

2. Установить генератор сигналов в режим свипирования частоты. Для этого вытянуть регулятор MUNU-SWEEP установить наружную ручку в крайнее правое положение, а внутреннюю – в крайнее левое положение. Обе ручки регулятора SWEEP-TIME установить в крайнее правое положение.

3. Установить переключатель **РЕЖИМ РАБОТЫ** в положение **12** или в положение **21**, подключить 1-й канал осциллографа к выходу 1, сместить линию развертки к нижнему краю экрана, установить чувствительность канала 50 мВ/дел, коэффициент развертки - 5 мс/дел и развертку в положение EXT/АС. При этом на экране осциллографа появится двугорбая АЧХ (резонансная кривая). Регулируя время сканирования и полосу девиации, можно растягивать и сжимать АЧХ. Ее необходимо зарисовать и объяснить, почему при выбранных параметрах контуров она оказывается двугорбой.

3. Изменяя сопротивление $R_{1,1}$ и R_2 , при неизменном $C_{св}$, деформируйте резонансную кривую до П-образной формы.

4*. Выключить частотное сканирование. Не изменяя настроек контуров, снять АЧХ сначала 1-го, затем 2-го контура, переключая переключатель **РЕЖИМ РАБОТЫ** из положения **1** в положение **2** и обратно. Рассчитать добротности и полные сопротивления контуров по описанной выше методике, а затем найти резистивные проводимости эквивалентных параллельных контуров G_1 , G_2 , фактор связи A и проверить выполняется ли условие полного резонанса.

5*. Используя полученные параметры связанной системы, рассчитать по формуле (22) нормированную АЧХ связанной системы. Для этого представить A и ξ в виде:

$$\xi = \frac{\omega_0 C_{12}}{\sqrt{G_1 G_2}} \left(\frac{\omega - \omega_0}{\omega} \right) = \frac{1}{\sqrt{G_1 G_2}} \left(\omega C_{1\sigma} - \frac{1}{\omega L_1} \right), \quad A = \frac{\omega C_{св}}{\sqrt{G_1 G_2}}. \quad (23)$$

Установить переключатель **РЕЖИМ РАБОТЫ** в положение **12** или в положение **21**, подключить 1-й канал осциллографа к выходу 1, а к выходу 2 – электронный милливольтметр. Перестраивая генератор сигналов в пределах полосы пропускания и поддерживая амплитуду входного сигнала постоянной, снять и построить АЧХ связанной системы для полного резонанса.

Сопоставить полученную АЧХ с рассчитанной теоретически, изобразив их на одном рисунке и в одинаковом масштабе.

ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ В СВЯЗАННЫХ LCR-КОНТУРАХ

*Учебное пособие для спецтрактукума по курсу
"Теоретические основы радиоэлектроники"*

Ц е л ь р а б о т ы: исследование собственных и вынужденных колебаний, а также резонансных явлений в системе из двух LCR-контуров с емкостной связью.

Литература

1. Калинин В.И., Герштейн Г.М. Введение в радиофизику. М.: Гостехиздат, 1957
2. Хохлов А.В. Теоретические основы радиоэлектроники. Саратов. Изд-во Саратов. ун-та, 2005.
3. Харкевич А.А. Основы радиотехники. М.: Связь-издат, 1963
4. Стрелков С.П. Введение в теорию колебаний. М.: Наука, 1954.
5. Зернов Н.В., Карпов В.Г. Теория радиотехнических цепей. Л.: Энергия, 1972

Контрольные вопросы:

1. Что понимают под парциальными и нормальными частотами связанных контуров? Какими соотношениями связаны между собой нормальные и парциальные частоты в консервативной системе связанных контуров?
2. Какими формулами описываются коэффициент и фактор связи емкостно-связанных параллельных контуров? Каков физический смысл этих соотношений?
3. Как свести систему связанных контуров к эквивалентному контуру? Каковы соотношения для комплексной проводимости эквивалентного контура? В чем заключается физический смысл внесенных активной и реактивной проводимостей?
4. Каковы условия резонанса в связанных колебательных контурах? Каков вид АЧХ связанных контуров при индивидуальном, полном и сложных резонансах?
5. Какой вид резонанса имеет место, если фактор связи равен 0.9; 1.0; 1.6; 2.41; 3.4?

