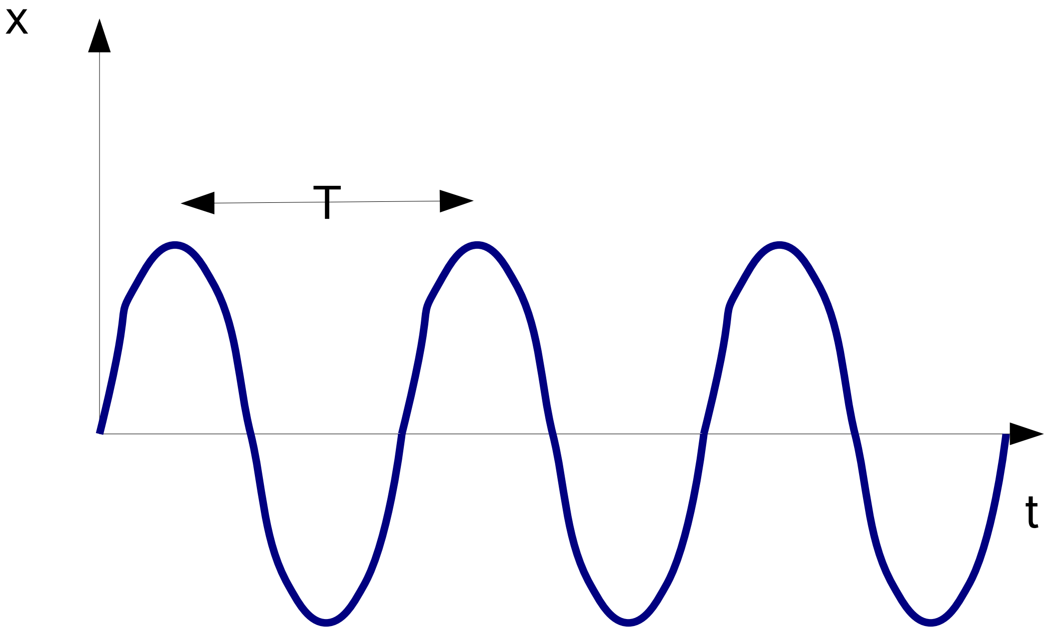
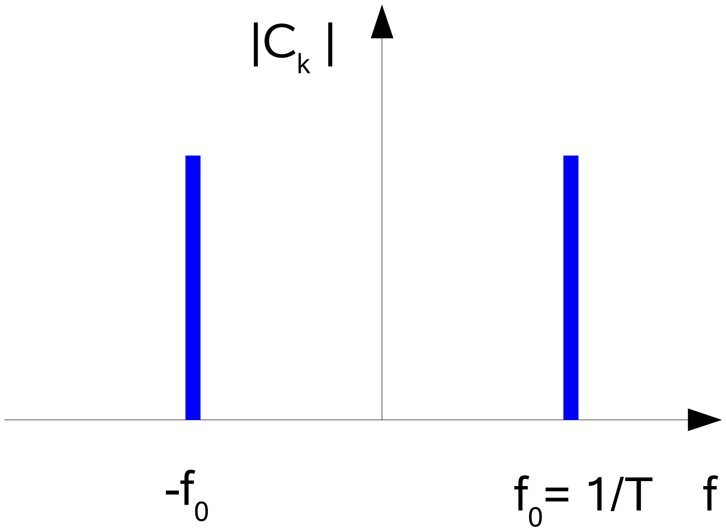
Спектр гармонического сигнала

