

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Статистические свойства динамического хаоса

В.С. Анищенко, Т.Е. Вадивасова, Г.А. Окрокверцхов, Г.И. Стрелкова

Представлен обзор результатов по статистическому описанию динамического хаоса и влиянию шума на хаотические режимы колебаний. Исследуются близкие к гиперболическим и негиперболическим хаотические аттракторы. Иллюстрируется метод диагностики типа аттрактора в численном эксперименте. Анализируются закономерности релаксации к инвариантному распределению вероятностей для различных типов аттракторов. Исследуются спектрально-корреляционные свойства хаотических колебаний. Установлены закономерности спада автокорреляционных функций и формы спектра мощности, их взаимосвязь с показателями Ляпунова, диффузией мгновенной фазы и интенсивностью внешнего шума. Показан механизм возникновения хаоса в неоднородной среде, моделируемой уравнением Гинзбурга–Ландау, и его связь с характеристиками спиральных аттракторов. Проведено сравнение численных данных с результатами физического эксперимента.

PACS numbers: 02.50.-r, 05.45.-a, 47.52.+j

Содержание

1. Введение (163).
 2. Диагностика гиперболичности в хаотических системах (164).
 3. Хаос в присутствии шума (165).
 4. Установление стационарного распределения вероятности хаотических аттракторов в присутствии шума (166).
 - 4.1. Модели и численные методы.
 - 4.2. Установление стационарного распределения в системе Рёсслера. Влияние шума на скорость перемешивания.
 - 4.3. Установление вероятностной меры в системе Лоренца.
 5. Спектрально-корреляционный анализ динамического хаоса (169).
 - 5.1. Спектрально-корреляционный анализ спирального хаоса.
 - 5.2. Корреляционные характеристики аттрактора Лоренца.
 6. Диффузия фазы в активной неоднородной среде, описываемой уравнением Гинзбурга–Ландау (172).
 7. Автокорреляционная функция и спектр мощности спирального хаоса в физическом эксперименте (175).
 8. Заключение (177).
- Список литературы (177).

1. Введение

Динамический хаос подобно случайному процессу требует статистического описания. Когда хаотические системы изучаются в компьютерных или физических экспериментах, обычно рассчитываются или изме-

ряются вероятностные характеристики, такие, как стационарное распределение вероятности по аттрактору, корреляционные функции, спектры мощности и другие. Хаотические колебания, математическим образом которых являются разные типы хаотических аттракторов, характеризуются различными статистическими свойствами и различной степенью чувствительности к воздействию шума.

С точки зрения строгой теории гиперболический хаос часто называют "идеальным" хаосом. Он характеризуется топологически однородной и устойчивой к возмущениям структурой [1–4]. Однако странные хаотические аттракторы динамических систем, как правило, не являются грубыми гиперболическими. Близкие к гиперболическим (квазигиперболические) аттракторы содержат неустойчивые орбиты типа петель сепаратрисы. Их рождение и исчезновение не влияет на такие характеристики хаоса, как фазовый портрет аттрактора, спектр мощности, показатели Ляпунова и другие. Динамические системы в хаотическом режиме могут характеризоваться инвариантной мерой, которая не зависит от начального распределения и полностью определяет статистические свойства аттрактора. Существование инвариантной меры теоретически доказано для грубых гиперболических и квазигиперболических систем [5–10].

Однако в большинстве своем хаотические аттракторы, которые исследуются численно и экспериментально, являются негиперболическими [11–13]. Проблема существования инвариантной меры на негиперболическом хаотическом аттракторе связана с серьезными трудностями, так как в общем случае невозможно ввести стационарное распределение вероятности, не зависящее от начального распределения. Негиперболический аттрактор является максимальным аттрактором динамической системы и включает в себя счетное множество регулярных и хаотических притягивающих подмножеств

В.С. Анищенко, Т.Е. Вадивасова, Г.А. Окрокверцхов, Г.И. Стрелкова.
Институт нелинейной динамики, физический факультет,
Саратовский государственный университет,
410012 Саратов, ул. Астраханская 83, Российская Федерация
Тел. (8452) 51-57-38. Факс (8452) 51-45-49
E-mail: wadim@chaos.ssu.runnet.ru

Статья поступила 17 сентября 2004 г.

[11, 12]. Поэтому об инвариантной мере негиперболического аттрактора можно говорить лишь при условии воздействия внешнего шума [14]. Негиперболические аттракторы, как правило, резко меняют свои свойства под действием шума [15–18], в то время как гиперболические и квазигиперболические аттракторы устойчивы к шумовым возмущениям [15, 16, 19, 20].

Статистическое описание негиперболических хаотических аттракторов с шумом является важной и до сих пор нерешенной задачей теории динамического хаоса. Одна из проблем состоит в изучении процессов установления стационарного распределения во времени. Возникает ряд фундаментальных вопросов, на которые пока нет четких ответов. Каково реальное время установления стационарного распределения? Какие факторы определяют это время? Какие характеристики могут количественно оценить время установления стационарной меры? Как отражается статистика и интенсивность шума на закономерностях процесса установления стационарного распределения? Есть ли связь между процессом установления и динамикой системы? Частично ответы на эти вопросы получены в [21, 22] методами компьютерного моделирования.

Процесс установления стационарного распределения описывается эволюционными уравнениями типа уравнений Фоккера–Планка или Фробениуса–Перрона. Собственные значения и собственные функции оператора эволюции задают процесс установления и характеристики перемешивания, которые связаны с установлением инвариантной вероятностной меры. Однако если динамическая система имеет большую размерность ($N \geq 3$), то решение уравнений Фоккера–Планка и Фробениуса–Перрона найти практически невозможно даже численно. Поэтому в исследованиях, описанных в [21, 22], использовался метод стохастических дифференциальных уравнений.

Хаотическая динамика по определению означает наличие перемешивания и, следовательно, положительность энтропии Колмогорова. Перемешивание ведет к спаду автокорреляционных функций во времени до нуля (расщепление корреляций). Состояния системы, отделенные достаточно большим интервалом времени, становятся статистически независимыми [6, 8, 23–25]. Важно отметить, что любая система с перемешиванием является эргодической. Для хаотических динамических систем расщепление корреляций во времени связано с экспоненциальной неустойчивостью хаотических траекторий и со свойством системы порождать положительную энтропию Колмогорова [6, 8, 23–27]. Несмотря на существенную важность свойства корреляции хаотических процессов изучены недостаточно. Часто полагают, что автокорреляционные функции хаотических систем экспоненциально спадают со скоростью, определяемой энтропией Колмогорова [23]. При этом предполагается, что энтропия Колмогорова H_K ограничена сверху суммой положительных ляпуновских показателей [8, 27, 28]. К сожалению, в общем случае негиперболических систем эта оценка оказывается неверной.

Для некоторых классов дискретных отображений с перемешиванием (растягивающие отображения с непрерывной мерой и диффеоморфизм Аносова) доказано, что спадание корреляций во времени ограничено сверху экспоненциальной функцией [9, 29–31]. Существуют разные оценки скорости этого экспоненциального спада-

ния, которые не всегда связаны с показателями Ляпунова [21, 32–34]. Что касается систем с непрерывным временем, то теоретических результатов по оценке скорости расщепления корреляций до сих пор нет [35].

Экспериментальные исследования отдельных хаотических систем свидетельствуют о сложном поведении корреляционных функций, которое определяется не только положительными показателями Ляпунова, но и закономерностями хаотической динамики системы [21, 32, 34, 36]. Важно выявить конкретные характеристики хаотической динамики, отвечающие за скорость спада автокорреляций и ширину спектральной линии базовой частоты хаотического аттрактора. Целью настоящей работы является обзор результатов последних лет, опубликованных в [21, 22, 37–39], полученных при исследовании классических систем с негиперболическими и квазигиперболическими аттракторами [40–43]. Результаты включают метод диагностики негиперболического хаоса, влияние шума на негиперболические аттракторы, некоторые вероятностные аспекты хаотической динамики (такие, как особенности процесса установления стационарного распределения вероятности, скорость перемешивания) и спектрально-корреляционный анализ различных типов хаотических режимов колебаний. Особое внимание в обзоре уделено влиянию внешнего шума на статистические свойства хаоса.

2. Диагностика гиперболичности в хаотических системах

Странные аттракторы в конечномерных системах можно разделить на три основных класса: грубые гиперболические, почти гиперболические (квазигиперболические) и негиперболические [11–13]. Свойство грубой гиперболичности хаотического аттрактора означает, что все его траектории относятся к одному седловому типу, и их устойчивые и неустойчивые многообразия всюду трансверсальны, т.е. структура гиперболического аттрактора однородна в любой точке аттрактора. Кроме того, эти свойства сохраняются при малых возмущениях параметров системы. Однако грубые гиперболические аттракторы скорее относятся к идеальным объектам, таким, как соленоид Смейла–Вильямса [44] или аттрактор Плыкина [45]. Для динамических систем, определенных в виде дифференциальных уравнений или дискретных отображений, существование грубого гиперболического аттрактора не доказано. Тем не менее есть несколько примеров почти гиперболических аттракторов: аттрактор Лоренца [46] и аттрактор Шимицу–Мориока [47] в потоковых системах, аттрактор Лози [48] и аттрактор Бельха [49] в дискретных отображениях. Для этих систем характерно присутствие сингулярных фазовых траекторий. Например, аттрактор Лоренца характеризуется присутствием множества петель сепаратрисы седлового состояния равновесия; аттрактор Лози включает негрубые гомоклинические кривые без касаний устойчивых и неустойчивых многообразий. Однако эти особые траектории не приводят к рождению устойчивых движений, и с точки зрения вычислительного эксперимента квазигиперболические аттракторы схожи с гиперболическими.

Большинство хаотических аттракторов динамических систем являются негиперболическими [11–13]. Негиперболические аттракторы включают хаотические предельные множества наряду с устойчивыми периоди-

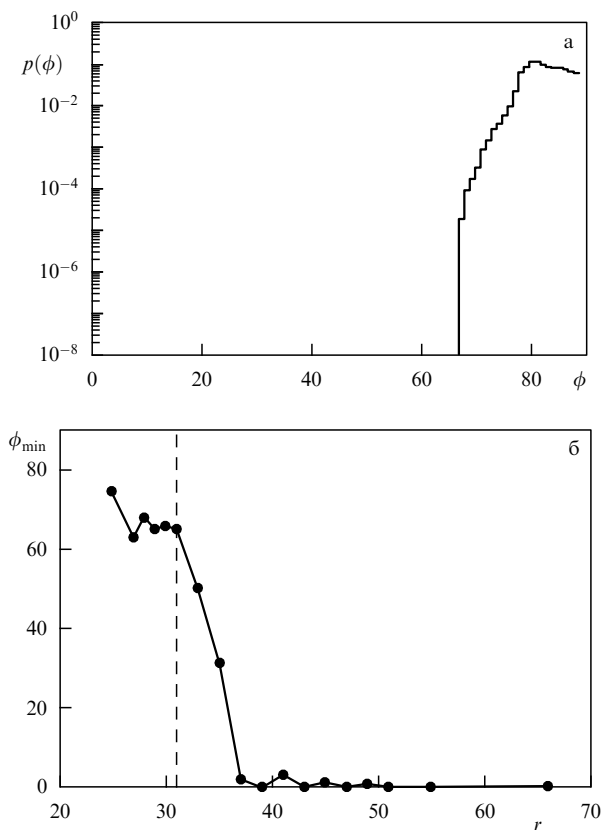


Рис. 1. Результаты расчета для системы Лоренца (1) при $\sigma = 10$ и $\beta = 8/3$. (а) Распределение вероятности угла для аттрактора Лоренца при $r = 27$; (б) зависимость минимального угла ϕ_{\min} от параметра r . Вертикальная линия обозначает теоретическое начало перехода от аттрактора Лоренца к негиперболическим аттракторам.

ческими орбитами. Последние, как правило, бывает трудно обнаружить в численных экспериментах, так как размер их бассейнов притяжения чрезвычайно мал. По совокупности свойств негиперболические аттракторы существенно отличаются от гиперболических [13, 50, 51]. Следовательно, диагностика типа аттрактора очень важна как с теоретической, так и с практической точек зрения и имеет большое значение при исследовании нелинейных систем [17, 52–57].

Прямой метод определения условий гиперболичности заключается в расчете углов ϕ между устойчивыми и неустойчивыми многообразиями вдоль фазовой траектории. Численная процедура расчета этих углов была предложена в [58] для диагностики гиперболичности хаотических седел в двумерных системах. Этот метод состоит в преобразовании произвольного вектора оператором эволюции в прямом и обратном времени, что позволяет найти угол между направлениями устойчивости и неустойчивости для разных точек хаотических множеств.

