Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Д.Э. Постнов, П.А.Щербаков

КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ РЕЖИМЫ И ИНДУЦИРОВАННЫЕ ШУМОМ НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ В ОСЦИЛЛЯТОРЕ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ

Учебно-методическое пособие к практикуму
«Электронное моделирование»
для студентов физического факультета

Саратов
2008

1 Введение

При изучении конкретного физического явления принято использовать наиболее подходящую для этой цели специализированную модель, математическую либо физическую. Так, например, процессы возбуждения автоколебаний традиционно иллюстрируются уравнением ван дер Поля, эффект стохастического резонанса обычно показывают на примере одномерной модели с бистабильными свойствами, а когерентный резонанс изучают на нейроподобных системах.

Данная комплект из трех лабораторных работ, выполненных на общей базе, направлен в первую очередь на формирование более общего, «междисциплинарного» взгляда на проявления свойств нелинейного осциллятора на фазовой плоскости. Как будет показано, возможные динамические режимы простой RLC-цепи с нелинейным элементом в виде туннельного диода или конвертера отрицательного сопротивления на операционном усилителе включают как автоколебания (что традиционно рассматривается в курсе теории колебаний), так и возбудимые и бистабильные режимы. Таким образом, одно и то же устройство при вариации управляющих параметров способно демонстрировать различные нелинейные эффекты, как автоколебательной природы, так и индуцированные шумом.

Цель предлагаемого набора из трех взаимосвязанных лабораторных работ заключается в ***изучении взаимосвязи между нелинейными свойствами осциллятора на фазовой плоскости и его динамическими режимами, а также в экспериментальном исследовании нелинейных эффектов, возникающих при воздействии шума (когерентный и стохастический резонанс)***.

В процессе достижения этой цели предлагается решение следующих конкретных задач :

1. Ознакомиться с принципиальной схемой устройства и модельными уравнениями.

2. Экспериментально исследовать при каких условиях реализуются

возбудимый, автоколебательный, либо бистабильный режимы, нанести области их существования на плоскость управляющих параметров, провести сопоставление с результатами теоретического анализа методом нульклин (Лабораторная работа I).

3. Исследовать характеристики индуцированных шумом колебаний (эффект когерентного резонанса) в зависимости от выбора управляющих параметров и интенсивности шума (Лабораторная работа II).

4. Установив режим бистабильности, провести экспериментальное исследование прохождения через устройство периодического сигнала в присутствии шума (эффект стохастического резонанса) в зависимости от частоты и амплитуды сигнала, интенсивности шума, а также при изменении параметров бистабильного осциллятора (Лабораторная работа III).

2 Объект исследования и экспериментальная установка

2.1 Нелинейная RLC-цепь с отрицательным сопротивлением

RLC-цепь (колебательный контур) с отрицательным сопротивлением является традиционной моделью теории колебаний при рассмотрении явлений мягкого и жесткого возбуждения автоколебаний. Термином «отрицательное сопротивление» характеризуют наличие так называемого «падающего участка» на вольт-амперной характеристике нелинейного элемента (нелинейного сопротивления в RLC-цепи), на котором дифференциальное сопротивление $R_d = dU_R/dI_R$ отрицательно (или, эквивалентно, дифференциальная проводимость $\sigma_d = dI_R/dU_R < 0$). В простейшем (и наиболее общем) случае такой участок с отрицательным R_d единственный и ограничен областью не слишком больших токов и напряжений. Тогда вольт-амперная характеристика неизбежно имеет вид,

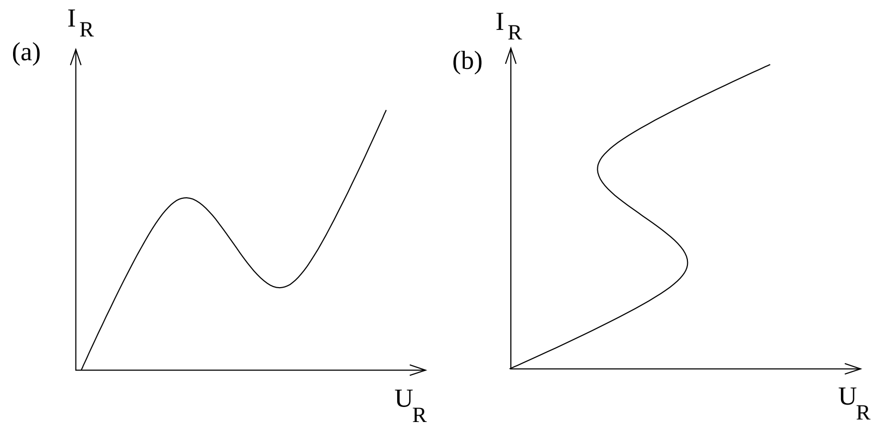


Рис. 1: (a) – пример вольт-амперной характеристики N-типа ; (b) – пример вольт-амперной характеристики S-типа;

изображенный на Рис. 1 (a) либо на Рис. 1 (b). Отсюда очевидно происхождение терминов «N-характеристика» и «S-характеристика». Первая из них характерна для приборов, управляемых напряжением (туннельный диод), вторая – для приборов, управляемых током (газоразрядная лампа).

С точки зрения физики процессов в нелинейных элементах важно, что на этих графиках нулевому напряжению U_R отвечает нулевой ток I_R и дифференциальное сопротивление в этой точке *положительно*, иначе такой элемент превратился бы в источник энергии, черпающий ее из ниоткуда. Можно сформулировать и обратное утверждение: элемент с отрицательным дифференциальным сопротивлением в точке $U = 0$ имеет внутренний источник энергии (либо дополнительно подключен к внешнему). При разработке радиотехнических устройств обычно интересен именно режим отрицательного дифференциального сопротивления (например, при построении схем генераторов). По этой причине, используются специальные электрические цепи, которые смещают рабочую точку устройства в область падающего участка (обычно – в центр). С точки зрения математического описания, это эквивалентно замене переменных, при которой середина падающего участка помещается в на-

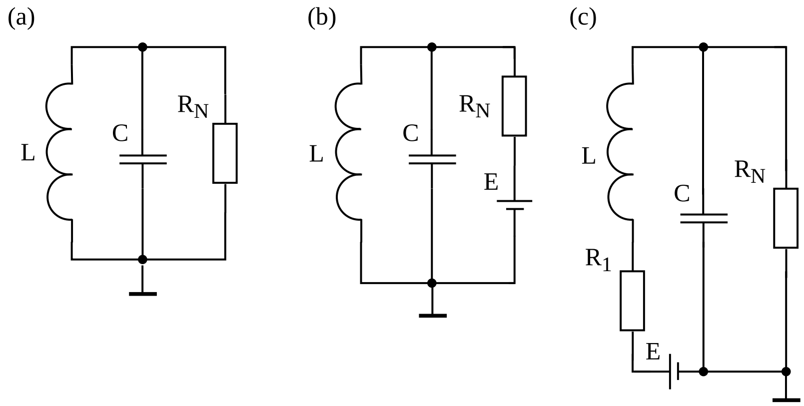


Рис. 2: RLC-цепь с нелинейным сопротивлением R_N. (a) – максимально упрощенное представление; (b) – схема с источником смещения в цепи R_N; (c) – схема с источником смещения в цепи L и учетом активного сопротивления обмотки R_1.

чало координат графика вольт-амперной характеристики. Такой подход вкупе с аппроксимацией характеристики N-типа кубическим полиномом вида $I = AU_R + BU_R^3$ приводит к знаменитому уравнению ван дер Поля – классической модели для иллюстрации мягкого рождения автоколебаний (бифуркация Андронова-Хопфа). Схема соответствующей RLC-цепи приведена на Рис. 2 (a). Заметим, однако, что при этой замене координат из рассмотрения выпадает важный параметр – величина напряжения питания E на нелинейном элементе, из которого, по сути, черпается энергия, поддерживающая автоколебания. Это же напряжение определяет и симметрию нелинейной характеристики осциллятора, что во многом определяет его свойства. Учесть наличие E можно явным добавлением соответствующего источника напряжения в RLC-цепь. На Рис. 2 он изображен в виде батареи, включенной либо в ветвь самого нелинейного элемента (b), либо последовательно с индуктивностью (c). Во втором случае дополнительный резистор R_1 учитывает омическое сопротивление обмотки катушки индуктивности L. Этот вариант RLC-цепи и будет рассматриваться в дальнейшем.

2.2 Уравнения математической модели

Используя законы Кирхгофа применительно к схеме Рис. 2 (с), можно записать:

$$L\frac{dI}{dt} = E - IR_1 - U, \tag{1}$$

$$C\frac{dU}{dt} = I - F(U), \tag{2}$$

где I и U – ток в цепи катушки индуктивности и напряжение на конденсаторе соответственно, а $F(U)$ – описывает вольт-амперную характеристику нелинейного элемента R_N. Дифференцируя (2) и подставляя в него (1), после элементарных преобразований получаем:

$$LC\frac{d^2U}{dt^2} + (LF'(U) + R_1C)\frac{dU}{dt} + U + R_1F(U) + E = 0, \tag{3}$$

где $F'(U)$ обозначает производную от $F(U)$ по U. Далее вводя безразмерное время τ, $t = \sqrt{LC}\tau$, и переходя к безразмерной переменной u и безразмерным коэффициентам путем деления (3) на нормировочное напряжение $U_0 = 1$В, уравнение приводится к виду:

$$\ddot{u} + S(u)\dot{u} + \Omega(u)u = 0, \tag{4}$$

где использованы обозначения:

$$S(u) = (Lf'(u) + R_1C)/(U_0\sqrt{LC}), \tag{5}$$

$$\Omega(u) = 1 + (R_1f(u) + E)/uU_0, \tag{6}$$

$$f(u) = F(U_0u) = F(U). \tag{7}$$

В представленном выше виде и коэффициент диссипации $S(u)$ и частота $\Omega(u)$ являются нелинейными функциями, включающими характеристику нелинейного элемента. Нетрудно убедиться, что при $R_1 = 0$, $E = 0$ и аппроксимации $F(U)$ кубической параболой, уравнение (4) сводится к уравнению для осциллятора ван дер Поля, автономная динамика которого включает единственную бифуркацию Андронова – Хопфа для единственного состояния равновесия. При ненулевых R_1 и E поведение рассматриваемой модели сложнее и включает режимы, наблюдаемые в таких модельных системах как осциллятор Бонхоффера – ван дер Поля или ФитсХью-Нагумо, ведущих свое происхождение от моделей нейронов.