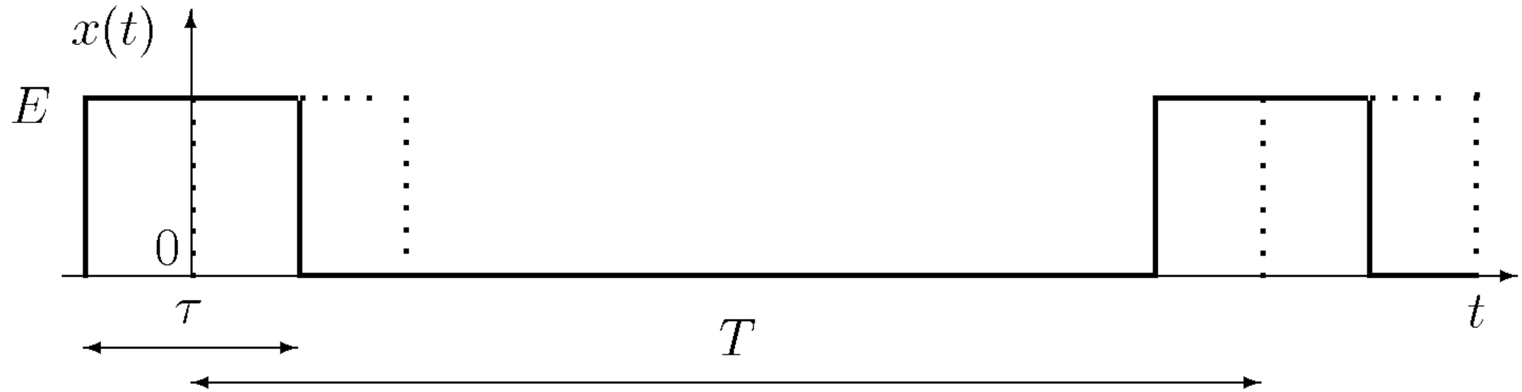




*x(t)=****Acos(2πf₀t+ϕ)*** => спектр содержит ДВЕ гармоники:

C_1=0.5Aexp(jϕ) и *C_{-1} =0.5Aexp(-jϕ)* на частотах f_0 и *$-f_0$* соответственно

Гармоническое представление периодической последовательности прямоугольных импульсов



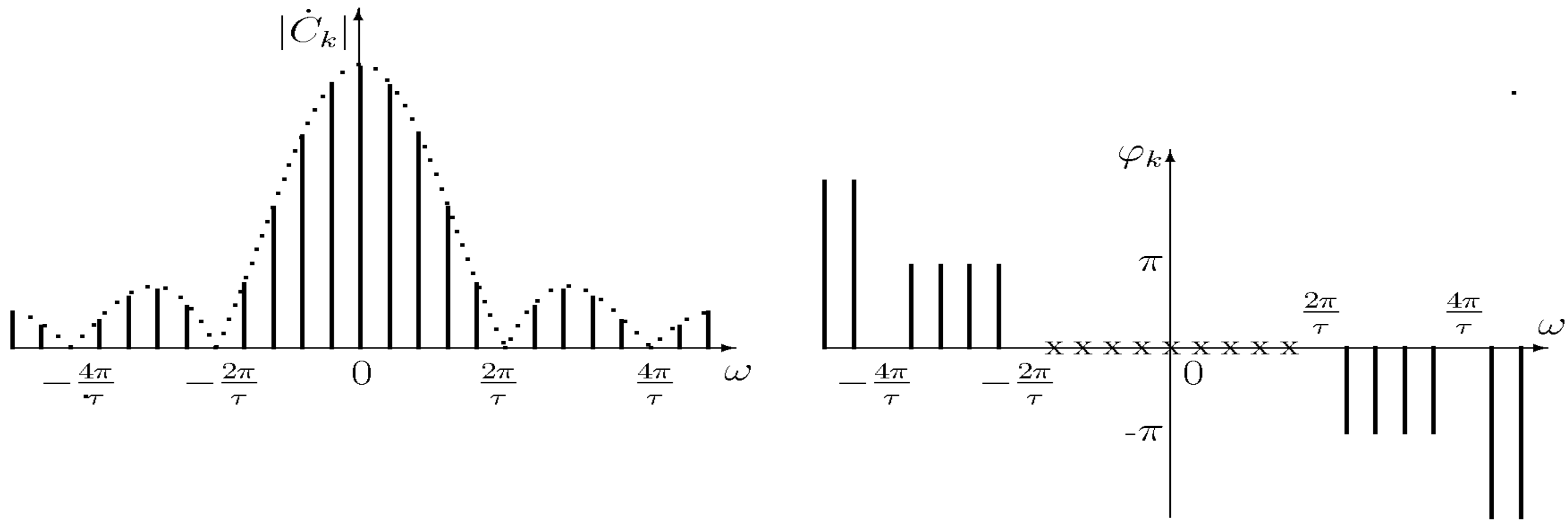
Спектр последовательности прямоугольных импульсов

$$C_0 = E\frac{\tau}{T} \qquad \dot{C}_k = \frac{1}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} E\mathrm{e}^{-jk\omega_0 t}dt =$$