В двумерных системах многообразия одномерны, и при диагностике эффекта гомоклинического касания принципиальных трудностей не возникает. Для трехмерных систем задача усложняется, так как многообразия становятся двумерными. В [59] нами предложен метод диагностики гиперболичности для трехмерных дифференциальных систем. Было установлено, что такие системы, как система Рёсслера, схема Чуа [60] и осцилятор Анищенко–Астахова, являются типично негипербо-

лическими, т.е. структурно неустойчивыми [11]. Систему Лоренца можно считать исключением. В определенном диапазоне значений параметров аттрактор Лоренца оказывается почти гиперболическим. Устойчивые и неустойчивые многообразия траектории аттрактора пересекаются трансверсально [59]. Однако при вариации параметров система Лоренца демонстрирует бифуркационный переход к негиперболическому аттрактору [61]. На рисунке 1а изображен график распределения вероятности углов $p(\phi)$ для аттрактора Лоренца в системе [41]

$$\dot{x} = -\sigma(x - y), \quad \dot{y} = rx - y - xz, \quad \dot{z} = -\beta z + xy. \quad (1)$$

Как видно из первого графика, вероятность гомоклинического касания строго равна нулю ($p(\phi) = 0$). Удаление от области, в которой существует аттрактор Лоренца, приводит к появлению эффекта гомоклинического касания (рис. 1б). Видно, что для $r \geq 38$ угол между многообразиями может обращаться в нуль (рис. 1б). Этот эффект главным образом объясняет свойства негиперболического хаоса, которые рассматриваются в последующих разделах настоящей работы.

3. Хаос в присутствии шума

Фундаментальную и практическую важность имеют нелинейные стохастические проблемы. Существуют два основных подхода к изучению стохастических систем [62–65]. Первый основан на решении *стохастических уравнений* (СУ) и называется *методом Ланжевена*. Каждое частное решение СУ, даже с тем же начальным состоянием, порождает новую реализацию случайного процесса. С помощью этого метода можно получить ансамбль из большого числа реализаций и найти статистические характеристики процесса. Усреднение можно проводить по одной достаточно длинной реализации, так как хаотический процесс эргодический. Второй подход состоит в решении *уравнений эволюции для вероятностной меры*, таких, как уравнение Чепмена–Колмогорова, кинетическое уравнение или уравнение Фоккера–Планка. При этом случайный процесс в системе должен быть по крайней мере марковским, что накладывает определенные требования на источники шума. Чтобы процесс был марковским, случайные воздействия должны быть независимыми. В этом случае справедливо уравнение Чепмена–Колмогорова. Если шум гауссов, то процесс является диффузионным, и для плотности вероятности можно записать уравнение Фоккера–Планка. При соответствующих требованиях к источникам шума метод СУ и метод уравнений эволюции должны давать эквивалентные результаты [62–64, 66].

Особый интерес представляет проблема, связанная со статистическими характеристиками динамического хаоса и ролью флуктуаций в хаотических системах [6, 7, 19, 42, 66–70]. Для систем с хаотической динамикой гиперболического типа переход к статистическому описанию возможен уже в чисто детерминированном случае, т.е. в отсутствие шума [6, 7, 19, 70]. Это означает, что стационарное решение уравнения эволюции для плотности вероятности допускает наличие предела при $D \rightarrow 0$, где D — интенсивность шума, и есть возможность получить решение для вероятностной меры в чисто детерминированном случае. Как показано в [6, 19], малые флуктуации ($D \ll 1$) в гиперболических системах

вызывают небольшие изменения структуры вероятностной меры. Так называемые квазигиперболические (почти гиперболические) аттракторы, такие, как аттрактор Лози и аттрактор Лоренца [11, 12], с этой точки зрения практически не отличаются от гиперболических. Это обусловлено тем, что квазигиперболические аттракторы, как и гиперболические, не содержат устойчивых периодических орбит. В работе [7] дано строгое доказательство существования вероятностной меры на аттракторе Лоренца без шума.

В негиперболических системах влияние шума играет важную роль. В [16] было показано, что среднее расстояние между орбитой с шумом и негиперболическим аттрактором без шума оказывается значительно больше, чем в гиперболическом случае, и зависит от информационной размерности аттрактора. Хорошо известно, что в системах с негиперболическими аттракторами шум может вызывать различные фазовые переходы [42, 43, 71, 72]. Когда в систему добавляются источники гауссова шума, бассейны притяжения сосуществующих аттракторов будут объединяться. В результате устанавливается стационарная плотность вероятности, которая не зависит от начального состояния [14]. Статистическое описание негиперболического хаоса связано с принципиальными трудностями. В строгом смысле на негиперболических хаотических аттракторах без шума не существует стационарной вероятностной меры, не зависящей от начального распределения. Непрерывный предельный переход при $D \rightarrow 0$ осуществить здесь нельзя [14]. Более того, вероятностные характеристики негиперболического хаоса очень чувствительны даже к малейшим изменениям параметров системы [13, 42, 59, 73]. Таким образом, о существовании стационарной вероятностной меры на негиперболическом аттракторе можно говорить лишь в случае, когда система находится под воздействием шума.

4. Установление стационарного распределения вероятности хаотических аттракторов в присутствии шума

4.1. Модели и численные методы

Рассмотрим хаотические аттракторы хорошо известных систем, таких, как осциллятор Рёсслера [40]

$$\dot{x} = -y - z + \sqrt{2D} \xi(t), \quad \dot{y} = x + ay, \quad \dot{z} = b - z(m - x) \quad (2)$$

и система Лоренца (1) [41] с шумом

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\sigma(x - y) + \sqrt{2D} \xi(t), \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= -\beta z + xy. \end{aligned} \quad (3)$$

В обеих моделях $\xi(t)$ — источник гауссова белого шума со средним значением $\langle \xi(t) \rangle \equiv 0$ и корреляцией $\langle \xi(t) \xi(t + \tau) \rangle \equiv \delta(\tau)$, где $\delta(\tau)$ — функция Дирака. Параметр D обозначает интенсивность шума. Для системы Рёсслера зафиксируем значения параметров $a = 0,2$ и $b = 0,2$ и будем варьировать параметр m в интервале [4,25; 13]. В системе Лоренца выберем два различных режима: квазигиперболический аттрактор ($\sigma = 10$, $\beta =$

$= 8/3$ и $r = 28$) и негиперболический аттрактор ($\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ и $r = 210$).

Хаотические аттракторы систем (2) и (3) были детально изучены и являются классическими примерами квазигиперболического и негиперболического хаоса соответственно [43, 74]. Таким образом, результаты, полученные для уравнений (2) и (3), могут быть обобщены на широкий класс динамических систем.

Для исследования процессов релаксации к стационарному распределению в этих системах проанализируем, как точки, расположенные в начальный момент времени в кубе малого размера δ вокруг произвольной точки траектории, принадлежащей аттрактору системы, эволюционируют во времени. Выберем размер этого куба $\delta = 0,09$ и равномерно заполним его точками, количество которых $n = 9000$. С течением времени эти точки распределяются по всему аттрактору. Чтобы охарактеризовать сходимость к стационарному распределению, проследим за эволюцией этого множества точек во времени и рассчитаем среднее по ансамблю:

$$\bar{x}(t) = \int_W p(x, t) x dx = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(t). \quad (4)$$

Здесь x — одна из динамических переменных системы и $p(x, t)$ — плотность вероятности переменной x в момент времени t , которая соответствует начальному распределению. Введем в рассмотрение функцию $\gamma(t_k)$:

$$\gamma(t_k) = |\bar{x}_m(t_{k+1}) - \bar{x}_m(t_k)|, \quad (5)$$

где $\bar{x}_m(t_k)$ и $\bar{x}_m(t_{k+1})$ — последовательные экстремумы $\bar{x}(t)$. Функция $\gamma(t_k)$ характеризует амплитуду колебаний средней величины $\bar{x}_m(t)$. В выражении (5) t_k и t_{k+1} — последовательные моменты времени, соответствующие экстремумам \bar{x} . Поведение во времени $\gamma(t_k)$ позволяет судить о характере и скорости релаксации к вероятностной мере на аттракторе. Рассчитывались старший ляпуновский показатель (ЛП) λ_1 хаотической траектории на аттракторе и нормированная автокорреляционная функция (АКФ) установившихся колебаний $x(t)$:

$$\Psi(\tau) = \frac{\psi(\tau)}{\psi(0)}, \quad \psi(\tau) = \langle x(t)x(t + \tau) \rangle - \langle x(t) \rangle \langle x(t + \tau) \rangle. \quad (6)$$

Скобки $\langle \dots \rangle$ означают усреднение по времени.

Чтобы сделать некоторые рисунки более информативными и наглядными, вместо $\gamma(t_k)$ и $\Psi(\tau)$ на графиках изображались их огибающие $\gamma_0(t_k)$ и $\Psi_0(\tau)$ соответственно.

4.2. Установление стационарного распределения в системе Рёсслера. Влияние шума на скорость перемешивания

Негиперболический хаотический аттрактор, реализуемый в системе Рёсслера (2) при фиксированных $a = b = 0,2$ и при значении параметра m в интервале [4,25; 8,5], служит известным примером спирального (или фазокогерентного) аттрактора. Фазовая траектория на спиральном аттракторе вращается с высокой степенью регулярности вокруг одного или нескольких седло-фокусов. Автокорреляционная функция имеет колебательный характер, и в спектре мощности выде-

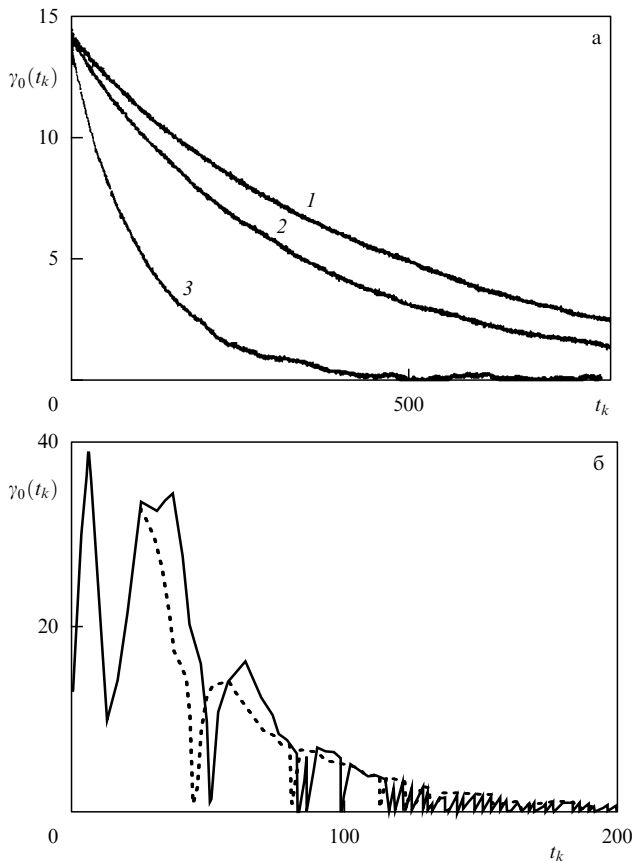


Рис. 2. Поведение функции $\gamma_0(t_k)$ для аттракторов в системе Рёсслера (2): (а) для спирального аттрактора ($a = b = 0,2$, $m = 6,1$) при $D = 0$ (кривая 1), $D = 0,001$ (кривая 2), $D = 0,1$ (кривая 3); (б) для винтового аттрактора ($a = b = 0,2$, $m = 13$) при $D = 0$ (сплошная линия) и $D = 0,01$ (штриховая линия).

ляются узкополосные пики, соответствующие средней частоте вращения, ее гармоникам и субгармоникам [43, 75–77].

При увеличении параметра m аттрактор системы (2) качественно меняется. В интервале $8,5 < m \leq 13$ появляется аттрактор некогерентного типа, называемый винтовым аттрактором [42, 76]. Фазовые траектории на нем ведут себя более сложным образом. В результате автокорреляционная функция винтового хаоса спадает намного быстрее, чем в случае спирального хаоса, и спектр мощности уже не содержит ярко выраженных пиков.

Расчеты, проведенные для $m \in [4,25; 7,5]$ (спиральный хаос) и для $m \in [8,5; 13]$ (винтовой хаос) в отсутствие шума, позволяют предположить, что для рассмотренных значений параметра инвариантная вероятностная мера существует¹. Все эффекты, наблюдаемые для каждого типа аттрактора в системе (2), качественно сохраняются при изменении параметра m .

На рисунке 2 показано типичное поведение функции $\gamma_0(t)$ для спирального и винтового аттрактора системы Рёсслера. Установлено, что шум значительно влияет на скорость перемешивания в режиме спирального аттрактора. Время релаксации заметно уменьшается с увеличением интенсивности шума (рис. 2а). Совершенно иная

¹ Устойчивые траектории имеют исчезающе малые бассейны притяжения и за счет конечной точности вычислений себя не проявляют.

