu_1, \end{aligned} \quad (5)$$

где $C_{l_1, l_2, \dots, l_n}, D_{l_1, l_2, \dots, l_n}$ в общем случае зависят от времени и однозначно связаны с параметрами μ_i^* системы (4).

Для рассматриваемых в настоящей работе модельных систем — уравнений Лоренца, Ресслера и ГИН подобные преобразования будут осуществлены в следующем разделе. Поскольку предполагается, что средняя скорость изменения параметров мала по сравнению с базовой частотой колебаний генератора (2), т.е. $\overline{d\mu_i^*/dt} \ll \overline{dx_j/dt}$ для любых i и j , то можно ввести в рассмотрение интервал времени t_0 , в течение которого значения параметров допустимо считать практически постоянными, т.е. для времен порядка t_0 можно не учитывать неавтономность системы (4). Это дает возможность восстановления текущих значений параметров системы по коротким участкам ее одномерной реализации, т.е. воспроизведения информационных сигналов $\mu_i(t)$, осуществляющих параметрическую модуляцию генератора хаоса.

Если условие $\overline{d\mu_i^*/dt} \ll \overline{dx_j/dt}$ не выполняется, необходимо учитывать производные по времени от параметров при преобразовании системы (4) к виду (1), что сильно усложняет вид нелинейной функции f и затрудняет решение задачи глобальной реконструкции.

Применяя технику реконструкции к одномерной реализации $x_1(t)$ генератора хаоса, которую можно измерить на выходе передающего устройства, получатель информации, зная общий вид математической модели (2), выделяет полезные сигналы $\mu_i(t)$. С этой целью ему необходимо n раз продифференцировать реализацию $x_1(t)$, что позволит определить левые части модельной системы (1). В результате задача определения значений параметров в данный момент времени сводится к необходимости решения алгебраического уравнения с некоторым количеством неизвестных (в случае, когда f представима в виде (5), этими неизвестными являются коэффициенты C_{l_1, l_2, \dots, l_n} и D_{l_1, l_2, \dots, l_n} , однозначно связанные с параметрами μ_i^* системы (4)). Поскольку при компьютерной обработке приходится иметь дело не с аналоговым сигналом, а с дискретизованной временной зависимостью $x_1(i\Delta t)$, то понятно, что производные определяются в дискретные моменты времени $i\Delta t$ по приближенным формулам численного дифференцирования.

Записывая систему K алгебраических уравнений ($K = [t_0/\Delta t]$) для L неизвестных ($L \ll K$) и решая ее методом наименьших квадратов, можно осуществить аппроксимацию неизвестных коэффициентов. Ясно, что чем меньше L , тем меньше и ошибка аппроксимации. Поэтому при практической реализации предложенного метода защищенной передачи необходимо стремиться к максимальному упрощению модельной системы. Если ряд параметров системы (4) не меняется, целесообразно считать их заранее заданными и проводить аппроксимацию для меньшего числа неизвестных.

Исследуемые модели

В качестве хаотических колебаний нами были выбраны модели Лоренца, Реслера и ГИН.

а) Система Лоренца. Рассмотрим уравнения известной модели Лоренца

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y-x), \quad \frac{dy}{dt} = rx-y-xz, \quad \frac{dz}{dt} = -bz+xy. \quad (6)$$

Будем считать, что в качестве несущего сигнала выбрана координата x системы (6). Как показано в [8], для данного случая преобразование (6) к виду (1) позволит получить более простой вид функции f , чем для двух других координат уравнений Лоренца. В результате такого преобразования, осуществляемого путем замен переменных

$$X = x, \quad Y = \sigma(y-x), \quad Z = \sigma[(r+\sigma)x - (\sigma+1)y - xz], \quad (7)$$

получается система уравнений

$$\frac{dX}{dt} = Y, \quad \frac{dY}{dt} = Z, \dots, \quad \frac{dZ}{dt} = f(X, Y, Z, \mu),$$

$$\mu = (\sigma, r, b), \quad (8)$$

$$f = b\sigma(r-1)X - b(\sigma+1)Y - (b+\sigma+1)Z - X^2Y - \sigma X^3 + \frac{Y[(\sigma+1)Y+Z]}{X}, \quad (9)$$