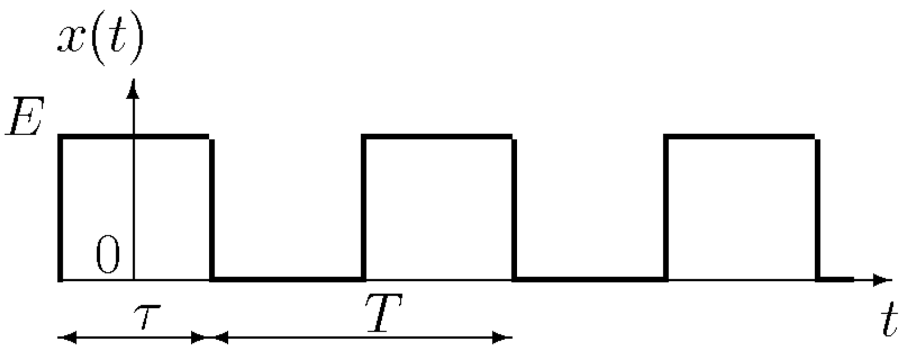
$$\frac{E}{T}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-jk\omega_0 t}}{-jk\omega_0}\Bigg|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \qquad E\frac{\tau}{T}\cdot\frac{\sin k\omega_0\tau/2}{k\omega_0\tau/2} =$$

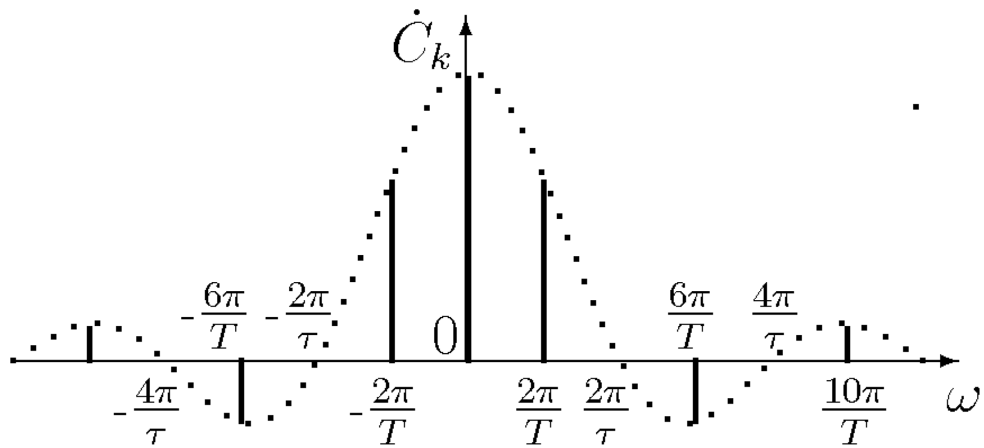
$$\boxed{E\frac{\tau}{T}\cdot\frac{\sin k\pi f_0\tau}{k\pi f_0\tau}}$$