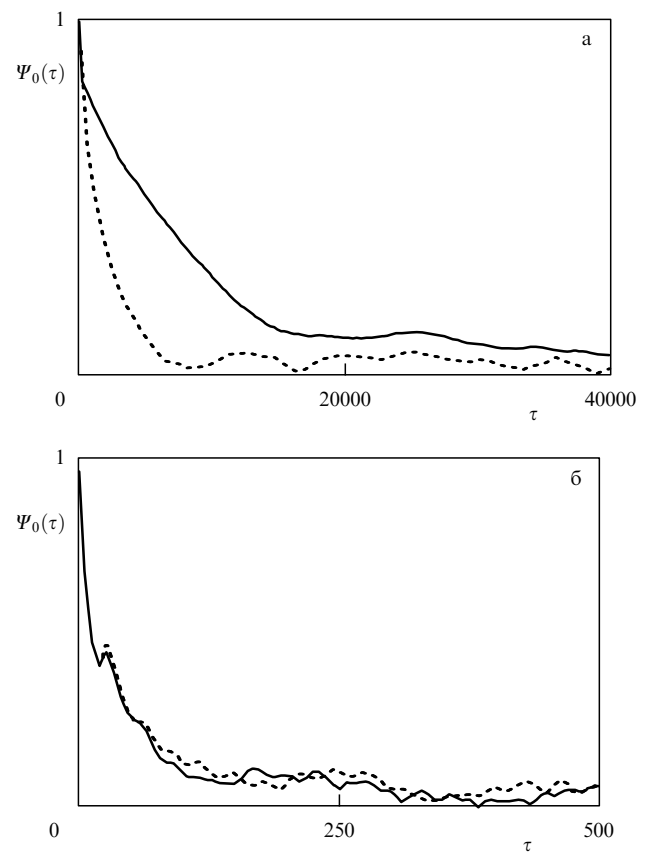


Рис. 3. Огибающие нормированной автокорреляционной функции $\Psi_0(\tau)$ для аттракторов в системе (2): (а) при $m = 6,1$ и для $D = 0$ (сплошная линия) и $D = 0,01$ (штриховая линия); (б) при $m = 13$ для $D = 0$ (сплошная линия) и $D = 0,01$ (штриховая линия).

картина наблюдается для винтового аттрактора. Некогерентный хаос практически нечувствителен к воздействию шума. Поведение $\gamma_0(t)$ существенно не меняется при добавлении шума (рис. 2б). Численные эксперименты показывают, что времена корреляции также существенно различны для этих двух хаотических режимов: без воздействия шума они отличаются на два порядка. В случае спирального хаоса время корреляции заметно уменьшается в присутствии шума (рис. 3а), в то время как автокорреляционная функция для винтового аттрактора в детерминированном случае практически совпадает с автокорреляционной функцией в присутствии шума (рис. 3б). Следовательно, некогерентный хаос, который является негиперболическим, проявляет некоторые свойства гиперболического хаоса, т.е. "динамическая стохастичность" оказывается более сильной, чем навязываемая извне, на что указывал Я.Г. Синай [6]. Этот результат интересен и требует более детального рассмотрения.

Отметим еще один результат. Обнаружено, что положительный ЛП как для спирального, так и для винтового хаоса слабо чувствителен к воздействию флуктуаций (рис. 4) и немного уменьшается с ростом интенсивности шума. При этом время корреляции может значительно меняться под влиянием шума. Таким образом, в режиме спирального хаоса перемешивание определяется не только и не столько степенью экспоненциальной неустойчивости. Существуют и другие, более веские причины, которые будут анализироваться ниже.

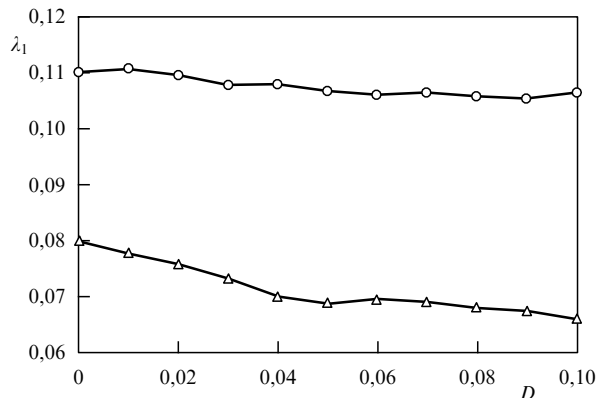


Рис. 4. Старший ляпуновский показатель λ_1 на спиральном (треугольники) и винтовом (кружочки) аттракторе как функции интенсивности шума D для системы Рёсслера.

С этой целью воспользуемся концепцией мгновенных амплитуды и фазы колебаний. Существует несколько способов введения понятий мгновенной амплитуды и фазы [77]. К сожалению, ни один из них не является универсальным. Для спиральных аттракторов мгновенную амплитуду и фазу обоснованно вводят следующим образом:

$$x(t) = A(t) \cos \Phi(t), \quad y(t) = A(t) \sin \Phi(t). \quad (7)$$

Мгновенная фаза $\Phi(t)$, как это следует из (7), определяется соотношением

$$\Phi(t) = \arctan \frac{y(t)}{x(t)} + \pi n(t), \quad (8)$$

где $n(t) = 0, 1, 2, \dots$ — число оборотов фазовой траектории вокруг состояния равновесия.

Нами установлено, что компоненту перемешивания вдоль потока траекторий обусловлена дисперсией σ_Φ^2 мгновенной фазы, которая определяет диффузию фазы. На рисунке 5а приведены временные зависимости дисперсии σ_Φ^2 мгновенной фазы на ансамбле изначально близких траекторий для спирального и винтового аттракторов системы (2). Видно, что и в случае с шумом, и в случае без шума дисперсия растет практически линейно на рассмотренных интервалах времени. То, что временная зависимость дисперсии мгновенной фазы хаотических колебаний в системе Рёсслера является линейной функцией, предполагалось в работе [75]. Тем не менее это предположение не было подтверждено ни теоретически, ни численно. Для спирального хаоса без шума (кривая 1) значение σ_Φ^2 мало и растет намного медленнее, чем в других рассмотренных случаях. Линейный рост дисперсии позволяет определить коэффициент эффективной диффузии фазы, впервые введенный Стратоновичем [78]:

$$B_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \left\langle \frac{d\sigma_\Phi^2(t)}{dt} \right\rangle, \quad (9)$$

где угловые скобки означают усреднение быстрых осцилляций по времени.

Рисунок 5б иллюстрирует зависимости коэффициента диффузии B_{eff} от интенсивности шума для спирального и винтового аттракторов системы Рёсслера (2). Видно, что

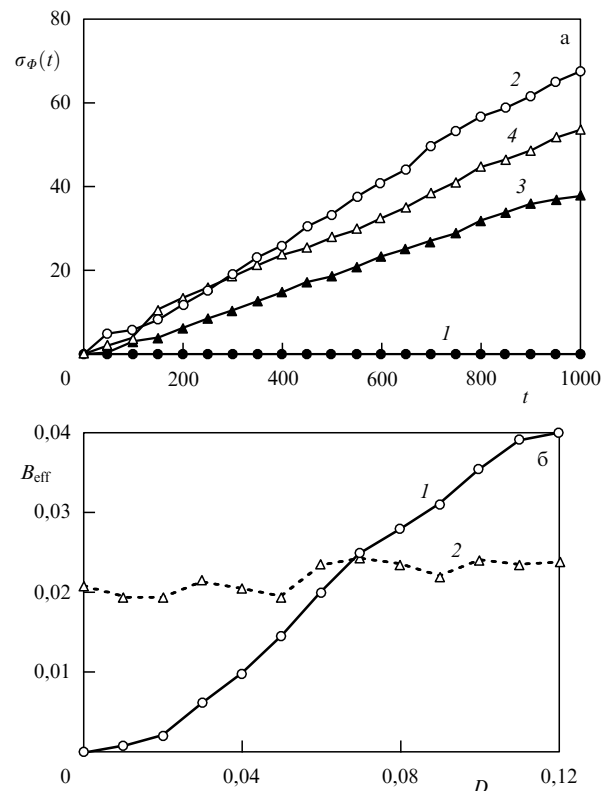


Рис. 5. (а) Временные зависимости дисперсии мгновенной фазы σ_Φ^2 для спирального хаоса ($m = 6,1$) при $D = 0$ (кривая 1), $D = 0,1$ (кривая 2) и некогерентного хаоса ($m = 13$) при $D = 0$ (кривая 3), $D = 0,1$ (кривая 4). (б) Эффективный коэффициент диффузии B_{eff} как функция интенсивности шума D для спирального (кривая 1) и некогерентного (кривая 2) хаоса.

в обоих случаях B_{eff} растет с увеличением D , но для спирального хаоса этот рост более значительный.

4.3. Установление вероятностной меры в системе Лоренца

Хорошо известные квазигиперболические аттракторы в трехмерных дифференциальных системах, такие, как аттрактор Лоренца, аттрактор Шимицу–Мориока [47], относятся к аттракторам переключающего типа. Фазовая траектория хаотически переключается из окрестности одного седлового состояния равновесия к окрестности другого. Такие переключения сопровождаются случайными изменениями фазы даже в отсутствие шума. Добавление шума не меняет значительно динамику фазы и, следовательно, не влияет на скорость установления стационарного распределения.

На рисунке 6 представлено поведение функции $\gamma_0(t_k)$ для квазигиперболического и негиперболического хаотических аттракторов системы (3) как при наличии, так и в отсутствие шумового воздействия. Выявлено, что для аттрактора Лоренца шум практически не влияет на скорость релаксации (рис. 6а). Совершенно другую картину мы наблюдаем для негиперболического аттрактора в системе Лоренца. В этом случае шум оказывает сильное влияние на скорость установления вероятностной меры (рис. 6б).

Теперь проверим, как зависят от уровня шумового воздействия показатель Ляпунова и время корреляции. Для тех же хаотических аттракторов в системе Лоренца

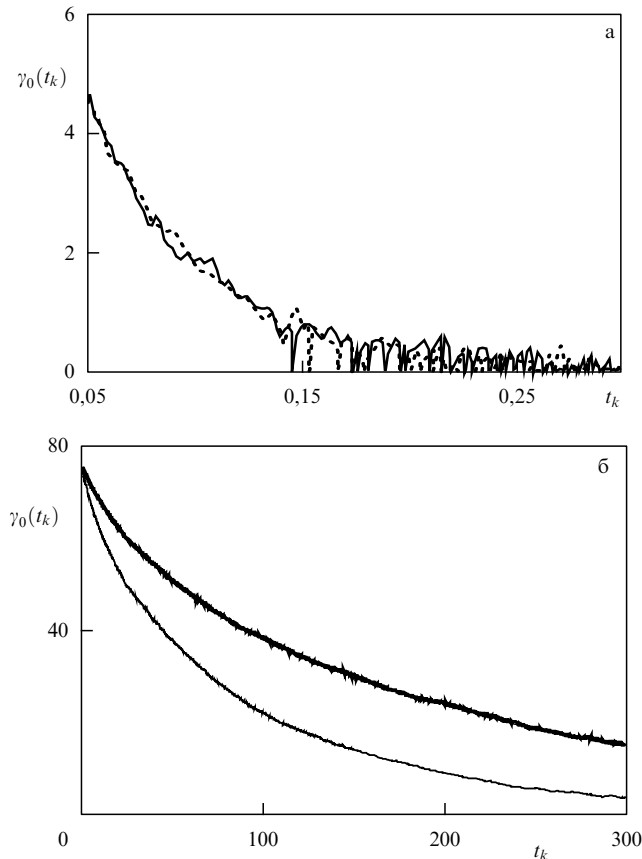


Рис. 6. Поведение функции $\gamma_0(t_k)$ для хаотических аттракторов в системе Лоренца (3): (а) для $r = 28$, $D = 0$ (сплошная линия) и для $D = 0,01$ (штриховая линия); (б) для $r = 210$, $D = 0$ (жирная линия) и для $D = 0,01$ (тонкая линия). Другие параметры: $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$.

вычислялись старший показатель Ляпунова λ_1 и нормированная автокорреляционная функция $\Psi(\tau)$, $\tau = t_2 - t_1$, динамической переменной $x(t)$ для различных интенсивностей шума D . Установлено, что для обоих типов хаотических аттракторов λ_1 не зависит в пределах точности вычислений от интенсивности шума. На автокорреляционную функцию квазигиперболического аттрактора шум также практически не влияет (рис. 7а). Однако в режиме негиперболического аттрактора в присутствии шума АКФ спадает более быстро (см. кривые на рис. 7б).

5. Спектрально-корреляционный анализ динамического хаоса

Рассмотрим более детально корреляцию и спектральные свойства различных типов хаотических колебаний. Опыт исследования динамического хаоса в трехмерных дифференциальных системах показывает, что для описания корреляционных и спектральных свойств определенного класса хаотических систем могут быть использованы две классические модели случайного процесса. Это модели узкополосного случайного процесса (гармонического шума) и случайного телеграфного сигнала. Было установлено, что модель гармонического шума достаточно хорошо описывает корреляционные характеристики спирального хаоса, а модель телеграфного сигнала — статистические свойства аттракторов переключательного типа, таких, как аттрактор Лоренца [41].