которая в общем случае содержит 3 неизвестных параметра. На примере модели Лоренца мы продемонстрируем возможность защищенной передачи информации при модуляции только одного из ее параметров, например b . В этом случае (9) целесообразно переписать следующим образом:

$$f + (\sigma+1)Z + X^2Y + \sigma X^3 - \frac{Y[(\sigma+1)Y+Z]}{X} = b[\sigma(r-1)X - (\sigma+1)Y - Z]. \quad (10)$$

Поскольку σ и r полагаются известными, а Y, Z, f могут быть определены путем численного дифференцирования временного ряда $x(i\Delta t)$, полученного при интегрировании системы (6), где Δt — шаг дискретизации, выбранный нами для всех изучаемых моделей равным 0.025, т.е. (10) есть не что иное, как линейное алгебраическое уравнение с одним неизвестным.

Теоретически, чтобы определить текущее значение b , необходимо знание фазовых координат и их производных только в один момент времени. На практике повышение точности вычисления параметра требует рассмотрения короткого участка скалярного временного ряда и аппроксимации значения b по результатам вычисления в различные моменты времени в пределах интервала t_0 , в течение которого значение параметра можно считать практически постоянным.

б) Генератор с инерционной нелинейностью. В качестве второй модельной системы был рассмотрен

модифицированный генератор с инерционной нелинейностью (ГИН) [22,23]

$$\frac{dx}{dt} = m_0x + y - xz, \quad \frac{dy}{dt} = -x,$$

$$\frac{dz}{dt} = g_0z + 0.5g_0(x + |x|x). \quad (11)$$

Считаем, что излучаемым сигналом генератора является одномерная реализация $y(t)$. Преобразование (11) к виду (1) осуществляется с помощью замен переменных

$$Y = y, \quad Z = -x, \quad X = -m_0x - y + xz, \quad (12)$$

в результате которых уравнения генератора приобретают вид

$$\frac{dY}{dt} = Z, \quad \frac{dZ}{dt} = X, \quad \frac{dX}{dt} = f(X, Y, Z, \mu), \quad \mu = (m_0, g_0), \quad (13)$$

$$f = \frac{X(X+Y)}{Z} + (m_0g_0 - 1)Z - g_0(X+Y) + 0.5g_0(|Z| - Z)Z^2. \quad (14)$$

С помощью модели ГИН мы проиллюстрируем возможность одновременной передачи двух независимых информационных сигналов по одному каналу связи. С этой целью параметр m_0 модулировался широкополосным хаотическим сигналом, полученным при интегрировании уравнения Реслера, а параметр g_0 — гармоническим сигналом

$$\frac{dx}{dt} = (m_0 + dx_1)x + y - xz, \quad \frac{dy}{dt} = -x,$$

$$\frac{dz}{dt} = -g_0(1 + k_1 \sin(\omega t))[z - 0.5(x + |x|x)],$$

$$\frac{dx_1}{dt} = k(-y_1 - z_1), \quad \frac{dy_1}{dt} = k(x_1 + ay_1),$$

$$\frac{dz_1}{dt} = k(b + z_1(x_1 - c)), \quad (15)$$

где k — постоянная величина, осуществляющая перенормировку времени в модели Реслера для того, чтобы процесс изменения параметра $m^* = m_0 + dx_1$ был более медленным по сравнению с колебаниями ГИНа.

Преобразование уравнения генератора с инерционной нелинейностью к виду (13) в предположении медленного изменения параметров позволяет получить нелинейную функцию f в виде (14) при условии, что m_0 и g_0 заменены на $m^* = m_0 + dx_1$ и $g^* = g_0(1 + k_1 \sin(\omega t))$ соответственно, т.е.

$$f - \frac{X(X+Y)}{Z} + Z = m^*g^*Z - g^*[X+Y + 0.5(|Z| - Z)Z^2]. \quad (16)$$

Если ввести обозначение $z^* = m^*g^*$, то уравнение (16) можно считать линейным алгебраическим уравнением с

2 неизвестными s^* и g^* , нахождение которых осуществляется по короткому скалярному временному ряду методом наименьших квадратов. Затем на основании знания s^* и g^* можно однозначно определить текущее значение параметра m^* .