2.3 Структура экспериментальной установки

В то время как сама RLC-цепь представляет собой несложное устройство, для ее экспериментального исследования требуется измерение тока в отдельных элементах, исключение влияния измерительных приборов и возможность изменения параметров в нужных пределах. По этой причине приведенная на Рис. 3 принципиальная схема экспериментальной установки содержит следующие блоки:

I – Блок формирования напряжения питания E нелинейного элемента, содержащий прецезионный потенциометр и повторитель на ОУ.

II – Блок имитации активного сопротивления катушки индуктивности R_1, содержащий закорачивающий тумблер $kR1$.

III – Блок измерения тока в цепи катушки индуктивности, принцип действия которого основан на усилении каскадом на ОУ падения напряжения на измерительном резисторе сопротивлением 20 Ом.

IV – Выходной буфер, представляющий собой повторитель на ОУ. Он передает сигнал с контура на внешние измерительные устройства, при этом блокируя их влияние на RLC-цепь.

V – Блок измерения тока нелинейного элемента. Используется в режиме визуализации нульклин (режим 2 установки).

VI – Блок нелинейных элементов. Содержит два встроенных нелинейных элемента (туннельный диод и конвертер отрицательного сопротивления на ОУ), а также цепь коммутации, обеспечивающую на выбор подключение одного из встроенных нелинейных элементов, либо внешнего элемента к паре контактов на задней панели установки.

VII – Магазин емкостей, обеспечивающий подключение любого из 4 конденсаторов различной емкости, либо разрыв цепи.

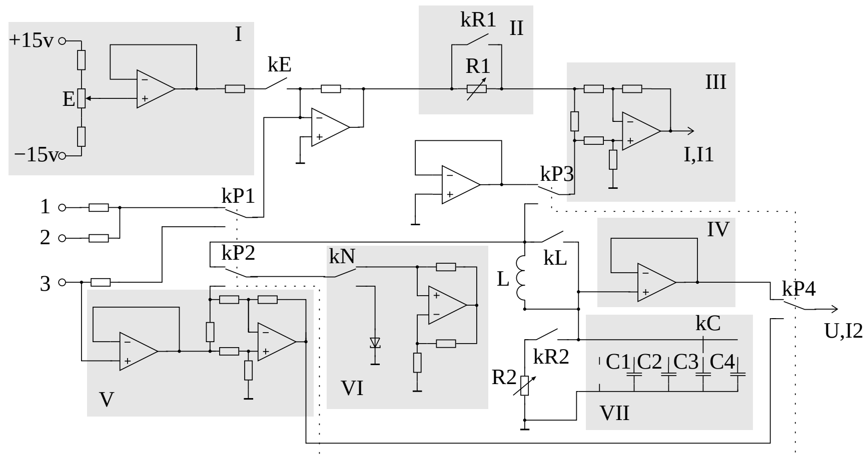


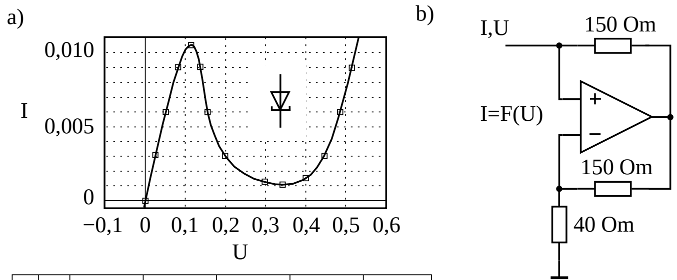
Рис. 3: Принципиальная схема экспериментальной установки.

Помимо перечисленного выше, схема экспериментальной установки содержит также индуктивность L с возможностью ее короткого замыкания и переменный резистор R_2, подключенный параллельно нелинейному элементу и, таким образом, позволяющий корректировать его свойства.

Режимы работы установки коммутируются с помощью переключателя $kP1 \ldots kP4$, имеющего два положения (режимы 1 и 2) и четыре пары контактов. В положении 1 коммутация схемы позволяет измерять напряжение на емкости U и ток индуктивности I в работающей RCL-цепи. В положении 2 схема размыкается, а на измерительные выходы выводятся токи I_1 и I_2, позволяющие организовать визуализацию U- и I- нульклин.

Предустановленные нелинейные элементы с N-характеристикой представляют собой (1) туннельный диод ГИ301 и (2) конвертер отрицательного сопротивления на операционном усилителе К140УД18. На Рис. 4 дана необходимая информация для аналитического задания их вольт-амперной характеристики при проведении расчетов.

В положении (3) переключателя к схеме присоединяется пара внешних контактов на задней панели установки, что позволяет подключить внешний нелинейный элемент для исследования.



U	0	0,006	0,125	0,200	0,350	0,515
I	0	0,045	0,0105	0,003	0,001	0,009

Рис. 4: Встроенные нелинейные элементы: (a) – туннельный диод и его ВАХ; (b) – схема и значения элементов конвертера отрицательного сопротивления на ОУ.

2.4 Передняя панель установки и органы управления

Передняя панель установки приведена на Рис. 5 и организована следующим образом.

Центральная область панели установки содержит три 10-ти оборотных прецезионных потенциометра с лимбами для изменения величины напряжения питания E, сопротивления R_1 и сопротивления R_2, включенного параллельно нелинейному элементу, а также тумблеры включения/выключения соответствующих элементов схемы. А именно:

- Тумблер, расположенный под лимбом E, отключает источник питания от входа схемы. Этот режим может использоваться при исследовании схемы с активным нелинейным элементом, не требующим внешнего смещения.

- Тумблер, расположенный под лимбом R_1, в положении «ВЫКЛ» накоротко замыкает сопротивление R_1 (сопротивление потерь колебательного контура при этом имеет величину 20 Ом, что определяется влиянием схемы измерения тока).

- Тумблер, расположенный под лимбом R_2, в положении «ВЫКЛ» отключает сопротивление R_2 от схемы ($R_2 = \infty$).

Рис. 5: Общий вид передней панели экспериментальной установки.

В процессе работы значениям на шкале лимба многооборотных потенциометров сопоставляются величины сопротивления в омах и напряжения в вольтах. Это делается с помощью калибровочных таблиц, приведенных в Приложении.

Также в центральной области лицевой панели установки располагается галетный переключатель «C, nF», изменяющий емкость C и тумблер включения/выключения индуктивности L. В случае выключения тумблера L катушка индуктивности накоротко замыкается (исключается из схемы).

В левой части лицевой панели установки располагаются входные разъемы и тумблеры подключения/отключения сигналов от функционального генератора (Ф.Г.) и источника шума (ШУМ). В случае отключения напряжения питания E и сигналов от источника шума и функционального генератора, на входе схемы устанавливается потенциал равный потенциалу земли (0 В). В правой части лицевой панели установки располагаются переключатели нелинейного элемента (Н.Э.) и режима функционирования схемы (Режим). Переключатель «Н.Э.» имеет три положения: «1» – туннельный диод, «2» – конвертер отрицательного сопротивления на операционном усилителе и «3» – внешний нелинейный элемент. Переключатель «Режим» имеет два положения: «1» – установка дает на выходе сигналы U (напряжение на нелинейном элементе) и I (ток через катушку индуктивности), «2» – установка дает на выходе сигналы $I1$ и $I2$, используемые для визуализации нульклин.

2.5 Интерфейс программы анализа данных

Сигналы с экспериментальной установки поступают на блок сопряжения, а оттуда – на аналого-цифровой преобразователь (АЦП) компьютера. Дальнейшая их обработка производится в интерактивном режиме с помощью программы, написанной в среде NI Labview.

Программа содержит три вкладки, предназначенные для (1) наблюдения фазового портрета и временных реализаций, (2) визуализации взаиморасположения нульклин исследуемой системы в зависимости от положения органов управления экспериментальной установки и (3) расчета и определения характеристик усредненного спектра мощности колебаний.

Вкладка 1 «Фазовый портрет» (Рис. 6) предназначена для использования в режиме 1 установки. На ней располагаются окна временных реализаций для тока I, протекающего через катушку индуктивности L, и напряжения U на нелинейном элементе, а также фазовый портрет на плоскости I, U. Каждому окну придана кнопка *«Автомасштабирование»* (у левого верхнего угла окна), при нажатии на которую происходит автоматическое масштабирование окна по амплитуде. Для одновременного автомасштабирования всех окон предназначена кнопка *«Общее автомасштабирование»*. Для изменения временного масштаба в окнах временных реализаций предназначен орган управления *«Длина реализации»*, управляемый ползунком. Кроме того, у правого верхнего угла каждого из окон временных реализаций расположен указатель амплитуды соответствующего сигнала, автоматически рассчитываемой по последней временной реализации. Окну фазового портрета придан указатель средней частоты колебаний в герцах (правый верхний угол окна).