Задания для самостоятельной работы

1. Вывести уравнения (1), (2), (7), (15).
2. Построить графики Вина (зависимости приведенных нормальных частот от расстройки и коэффициента связи) для $k = 0.05, 0.1, 0.175$ и ζ от 0 до 1.5.
3. Вывести формулы для расчета резистивных сопротивлений катушек индуктивности.
4. Вывести формулы для резонансных резистивных проводимостей параллельных контуров.
5. Вывести уравнения АЧХ емкостно-связанных параллельных контуров.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Колесательные контуры называются *связанными*, если физические процессы, протекающие в одном из них, влияют на ход процессов в других контурах. Связанные *колебательные контуры* благодаря своим *частотным свойствам* являются основными элементами при построении полосо-вых фильтров, формирующих частотные характеристики радиовещательных и телевизионных каналов.

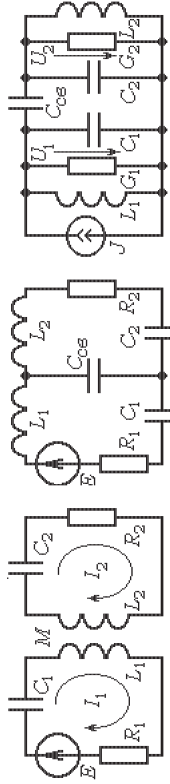


Рис. 1. Индуктивно- (а) и емкостно-связанные последовательные (б) и параллельные (в) контуры

В радиоэлектронике чаще других используются двухконтурные системы с индуктивной (рис. 1, а) и емкостной (рис. 1, б и 1, в) связью. В лабораторной работе будут исследоваться система двух параллельных колебательных контуров с емкостной связью (рис. 1, в).

Дифференциальные уравнения связанных параллельных контуров

Представим рассматриваемую двухконтурную систему (рис. 1, в) в виде совокупности двух *парциальных одноконтурных подсистем*, каждая из которых полностью описывается одной переменной. Выберем в качестве независимых переменных напряжения на контурах U_1 и U_2 и запишем интегро-дифференциальные уравнения в виде:

$$C_1 \frac{dU_1}{dt} + C_1 U_1 + \frac{1}{L_1} \int U_1 dt + C_{св} \frac{d(U_1 - U_2)}{dt} = J, \quad (1)$$

$$C_2 \frac{dU_2}{dt} + C_2 U_2 + \frac{1}{L_2} \int U_2 dt + C_{св} \frac{d(U_2 - U_1)}{dt} = 0. \quad (2)$$

Отсюда

$$\frac{dU_1}{dt} + 2\alpha_1 U_1 + \omega_{01}^2 \int U_1 dt - k_1^C \frac{dU_2}{dt} = \frac{J}{C_{св}},$$

$$\frac{dU_2}{dt} + 2\alpha_2 U_2 + \omega_{02}^2 \int U_2 dt - k_2^C \frac{dU_1}{dt} = 0,$$

2

переключатель **РЕЖИМ РАБОТЫ** в положение **12**, измерять резонансные частоты для различных значений ζ . Рассчитать Ω_1, Ω_2 для всех ζ и отменить полученные значения на теоретически рассчитанных графиках Вина.

Коэффициент связи $= 0.175$

5. Установить частоту генератора 80 кГц, переключатель **РЕЖИМ РАБОТЫ** в положение **1** и, подбирая емкости C_1 и $C_{св}$ так, чтобы $k^C = 0.175$, настроить 1-й контур в резонанс. Найденные значения $C_1, C_{св}$ и k^C записать.

6. Используя методику, описанную в п.п. 2–4, снять и построить на графиках Вина результаты измерений для $k^C = 0.175$.

Полученные результаты объяснить.