$$\dot{C}_k = E\frac{\tau}{T} \cdot \frac{\sin k\pi f_0 \tau}{k\pi f_0 \tau}$$

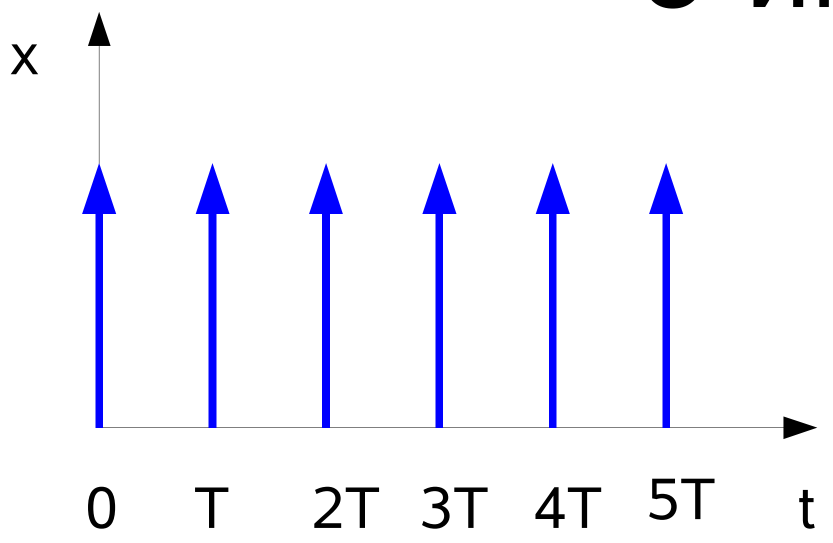


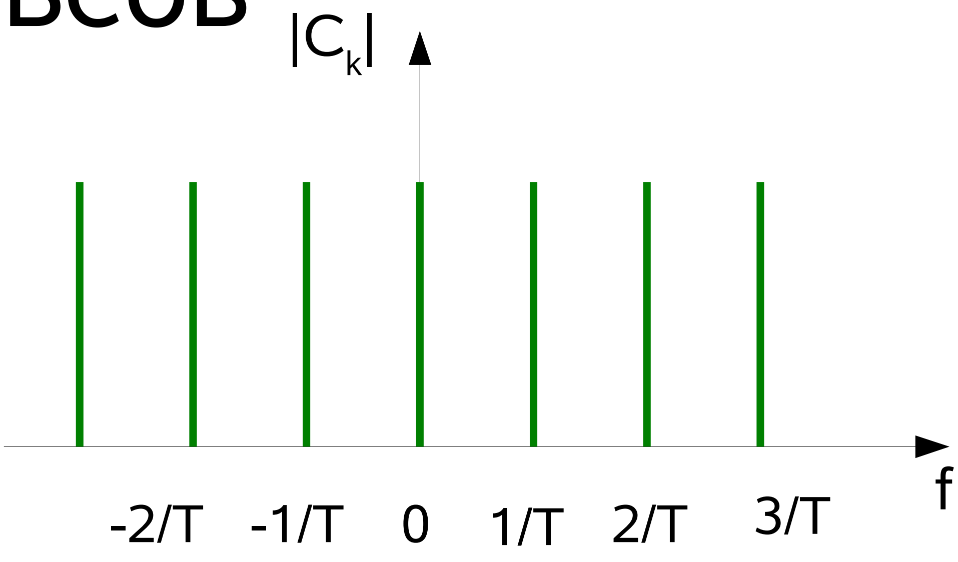
Спектр последовательности имульсов скважностью два