Вкладка 2 «Визуализация нульклин» (Рис. 7) работает в режиме 2 установки. На вкладке находится единственное окно, на котором выводится временная развертка сигналов $I1$ и $I2$. В условиях подачи на установку сканирующего периодического сигнала с функционального генератора, наблюдаемые в окне кривые соответствуют U- и

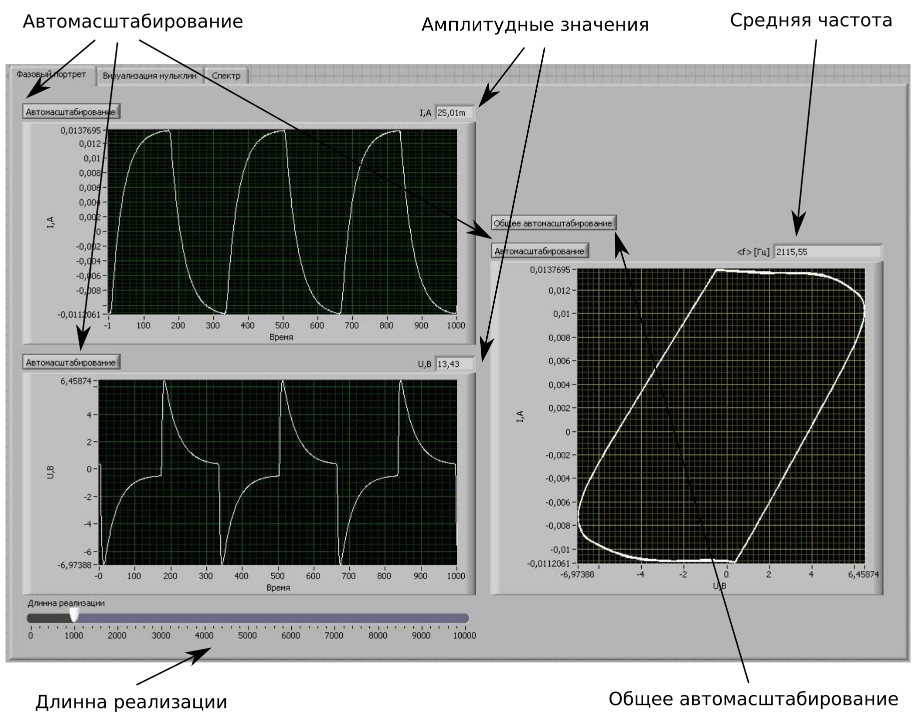


Рис. 6: Интерфейс вкладок программы обработки данных в режиме наблюдения фазового портрета.

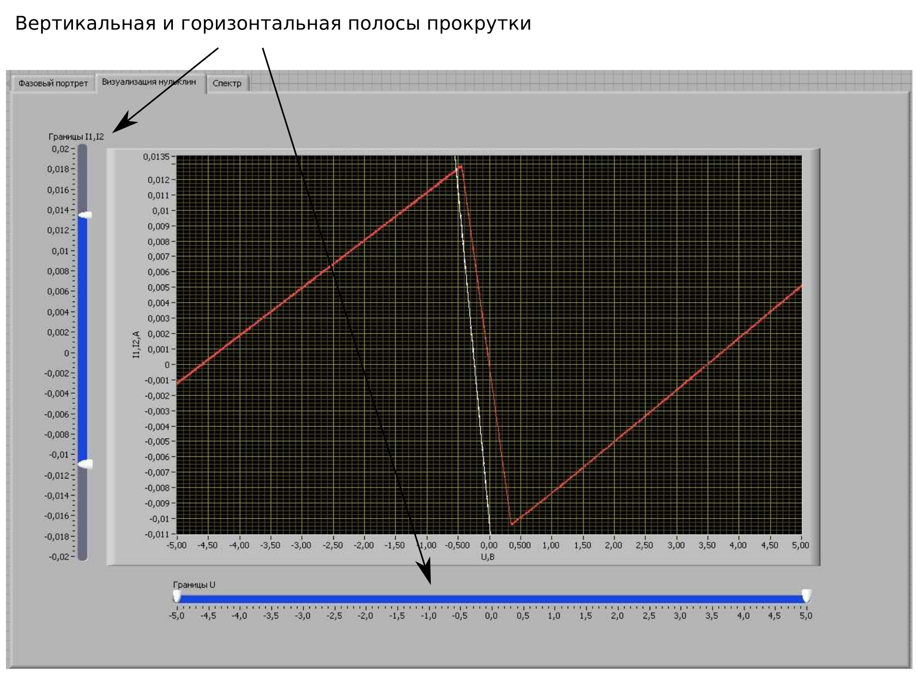


Рис. 7: Интерфейс вкладок программы обработки данных при наблюдении нульклин.

I-нульклинам, соответственно. Окну приданы два органа управления: (1) управления пределами просмотра по горизонтальной оси и (2) управления полосой просмотра по вертикальной оси, интервал визуализации находится между двумя ползунками и подцвечен синим цветом.

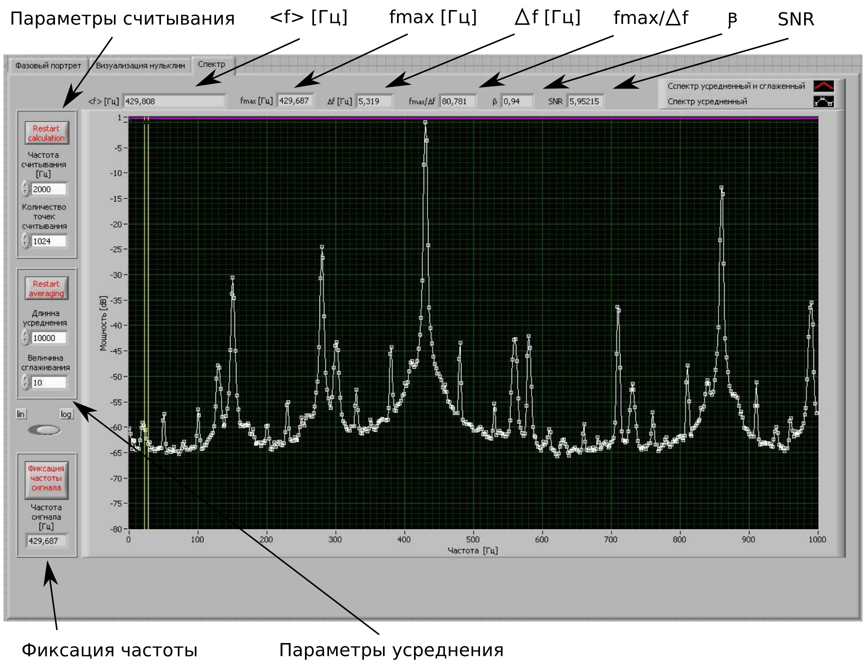


Рис. 8: Интерфейс вкладок программы обработки данных при расчете спектра мощности колебаний.

Вкладка 3 «Спектр» (Рис. 8) работает в режиме 1 установки. На вкладке расположены окно спектра сигнала, управляющие кнопки, а также указатели параметров и рассчитываемых величин. Органами управления слева от основного окна можно установить параметры работы АЦП: частоту дискретизации и длину считываемой периодограммы. Здесь же выводится информация о частоте внешнего сигнала (автоматически оценивается программой). В верхней части левой панели расположены кнопки сброса усреднения и сброса расчета параметров спектра. В центре левой панели расположены переключатель типа спектра (линейный/логарифмический) и указатель количества периодограмм, по которому рассчитывается усредненный спектр мощности. Усреднение производится по заданному числу периодограмм. А именно, когда общее количество обработанных периодограмм превышает заданное для усреднения их число N, то спектр более не изменяется.

Основное окно визуализации спектра имеет два маркера, перемещаемые с помошью мыши компьютера и используемые при расчете величины регулярности. Масштаб по вертикальной оси графика спектра зависит от его типа. А именно, в режиме расчета линейного спектра его максимум нормируется на единицу. В логарифмическом режиме по вертикальной оси откладываются значения мощности гармоник в децибеллах.

Верхняя панель содержит ряд указателей величин, которые рассчитываются на основе полученного графика спектра. В них входят (слева направо):

- $< f >$,Гц – средняя частота сигнала, по которому рассчитывается спектр;
- f_{max},Гц – положение максимума спектра по частоте;
- Δf,Гц – величина частотного интервала между маркерами;
- $f_{max}/\Delta f$ – характеристика регулярности, см. описание в теме «Когерентный резонанс»;
- β – характеристика регулярности, см. описание в теме «Когерентный резонанс»;
- SNR – отношение сигнал/шум, см. описание в теме «Стохастический резонанс».

При включенной экспериментальной установке, запуск программы анализа данных соответствующей кнопкой среды NI Labview немедленно включает ее в работу без каких-либо предварительных настроек и активации.

3 Лабораторная работа I. Экспериментальное исследование и теоретический анализ динамических режимов нелинейной RLC-цепи

Всестороннее исследование заданной динамической системы (при заданном наборе управляющих параметров) удобно проводить путем построения ее фазового портрета, содержащего информацию о количестве, взаиморасположении и устойчивости состояний равновесия, предельных циклов и других обьектов фазового пространства. В общем случае эта задача решается с помощью бифуркационного анализа, как правило – с применением специализированных программных средств. Однако, для осциллятора на фазовой плоскости есть и более простые способы, позволяющие, в частности, оценить наличие, расположение и характер устойчивости состояний равновесия.