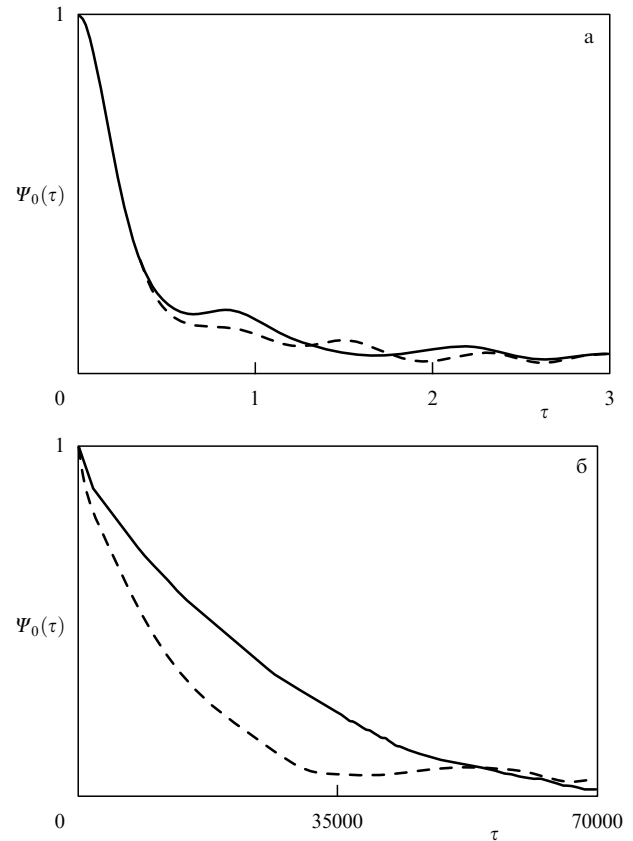


Рис. 7. Огибающие нормированной автокорреляционной функции $\Psi_0(\tau)$ для аттракторов в системе (3): (а) $r = 28$, $D = 0$ (сплошная линия) и $D = 0,01$ (штриховая линия); (б) $r = 210$, $D = 0$ (сплошная линия) и $D = 0,01$ (штриховая линия).

Рассмотрим основные характеристики упомянутых выше моделей случайных процессов.

Гармонический шум — это узкополосный случайный процесс с нулевым средним, определяемый следующим соотношением [78–80]:

$$x(t) = R_0 [1 + \alpha(t)] \cos [\omega_0 t + \phi(t)], \quad (10)$$

где R_0 и ω_0 — постоянные (средние) значения амплитуды и частоты колебаний, $\alpha(t)$ и $\phi(t)$ — случайные функции, которые характеризуют флуктуации амплитуды и фазы колебаний. Предполагается, что процесс $\alpha(t)$ является стационарным. Упрощающие допущения, которые используются наиболее часто, заключаются в следующем: 1) флуктуации амплитуды и фазы статистически независимы; 2) флуктуации фазы $\phi(t)$ представляют собой винеровский процесс с коэффициентом диффузии B . При сделанных допущениях АКФ процесса (10) определяется следующим выражением [78–80]:

$$\psi(\tau) = \frac{R_0^2}{2} [1 + K_x(\tau)] \exp(-B|\tau|) \cos \omega_0 \tau, \quad (11)$$

где $K_x(\tau)$ — ковариационная функция² флуктуаций амплитуды $\alpha(t)$. Используя теорему Винера–Хинчина,

² Множитель $R_0^2 [1 + K_x(\tau)]$ является ковариационной функцией $K_x(\tau)$ случайной амплитуды $A(t) = R_0 [1 + \alpha(t)]$. Такое представление наиболее удобно использовать в наших дальнейших исследованиях.

можно получить соответствующее выражение для спектральной плотности мощности.

Обобщенный телеграфный сигнал — это процесс, описывающий случайные переключения между двумя возможными состояниями $x(t) = \pm a$. Рассматриваются два основных вида телеграфного сигнала — случайный и квазислучайный телеграфные сигналы [80, 81]. Случайный телеграфный сигнал характеризуется пуассоновским распределением моментов переключений t_k , откуда следует, что длительности импульсов θ имеют экспоненциальное распределение вероятностей:

$$\rho(\theta) = n_1 \exp(-n_1\theta), \quad \theta \geq 0, \quad (12)$$

где n_1 — средняя частота переключения. АКФ такого процесса спадает экспоненциально:

$$\psi(\tau) = a^2 \exp(-2n_1|\tau|). \quad (13)$$

Другой вид телеграфного сигнала (квазислучайный телеграфный сигнал) соответствует случайным переключениям между двумя состояниями $x(t) = \pm a$, которые могут происходить только в дискретные моменты времени $t_n = n\xi_0 + \alpha$, $n = 1, 2, 3, \dots$, где $\xi_0 = \text{const}$ и α — случайная величина. Если вероятность событий переключения равна $1/2$, то АКФ этого процесса спадает во времени по линейному закону:

$$\psi(\tau) = a^2 \left(1 - \frac{|\tau|}{\xi_0}\right), \quad |\tau| < \xi_0; \quad (14)$$

$$\psi(\tau) = 0, \quad |\tau| \geq \xi_0.$$

5.1. Спектрально-корреляционный анализ спирального хаоса

С физической точки зрения хаотические аттракторы спирального типа во многом напоминают свойства зашумленного предельного цикла. При этом необходимо помнить, что спиральные аттракторы реализуются в полностью детерминированных системах, т.е. без источников флуктуаций. Рассмотрим режим спирального хаоса в системе Рёслера (2) для $a = b = 0,2$ и $m = 6,5$. Введем мгновенную амплитуду $A(t)$ и фазу $\Phi(t)$ в соответствии с соотношениями (7). В численном эксперименте определялись: нормированная автокорреляционная функция хаотических колебаний $x(t)$ (рис. 8, точки серой области 1); ковариационная функция флуктуаций амплитуды $K_A(t)$; коэффициент эффективной диффузии фазы $B_{\text{эф}}$. На рисунке 8 показаны результаты для $\Psi_x(\tau)$ в системе (2) без шума и в присутствии шума. АКФ спадает практически экспоненциально как в отсутствие шума (рис. 8а), так и в присутствии шума (рис. 8б). Кроме того, как видно на рис. 8в, для $\tau < 20$ есть интервал, на котором АКФ спадает намного быстрее. Используя уравнение (11), можно аппроксимировать огибающую рассчитанной АКФ $\Psi_x(\tau)$. С этой целью подставим рассчитанные характеристики $K_A(\tau)$ и $B = B_{\text{эф}}$ в выражение для нормированной огибающей $\Psi_0(\tau)$:

$$\Psi_0(\tau) = \frac{K_A(\tau)}{K_A(0)} \exp(-B_{\text{эф}}|\tau|). \quad (15)$$

Результаты расчета для $\Psi_0(\tau)$ представлены на рис. 8а, б точками кривых 2. Видно, что поведение

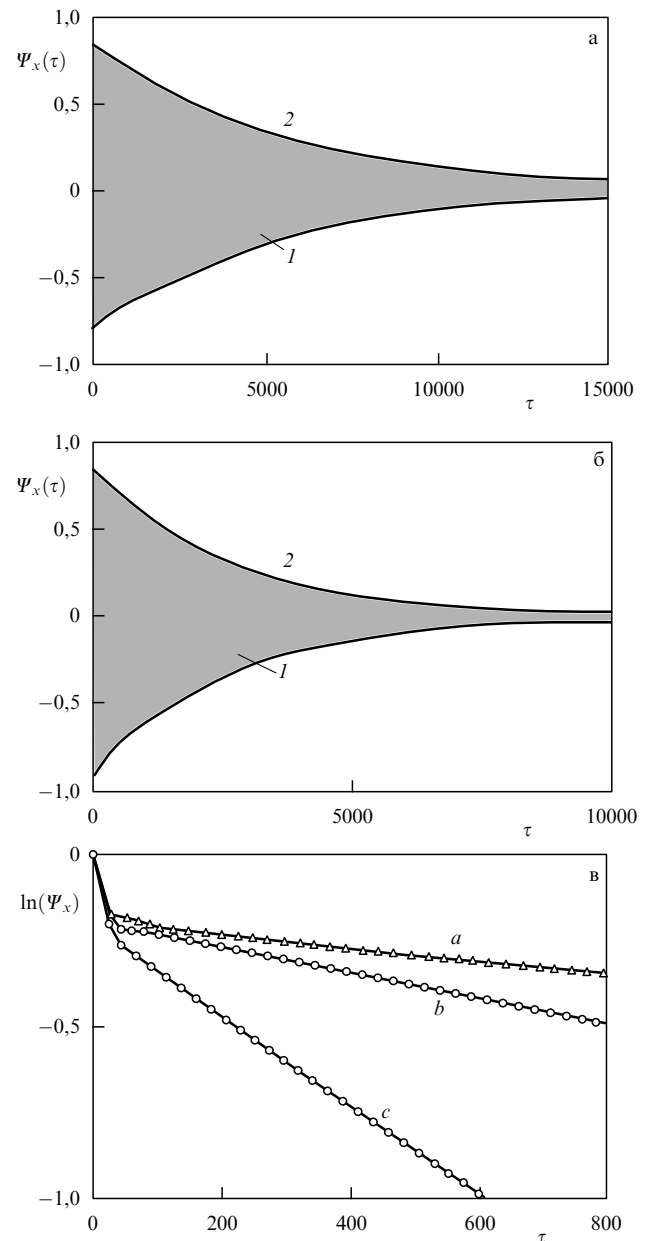


Рис. 8. Нормированная АКФ колебаний $x(t)$ в системе (2) для $m = 6,5$ (точки серой области 1) и ее аппроксимация (15) (точки кривой 2) для $D = 0$ (а) и для $D = 10^{-3}$ (б). (в) Огибающие АКФ в линейно-логарифмическом масштабе для $D = 0$ (кривая а), $D = 0,001$ (кривая б) и $D = 0,01$ (кривая с).

огибающей АКФ $\Psi_x(\tau)$ хорошо описывается формулой (15). Заметим, что с учетом множителя $K_A(\tau)/K_A(0)$ получается хорошая аппроксимация для всех значений $\tau \geq 0$. Это означает, что амплитудные флуктуации играют важную роль на коротких интервалах времени ($\tau < \tau_{\text{cor}}$), в то время как медленный процесс спадания корреляции главным образом определяется диффузией фазы. Отметим удивительно хорошее соответствие между численными результатами для спирального хаоса и данными по классической модели гармонического шума. В то же время причину такого хорошего согласования достаточно трудно объяснить. Во-первых, соотношение (11) было получено в предположении, что флуктуации амплитуды и фазы статистически независимы. Совершенно ясно, что такое предположение

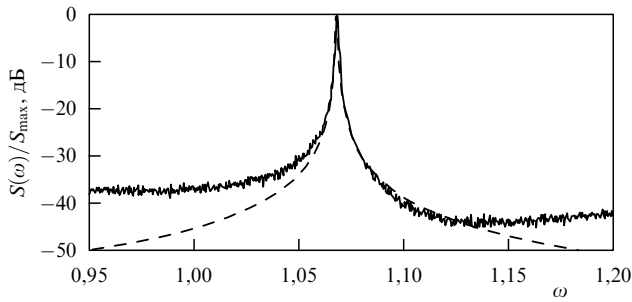


Рис. 9. Фрагмент нормированного спектра мощности колебаний $x(t)$ в системе (2) для $a = b = 0,2, m = 6,5$ (сплошные линии) и ее аппроксимация уравнением (16) (штриховые линии) для интенсивности шума $D = 10^{-3}$.

нельзя применить к хаотическому режиму. Во-вторых, при выводе (11) использован тот факт, что флуктуации фазы описываются винеровским процессом. В случае хаотических колебаний $\Phi(t)$ является более сложным процессом, и его статистические свойства неизвестны. Особенно важно подчеркнуть, что результаты, представленные на рис. 8а, были получены в режиме чисто детерминированного хаоса (в отсутствие шумов), что еще раз доказывает сходство хаотических автоколебаний со случайным процессом.

Как следует из результатов, представленных на рис. 8, для $\tau > \tau_{\text{cor}}$ огибающая АКФ для хаотических колебаний аппроксимируется экспоненциальным законом $\exp(-B_{\text{eff}}|\tau|)$. Согласно теореме Винера – Хинчина спектральный пик на средней частоте ω_0 должен иметь форму лоренциана, и его ширина определяется коэффициентом эффективной диффузии фазы B_{eff} :

$$S(\omega) = C \frac{B_{\text{eff}}}{B_{\text{eff}}^2 + (\omega - \omega_0)^2}, \quad C = \text{const.} \quad (16)$$

Результаты расчета, представленные на рис. 9, подтверждают это. Основная спектральная линия аппроксимируется выражением (16), что подтверждается численными результатами для спектра мощности колебаний $x(t)$. Результаты, показанные на рис. 8 и рис. 9 для интенсивности шума $D = 10^{-3}$, воспроизводятся для различных значений D в интервале $0 < D < 10^{-2}$, а также для диапазона значений параметра m , который соответствует режиму спирального хаоса. Отметим, что представленные результаты аппроксимации АКФ и форма основной спектральной линии спирального аттрактора в системе Рёсслера полностью подтверждаются исследованиями спиральных аттракторов в других динамических системах [38, 39].

5.2. Корреляционные характеристики аттрактора Лоренца

Модель узкополосного шума нельзя использовать для анализа автокорреляционных функций хаотических колебаний переключающего типа, которые характеризуются сплошным спектром без явно выделенных пиков на выделенных частотах. Такие аттракторы обладают достаточно сложной структурой [82]. Классическим примером аттракторов переключающего типа является аттрактор Лоренца [41]. Рассмотрим систему Лоренца в режиме квазигиперболического аттрактора для значений параметров $r = 28, \sigma = 10$ и $\beta = 8/3$.