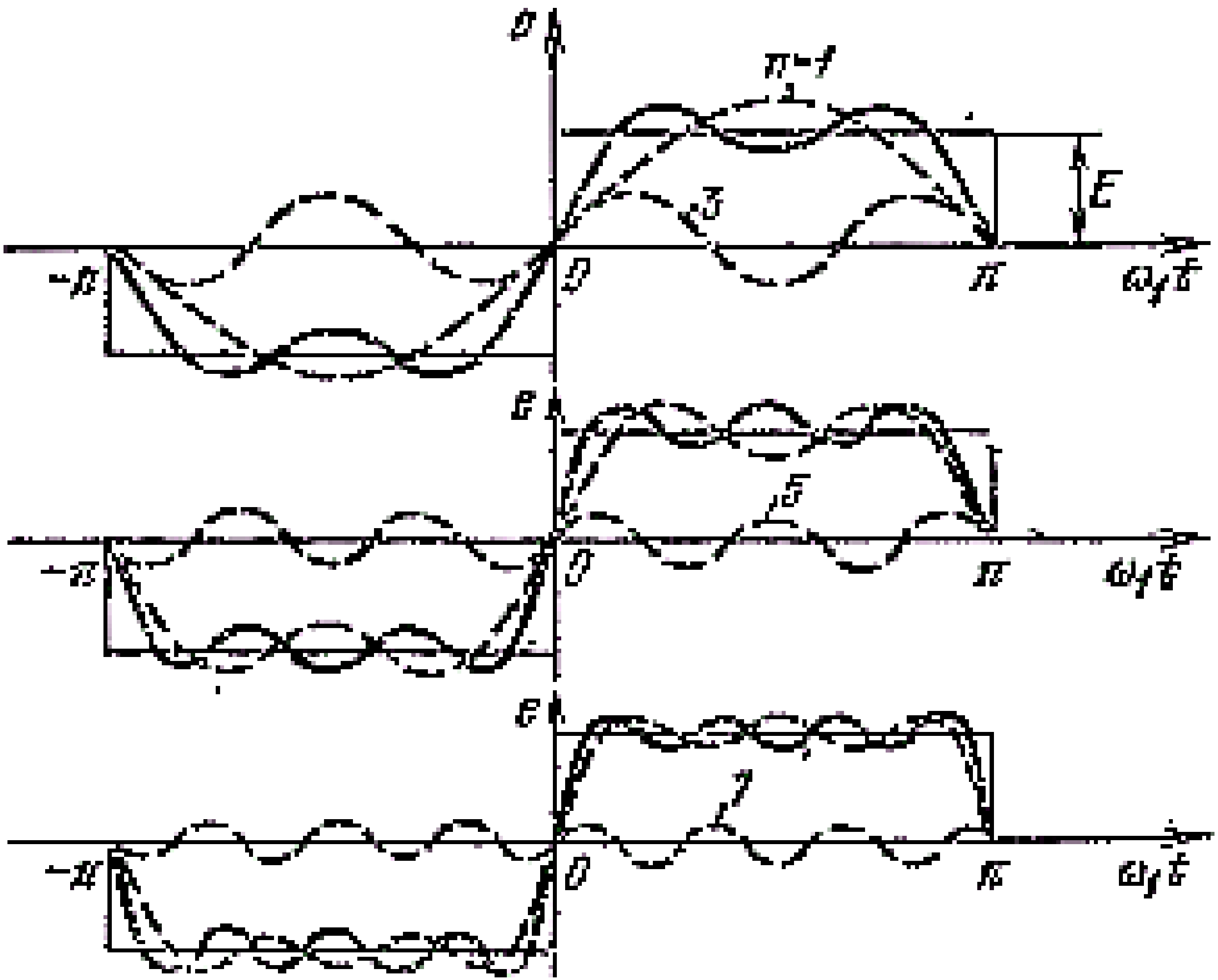
Гармоническое представление периодической последовательности δ-импульсов