Если уравнения записаны в общем виде (4):

$$\ddot{u} + S(u)\dot{u} + \Omega(u)u = 0,$$

то, как нетрудно убедиться, количество и положение состояний равновесия полностью определяется корнями уравнения $\Omega(u)u = 0$. Характер их устойчивости можно оценить, вычисляя производную $\acute{\Omega} = \partial\Omega(u)/\partial u$ в точке состояния равновесия с учетом знака $S(u)$. Так, положительное значение $\acute{\Omega}$ соответствует состоянию равновесия типа фокус либо узел, которые устойчивы при $S(u) > 0$ и неустойчивы в обратном случае. Отрицательное $\acute{\Omega}$ означает, что состояние равновесия есть седло.

Метод нульклин позволяет не только локализовать состояния равновесия, но также оценить направление фазовых траекторий в удаленных от состояний равновесия областях и, нередко, предсказать наличие замкнутых траекторий – предельных циклов. В данной работе метод нульклин применяется не только как способ анализа уравнений, но и для экспериментального исследования в режиме реального времени. По этой причине вернемся к размерным уравнениям исследуемой системы в виде (1):

$$L\frac{dI}{dt} = E - IR_1 - U,$$
$$C\frac{dU}{dt} = I - F(U).$$

Как известно, условия $dI/dt = 0$ и $dU/dt = 0$ выполняются одновременно в состоянии равновесия. Раздельное же выполнение этих условий задает на фазовой плоскости (U, I) две кривые, называемые **нульклинами**.

Условие $dU/dt = 0$ дает уравнение U-нульклины:

$$I = F(U), \tag{8}$$

а условие $dI/dt = 0$ дает уравнение I-нульклины:

$$I = (E - U)/R_1. \tag{9}$$

Лабораторная установка позволяет в режиме реального времени наблюдать взаиморасположение нульклин и их сдвиг при изменении параметров RLC-цепи. Это позволяет графически оценивать наличие и количество состояний равновесия. Для оценки устойчивости требуется дополнительная информация о знаке dI/dt и dU/dt в области выше и ниже соответствующей нульклины.

Рисунок 9 иллюстрирует основные возможные ситуации в окрестности состояния равновесия (точка пересечения нульклин). На рисунке сплошная линия представляет U-нульклину (фазовые траектории пересекают ее строго по вертикали), а пунктирная линия – I-нульклину (на ней фазовые траектории горизонтальны). Пересечение нульклин делит фазовую плоскость на четыре сектора. В каждом из них маленькими стрелками обозначены горизонтальная и вертикальная компоненты фазовой скорости, а также суммарный вектор, который и дает оценку направления движения фазовой траектории. Как можно видеть, в зависимости от угла пересечения нульклин реализуются различные типы

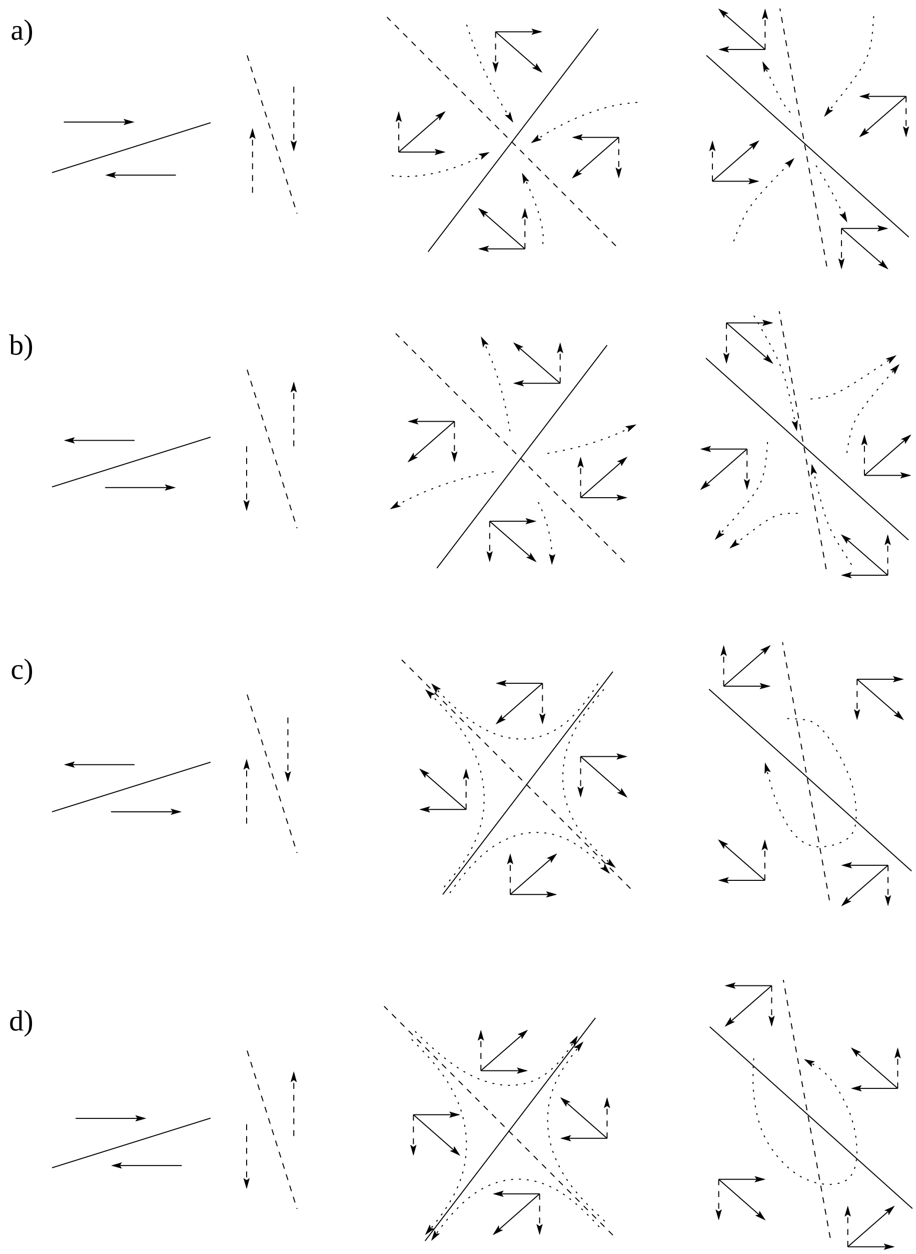


Рис. 9: Различные варианты пересечения нульклин позволяют диагностировать устойчивость состояния равновесия: a) устойчивый узел и седло, b)неустойчивый узел и седло, c,d) седло и фокус (устойчивость зависит от угла наклона нульклин).

устойчивости состояния равновесия.

Исследование на количество и устойчивость состояний равновесия можно производить как аналитически, для чего требуется явное задание вольт-амперной характеристики нелинейного элемента $F(U)$, так и в эксперименте, используя режим 2 установки и вкладку 2 программы анализа данных.

3.1 Практическое задание. Получение карты динамических режимов.

- Получить от преподавателя задание на экспериментаьное исследование. При выборе в качестве нелинейного элемента туннельного диода, рекомендуется аналитическое исследование с использованием аппроксимации ВАХ, при выборе в качестве нелинейного элемента конвертера на ОУ – эффективно как экспериментальное исследование методом нульклин в режиме реального времени, так и расчет с использованием величин резисторов, входящих в конвертер. Входящее в состав экспериментальной установки переменное сопротивление R_2 является, по сути, частью нелинейного элемента, создавая дополнительную положительную проводимость и должно учитываться в расчетах. Его удобно использовать при тонкой подстройке свойств нелинейного элемента (изменении угла наклона сегментов ВАХ).

- Установить следующие начальные значения параметров: «Ф.Г.» – ВЫКЛ, «ШУМ» – ВЫКЛ, «Е»=0 В (ВКЛ), «R_1»=100 Ом (ВКЛ), «R_2»=0 Ом (ВКЛ), «L» – ВКЛ, «C»=10 нФ (ВКЛ), «Н.Э.»=1 при использовании туннельного диода либо «Н.Э.»=2 при использовании конвертера на ОУ, «РЕЖИМ»=1.

- Переключиться на вкладку 1 интерфейса программы.

- Изменяя значения R_1 и E в пределах $0\ldots200$ Ом и $-0.93\ldots+0.8$ В, соответственно, оценить область параметров, в которой устройство демонстрирует автоколебательный режим. Варьируя значения остальных управляющих параметров, исследовать их влияние на форму автоколебаний и на границы области их существования.

- Переключаясь на «РЕЖИМ»=2 и вкладку 2 интерфейса программы и обратно, сопоставить взаиморасположение нульклин и наблюдаемый колебательный режим. Изменяя величины E и R_1 при фиксированных остальных параметрах, построить диаграмму основных режимов (возбудимый, автоколебательный, бистабильный) на плоскости управляющих параметров E и R_1.

- Используя известные параметры нелинейного элемента (аппроксимирующую функцию ВАХ туннельного диода либо величины сопротивлений в цепях конвертера на ОУ), теоретически рассчитать области существования обнаруженных в эксперименте режимов. Обратить особое внимание на пересечение областей бистабильности и автоколебательного режима.

- Описать и объяснить полученные результаты в отчете по лабораторной работе.

4 Лабораторная работа II. Исследование характеристик индуцированных шумом колебаний. Когерентный резонанс.