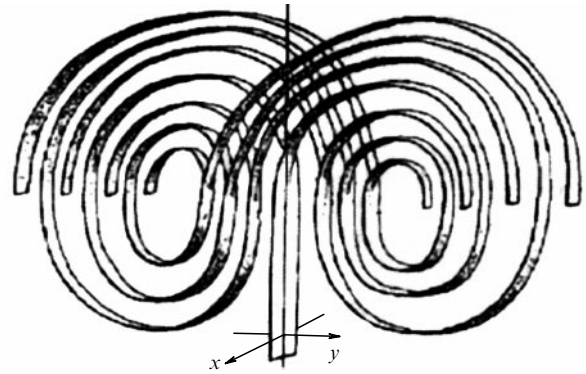


Рис. 10. Качественная иллюстрация структуры многообразий в системе Лоренца.

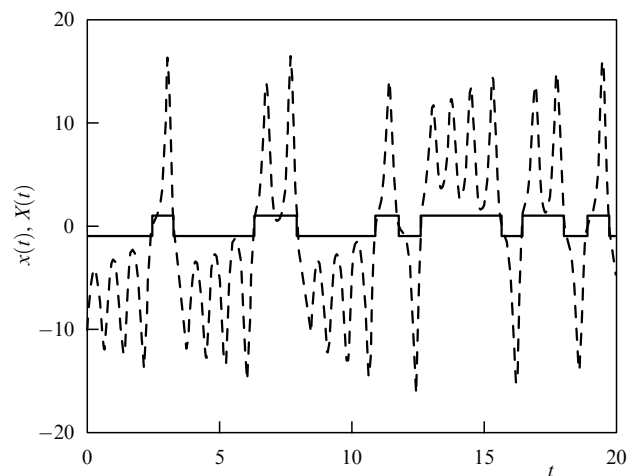


Рис. 11. Телеграфный сигнал (сплошная линия), полученный для колебаний $x(t)$ (штриховая линия) в системе Лоренца для $\sigma = 10, \beta = 8/3, r = 28$.

В фазовом пространстве системы Лоренца находятся два седло-фокуса, которые симметричны относительно оси z и разделены устойчивым многообразием седловой точки в начале координат. Устойчивое многообразие имеет сложную структуру, которая обеспечивает случайные переключения между седло-фокусами по особым путям [11, 82] (рис. 10). Вращаясь по спирали вокруг одного из седло-фокусов, фазовая траектория приближается к устойчивому многообразию и затем с определенной вероятностью может перейти в окрестность другого седло-фокуса. Вращение вокруг седло-фокусов не вносит значительного вклада в характер зависимости АКФ от времени, в то время как случайные переключения существенно влияют на время корреляции.

Рассмотрим зависимость координаты x от времени, которая показана на рис. 11. Если исключить вращение вокруг седло-фокусов, воспользовавшись методом символической динамики, то можно получить сигнал, подобный телеграфному [37, 39].

На рисунке 12 показана АКФ колебаний $x(t)$ для аттрактора Лоренца и АКФ соответствующего телеграфного сигнала. Сравнивая эти два графика, можно утверждать, что время спада корреляций и поведение АКФ на этом временном масштабе определяются преимущественно переключениями, тогда как вращение вокруг седло-фокусов не вносит значительного вклада в

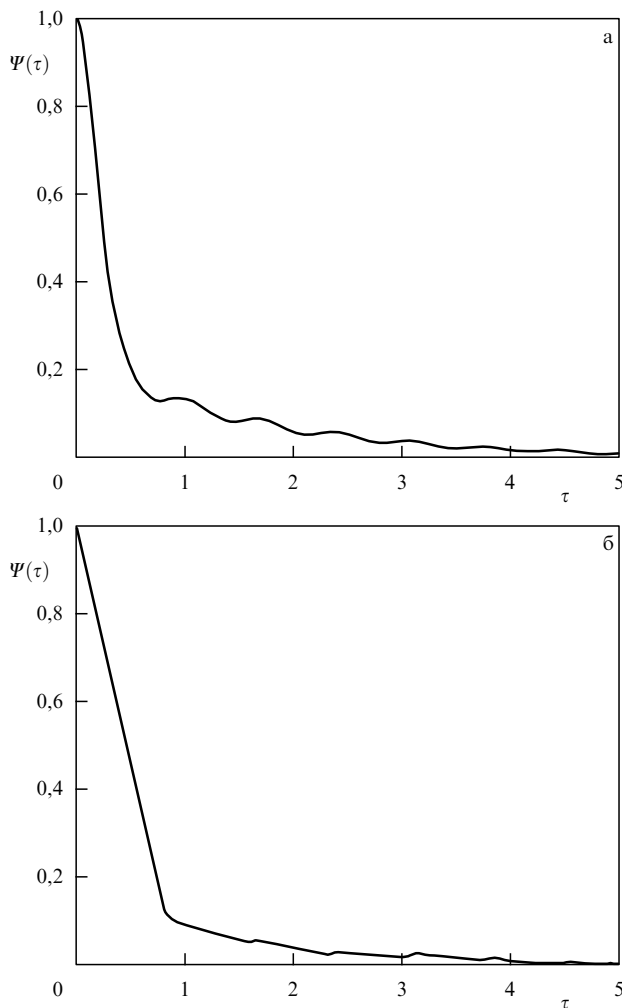


Рис. 12. АКФ колебаний $x(t)$ (а) и телеграфного сигнала (б).

спадание АКФ. Важно отметить, что на малых временах АКФ спадает практически линейно. Это примечательный факт, так как линейное спадание АКФ соответствует дискретному эквидистантному распределению вероятности времени пребывания в форме дельта-пигов, и вероятность переключений между двумя состояниями должна быть равна $1/2$ [80, 81].

На рисунке 13 показано распределение времен пребывания, рассчитанное для телеграфного сигнала, представленного на рис. 11. Как видно из рис. 13а, распределение времени пребывания действительно имеет структуру, близкую к эквидистантному дискретному распределению. В то же время пики не являются δ -выбросами, а характеризуются конечной шириной. На рисунке 13б представлено распределение вероятности переключений, которые происходят при значениях, кратных ξ_0 , где ξ_0 — минимальное время пребывания в одном из состояний³. Эта зависимость показывает, что вероятность перехода на времени ξ_0 (через один оборот траектории) близка к $1/2$. Дискретный характер переключений можно объяснить особенностями структуры многообразий в системе Лоренца (см. рис. 10). В окрестности начала координат $x = 0$, $y = 0$ многообразия

³ Время ξ_0 соответствует длительности одного оборота траектории вокруг седло-фокуса в аттракторе Лоренца.

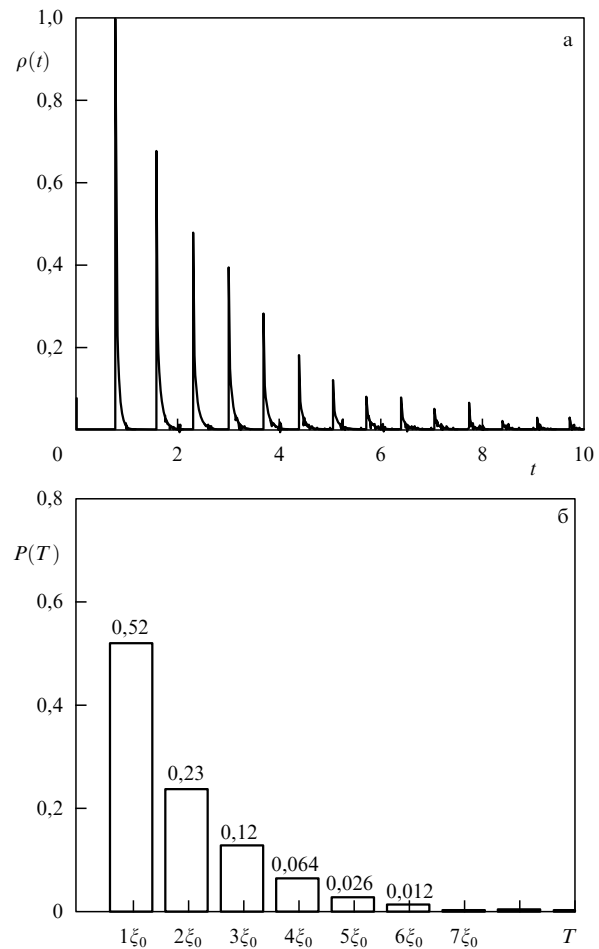


Рис. 13. Распределение длительностей импульса телеграфного сигнала (а) и вероятностей переходов на временах, кратных ξ_0 (б).

расщепляются на два листа. Это ведет к тому, что вероятность переключений между двумя состояниями при одном обороте вокруг фиксированной точки примерно равна $1/2$. Этот особый аспект динамики обеспечивает то, что АКФ колебаний $x(t)$ и $y(t)$ на аттракторе Лоренца имеют форму, определяемую выражением (14). Однако конечная ширина пиков в распределении и отклонения вероятности $P(\xi_0)$ от $1/2$ могут привести к тому, что АКФ не будет спадать по линейному закону до нуля (см. рис. 13).

6. Диффузия фазы в активной неоднородной среде, описываемой уравнением Гинзбурга – Ландау

Распределенные системы — один из интереснейших объектов изучения в теоретической физике. Прежде всего это обусловлено волновыми процессами, возникающими только в распределенных системах. Имеется большое количество работ, посвященных исследованию динамики сплошных сред, включая анализ возникновения турбулентности. Развитие нерегулярного поведения среды во времени и в пространстве может быть обусловлено пространственной неоднородностью [83–85]. Влияние пространственной неоднородности исследовалось, к примеру, в ансамблях связанных автоколебательных систем [86, 87], приближенно моделирующих распреде-

ленную активную среду. Для ансамблей с пространственным градиентом частоты характерно возникновение частотных кластеров — групп осцилляторов с равными или близкими средними частотами. Соответственно говорят об идеальных (частоты равны) и неидеальных (частоты различаются) кластерах.

Формирование частотных кластеров возможно и в непрерывной неоднородной активной среде [88, 89]. В отличие от ансамблей, включающих дискретное множество осцилляторов, в среде с неидеальными кластерами реализуется режим, когда частота становится непрерывной функцией пространственной координаты. Этому отвечает эффект возникновения неидеальных кластеров, характеризующийся сплошным спектром мощности колебаний. Учитывая, что описанное явление наблюдается в чисто детерминированной системе при отсутствии каких-либо флуктуаций, можно говорить о возникновении детерминированного хаоса в распределенной среде. Рассмотрим эффект возникновения хаотического поведения непрерывной неоднородной среды во времени и сравним детали динамики неоднородной среды с эффектом возникновения диффузии фазы в конечномерных системах, описанным выше.

Исследования проводились на примере одномерной автоколебательной среды, описываемой уравнением Гинзбурга–Ландау, с частотой, зависящей от пространственной координаты:

$$a_t = i\omega(x)a + \frac{1}{2}(1 - |a|^2)a + ga_{xx}, \quad (17)$$

где i — мнимая единица; $a(x, t)$ — комплексная амплитуда колебаний; t — время; $x \in [0, l]$, $l = 50$, — пространственная координата; g — коэффициент диффузии.

Колебания в различных точках среды при $g \rightarrow 0$ имеют разные частоты, задаваемые функцией $\omega(x)$. Рассматривался случай линейной зависимости частоты от пространственной координаты $\omega(x) = x\Delta_{\max}$; Δ_{\max} в эксперименте фиксировалось на уровне 0,2. Граничные условия задавались в виде

$$a_x(x, t) \Big|_{x=0; l} \equiv 0.$$

Начальное состояние среды выбиралось случайным образом вблизи некоторого однородного распределения $a_0 = \text{const}$. Уравнение (17) численно интегрировалось методом конечных разностей по неявной схеме с использованием прямой и обратной прогонки [90]. Вычислялись вещественная амплитуда

$$A(x, t) = |a(x, t)|$$

и фаза

$$\phi(x, t) = \arg a(x, t)$$

колебаний. Средняя частота колебаний рассчитывалась как средняя производная фазы по времени:

$$\Omega(x) = \langle \phi_t(x, t) \rangle.$$

В отсутствие расстройки ($\Delta_{\max} = 0$) в среде (17) возможны только однородные автоколебательные режимы: $a(x, t) \equiv a(t)$. При заданной расстройке Δ_{\max} в некоторой области значений коэффициента диффузии можно наблюдать формирование идеальных и неидеальных частотных кластеров (рис. 14). Идеальным класте-

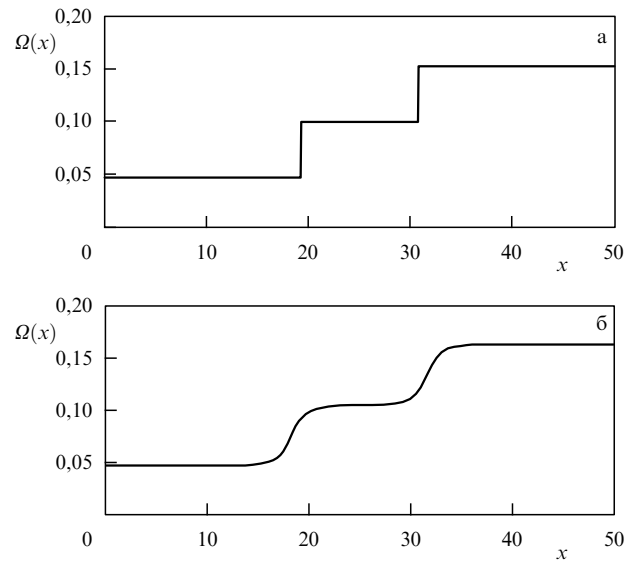


Рис. 14. Изменение средней частоты колебаний Ω вдоль среды в случае идеальной кластерной структуры при $g = 1,0$ (а) и неидеальной структуры при $g = 0,85$ (б).