в) Система Ресслера. Выберем в качестве несущего сигнала координат y модели Ресслера

$$\frac{dx}{dt} = -y - z, \quad \frac{dy}{dt} = x + ay, \quad \frac{dz}{dt} = b + z(x - c). \quad (17)$$

По аналогии с предыдущей моделью (11) осуществим преобразование (17) к виду (13) путем замен переменных [8]

$$Y = y, \quad Z = x + ay, \quad X = ax + (a^2 - 1)y - z. \quad (18)$$

При этом мы получим следующий вид нелинейной функции f :

$$f = -b + (a - c)X - cY + (ac - 1)Z - aY^2 - aZ^2 - aXY + XZ + (a^2 + 1)YZ. \quad (19)$$

Считаем, что вектор $\mu = (a, b, c)$ содержит два неизвестных параметра b и c , которые модулируются информационными сигналами. Тогда (19) можно переписать следующим образом:

$$f - aX + Z + aY^2 + aZ^2 + aXY - XZ - (a^2 + 1)YZ = -b - c(X + Y - aZ). \quad (20)$$

Неизвестные величины b и c линейного алгебраического уравнения (20) вновь могут быть найдены путем применения метода наименьших квадратов к результатам вычисления параметров в моменты времени $i\Delta t$ дискретизованного сигнала $y_i = y(i\Delta t)$ в пределах короткого времени t_0 . На примере модели Ресслера иллюстрируется возможность передачи графической информации при модуляции информационными сигналами 2 ее параметров.

Результаты

Прежде чем приводить конкретные результаты, подтверждающие работоспособность предлагаемого способа защищенной передачи информации, сделаем несколько замечаний. Особенностью метода глобальной реконструкции является то, что он может применяться не только к стационарным сигналам, но и к переходным процессам. В самом деле, несмотря на то что теорема Такенса [2], на которую обычно ссылаются при решении задачи реконструкции фазового портрета, была доказана для случая, когда исследуемый сигнал является одномерной проекцией фазовой траектории, принадлежащей аттрактору ДС, для задачи моделирования принадлежность фазовой траектории аттрактору не является обязательным условием. Мы уже отмечали, что в силу

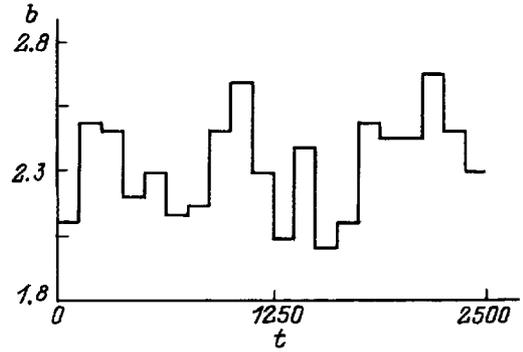


Рис. 1. Закон изменения параметра b системы Лоренца.

относительно медленного изменения параметров можно ввести в рассмотрение интервал времени t_0 , в течение которого значения μ_i^* в (3) допустимо считать практически постоянными, а систему (4) — автономной. Поскольку при одних и тех же значениях параметров как движение по аттрактору, так и переходные процессы описываются одними и теми же уравнениями, нестационарность сигнала в канале связи в течение времени t_0 не принципиальна для решения задачи определения текущих значений μ_i^* .

Заметим также, что любой метод передачи информации должен анализироваться с точки зрения его работоспособности в условиях влияния шумов различного происхождения. Поэтому во всех примерах, которые будут рассмотрены ниже, осуществлялось добавление нормально распределенной случайной величины с дисперсией 10^{-4} к информационным сигналам, осуществляющую параметрическую модуляцию.