4.1 Краткие теоретические сведения

Пи воздействии внешнего случайного сигнала (шума) на динамическую систему, ее отклик определяется как параметрами шума, так и особенностями ее собственной динамики. Неудивительно, что системы, в автономном режиме демонстрирующие какого-либо рода колебания, могут генерировать их и в присутствии шума. Несколько менее тривиален тот факт, что шум может вызывать (индуцировать) колебания. Простейший пример дает возбуждаемый шумом линейный осциллятор:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \sqrt{D}\xi(t), \tag{10}$$

где $\xi(t)$ – Гауссов белый шум с нулевым средним и интенсивностью D. Поскольку на фазовой плоскости такой автономной системы имеется единственное состояние равновесия, которое при не слишком больших положительных значениях γ является устойчивым фокусом, то ее реакция на любое кратковременное возмущение представляет собой затухающие колебания. Действующий на систему шум будет постоянно смещать ее состояние, не давая достигнуть состояния равновесия. Таким образом, отклик на внешнее шумовое воздействие (временная зависимость $x(t)$) будет представлять собой незатухающие колебания с беспорядочно меняющимся размахом и сбоями фазы. Поскольку система (10) линейна, то характер описанного выше процесса независим от величины D, меняется лишь его амплитуда. В этом легко убедиться, введя замену переменной $y = x/\sqrt{D}$.

Для нелинейных систем ситуация принципиально иная. Важное значение приобретает интенсивность (или средняя амплитуда) шума по сравнению с некоторым масштабом, определяемым нелинейными свойствами конкретной системы. Как правило, физически правдоподобные системы проявляют нелинейность в некоторой ограниченной области. Например, зависимость в виде кубической параболы $y = x - x^3$ в области малых x, когда $x^3 << x$, аппроксимируется прямой $y = x$, а при больших x, когда $x^3 >> x$, хотя и остается нелинейной, но имеет «простой» (в частности, монотонный) характер.

Все это придает конкретное наполнение понятиям «слабого» и «сильного» шума. А именно, слабым можно считать шум, привносящий столь малое возмущение, что отклик системы на него близок к линейному. Сильный шум, в свою очередь, меняет состояние системы в настолько широких пределах, что тонкие детали ее динамики становятся малосущественными, а потому характер отклика упрощается и опять-таки становится ближе к линейному. В некоторой промежуточной области значений интенсивности шума создаются условия для наиболее выраженного проявления нелинейных свойств системы.

Исторически первым (около 25 лет назад) был обнаружен и интенсивно исследовался эффект *стохастического резонанса*, наблюдаемый при прохождении слабого периодического сигнала через бистабильную систему в присутствии шума. По мере накопления знаний об эффекте и понимания соответствующих нелинейных механизмов, исследователи обратили внимание и на другие, даже более простые ситуации, когда рост интенсивности шума приводит к упорядочиванию поведения системы, или, иными словами, к росту *когерентности отклика* на шумовое воздействие.

Впервые этот эффект, позднее получивший наименование «когерентный резонанс», попал в поле зрения исследователей в связи с задачей о воздействии флуктуаций на динамическую систему в окрестности точки седлоузловой бифуркации на предельном цикле. На начальном этапе развитие получил подход, в рамках которого когерентный резонанс рассматривался как эффект «высвечивания» шумом колебательной динамики, которая реализуется за точкой бифуркации (седлоузловой, удвоения периода), и может быть активирована соответствующим выбором параметра автономной системы. Шум при этом играет вспомогательную роль, а частота индуцированных им колебаний полностью задается свойствами детерминированной системы (так называемые «шумовые предвестники бифуркаций»).

Однако позднее (Pikovsky, Kurths, 1997г.) был предложен другой механизм данного эффекта, применимый к классу так называемых *возбудимых систем* и основанный на изменении соотношения двух характерных времен, из которых складывается квазипериод t_p, который здесь понимается как интервал времени между одинаковыми состояниями системы. Одно из упомянутых времен, **время релаксации** t_e (excursion time) соответствует относительно медленному движению системы из возбужденного состояния к состоянию равновесия. Это время слабо зависит от наличия флуктуаций и определяется свойствами самой системы. Другое – **время активации** t_a (activation time) – представляет собой, по сути, статистический временной масштаб, и описывает процесс «выбрасывания» изображающей точки из состояния равновесия в возбужденный режим. Время активации непосредственно управляется интенсивностью шума.

Баланс двух указанных времен и определяет появление оптимального диапазона интенсивности шума, в котором регулярность (степень периодичности) генерируемых импульсов максимальна. Существенно, что при этом не предполагается близости системы к какой-либо точке бифуркации, данный механизм когерентного резонанса не требует наличия замкнутых фазовых траекторий в детерминированной системе.

Степень регулярности последовательности импульсов, генерируемых возбудимой системой под воздействием шума, предлагается оценивать как $R = \sqrt{\langle t_p^2 \rangle - \langle t_p \rangle^2} / \langle t_p \rangle$. Как можно видеть, R представляет собой дисперсию интервалов между импульсами, нормированную на их среднее значение.

Важно, что указанные времена, а также их флуктуации по разному зависят от амплитуды (и интенсивности) шума. Время активации быстро уменьшается с амплитудой шума, так как в соответствии с формулой Крамерса

$$\langle t_a \rangle \sim e^{const/D}. \tag{11}$$

Можно также показать, что для слабого шума

$$\langle t_p^2 \rangle - \langle t_p \rangle^2 \approx \langle t_a \rangle^2. \qquad (12)$$

Поэтому для слабого шума, когда $t_a \gg t_e$ и период определяется в основном временем активации, флуктуации длительности импульсов относительно велики $R_p \approx R_a \approx 1$. Для сильного шума вклад времени активации в значение периода перенебрежимо мал и период приблизительно равен времени релаксации, $t_p \approx t_e$. Если движение в возбужденном состоянии приблизительно однородно, $\langle t_e \rangle$ слабо зависит от амплитуды шума, а его вариация может быть оценена как $\sim D \langle t_e \rangle$, то есть, флуктуации растут вместе с увеличением амплитуды шума. В этом режиме $R_p \approx R_e \sim \sqrt{D/\langle t_e \rangle}$. Когерентный резонанс, то есть минимум зависимости $R(D)$ появляется, если порог возбуждения достаточно мал, а время релаксации достаточно велико. В этом случае минимум соответствует такой амплитуде шума, что $t_a \ll t_e$, но флуктуации времени релаксации остаются малыми, $R_e(D_{res}) < 1$.

Для иллюстрации данного механизма когерентного резонанса была предложена несложная аналитическая модель. А именно, считая, что в исходной возбудимой системе возмущенная траектория быстро выходит на траекторию, соответствующую генерации импульса (это справедливо для систем с выраженными релаксационными свойствами), можно приближенно описать ее динамику с помощью уравнения

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial y} + \sqrt{D}\xi(t), \qquad (13)$$

где $\xi(t)$ представляет шум, а $U(y)$ есть нелинейный потенциал с единственным минимумом (как результат, уравнение имеет единственное устойчивое состояние равновесия). В рамках этого подхода генерация импульса и возврат к исходному состоянию могут быть представлены следующим образом: когда y достигает порогового значения $y = 0$, оно мгновенно перебрасывается (переустанавливается) в область отрицательных значений $y = y_0$. В такой интерпретации последовательность импульсов заменяется последовательностью интервалов изменения переменной y от y_0 до 0 и перебросов между ними. Поскольку на каждом из интервалов дрейфа переменной ее динамика описывается Ланжевеновским уравнением (13), возможно применение метода уравнения Фокера-Планка для нахождения статистических характеристик длительности интервалов t_p. По сути, эта длительность представляет собой время первого достижения границы для случайного процесса, стартующего в точке $y = y_0$ с поглощающей границей в $y = 0$. Уравнения для моментов в этом случае хорошо известны. Вид решения для первого и второго момента имеет следующую форму:

$$\langle t_p(y_0) \rangle = \frac{2}{D} \int_{y_0}^{0} dv \int_{-\infty}^{v} du \, exp \left(2 \frac{U(v) - U(u)}{D} \right), \tag{14}$$

$$\left\langle t_p^2(y_0) \right\rangle = \frac{4}{D} \int_{y_0}^{0} dv \int_{-\infty}^{v} du \, \langle t_p(u) \rangle \; exp \left(2 \frac{U(v) - U(u)}{D} \right). \tag{15}$$

Расчеты для простейшего представления потенциала в виде $U(y) = -Ay$ при $y < -1$ и $U(y) = A + B + By$ если $-1 < y < 0$ (минимум потенциала в $y = -1$ определяет положение устойчивой неподвижной точки) позволяют получить аналитическое выражение для величины R, которое характеризует степень когерентности колебаний. Соответствующие кривые приведены на Рис. 10. Как можно видеть, для слабого шума $R \approx 1$, что соответствует Пуассоновской статистике времен активации при слабом шуме. В области сильного шума $R \sim \sqrt{D}$. Выраженность минимума, соответствующего проявлению когерентного резонанса зависит от параметров модели A, B и y_0. В соответствии с приведенными выше рассуждениями наблюдаемый минимум становится глубже по мере того, как увеличивается время релаксации (при больших значениях $|y_0|$). Следует заметить, что описанный выше подход дает достаточно общее описание когерентного резонанса. При этом особенности данной конкретной системы отражаются свойствами потенциала и граничными условиями.