2. Исследование формы связанных колебаний

1. Установить $C_{св} = 40$ пФ, настроить поочередно, переключая **РЕЖИМ РАБОТЫ** из положения **1** в положение **2** и обратно, оба контура на частоту 70 кГц. Подключить 2-й канал осциллографа к выходу 2 и установить переключатель **РЕЖИМ РАБОТЫ** в положение **СВЯЗ**.

2. Для наблюдения формы колебаний установить чувствительность каналов 20 мВ/дел, коэффициент развертки - 0.1 мс/дел и развертку в положение СН1/АС. Установить удобное расположение осей сигналов и записать полученные осциллограммы.

3. Определить число периодов колебаний, укладываемыхся на периоде огибающей и сопоставить с теоретическим значением, соответствующим выбранной связи. Изменяя $C_{св}$, зарисовать несколько осциллограмм и рассчитать для них числа периодов колебаний, укладываемыхся на полуцикле огибающей.

Б. Исследование вынужденных колебаний

1. Определение характеристик параллельных колебательных контуров

1. Установить $R_{1,2}$ и $R_{2,2}$ в положение, соответствующие нулевому сопротивлению, и $C_{св} = 10$ пФ. Переключая **РЕЖИМ РАБОТЫ** из положения **1** в положение **2** и обратно и перестраивая генератор сигналов, измерить резонансную частоту контура и его полосу пропускания на уровне половинной мощности сначала для 1-го, а затем для 2-го контура на частоте 70 кГц. Вычислить добротности контуров.

2. Определить величины индуктивностей контуров на этих частотах и рассчитать их сопротивления R_{L1} и R_{L2} . Используя методику, описанную в [2, с. 186] рассчитать резистивные проводимости эквивалентных параллельных контуров и сравнить их с проводимостью элемента связи на тех же частотах.

2. Исследование частотного, полного и сложного резонансов

Исследование различных видов резонансных явлений в связанных контурах производится в два этапа. Сначала наблюдается АЧХ в режиме свивирования частоты. Затем частота сигналов изменяется вручную, а АЧХ строится при дискретных значениях частоты.

1. Установить $R_{1,2}$ и $R_{2,2}$ в положение, соответствующие нулевому сопротивлению, $C_{св} = 38$ пФ и поочередно настроить оба контура на частоту 70 кГц.

величины индуктивностей зависят от частоты сигналов. Поэтому L_1 и L_2 при расчетах следует определять по таблице 1.

Таблица 1
Частотная зависимость индуктивностей контуров.

$L_{к1}$ н	45.0	46.0	47.0	48.0	49.0	50.0	51.0	52.0	53.0	54.0	55.0
$L_{лм1}$ н	17.36	17.41	17.47	17.54	17.61	17.70	17.79	17.89	17.99	18.11	18.23
$L_{к2}$ н	56.0	57.0	58.0	59.0	60.0	61.0	62.0	63.0	64.0	65.0	66.0
$L_{лм2}$ н	18.36	18.49	18.63	18.78	18.94	19.10	19.27	19.45	19.63	19.82	20.02
$L_{к1}$ п	67.0	68.0	69.0	70.0	71.0	72.0	73.0	74.0	75.0	76.0	77.0
$L_{лм1}$ п	20.22	20.43	20.65	20.88	21.12	21.36	21.61	21.87	22.14	22.41	22.70
$L_{к1}$ ц	78.0	79.0	80.0	81.0	82.0	83.0	84.0	85.0			
$L_{лм1}$ ц	22.99	23.30	23.61	23.94	24.28	24.62	24.98	25.35			

А. Исследование собственных колебаний (нормальных) частот от расстройки и коэффициента связи

Экспериментальная установка позволяет задавать различные значения коэффициента связи k^C от 0.009 до 0.21. В работе предлагается снять и построить графики Вина – зависимости $\Omega_1 = \omega_1/\omega_{01}$ и $\Omega_2 = \omega_2/\omega_{01}$ от $\zeta = \omega_{02}/\omega_{01}$ для двух значений коэффициента емкостной связи между контурами $k^C = 0.05$ и $k^C = 0.175$.