а) Система Лоренца. Выберем в качестве закона изменения параметра b ступенчатую временную зависимость, подобную приведенной на рис. 1. С помощью такого сигнала можно осуществлять передачу графической информации. Для иллюстрации осуществим сканирование известной картины Рафаэля "Сикстинская мадонна" (рис. 2, а) с разрешением 200×300 . Разобьем диапазон изменения параметра $b \in [2-3]$ на 256 поддиапазонов, каждому из которых соответствует градация оттенка цвета черно-белого изображения. Полезный сигнал представляет собой зависимость вида рис. 1, где каждому поддиапазону изменения параметра соответствует своя высота ступеньки. Несущий сигнал (временная зависимость $x(t)$ системы Лоренца), подвергнутый разбиению на то же количество поддиапазонов, что и информационный, представлен на рис. 2, б. Применение методики глобальной реконструкции позволило выделить сигнал модуляции (рис. 2, в). Аналогичные результаты получены при модуляции параметра r системы (6).

Отметим, что, выбрав в качестве закона параметрической модуляции ступенчатую временную зависимость, мы должны осознать, что для момента переключения между поддиапазонами мы не можем пользоваться формулой (10), так как совершенно ясно, что в малой окрестности момента переключения параметр системы

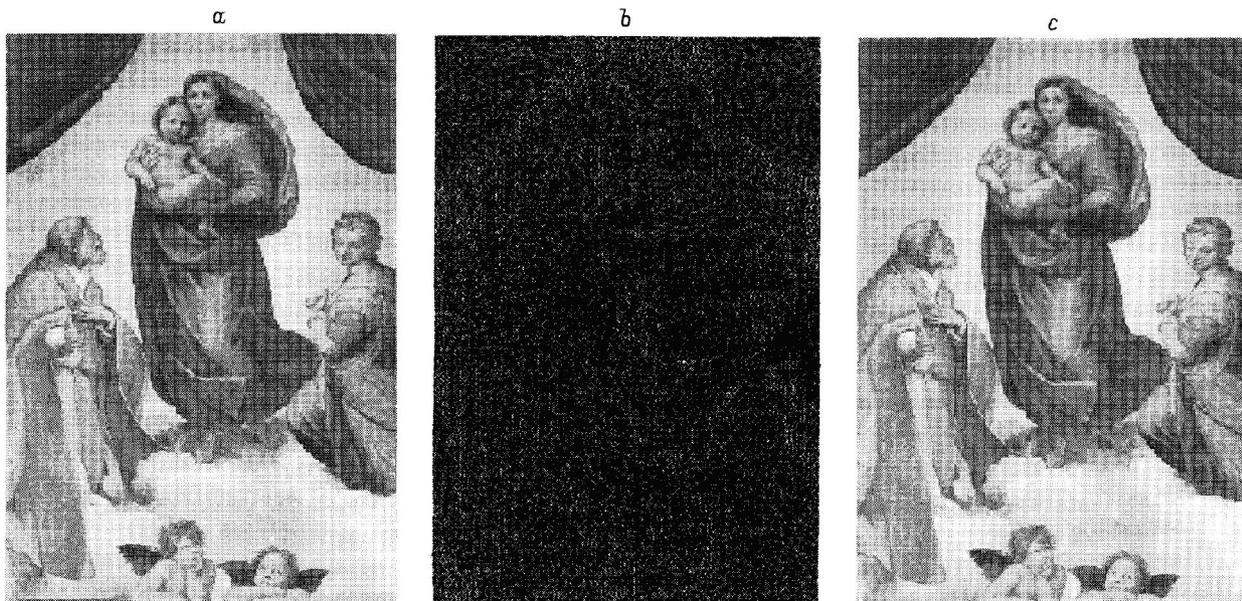


Рис. 2.