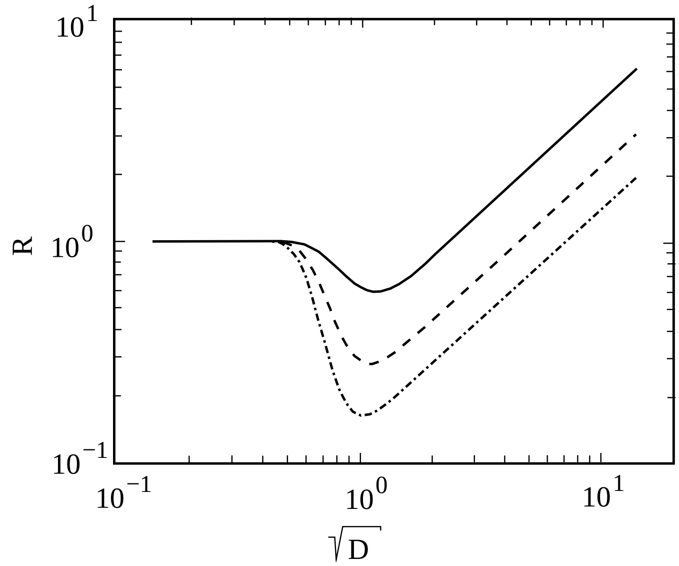


Рис. 10: Теоретически рассчитанная зависимость степени регулярности R от интенсивности шума D для модельной системы (13) с кусочно-линейным потенциалом.

4.2 Количественные характеристики когерентного резонанса

Определение частоты стохастических колебаний.
Здесь возможны как минимум два подхода, один из которых состоит в прямом измерении ω_m – положения наиболее высокого пика в спектре мощности, а другой – в вычислении среднего квазипериода колебаний $\langle t_p \rangle$ и, соответственно, средней частоты $\omega_p = 1/\langle t_p \rangle$. Заметим, что одним из признаков наличия эффекта когерентного резонанса в стохастической системе можно считать $\omega_m \approx \omega_p$.

Регулярность индуцированных шумом колебаний.
Так как проявление эффекта когерентного резонанса заключается в том, что поведение системы становится более регулярным, близким к периодическому, то требуется метод оценки степени этой близости. Здесь возможны различные подходы, описанные ниже.

Расчет автокорелляционной функции.

Это, возможно, наиболее естественный способ характеризовать степень регулярности некоторого процесса. Нормированная автокорелляционная функция и соответствующее ей время корреляции задаются следующими соотношениями:

$$
\begin{aligned}
C(\tau) &= \frac{\langle \tilde{y}(t)\tilde{y}(t+\tau)\rangle}{\langle \tilde{y}^2\rangle}, \quad \tilde{y} = y - \langle y \rangle \,, && (16) \\
\tau_c &= \int_0^\infty C^2(t)dt. && (17)
\end{aligned}
$$

Чем больше время корелляции τ_c, тем ближе процесс к периодическому. С технической точки зрения прямое вычисление автокорелляционной функции требует значительных вычислительных затрат. Возможно вычисление $C(\tau)$ на основе спектра мощности, однако, при его наличии возможны и более простые способы, рассмотренные ниже.

Ширина спектрального пика. Вариант 1.

Регулярность вычисляется как отношение абсолютной высоты пика в спектре H_m и его относительной ширины:

$$\alpha_1 = H_m \frac{\omega_m}{\Delta\omega}. \tag{18}$$

Заметим, что обратная величина относительной ширины есть не что иное, как добротность, рассчитанная по спектру. Однако, при расчете по формуле (18) не ясно, как учитывать возможное наличие более или менее высокого шумового пьедестала.

Ширина спектрального пика. Вариант 2.

Абсолютная высота пика заменяется на относительную, нормированную на высоту шумового пьедестала H_b, которому приписывается некоторый определенный уровень:

$$\alpha_2 = \frac{H_m}{H_b} \frac{\omega_m}{\Delta\omega}. \tag{19}$$

Эта формула более универсальна и хорошо работает до тех пор, пока в спектре имеется единственный выраженный пик.

Относительный разброс интервалов между импульсами.

Эта величина уже обсуждалась выше. Напомним, что она рассчитывается как

$$R = \frac{\sqrt{\langle t_p^2 \rangle - \langle t_p \rangle^2}}{\langle t_p \rangle}. \tag{20}$$

Описанные выше методы удовлетворяют потребностям качественного рассмотрения эффекта когерентного резонанса в относительно простых ситуациях, когда выходной спектр мощности содержит единственный четко выраженный максимум. Для успешного решения задач о взаимной и вынужденной синхронизации таких систем этого оказалось недостаточно. В этом случае может использоваться более общий способ определения регулярности колебаний, основанный на вычислении энтропии по спектру.

Применение формулы для энтропии к спектру мощности

Практически универсальный способ для количественной характеристики степени регулярности колебаний с использованием спектра мощности основан на использовании известной формулы для расчета энтропии E. Ниже приводятся выражения для подсчета по дискретному временному ряду длиной $2n$ и соответственно, спектру мощности из n отсчетов. Спектр мощности $P(\omega)$ сначала нормируется,

$$s_n(\omega_i) = \frac{P(\omega_i)}{\sum_{i=1}^{i=n} P(\omega_i)},$$

затем вычисляется значение энтропии

$$E = -\sum_{i=1}^{i=n} s_n(\omega_i) ln(s_n(\omega_i)).$$

С учетом того, что максимальное значение энтропии достигается при равномерном спектре (белый шум) и составляет

$$E_{max} = -\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{n} ln(\frac{1}{n}),$$

регулярность β может быть определена как

$$\beta = 1 - \frac{E}{E_{max}}. \tag{21}$$

В таком определении значение β реагирует, по сути, на изрезанность спектра, принимая максимальное значение 1.0 в случае гармонических колебаний, и минимальное 0 – для белого шума.

Каждый из описанных выше вариантов расчета степени регулярности работоспособен, но область их применения несколько различна. Различна и их чувствительность к тем или иным особенностям сигнала отклика. Например, при расчете относительной ширины спектральной линии максимального пика выбрасывается из рассмотрения остальная часть спектра, расчет регулярности по вариабельности интервалов между импульсами игнорирует наличие флуктуаций сигнала в промежутке между ними и разброс амплитуд импульсов, и т.д. Задачей исследователя является выбор характеристики, наиболее отвечающей потребностям исследования конкретной системы и, по возможности, наименее затратной с вычислительной точки зрения.

4.3 Методика измерения в эксперименте частоты и ширины спектрального максимума индуцированных шумом колебаний

Пример вида спектра мощности в режиме когерентного резонанса и расположения маркеров в процессе измерения приведен на Рис. 11. Описанные выше характеристики индуцированных шумом колебаний измеряются с использованием вкладки 3 программы «Спектр» (верхний ряд указателей).

А именно:

- средняя частота по спектру $< f >$ считывается с первого слева указателя;

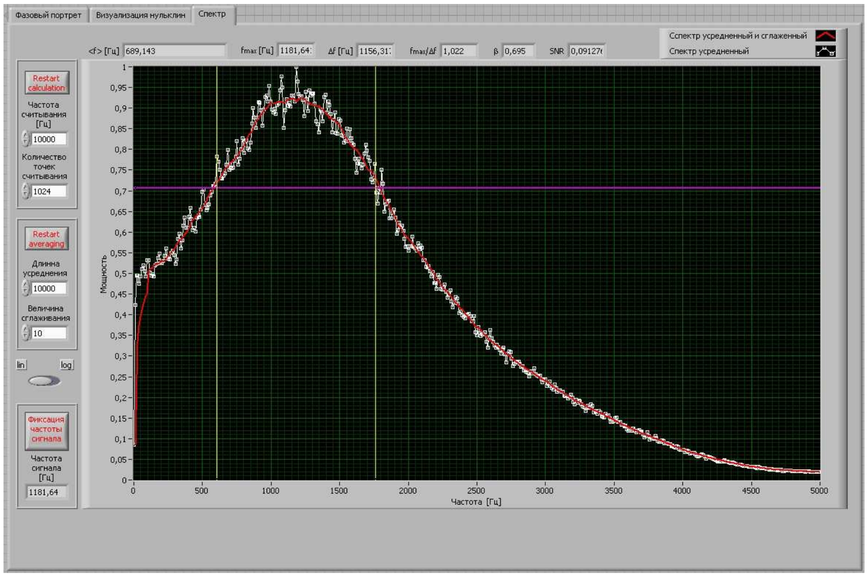


Рис. 11: Интерфейс вкладок программы обработки данных при измерении параметров спектра мощности индуцированных шумом колебаний.

- положение пика спектра f_{max} считывается со второго слева указателя;

- для расчета ширины спектрального пика сигнала (тип спектра – «линейный») вертикальные маркеры в окне спектра устанавливаются в местах, аппроксимирующих пересечение графиком спектра уровня половинной мощности. При этом в указателе Δf автоматически высвечивается ширина спектральной линии, а в указателе $f_{max}/\Delta f$ – величина рассчитанной таким образом регулярности.

- величина регулярности β рассчитывается и высвечивается в соответствующем индикаторе при нажатии кнопки «Restart calculation» в левой верхней части вкладки.

4.4 Задание на экспериментальное исследование

- Установить следующие начальные значения параметров: «Ф.Г.» – ВЫКЛ, «ШУМ» – ВЫКЛ, «R_2»=X Ом (ВКЛ), «L» – ВКЛ «C»=10 нФ(ВКЛ), «Н.Э.»=1 при использовании туннельного диода либо «Н.Э.»=2 при использовании конвертера на ОУ, «РЕЖИМ»=1. Установить значения параметров «E» и «R_1» в области возбудимого режима, недалеко от линии возбуждения автоколебаний (использовать результаты выполнения задания по теме I).