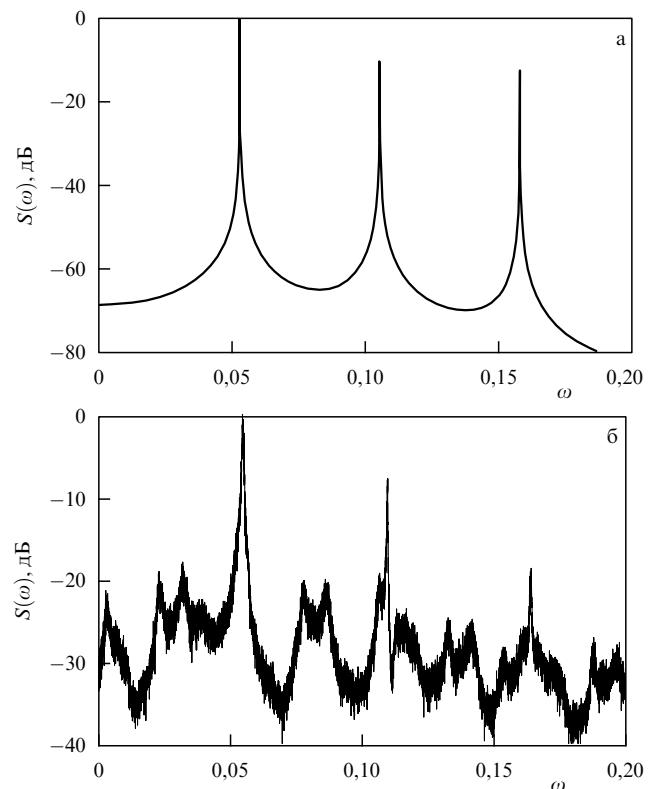


Рис. 15. Нормированные спектральные плотности мощности процесса $A(x_{1,2}, t)$: (а) в режиме идеальных кластеров ($g = 1,0$) в точке $x_1 = 25$ (центр кластера); (б) в режиме неидеальных кластеров ($g = 0,85$) в точке $x_1 = 25$ (центр кластера).

рам соответствуют периодические во времени колебания. В режиме неидеальных кластеров изменение амплитуды колебаний A во времени в любой фиксированной точке среды x является довольно сложным и напоминает хаотический процесс.

Этот эффект наглядно иллюстрируется результатами расчета спектров мощности для режима идеального и

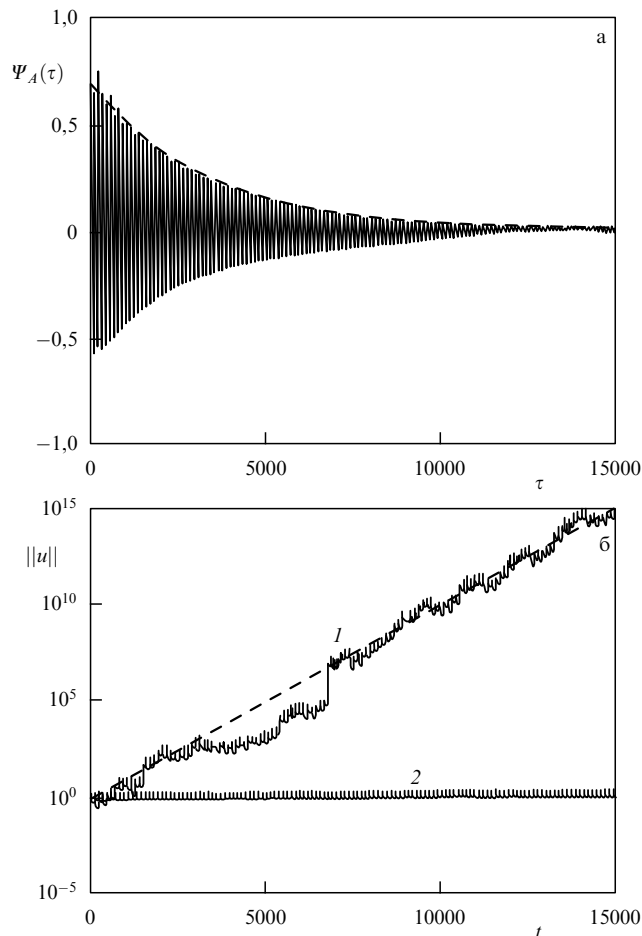


Рис. 16. (а) Нормированная автокорреляционная функция процесса $A(x, t)$ в режиме неидеальных кластеров ($g = 0,85$) в точке $x = 25$ (центр кластера). Штриховой линией показана экспоненциальная аппроксимация огибающей АКФ: $C \exp(-\alpha t)$, $\alpha = 0,0003$, $C = \text{const}$. (б) Зависимость от времени нормы возмущения $\|u(x, t)\|$ колебаний среды (17) в режиме неидеальных частотных кластеров при $g = 0,85$ (кривая 1) и в режиме идеальных частотных кластеров при $g = 1,00$ (кривая 2). Штриховая прямая соответствует экспоненте $\exp(0,0023t)$.

неидеальных кластеров, приведенных на рис. 15. При эволюции режима от идеальных к неидеальным кластерам в любой точке пространства в среде будет наблюдаться переход от многочастотных регулярных колебаний к сложным колебаниям со сплошным спектром.

В различных точках среды вычислялись также временные автокорреляционные функции (АКФ) процесса $A(x, t)$:

$$\psi_A(x, \tau) = \langle A(x, t)A(x, t + \tau) \rangle - \langle A(x, t) \rangle^2, \quad (18)$$

где скобки $\langle \rangle$ означают усреднение по времени, а $\langle A(x, t) \rangle$ не зависит от t . Мы рассматривали нормированную автокорреляционную функцию (коэффициент корреляции)

$$\Psi_A(x, \tau) = \frac{\psi_A(x, \tau)}{\psi_A(x, 0)}.$$

Пример АКФ приведен на рис. 16а. Расчеты доказывают, что в режиме неидеальных кластеров $\Psi_A(x, \tau)$ в любой точке среды x убывает во времени, в пределе стремясь к нулю (рис. 16а). Это означает наличие

перемешивания. В характере спада огибающей АКФ можно выделить два масштаба времени. При малых значениях τ (несколько периодов колебаний) наблюдается быстрый спад корреляции. На более длительных временах достаточно хорошо применима экспоненциальная аппроксимация с заданным декрементом затухания α . Значение декремента затухания в зависимости от точки среды менялось в пределах $\alpha = (0,15-0,4) \times 10^{-3}$. Если кластерная структура является идеальной, то в среде имеют место периодические или квазипериодические во времени процессы, и их корреляционные функции будут соответствующими.

Поскольку в исследуемой модели среды отсутствуют источники шума, то причиной перемешивания может быть только возникновение динамического хаоса, т.е. абсолютной экспоненциальной неустойчивости колебаний среды. Для анализа устойчивости колебаний совместно с уравнением (17) интегрировалось линеаризованное уравнение для малого возмущения $u(x, t)$ комплексной амплитуды $a(x, t)$:

$$u_t = i\omega(x)u + \frac{1}{2}(1 - |a|^2)u - \frac{1}{2}a^2u^* + gu_{xx}, \quad (19)$$

где u^* — комплексно-сопряженная с u величина. Граничные условия для возмущения имеют вид

$$u_x(x, t)|_{x=0; l} \equiv 0.$$

В каждый момент времени t рассматривалась евклидова норма возмущения $\|u(x, t)\|$, которая с учетом дискретизации пространственной координаты сводилась к сумме конечного числа слагаемых. Расчеты показали, что спадание АКФ в режиме неидеальных кластеров сопровождается (в среднем) экспоненциальным ростом нормы возмущения во времени (рис. 16б). Показатель экспоненциального роста λ_{\max} , полученный при $g = 0,85$, имел значение $\lambda_{\max} \approx 0,001$. Следует отметить, что указанное значение λ_{\max} на порядок превышает декремент затухания АКФ.

Для проверки наличия в среде экспоненциальной неустойчивости был проведен расчет старшего ляпуновского показателя λ_{\max} по временному ряду данных с помощью алгоритма, предложенного в [91]. Расчеты дают положительное значение старшего ляпуновского показателя, слабо зависящее от параметров численной схемы. Результаты, соответствующие различным точкам среды, несколько различались, но имели один порядок 10^{-3} . Так, для точки $x_1 = 25$ при оптимальных параметрах численной схемы метод реконструкции давал значение

$$\lambda_{\max} = 0,002 \pm 0,0002,$$

что очень хорошо согласуется с результатами линейного анализа устойчивости. Таким образом, можно с уверенностью говорить о том, что режим неидеальных частотных кластеров соответствует хаотическим колебаниям во времени.

Полученные двумя различными методами оценки старшего ляпуновского показателя хорошо согласуются между собой, но существенно (на порядок) отличаются от оценки декремента экспоненциального затухания корреляций в соответствующем режиме. Как обсуждалось выше, для широкого класса хаотических систем с сосредоточенными параметрами скорость расщепления

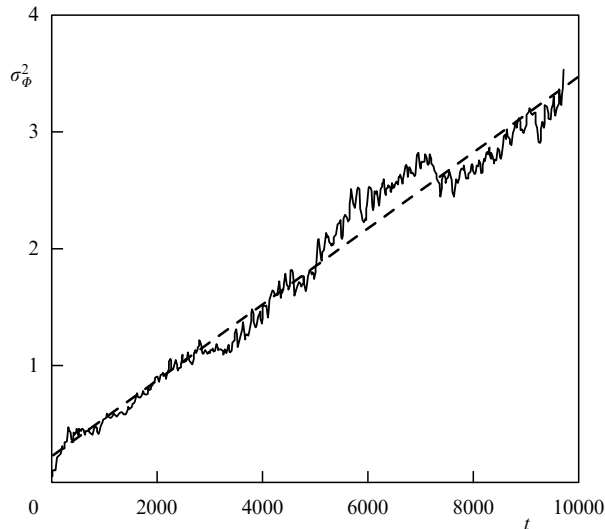


Рис. 17. Дисперсия мгновенной фазы, рассчитанная для режима неидеальных кластеров ($g = 0,85$) в точке $x = 25$ (центр кластера), $B_{\text{эф}} \approx 0,00016$. Штриховой прямой показана аппроксимирующая линия.

корреляций на больших интервалах времени и ширина основной спектральной линии определяются коэффициентом эффективной диффузии мгновенной фазы хаотических колебаний. Возникает вопрос, не связана ли скорость перемешивания, возникающего в среде в результате неоднородности, также с диффузией мгновенной фазы процесса флуктуаций

$$y(t) = A(t) - \langle A(t) \rangle.$$

Для проверки этого предположения была исследована динамика мгновенной фазы, определяемой как

$$\Phi(t) = \arctan \left(\frac{y_h(t)}{y(t)} \right) \pm \pi k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (20)$$

где $y_h(t)$ — сопряженный по Гильберту процесс. Выбор целого k в (20) определяется условием непрерывности функции $\Phi(t)$.

На ансамбле отрезков достаточно длинной реализации $\Phi(t)$ производился расчет дисперсии

$$\sigma_\Phi^2(t) = \langle \Phi^2(t) \rangle - \langle \Phi(t) \rangle^2$$

(здесь скобки $\langle \rangle$ означают усреднение по ансамблю). График зависимости дисперсии мгновенной фазы от времени приведен на рис. 17. На интервале $t \in [0, 10000]$ дисперсия растет во времени почти линейно. Оценка углового коэффициента роста по методу наименьших квадратов позволяет определить коэффициент эффективной диффузии фазы $\Phi(t)$:

$$B_{\text{эф}} = \frac{1}{2} \left\langle \frac{d\sigma_\Phi^2(t)}{dt} \right\rangle. \quad (21)$$

Здесь скобки $\langle \rangle$ означают усреднение "быстрых" осциллирующих дисперсии во времени.

В режиме неидеальных кластеров в зависимости от пространственной координаты x получались значения для $B_{\text{эф}}$ в интервале $[0,00016; 0,00038]$. Более точное определение $B_{\text{эф}}$ прямым расчетом по формуле (21) оказалось достаточно сложным, что связано с необходимостью усреднения по очень большому массиву данных.

Проведенные численные исследования позволили установить ряд новых и важных фактов.

1. Развитие хаоса и турбулентности в непрерывной автоколебательной среде может быть обусловлено неоднородностью среды, приводящей к непрерывной зависимости частоты автоколебаний от пространственной координаты среды.

2. Автоколебания среды в режиме неидеальной частичной (кластерной) синхронизации обладают свойством перемешивания, т.е. характеризуется экспоненциальной неустойчивостью и расщеплением временных корреляций.

3. Скорость убывания корреляционных функций на больших временах не определяется непосредственно ляпуновским показателем, а связана с диффузией мгновенной фазы колебаний. Последнее свидетельствует об общих закономерностях расщепления корреляций в конечномерных и распределенных хаотических системах.