Графики Вина представляют зависимости нормальных частот связанной системы от расстройки и коэффициента связи в режиме собственных колебаний. При небольших загрузках резонансные частоты связанных элементов не сильно отличаются от нормальных частот, и в качестве приближения для графиков Вина можно рассматривать зависимости резонансных частот связанной системы от расстройки и коэффициента связи в режиме вынужденных колебаний [4,с.288].

Рекомендуется перед измерениями рассчитать по формуле (9) и построить графики Вина для $k^C = 0.05$ и $k^C = 0.175$ и ζ от 0.5 до 1.5 с интервалом 0.05.

Коэффициент связи = 0.05

1. Подключить 1-й канал осциллографа к выходу 1, установить частоту генератора 70 кГц, переключатель **РЕЖИМ РАБОТЫ** – в положение 1, установить **R₁**, и **R₂**, в положение, соответствующие нулевому сопротивлению, и подбирая емкость C_1 и $C_{св}$ так, чтобы $k^C = 0.05$, настроить 1-й контур в резонанс. Найденные значения C_1 , $C_{св}$ и $k^C = C_{св}/C_1$ записать.

2. Не изменяя C_1 и $C_{св}$, установить переключатель **РЕЖИМ РАБОТЫ** в положение 2 и ручкой **РАСТРОЙКА частота** (-) (+) настроить в резонанс на той же частоте 70кГц 2-й контур.

3. Установить переключатель **РЕЖИМ РАБОТЫ** в положение 12 и, изменяя частоту генератора, измерить резонансные частоты для $\zeta = \omega_{02}/\omega_{01} = 1$. Рассчитать $\Omega_1 = \omega_1/\omega_{01}$ и $\Omega_2 = \omega_2/\omega_{01}$ и отметить полученные значения на теоретических рассчитанных графиках Вина.

4. Не изменяя C_1 и $C_{св}$, устанавливать переключатель **РЕЖИМ РАБОТЫ** в положение 2, ручкой **РАСТРОЙКА частота** (-) (+) настраивать 2-ой контур последовательно на частоты от 50 до 80 кГц и, переводя

где $C_{1\Sigma} = C_1 + C_{св}$ и $C_{2\Sigma} = C_2 + C_{св}$ - полные емкости парциальных подсистем, $\alpha_1 = G_1/2C_{1\Sigma}$ и $\alpha_2 = G_2/2C_{2\Sigma}$ - показатели загрузки контуров, $\omega_{01} = 1/\sqrt{L_1 C_{1\Sigma}}$ и $\omega_{02} = 1/\sqrt{L_2 C_{2\Sigma}}$ - их парциальные частоты, $k_1^C = \frac{C_{св}}{C_{1\Sigma}}$ и $k_2^C = \frac{C_{св}}{C_{2\Sigma}}$ - коэффициенты связи второго контура с первым и второго со вторым. Дифференцируя (2) по времени, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d^2 U_1}{dt^2} + 2\alpha_1 \frac{dU_1}{dt} + \omega_{01}^2 U_1 - k_1^C \frac{d^2 U_2}{dt^2} = \frac{1}{C_{1\Sigma}} \frac{dI}{dt}, \\ \frac{d^2 U_2}{dt^2} + 2\alpha_2 \frac{dU_2}{dt} + \omega_{02}^2 U_2 - k_2^C \frac{d^2 U_1}{dt^2} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Если правые части уравнений равны нулю (однородные уравнения), то (3) описывают собственные колебания в связанных контурах, получившие название *связанных колебаний*. Когда хотя бы одно уравнение содержит в правой части функцию времени (чаще всего, периодическую), дифференциальное уравнение (3) становится неоднородным и описывает *вынужденные колебания*.

Собственные колебания в системе параллельных контуров

Будем рассматривать связанные колебания в предположении отсутствия потерь Будем рассматривать связанные колебания в предположении отсутствия потерь ($G_1 = G_2 = 0$). ($C_1 = C_2 = 0$).