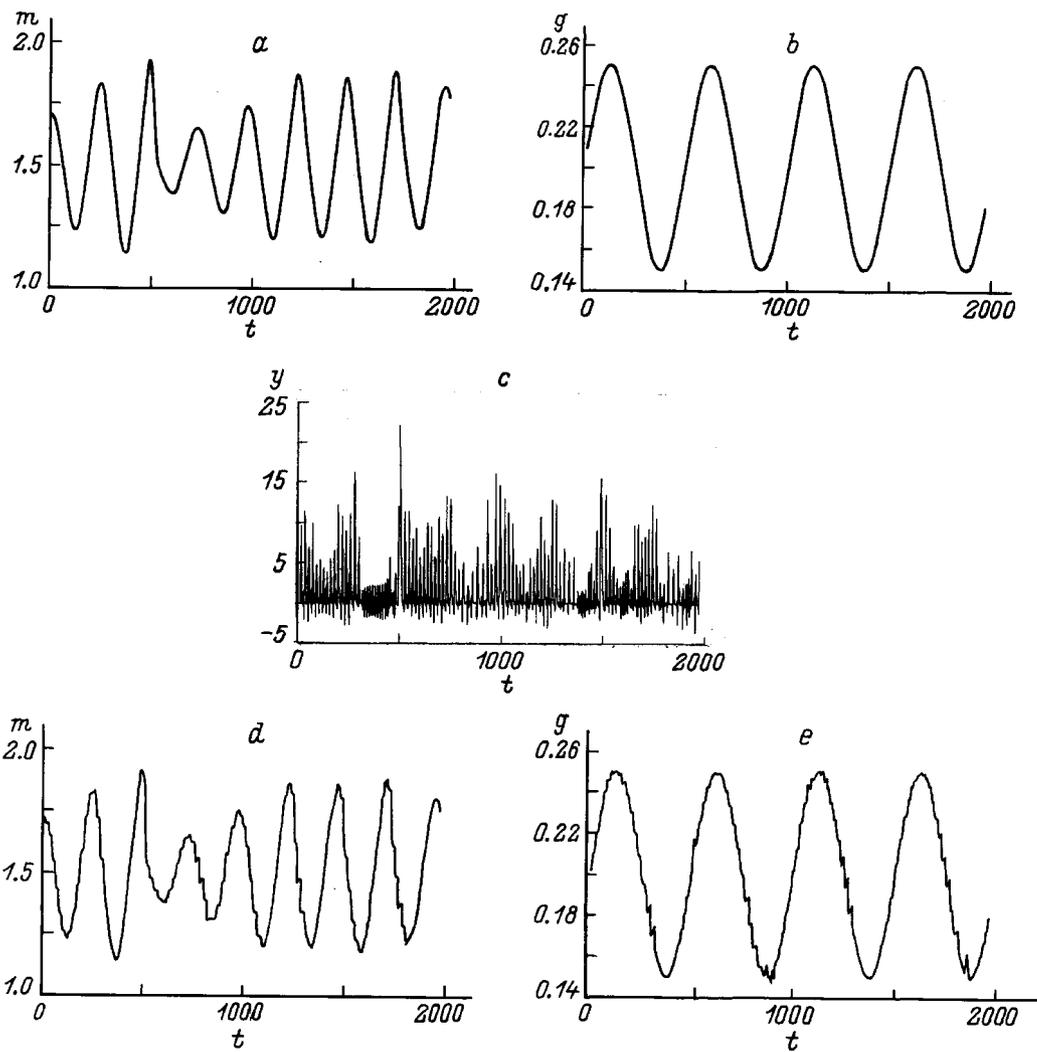


Рис. 3.



Рис. 4.

нельзя считать медленно меняющимся. Следовательно, необходимо учитывать производные $d\mu_i/dt$ при преобразовании (4) к виду (1). Этому можно избежать, если выбрать достаточно большую ширину каждой ступеньки и выбросить из рассмотрения малые участки в окрестности моментов переключений.

б) *Генератор с инерционной нелинейностью.* Продемонстрируем возможность одновременной передачи двух сигналов: хаотического и регулярного. Обратимся к системе (15), в которой выберем следующие значения постоянных величин: $d = 0.025$, $g_0 = 0.2$, $m_0 = 1.5$, $\omega = 0.006$, $k_1 = 0.05$, $k = 0.025$, $a = 0.15$, $b = 0.2$, $c = 10.0$. Зависимости во времени параметров m^* и g^* данной системы проиллюстрированы на рис. 3, *a, b*. Получатель информации, знающий вид нелинейной функции (16), принимая сигнал (рис. 3, *c*), восстановит сигналы модуляции (рис. 3, *d, e*).