7. Автокорреляционная функция и спектр мощности спирального хаоса в физическом эксперименте

Эксперименты были проведены на установке, состоящей из: радиотехнического генератора с инерционной нелинейностью (генератор Анищенко – Астахова [43]), имеющего основную частоту 18,5 кГц; компьютера с быстрым АЦП с частотой дискретизации 694,5 кГц; генератора гауссова широкополосного шума в полосе частот от 0 до 100 кГц [92]. Поведение АКФ также анализировалось в присутствии внешнего шума. С этой целью к системе подключался сигнал от внешнего генератора шума с управляемой интенсивностью шума. Генератор с инерционной нелинейностью (ГИН) описывается трехмерной диссипативной динамической системой

$$\dot{x} = mx + y - xz - \delta x^3, \quad \dot{y} = -x, \quad \dot{z} = -gz + gI(x)x^2, \quad (22)$$

$$I(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Для определенных значений параметров m и g система реализует режимы спирального хаоса [43].

Первый важный вопрос, однозначный ответ на который требуется получить в ходе эксперимента, это вопрос о том, возможно ли использовать приближение винеровского процесса для описания статистических характеристик мгновенной фазы, как предполагалось в [21, 37, 39, 75]. Для определения коэффициента диффузии $B_{\text{эф}}$ мгновенная фаза вводится на основе концепции аналитического сигнала с использованием преобразования Гильберта экспериментальных реализаций $x(t)$ [77]. Затем рассчитывается дисперсия фазы $\sigma_\Phi^2(t)$ с помощью усреднения по ансамблю из N реализаций. Коэффициент эффективной диффузии фазы определяется скоростью роста дисперсии во времени.

Временная зависимость диффузии фазы, показанная на рис. 18а, не является строго линейной, как это должно наблюдаться для винеровского процесса. Однако линейный рост доминирует над малыми колебаниями дисперсии фазы. Таким образом, рассматриваемый процесс может быть сопоставлен с винеровским процессом с коэффициентом диффузии $B_{\text{эф}}$.

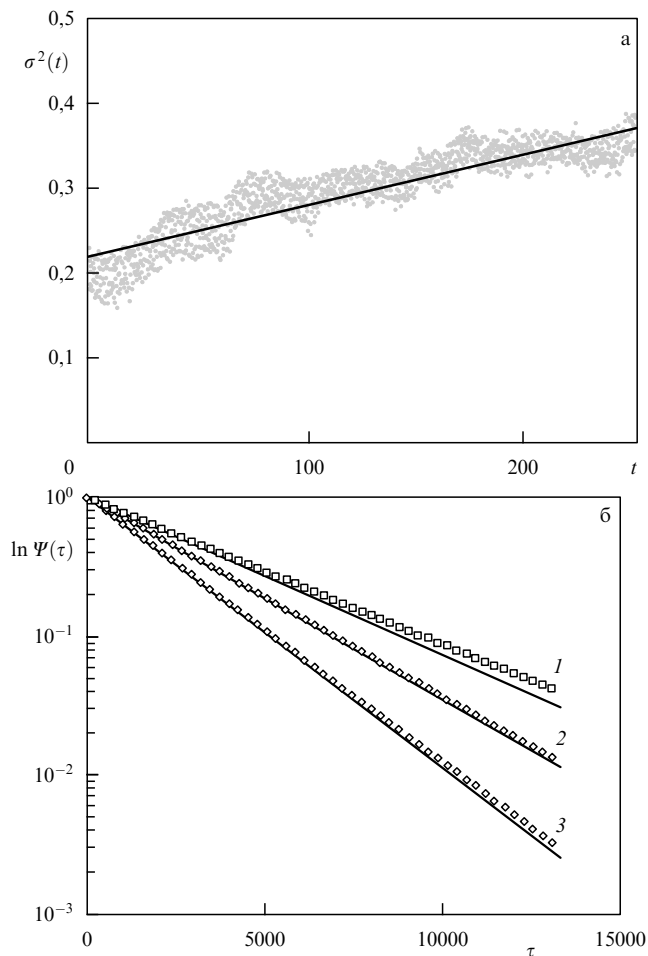


Рис. 18. (а) Временная зависимость дисперсии фазы в присутствии шума интенсивности $D = 0,001$ мВ и ее линейная аппроксимация методом наименьших квадратов (время t — безразмерная величина, равная числу периодов колебаний). (б) Огибающие АКФ (сплошные линии), полученные экспериментально для различных значений интенсивности внешнего шума: линия 1 — $D = 0$; линия 2 — $D = 0,0005$ мВ; линия 3 — $D = 0,001$ мВ, и их экспоненциальные аппроксимации (прямые линии) с декрементом затухания $B_{\text{эф}} = 0,00024$, $B_{\text{эф}} = 0,00033$ и $B_{\text{эф}} = 0,000439$ соответственно. Другие параметры численных расчетов: $N = 100$, $n = 262144$ и $p = 1/(2n)$.

Следующий этап эксперимента состоит в измерении АКФ хаотических колебаний генератора с инерционной нелинейностью. Несколько десятков реализаций сигнала $x(t)$ длительностью 10 с каждая, регистрировались быстрым АЦП. Общая длина реализации составляет $(3-5) \times 10^5$ периодов колебаний с шагом дискретизации Δt , соответствующим 37 точкам на период. АКФ рассчитывается следующим образом. Сначала вычисляется среднее по времени значение переменной x для каждой из N реализаций процесса $x(t)$:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x(t_i). \quad (23)$$

Затем вычислялось среднее значение произведения $\langle x(t)x(t+\tau) \rangle$ путем усреднения по времени:

$$K_I(\tau) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p x(t_i)x(t_i + k\Delta t), \quad (24)$$

$$\tau = k\Delta t_i, \quad k = 0, 1, \dots, n-p,$$

где $l = 1, \dots, N$ — номер реализации. Так как скорость спада корреляций невелика в рассматриваемом режиме, АКФ должна быть вычислена на очень большом интервале времени. Для достижения высокой точности расчета АКФ полученные данные усреднялись по N реализациям:

$$\psi(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N K_l(\tau) - \bar{x}^2. \quad (25)$$

АКФ нормировалась на максимальное значение при $\tau = 0$, т.е.

$$\Psi(\tau) = \frac{\psi(\tau)}{\psi(0)}.$$

На рисунке 18б представлены экспериментальные графики для огибающих нормированной АКФ, соответствующие различным значениям интенсивности внешнего шума. Полученные зависимости аппроксимировались экспоненциальным законом

$$\Psi_{\text{app}}(\tau) = \exp(-B_{\text{эф}}\tau),$$

где $B_{\text{эф}}$ — экспериментально найденный коэффициент эффективной диффузии мгновенной фазы. Аппроксимации показаны на рис. 18б символами.

Проанализируем результаты измерений спектра мощности. Спектр мощности диффузионного процесса имеет вид лоренциана, имеющего ширину, определяемую эффективным коэффициентом диффузии фазы. Для нормированного спектра лоренциан задается выражением (16). В эксперименте коэффициент диффузии может быть независимо определен путем измерения ширины спектрального пика. Для получения более точного значения коэффициента диффузии форма спектрального пика аппроксимировалась формулой (16) путем вариации $B_{\text{эф}}$. В качестве значения $B_{\text{эф}}$ выбиралось то, которому отвечала минимальная ошибка аппроксимации (рис. 19а). На рисунке 19 представлены экспериментальные спектры мощности ГИН. Спектр вычислялся с помощью стандартного метода быстрого преобразования Фурье (БПФ) с усреднением. Главный результат состоит в том, что значения коэффициента эффективной диффузии фазы, рассчитанные на основе измерений спектра мощности, хорошо согласуются со значениями $B_{\text{эф}}$, полученными из линейной аппроксимации роста дисперсии мгновенной фазы. Соответствующие значения коэффициента эффективной диффузии фазы приведены в таблице для трех значений интенсивности внешнего шума.

Таблица. Сравнение значений коэффициента диффузии фазы, полученных разными методами в присутствии шума различной интенсивности

D , мВ	$B_{\text{эф}}$ (Гильберт)	$B_{\text{эф}}$ (спектр)
0	0,000244	0,000266
0,0005	0,00033	0,000342
0,001	0,000439	0,000443

Таким образом, экспериментально было установлено, что в режиме спирального хаоса дисперсия мгновенной фазы хаотических колебаний в среднем растет

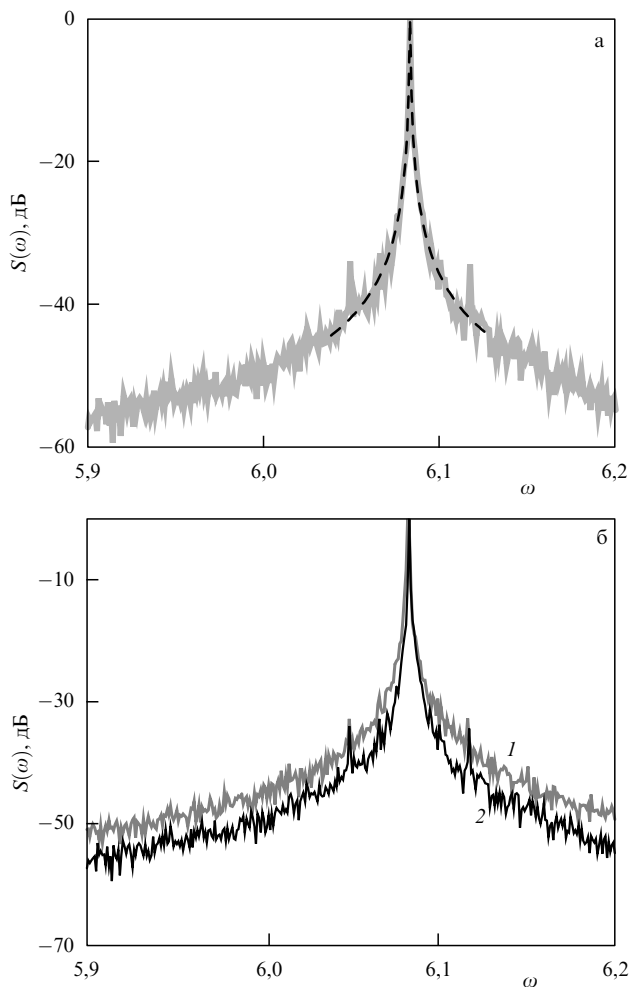


Рис. 19. (а) Экспериментально полученный спектр мощности колебаний $x(t)$ в системе (22) и его теоретическая аппроксимация (16) с $B_{\text{eff}} = 0,00033$ в присутствии шума с $D = 0,0005$ и (б) спектры мощности для $D = 0,001$ (кривая 1) и $D = 0$ (кривая 2).

линейно с коэффициентом диффузии B_{eff} . Без шума этот коэффициент определяется хаотической динамикой системы. В присутствии шума рост дисперсии фазы также линейен, но значение B_{eff} возрастает. АКФ спирального хаоса спадает во времени по экспоненциальному закону $\exp(-B_{\text{eff}}\tau)$. Ширина спектральной линии колебаний на основной частоте ω_0 определяется коэффициентом диффузии фазы из выражения (16).

8. Заключение

Результаты исследований свидетельствуют, что существует класс негиперболических аттракторов спирального типа, для которых шум оказывает сильное влияние на скорость процесса релаксации к стационарному распределению и время корреляции, но практически не влияет на величину положительного ляпуновского показателя. Скорость перемешивания на негиперболических аттракторах определяется не только и не столько экспоненциальной неустойчивостью, а зависит от сложной динамики мгновенной фазы хаотических колебаний. В режиме спирального хаоса шум существенно ускоряет процесс релаксации к стационарному распределению. Для хаотических аттракторов с нерегулярным поведе-

нием мгновенной фазы шум практически не влияет на скорость перемешивания. Это утверждение справедливо для негиперболических аттракторов винтового и переключательного типов, таких, как квазигиперболический аттрактор Лоренца.

Негиперболические аттракторы спирального типа могут возникать не только в конечномерных, но и в распределенных системах. Примером служит неоднородная среда, моделируемая уравнением Гинзбурга–Ландау. Характерной особенностью спиральных аттракторов является то, что они соответствуют сложному процессу нерегулярных автоколебаний, статистические характеристики которого можно описать, используя классическую модель узкополосного шума. Свойства спирального хаоса по сути дела оказываются близки к свойствам зашумленного предельного цикла (например, генератор Ван дер Поля при воздействии шума). Автокорреляционная функция и спектр мощности спирального аттрактора полностью определяются флуктуациями мгновенных амплитуды и фазы колебаний. Флуктуации амплитуды определяют скорость спада корреляций на малых временах и соответственно "шумовой" пьедестал в спектре мощности. Флуктуации фазы приводят к уширению спектральной линии базовой частоты в спектре и экспоненциальному спаду автокорреляционной функции, определяемому величиной эффективного коэффициента диффузии B_{eff} . Коэффициент диффузии фазы в системе без шума определяется ее хаотической динамикой и не связан непосредственно с положительным ляпуновским показателем. Можно сделать важный вывод: в динамических системах со спиральным хаосом энтропия Колмогорова как количественная характеристика степени перемешивания определяется в основном скоростью роста дисперсии мгновенной фазы (B_{eff}), а не положительным показателем Ляпунова, как это принято считать. Исследования статистических свойств аттрактора Лоренца показали, что свойства АКФ определяются главным образом процессом случайного переключения и слабо зависят от вращения вокруг седлофокусов. Классическая модель телеграфного сигнала позволяет описать статистику аттрактора Лоренца. В частности, эта модель хорошо аппроксимирует участок линейного спада АКФ, что позволяет теоретически рассчитать время корреляции. Тот факт, что скорость спада АКФ аттрактора Лоренца практически постоянна как при отсутствии, так и в присутствии шума, обусловлен статистикой процесса переключений. Вероятность переключения в аттракторе Лоренца близка к 1/2 и практически не зависит от уровня воздействия шума.