- Переключиться на вкладку 1 интерфейса программы.

- Включить тумблер «ШУМ» и генератор шума. Плавно увеличивая интенсивность ручкой генератора шума, наблюдать появление индуцированных шумом импульсов. Приблизительно оценить, как меняются с увеличением интенсивности шума (а) средняя величина интервалов времени между импульсами и (б) длительность самих импульсов. Для этого использовать возможность однократного запуска программы сбора данных и управления длиной считываемой временной реализации, а также деления шкалы графика.

- Переключиться на вкладку 3 программы (переключатель режимов установки остается в положении 1) и исследовать эволюцию спектра индуцированных шумом колебаний для выбранных значений параметров устройства при росте интенсивности шума D (определяется по калибровочному графику, приложенному к генератору шума). А именно, для каждого значения D провести измерение (а) средней частоты индуцированных шумом колебаний, (б) положения глобального максимума спектра, (в) ширины спектральной линии, (г) величины регулярности по всем трем описанным выше методикам. Полученные результаты представить в виде таблицы и графиков. Дать объяснение полученным результатам, в том числе – различному поведению величин регулярности $\alpha(D)$, $\beta(D)$ и $\gamma(D)$. Соотнести полученные результаты с известными механизмами когерентного резонанса.

- Исследовать степень проявления эффекта когерентного резонанса, изменяя релаксационные свойства исследуемой системы. Для этого необходимо последовательно устанавливать различные значения емкости (за искдючением нулевого) с помощью переключателя C, каждый раз находя оптимальное значение интенсивности шума D и соответствующее ему значение регулярности.

5 Лабораторная работа III. Экспериментальное исследование эффекта стохастического резонанса

5.1 Физические основы эффекта. Основные понятия.

Термин стохастический резонанс был введен в 1981 году в статье R.Benzi, A.Sutera, A.Vulpiani, в которой авторы исследовали периодичность наступления ледниковых периодов и обнаружили усиление слабого сигнала при наложении шума. В 1983 году это явление было подробно исследовано в триггере Шмитта и потом было открыто во многих физических, химических и биологических системах.

Рассмотрим какую-либо бистабильную систему, обладающую к тому же диссипацией, трением. Под действием достаточного внешнего воздействия система сможет перейти в другое состояние. Если достаточное внешнее воздействие периодическое, то система также будет периодически переходить из одного состояния в другое. Но недостаточное (подпороговое) воздействие не вызовет отклика системы. Если внешнее воздействие беспорядочно (шум), то система хаотически блуждает, и спустя неопределённое время, средняя длина которого зависит от мощности шума, сможет перескочить из одного положения в другое. Динамика таких скачков будет беспорядочной.

Рассмотрим теперь суммарный эффект подпорогового периодического и хаотического воздействий. Само по себе подпороговое периодическое возмущение не сможет перебросить систему в другое состояние, однако шум помогает этому, подводя воздействие к критическому состоянию. В результате в отклике системы проявляется периодичность, как раз определяемая слабым периодическим воздействием. Оптимальной (приводящей к максимальному отношению сигнала к шуму) является такая мощность шума, при которой характерное время жизни системы в одном состоянии равно половине периода периодического возмущения. Слишком сильный или слишком слабый шум приводят к меньшей чувствительности системы к слабому периодическому воздействию.

5.2 Краткие теоретические сведения

В своей классической постановке проблема стохастического резонанса формулируется применительно к бистабильным системам, часто встречающимся в самых разных областях науки. А именно, рассматривается одномерная бистабильная динамическая система, на которую одновременно воздействует шум и слабое периодическое воздействие:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial x} + \sqrt{D}\xi(t) + \epsilon h(x)\cos(\omega_0 t + \phi). \tag{22}$$

Здесь x – фазовая переменная, а U – потенциал, определяющий автономную динамику системы. Предполагается, что он имеет два минимума, расположенные в точках x_+ и x_-, которые соответствуют двум устойчивым состояниям системы и разделены максимумом x_0, соответствующим неустойчивому состоянию. $\sqrt{D}\xi(t)$ – это случайная сила, представляющая внутренние флуктуации или внешний шум. Обычно считается, что это гауссов белый шум с нулевым средним и интенсивностью D. Наконец, величины ϵ, ω_0 и ϕ задают амплитуду, частоту и фазу периодического сигнала соответственно.

Заметим, что периодический сигнал может быть включен в выражение для потенциала следующим образом:

$$W(x,t) = U(x) - \epsilon g(x)\cos(\omega_0 t + \phi), \tag{23}$$

где $g(x)$ определяется соотношением $\frac{dg(x)}{dx} = h(x)$. Ниже будем называть $W(x,t)$ обобщенным потенциалом.

Из теории стохастических процессов известно, что уравнению (22) может быть сопоставлено уравнение Фокера–Планка для функции распределения плотности вероятности $P(x,t)$. В отсутствие периодического воздействия это уравнение задает определенный тип Марковского процесса, известный как диффузионный процесс. А именно, переменная x большую часть времени флуктуирует в окрестности x_+ или x_- и время от времени совершает перескоки из x_+ или x_- и обратно через максимум x_0, играющий роль потенциального барьера. То, насколько часто происходят такие переходы, определяется двумя величинами: интенсивностью шума D и величиной потенциального барьера $\Delta U_{\pm} = U(x_0) - U(x_{\pm})$

В пределе слабого шума $D << \Delta U_{\pm}$ среднее значение времени между переходами дается знаменитой формулой Крамерса:

$$\tau_{\pm}^{-1} = r_{\pm} = \frac{1}{2\pi}(-U''(x_0)U''(x_{\pm}))^{1/2}\exp(-\frac{\Delta U_{\pm}}{D/2}), \tag{24}$$

где двойным штрихом обозначена вторая производная от потенциала по координате. Заметим, что сами по себе индуцированные шумом перескоки также происходят случайным образом, дисперсия времен между ними вокруг определенного выше среднего значения сопоставима с величиной самого среднего $\tau_{\pm}$.

Если теперь включить периодическое воздействие, то потенциал U заменяется на обобщенный потенциал W. Соответствующий потенциальный барьер $\Delta W_{\pm}$ теперь меняется во времени периодически. При этом глубина минимумов $x_{\pm}$ последовательно становится то больше, то меньше, чем в отсутствии периодического воздействия. Очевидно это либо затрудняет, либо облегчает перескок из одной потенциальной ямы в другую. Можно также ожидать, что этот эффект будет наиболее выражен, когда периодичность воздействия близка к времени Крамерса в уравнении (24).

Оказывается, эта интуитивная идея полностью оправдывается в ассимптотическом пределе слабого шума, когда уравнение Фокера–Планка может быть сведено (в адиабатическом приближении) к замкнутому уравнению для вероятности $p_{\pm}$ нахождения x в бассейнах притяжения потенциальной ямы x_+ или x_-:

$$\frac{dp_+(t)}{dt} = r_-(t)p_-(t) - r_+(t)p_+(t), \tag{25}$$

где $p_+ + p_- = 1$, а $r_{\pm}$ дается выражением вида (24), в котором U заменен на обобщенный потенциал W. Это уравнение допускает прямое решение. В большинстве исследований по стохастическому резонансу результат далее раскладывается в ряд до первого нетривиального порядка по амплитуде периодического сигнала ϵ. В простейшем случае полагают $h(x) = 1$ (и, соответственно, $g(x) = x$), а потенциал задают в следующей форме:

$$U(x) = -\lambda x^2/2 + x^4/4, \quad \lambda > 0. \tag{26}$$

При этом потенциальные ямы расположены $x_\pm = \pm\lambda^{1/2}$, а максимум потенциала находится в нуле: $x_0 = 0$. Описанная выше постановка задачи приводит к следующему выражению для периодической компоненты $\delta p(t)$ отклика:

$$\delta p(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi + \psi), \tag{27}$$

где амплитуда A, и фазовый сдвиг ψ определяются как

$$A = \epsilon\frac{\lambda}{D}\frac{r(D)}{(r^2(D) + \omega_0^2/4)^{1/2}}, \quad \psi = -\arctan(\frac{\omega_0}{2r}). \tag{28}$$

Здесь $r(D) = r_+ = r_- = (\sqrt{2}\pi)^{-1}\lambda\exp(-\lambda^2/(2D))$ для модели с симметричным потенциалом.

Наиболее важные результаты проведенного выше анализа можно подытожить следующим образом:

- Переходы через потенциальный барьер в среднем следуют внешнему периодическому воздействию (синхронизованы).
- Периодическая компонента отклика системы мала до тех пор, пока период внешней силы не станет близким к времени Крамерса, который управляется шумом.
- Для заданных ω_0 и ϵ амплитуда периодической компоненты отклика A имеет выраженный максимум на некоторой конечной интенсивности шума D (см. Рис. 12), тем самым значительно усиливается отклик системы на слабый периодический сигнал. Это свойство принципиально отличает стохастический резонанс от эффекта классического резонанса.