в) *Система Ресслера.* По аналогии с моделью Лоренца выберем в качестве закона параметрической модуляции ступенчатую временную зависимость, которая позволит осуществить передачу графической информа-

ции. Однако теперь полезными сигналами будут модулироваться два ее параметра — b и c . Выберем 2 фрагмента картины Леонардо да Винчи "Мадонна в гроте" (рис. 4, *a, b*) и осуществим их сканирование с разрешением 200×250 . Диапазон изменения каждого параметра $b \in [0.1-0.3]$, $c \in [8-12]$ вновь был разбит на 256 поддиапазонов. На рис. 4 представлены исходные фрагменты картины (рис. 4, *a, b*), восстановленные с применением техники глобальной реконструкции (рис. 4, *d, e*), а также сигнал в канале связи (рис. 4, *c*).

Недостатком подобного метода передачи графического изображения является то, что получатель информации должен знать разрешение, с которым осуществлялось сканирование, поскольку выделяемый им сигнал представляет собой единую реализацию. Избежать этого можно, например, следующим образом. Пусть один из параметров модулируется сигналом, несущим информацию об отсканированном графическом изображении. Модуляция второго параметра в это время позволит передать информацию о разрешении. Если ввести координаты x и y точек передаваемого фрагмента картины, то один из

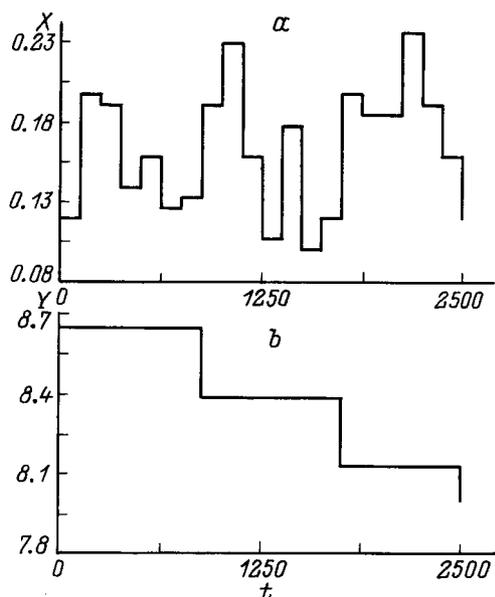


Рис. 5. Один из способов передачи графической информации при одновременной модуляции двух параметров.

способов подобной передачи графического изображения представлен на рис. 5. Количество ступенек (рис. 5, *b*) будет нести информацию о разрешении по оси *y*, а из отношения ширины такой ступеньки к соответствующей величине для рис. 5, *a* можно определить разрешение по оси *x*.

Возможность одновременной модуляции информационными сигналами различных параметров динамической системы позволяет разнообразить способы передачи графического изображения. В простейшем случае, когда осуществляется передача некоторого рисунка с помощью только двух цветов (черный и белый), т. е. полезный сигнал представляет собой бинарную последовательность символов (0 или 1), для повышения скорости передачи информации путем модуляции двух параметров динамической системы можно передавать только координаты точек, соответствующих какому-то одному из этих цветов. Разумеется, могут быть предложены и другие способы передачи графического изображения.

Заключение

В настоящей работе проиллюстрирован новый метод конфиденциальной передачи информации, базирующийся на технике глобальной реконструкции динамических систем. В качестве модельных систем выбирались системы Лоренца, Ресслера и генератор с инерционной нелинейностью. Полученные результаты подтверждают работоспособность предложенного метода, а также надежность его работы при наличии шумов, значительно превышающих по своей величине тепловые и дробовые шумы реальных электронных устройств.