Результаты, изложенные в работе, были получены при материальной поддержке Программы BRNE "Фундаментальные исследования и высшее образование" (проект SR-006-X1), РФФИ (проект 04-02-16283) и Министерства образования и науки РФ (проект Е02-3.2-345).

Список литературы

1. Аносов Д В *Труды Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР* **90** 3 (1967)
2. Smale S *Bull. Am. Math. Soc.* **73** 747 (1967)
3. Ruelle D, Takens F *Commun. Math. Phys.* **20** 167 (1971)
4. Guckenheimer J, Holmes P *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields* (New York: Springer-Verlag, 1983)
5. Синай Я Г *УМН* **25** 141 (1970)

6. Синай Я Г, в сб. *Нелинейные волны* (Отв. ред. А В Гапонов-Грехов) (М.: Наука, 1979) с. 192
7. Бунимович Л А, Синай Я Г, в кн. *Нелинейные волны* (Отв. ред. А В Гапонов-Грехов) (М.: Наука, 1979) с. 212
8. Eckmann J-P, Ruelle D *Rev. Mod. Phys.* **57** 617 (1985)
9. Ruelle D *Am. J. Math.* **98** 619 (1976)
10. Ruelle D *Bol. Soc. Bras. Math.* **9** 83 (1978)
11. Shilnikov L *Int. J. Bifurcat. Chaos* **7** 1953 (1997); *J. Circuits Syst. Comput.* **3** 1 (1993)
12. Afraimovich V S, Shil'nikov L P, in *Nonlinear Dynamics and Turbulence* (Eds G I Barenblatt, G Iooss, D D Joseph) (Boston: Pitman, 1983) p. 1
13. Anishchenko V S, Strelkova G I *Discrete Dyn. Nat. Soc.* **2** 53 (1998)
14. Graham R, Ebeling W, private communications; Graham R, Hamm A, Tél T *Phys. Rev. Lett.* **66** 3089 (1991)
15. Ott E, Yorke E D, Yorke J A *Physica D* **16** 62 (1985)
16. Schroer C G, Ott E, Yorke J A *Phys. Rev. Lett.* **81** 1397 (1998)
17. Sauer T, Grebogi C, Yorke J A *Phys. Rev. Lett.* **79** 59 (1997)
18. Jaeger L, Kantz H *Physica D* **105** 79 (1997)
19. Kifer Yu *Commun. Math. Phys.* **121** 445 (1989); Кифер Ю И *Изв. АН СССР. Сер. Мат.* **38** 1091 (1974)
20. Hammel S M, Yorke J A, Grebogi C J. *Complexity* **3** 136 (1987); *Bull. Am. Math. Soc., New Ser.* **19** 465 (1988)
21. Anishchenko V S et al. *Phys. Rev. Lett.* **87** 054101 (2001)
22. Anishchenko V S et al. *Phys. Rev. E* **65** 036206 (2002)
23. Zaslavsky G M *Chaos in Dynamical Systems* (New York: Harwood Acad. Publ., 1985)
24. Billingsley P *Ergodic Theory and Information* (New York: Wiley, 1965)
25. Cornfeld I P, Fomin S V, Sinai Ya G *Ergodic Theory* (New York: Springer-Verlag, 1982)
26. Колмогоров А Н *ДАН СССР* **124** 754 (1959)
27. Синай Я Г *ДАН СССР* **124** 768 (1959)
28. Песин Я Б *УМН* **32** (4) 55 (1977)
29. Bowen R *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms* (Lecture Notes in Math., Vol. 470) (Berlin: Springer-Verlag, 1975)
30. Бланк М Л *Устойчивость и локализация в хаотической динамике* (М.: Изд-во МЦНМО, 2001)
31. Ruelle D *Commun. Math. Phys.* **125** 239 (1989)
32. Christiansen F, Paladin G, Rugh H H *Phys. Rev. Lett.* **65** 2087 (1990)
33. Liverani C *Ann. Math.* **142** 239 (1995)
34. Froyland G *Commun. Math. Phys.* **189** 237 (1997)
35. Bowen R, Ruelle D *Invent. Math.* **29** 181 (1975)
36. Badii R et al. *Physica D* **58** 304 (1992)
37. Anishchenko V S et al. *Physica A* **325** 199 (2003)
38. Anishchenko V S et al. *Fluct. Noise Lett.* **3** L213 (2003)
39. Анищенко В С и др. *Радиотехника и электроника* **48** 824 (2003)
40. Rössler O E *Phys. Lett. A* **57** 397 (1976)
41. Lorenz E N *J. Atmos. Sci.* **20** 130 (1963)
42. Анищенко В С *Сложные колебания в простых системах* (М.: Наука, 1990)
43. Anishchenko V S *Dynamical Chaos — Models and Experiments* (Singapore: World Scientific, 1995)
44. Williams R F, in *Global Analysis* (Proc. of Symp. in Pure Math., Vol. 14, Eds S-S Chern, S Smale) (Providence: Am. Math. Soc., 1970) p. 341
45. Плыкин Р В *УМН* **35** 94 (1980)
46. Афраимович В С, Быков В В, Шильников Л П *ДАН СССР* **234** 336 (1977)
47. Шильников А Л, в сб. *Методы качественной теории и теории бифуркаций* (Отв. ред. Л П Шильников) (Горький: Изд-во ГГУ, 1989) с. 130
48. Lozi R *J. Phys. Colloq.* (Paris) **39** (C5) 9 (1978)
49. Бельх В Н *Матем. сборник* **186** (3) 3 (1995)
50. Banerjee S, Yorke J A, Grebogi C *Phys. Rev. Lett.* **80** 3049 (1998)
51. Anishchenko V S et al. *Discrete Dyn. Nat. Soc.* **2** 249 (1998)
52. Lai Y-C, Grebogi C, Kurths J *Phys. Rev. E* **59** 2907 (1999)
53. Lai Y-C, Grebogi C *Phys. Rev. Lett.* **82** 4803 (1999)
54. Ott E *Chaos in Dynamical Systems* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993)
55. Dawson S et al. *Phys. Rev. Lett.* **73** 1927 (1994)
56. Dawson S P *Phys. Rev. Lett.* **76** 4348 (1996); Moresco P, Dawson S P *Phys. Rev. E* **55** 5350 (1997)
57. Kostelich E J et al. *Physica D* **109** 81 (1997)
58. Lai Y-C et al. *Nonlinearity* **6** 779 (1993)
59. Anishchenko V S et al. *Phys. Lett. A* **270** 301 (2000)
60. Madan R N (Ed.) *Chua's Circuit: A Paradigm for Chaos* (Singapore: World Scientific, 1993)
61. Гаврилов Н К, Шильников Л П *Мат. сборник* **88** 475 (1972); **90** 139 (1973)
62. Stratonovich R L, in *Noise in Nonlinear Dynamical Systems Vol. 2 Theory of Noise Induced Processes in Special Applications* (Eds F Moss, P V E McClintock) (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989) p. 16
63. Horsthemke W, Lefever R *Noise-Induced Transitions* (Berlin: Springer-Verlag, 1984)
64. Gardiner C W *Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry, and the Natural Sciences* (Berlin: Springer-Verlag, 1983)
65. Haken H *Advanced Synergetics* (Berlin: Springer-Verlag, 1983)
66. Graham R, in *Noise in Nonlinear Dynamical Systems Vol. 1 Theory of Continuous Fokker-Planck Systems* (Eds F Moss, P V E McClintock) (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1988)
67. Anishchenko V S, Ebeling W *Z. Phys. B* **81** 445 (1990)
68. Guckenheimer J *Nature* **298** 358 (1982)
69. Hsu C S, Kim M C *J. Stat. Phys.* **38** 735 (1985)
70. Синай Я Г *УМН* **46** 147 (1991)
71. Анищенко В С, Нейман А Б *Письма в ЖТФ* **17** (14) 43 (1991)
72. Anishchenko V S, Neiman A B, in *Nonlinear Dynamics of Structures: Intern. Symp. on Generation of Large-Scale Structures in Continuous Media, Perm-Moscow, USSR, 11-20 June 1990* (Eds R Z Sagdeev et al.) (Singapore: World Scientific, 1991) p. 21
73. Alonso D et al. *Phys. Rev. E* **54** 2474 (1996)
74. Anishchenko V S et al. *Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems* (Berlin: Springer, 2002)
75. Farmer J D *Phys. Rev. Lett.* **47** 179 (1981)
76. Arneodo A, Coulet P, Tresser C *Commun. Math. Phys.* **79** 573 (1981)
77. Rosenblum M G, Pikovsky A S, Kurths J *Phys. Rev. Lett.* **76** 1804 (1996)
78. Stratonovich R L *Topics in the Theory of Random Noise Vol. 1, 2* (New York: Gordon and Breach, 1963, 1967)
79. Малахов А Н *Флуктуации в автоколебательных системах* (М.: Наука, 1968)
80. Рытов С М *Введение в статистическую радиофизику* (М.: Наука, 1966)
81. Тихонов В И, Миронов М А *Марковские процессы* (М.: Сов. радио, 1977)
82. Jackson E A *Perspectives of Nonlinear Dynamics Vol. 1, 2* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989, 1990)
83. Gollub J P, Benson S V *J. Fluid Mech.* **100** 449 (1980); Lesieur M *Turbulence in Fluids: Stochastic and Numerical Modelling* (Dordrecht: M. Nijhoff, 1987); Sato S, Sano M, Sawada Y *Phys. Rev. A* **37** 1679 (1988); Kida S, Yamada M, Ohkitani K *Physica D* **37** 116 (1989); Bohr T et al. *Dynamical Systems Approach to Turbulence* (Cambridge Nonlinear Sci. Ser., Vol. 8) (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998); Aranson I S, Kramer L *Rev. Mod. Phys.* **74** 99 (2002)
84. Kuramoto Y *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence* (Berlin: Springer-Verlag, 1984); Pomeau Y, Manneville P *J. Phys. Lett.* (Paris) **40** 609 (1979); Chaté H, Manneville P *Phys. Rev. Lett.* **58** 112 (1987); Coulet P, Gil L, Lega J *Physica D* **37** 91 (1989); Chaté H *Nonlinearity* **7** 185 (1994)

85. Manneville P, Chaté H *Physica D* **96** 30 (1996); Grinstein G, Jayaprakash C, Pandit R *Physica D* **90** 96 (1996)
86. Ermentrout G B, Kopell N *SIAM J. Math. Anal.* **15** 215 (1984); Yamaguchi Y, Shimizu H *Physica D* **11** 212 (1984); Strogatz S H, Mirollo R E *Physica D* **31** 143 (1988)
87. Osipov G V, Sushchik M M *Phys. Rev. E* **58** 7198 (1998)
88. Ermentrout G B, Troy W C *SIAM J. Appl. Math.* **46** 359 (1986)
89. Акопов А А и др. *Письма в ЖТФ* **29** (15) 29 (2003)
90. Самарский А А, Гулин А В *Численные методы* (М.: Наука, 1989)
91. Wolf A et al. *Physica D* **16** 285 (1985)
92. Anishchenko V S et al. *Phys. Rev. E* **69** 036215 (2004)

Statistical properties of dynamical chaos

V.S. Anishchenko, T.E. Vadivasova, G.A. Okrovertskhov, G.I. Strelkova

*Department of Physics, Institute of Nonlinear Dynamics, Saratov State University,
ul. Astrakhanskaya 83, 410012 Saratov, Russian Federation
Tel. (7-8452) 51-57 38. Fax (7-8452) 51-45 49
E-mail: wadim@chaos.ssu.ru*

Research on the statistical description of dynamical chaos and on how chaotic oscillatory regimes are affected by noise is reviewed. Near- and non-hyperbolic chaotic attractors are examined. A numerical simulation method for diagnosing the type of a chaotic attractor is presented. The key aspects of the process of relaxation to an invariant probability distribution are analyzed for different types of chaotic attractors. The spectral and correlation properties of chaotic oscillations are considered. Autocorrelation decay and power spectrum shape are examined, and their interconnections with Lyapunov exponents, instantaneous phase diffusion and the intensity of external noise are discussed. The onset mechanism of chaos in an inhomogeneous medium described by the Ginzburg–Landau equation is identified, and its relation to the characteristics of spiral chaos is discussed. A comparison between numerical and experimental data is given.

PACS numbers: **02.50. – r**, **05.45. – a**, **47.52. + j**

Bibliography — 92 references

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **175** (2) 163–179 (2005)

Received 17 September 2004

Physics – Uspekhi **48** (2) (2005)