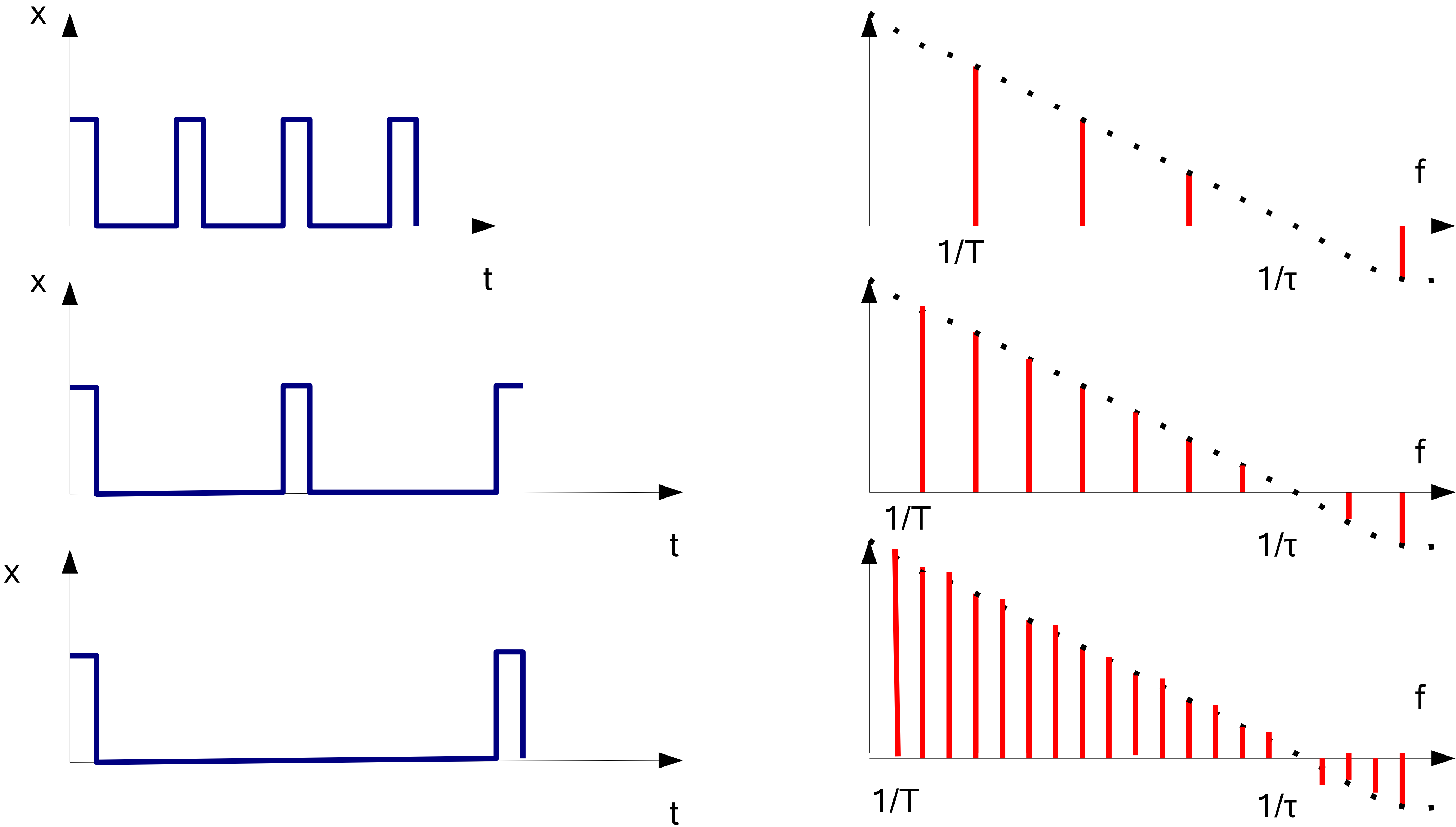


$$\dot{C}_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) \exp\left(-\frac{2\pi k}{T} t\right) dt = \frac{1}{T}$$

Явление Гиббса



Разложение на гармоники периодической последовательности видеоимпульсов при увеличении периода



Спектр сигнала при бесконечно большом периоде

$$x(t) = \lim_{T\to\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k \exp\left(j\frac{2\pi k}{T}t\right) =$$

$$= \lim_{\Delta f\to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\dot{C}_k}{\Delta f} \exp\left(j2\pi k\Delta f t\right)\Delta f =$$

Обратное преобразование (интеграл) Фурье

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \dot{F}(f)\exp\left(j2\pi f t\right)df$$

Комплексный спектр сигнала

$$\dot{F}(f) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-j2\pi f t}dt$$

Прямое преобразование Фурье

Комплексно-значная функция спектральной плотности (комплексный спектр)

$$\dot{F}(f) = \left|\dot{F}(f)\right| \exp\left(j\phi(f)\right)$$

амплитудные спектр

фазовый спектр

Энергетическая интерпретация спектра

полная энергия сигнала

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t)^2 dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(f)|^2 df = \mathbf{E}$$