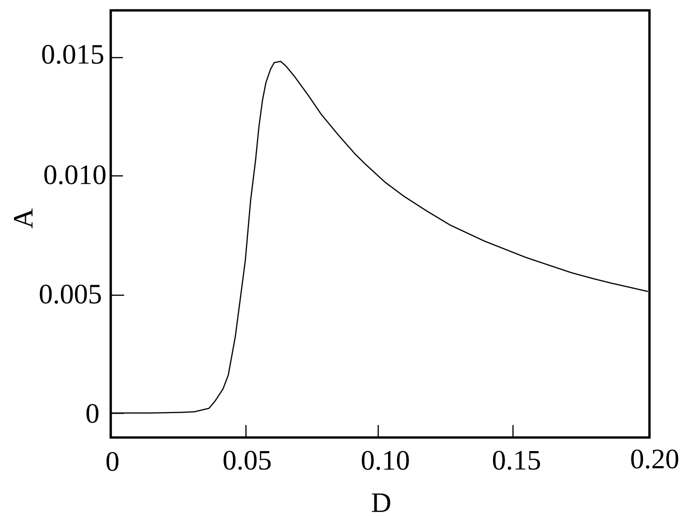


Рис. 12: Теоретически рассчитанная зависимость амплитуды периодической составляющей на выходе бистабильной системы с потенциалом в форме (26) в зависимости от интенсивности шума D, при $\lambda = 1,\ \omega_0 = 2\pi/10^5,\ \epsilon = 0.001$.

5.3 Характеристики стохастического резонанса

Отношение сигнал/шум (SNR).

Помимо периодичности отклика на уровне вероятности (уравнение (27)) процесс, задаваемый (22), содержит выраженную случайную составляющую. Величина отношения сигнал/шум является характеристикой, количественно выражающей относительный вклад шума и периодической составляющей отклика системы. SNR расчитывается на основе спектра мощности $G_{xx}(\omega)$ переменной x, рассчитанной, например, как Фурье-преобразование от его автокорреляционной функции. В присутствии слабого периодического сигнала воздействия $G_{xx}(\omega)$ может быть разложен на вклад от шумового пьедестала $G_{xx}^{(0)}(\omega)$ и вклад от самого периодического сигнала, который пропорционален сумме дельта-пиков, расположенных на частотах $\pm\omega_0$. При этом SNR определяется как отношение мощности $G_{xx}^{(0)}(\omega)$ на частоте сигнала ω_0 к общей мощности $G_{xx}(\omega)$ в малом интервале частот $\Delta\omega$, окружающем ω_0 в пределе $\Delta\omega$ стремящемся к 0. Подобно графику для амплитуды периодической компоненты отклика системы, кривая зависимости SNR от интенсивности шума имеет выраженный максимум при некотором конечном значении D.

Распределение времен пребывания.
В рамках адиабатического приближения и в отсутствии периодического сигнала время Θ, которое система проводит в бассейне притяжения $x_{\pm}$ есть случайная величина, чья функция распределения вероятности убывает экспоненциально с Θ. Наличие периодического сигнала приводит к появлению набора пиков, каждый из которых напоминает Гауссово распределение, в то время как огибающая по прежнему убывает экспоненциально. С точки зрения этой характеристики стохастический резонанс проявляется усилением первого пика, соответствующего половине периода сигнала. Этот факт отражает наличие определенной степени фазовой синхронизации между процессом переключений и периодическим воздействием.

5.4 Источники информации для дальнейшего чтения

В приведенном выше описании использованы материалы из
*http://ru.wikipedia.org/wiki/*Стохастический_резонанс
и *http://en.wikipedia.org/wiki/Stochastic_resonance*). Обширную и детальную информацию по эффекту стохастического резонанса и его теоретическому описанию можно найти в книге и обзоре:

- В.С. Анищенко, В.В. Астахов, Т.Е. Вадивасова, А.Б. Нейман, Г.И. Стрелкова, Л. Шиманский-Гайер. Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах Москва, Ижевск, 2003. (Глава 3, а также Глава 1, раздел 1.2)

- Анищенко В.С. и др., Стохастический резонанс как индуцированный шумом эффект увеличения степени порядка, УФН, т.169,1999, N1.

5.5 Методика экспериментального измерения отношения сигнал/шум

Экспериментальное измерение отношения сигнал/шум производится на основе предварительно рассчитанного усредненного спектра мощности (вкладка 3 программы анализа данных). Предварительно, должна быть произведена точная настройка частоты внешнего периодического сигнала и параметров считывания периодограмм, как это описано ниже в задании на экспериментальное исследование. В результате внешний сигнал должен отображаться в усредненном спектре пиком шириной в один отсчет. Далее перемещением двух вертикальных маркеров устанавливается желаемая полоса частот для определения уровня шумового пьедестала. Как правило, чем лучше усреднен спектр, тем уже может быть полоса частот и тем точнее аппроксимация уровня шумового пьедестала. По выполнению указанных выше действий, в указателе SNR высветится оценка отношения мощностей сигнала и шума на частоте сигнала. Типичный вид спектра в режиме стохастического резонанса при достаточном для измерения усреднении приведен на Рис. 13.

5.6 Задание на экспериментальное исследование

- Установить следующие начальные значения параметров: «L» – ВЫКЛ, «Ф.Г.» – ВЫКЛ, «ШУМ» – ВЫКЛ, «R_2»=X Ом (ВКЛ), «C»=10 нФ (ВКЛ), «Н.Э.»=1 при использовании туннельного диода, либо «Н.Э.»=2 при использовании конвертера на ОУ, «РЕЖИМ»=1. Установить значения параметров «E» и «R_1» в области бистабильного режима. Для этого использовать результаты выполнения задания по теме I, либо переключиться в режим 2 установки и вкладку 2 программы.

- Переключиться на режим 1 и вкладку 1 интерфейса программы.

- Установить «Ф.Г.» – ВКЛ и включить внешний функциональный генератор. Установить частоту f_0 синусоидального периодического сигнала около 100Гц. Увеличивать амплитуду A сигнала до по-

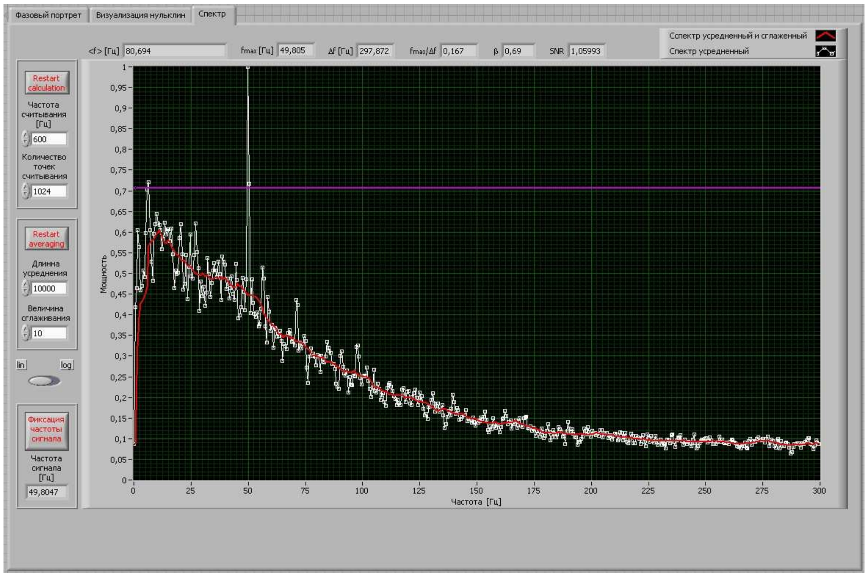


Рис. 13: Типичный вид спектра мощности в режиме стохастического резонанса при измерении отношения сигнал/шум.

явления индуцированных сигналом переключений системы. Подстройкой параметров R_1 и/или E добиться симметрии выходного сигнала (равные по длительности состояния высокого и низкого уровня).

- Плавно уменьшая амплитуду A периодического сигнала, найти ее значение, при котором переключения пропадают. Зафиксировать это значение, как пороговое A_0, а затем установить $A = 0.1A_0$.

- Переключиться на вкладку 3 программы (переключатель режимов установки остается в положении 1). Изменением параметра длины реализации при расчете спектра и плавной подстройкой частоты сигнала f_0 добиться, чтобы спектральный пик, соответствующий сигналу был максимально узким (ширина пика в 1 отсчет спектра – отлично, в 3 отсчета – удовлетворительно). На этом настройка установки закончена.

  (ВНИМАНИЕ!) В дальнейшем при каждом изменении частоты периодического сигнала необходимо повторять указанную выше операцию, иначе точность расчета величин усиления и отношения сигнал/шум будет низкой.

- Переключиться на вкладку 1 программы, включить тумблер «ШУМ» и генератор шума. Плавно увеличивая интенсивность ручкой генератора шума, наблюдать появление индуцированных шумом переключений бистабильной системы. Приблизительно оценить, как меняются с увеличением интенсивности шума средняя величина интервалов времени между переключениями, для чего использовать возможность однократного запуска программы сбора данных и управления длиной считываемой временной реализации, а также деления шкалы графика.

- Переключиться на вкладку 3 программы (переключатель режимов установки остается в положении 1). Получить графики усредненного спектра выходного сигнала установки для ряда значений интенсивности шума D. Для каждого значения зафиксировать амплитуду периодической составляющей сигнала и величину отношения сигнал/шум. Представить полученные данные в виде графиков зависимости от D. Объяснить полученные результаты, опираясь на теоретические сведения об эффекте стохастического резонанса.

- Исследовать, как зависят оптимальное значение интенсивности шума D и соответствующее максимальное отношение сигнал/шум (SNR) от (а) симметрии характеристики системы (б) частоты периодического сигнала и (в) его амплитуды.

- Исследовать явление захвата частоты переключений стохастической бистабильной системы внешним периодическим сигналом. Для этого установить амплитуду сигнала около $A = (0.7 \pm 0.1)A_0$. Плавно увеличивая интенсивность шума, провести измерения средней частоты переключений. Полученные результаты представить в виде графика и обьяснить.