Предложенный метод теоретически не накладывает ограничений на количество одновременно меняемых параметров. На практике такие ограничения появляются в связи с конечной точностью вычисления μ_i^* . В частности, нам не удалось добиться хорошей точности определения текущих значений μ_i^* при одновременной модуляции трех параметров при тех же значениях шага дискретизации ($\Delta t = 0.025$) и количества поддиапазонов 256. Поэтому в случае модуляции более двух параметров придется ограничиться меньшим количеством поддиапазонов либо уменьшать величину Δt , увеличивая тем самым количество точек несущего сигнала, содержащихся в интервале t_0 . В последнем случае необходимо подбирать оптимальные значения параметров численной схемы, которые могут отличаться для различных модельных систем.

Отмеченные ограничения относятся к чисто технической стороне практической реализации конфиденциальной передачи информации, на которой мы решили не заострять внимание в рамках настоящей работы, ограничившись демонстрацией принципиальной возможности одновременной независимой передачи нескольких информационных сигналов по одному каналу связи на основе техники глобальной реконструкции.

Работа была частично финансирована Госкомитетом РФ по высшему образованию (грант № 95-0-8.3-66).

Список литературы

- [1] Packard N.H., Crutchfield J.P., Farmer J.D., Shaw R.S. // Phys. Rev. Lett. 1980. Vol. 45. P. 712–715.
- [2] Takens F. // Lecture Notes in Mathematics / Ed. by D.A. Rang, L.S. Young. Berlin: Springer, 1981. Vol. 898. P. 366–381.
- [3] Farmer J.D., Sidorowich J.J. // Phys. Rev. Lett. 1987. Vol. 59. P. 845–848.
- [4] Casdagli M. // Physica D. 1989. Vol. 35. P. 335–356.
- [5] Grassberger P., Procaccia J. // Phys. Rev. Lett. 1983. Vol. 50. P. 346–349.
- [6] Wolf A., Swift J.B., Swinney H.L., Vastano J.A. // Physica 1985. Vol. 16D. P. 285–317.
- [7] Cremers J., Hübler A. // Z. Naturforsch. A. 1987. Vol. 42. N 8. P. 797–802.
- [8] Gouesbet G., Letellier C. // Phys. Rev. E. 1994. Vol. 49. N 6. P. 4955–4972.
- [9] Kadtke J., Kremlivsky M. // AIP Conf. Proc. New York: AIP Press, 1995. Vol. 375. P. 189–202.
- [10] Anosov O.L., Butkovskii O.Ya., Kravtsov Yu.A., Surovyatkina E.D. // AIP Conf. Proc. New York: AIP Press, 1995. Vol. 375. P. 71–91.
- [11] Breen J.L., Packard N.H. // Int. J. Bif. and Chaos. 1994. Vol. 4. N 2. P. 311–326.
- [12] Anishchenko V.S., Pavlov A.N. // Phys. Rev. Lett. In press.
- [13] Cuoto K.M., Oppenheim A.V. // Phys. Rev. Lett. 1993. Vol. 71. P. 65–68.
- [14] Kocarev K.M., Halle K.S., Eckert K. et al. // Int. J. Bif. and Chaos. 1992. Vol. 2. P. 709–713.
- [15] Wu C.W., Chua L.O. // Int. J. Bif. and Chaos. 1992. Vol. 3. P. 1619–1627.

- [16] *Parlitz U., Chua L.O., Kocarev L. et al. // Int J. Bif. and Chaos. 1992. Vol. 2. P. 973–977.*
- [17] *Cuoto K.M., Oppenheim A.V., Strogatz S.H. // IEEE. 1993. Vol. 40. P. 626–633.*
- [18] *Dedie H., Kennedy M.P., Hasler M. // IEEE. 1993. Vol. 40. P. 634–642.*
- [19] *Pecora L.M., Carroll T.L. // Phys. Rev. Lett. 1990. Vol. 64. P. 821–823.*
- [20] *Hayes S., Grebogi C., Ott E., Mark A. // Phys. Rev. Lett. 1993. Vol. 3. P. 1781–1784.*
- [21] *Abarbanel H.D.I., Linsay P.S. // IEEE. 1993. Vol. 40. P. 643–645.*
- [22] *Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990. 312 с.*
- [23] *Anishchenko V.S. Dynamica Chaos — Models and Experiments. Singapore: World Scientific, 1995. P. 383.*