спектральная плотность энергии

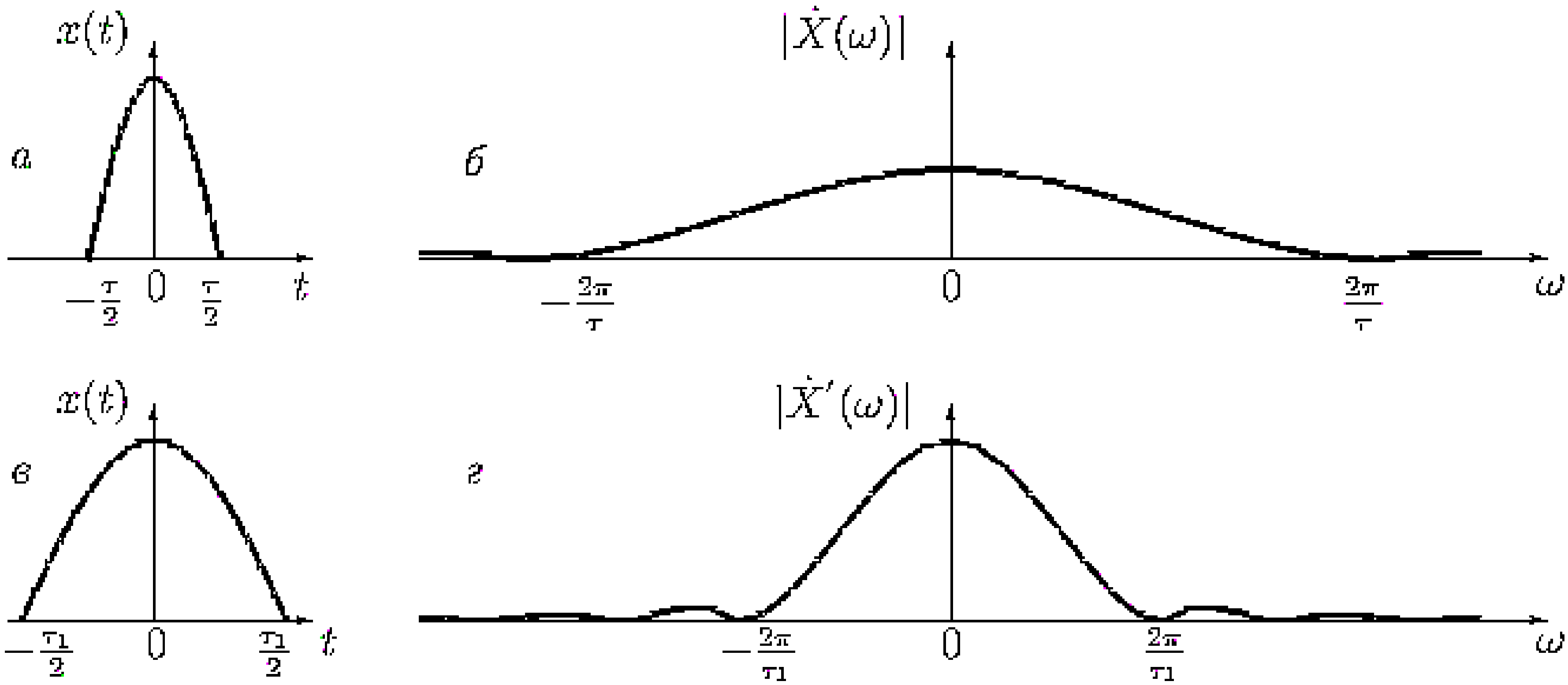
$|F(f)|^2 \Delta f$ - Энергия сигнала, приходящаяся на диапазон частот *[f;f+Δf]*

Свойства спектра

- Линейность: $\alpha x(t) \to \alpha F(f)$ и $x_1(t)+x_2(t) \to F_1(f)+F_2(f)$
- Дуальность: если $x(t) \to F(f)$, то $F(t) \to x(-f)$
- Симметрия относительно нулевой частоты: $F(-f)=F^*(f)$
- Фазовый сдвиг при задержке во времени: если $x(t) \to F(f)$ то $x(t-\tau) \to F(f)\exp(-j2\pi f\tau)$
- Спектр сигнала, масштабируемого по времени: если $x(t) \to F(f)$, то $x(\alpha t) \to F(f/\alpha)/\alpha$
- Спектр производной: если $x(t) \to F(f)$ то $dx/dt \to j2\pi f F(f)$
- Спектр первообразной: если $x(t) \to F(f)$ то $\int x(t)dt \to -jF(f)/2\pi f$

Связь между длительностью сигнала и шириной спектра

если **x(t) --> F(f)**, то **x(αt) --> F(f/α)/α**



Ширина спектра - интервал частот, в пределах которого модуль спектральной функции превышает некоторое наперед заданное значение

Произведение ширины спектра сигнала на его длительность является постоянной величиной, зависящей только от формы сигнала

Спектр произведения сигналов

$$F_{xy}(f) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t)\exp(-j2\pi ft)dt =$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} F_x(\xi)\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} y(t)\exp(-j2\pi(f-\xi)t)dt\right)d\xi =$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} F_x(\xi)F_y(f-\xi)d\xi = F_x(f)\circ F_y(f)$$

Спектр свертки сигнала

$$z(t) = x(t) \circ y(t)$$

$$F_z(f) = F_x(f) F_y(f)$$

Спектр δ-импульса

$$F_\delta(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \exp(-j2\pi f t) dt = 1$$

Спектр постоянного сигнала x(t)=1:

$$F_1(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-j2\pi f t) dt = \delta(-f) = \delta(f)$$