Пусть предварительно выраженная до напряжения U_0 емкость C_1 включена в первый парциальный контур. Тогда в системе возникнут незагруженные колебания, описываемые системой однородных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{d^2 U_1}{dt^2} + \omega_{01}^2 U_1 - k_1^C \frac{d^2 U_2}{dt^2} = 0, \\ \frac{d^2 U_2}{dt^2} + \omega_{02}^2 U_2 - k_2^C \frac{d^2 U_1}{dt^2} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Будем искать решение уравнений (4) в виде

$$U_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi), \quad U_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi). \quad (5)$$

Подставляя (5) в (4), получим систему алгебраических уравнений относительно A_1 и A_2 :

$$\begin{cases} (\omega_{01}^2 - \omega^2) A_1 + \omega^2 k_1^C A_2 = 0, \\ \omega^2 k_2^C A_1 + (\omega_{02}^2 - \omega^2) A_2 = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Нетривиальное решение этой системы уравнений существует только при обращении в нуль ее детерминанта:

$$(\omega_{01}^2 - \omega^2)(\omega_{02}^2 - \omega^2) - k^2 \omega^4 = (1 - k^2)\omega^4 - (\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2)\omega^2 + \omega_{01}\omega_{02} = 0,$$

где $k = \sqrt{k_1^C k_2^C} = C_{св}/\sqrt{C_{1\Sigma} C_{2\Sigma}}$ - коэффициент связи. Решения этого би-квадратного уравнения (отрицательные значения ω отброшены как не имеющие физического смысла)

$$\begin{aligned} \omega_{1,2}^2 &= \frac{\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 \pm \sqrt{(\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2)^2 - 4(1 - k^2)\omega_{01}\omega_{02}}}{2(1 - k^2)} = \\ &= \frac{\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 \pm \sqrt{(\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2)^2 + 4k^2\omega_{01}\omega_{02}}}{2(1 - k^2)} \end{aligned} \quad (7)$$

представляет две возможные частоты связанных колебаний ω_1 и ω_2 , называемые *собственными* или *нормальными* частотами связанной системы.

Будем обозначать меньшую нормальную частоту через ω_1 , а большую - через ω_2 . Общее решение уравнений (4) удовлетворяет равенствам:

$$\begin{aligned} U_1(t) &= A_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{12} \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \\ U_2(t) &= A_{21} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{22} \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \end{aligned} \quad (8)$$

т.е. в каждой парциальной системе одновременно существуют колебания с нормальными частотами ω_1 и ω_2 , называемые *нормальными* или *собственными модами* связанной колебательной системы.

- Нормальные моды связанной колебательной системы являются гармоническими функциями и *взаимно ортогональны*, т.е. возбуждение одной собственной моды не вызывает возбуждения остальных [2, с. 211]. Отсюда термин "нормальные колебания".

- Каждое нормальное колебание существует одновременно во всех парциальных системах, а результирующие колебания парциальных контуров полигармонические.

Зависимость нормальных частот от расстройки контуров. Связанность

Если ввести в расстройке безразмерные нормальные частоты $\Omega_{1,2} = \omega_{1,2}/\omega_{01}$ и расстройку парциальных контуров $\zeta = \omega_{02}/\omega_{01}$, то согласно (7) получим (значения $\Omega_{1,2} < 0$ отброшены):

$$\Omega_{1,2} = \sqrt{\frac{1 + \zeta^2 \pm \sqrt{(1 - \zeta^2)^2 + 4k^2 \zeta^2}}{2(1 - k^2)}} \quad (9)$$

Зависимости $\Omega_1(\zeta)$ и $\Omega_2(\zeta)$ при трех фиксированных значениях k представлены на рис. 2. Это графики Вина.

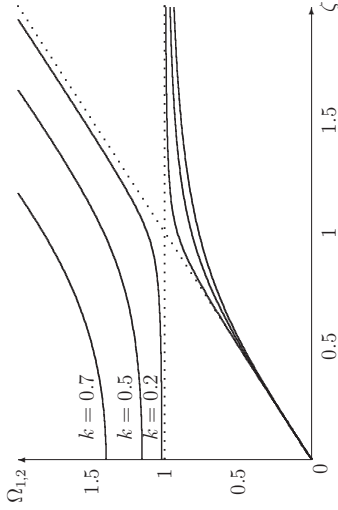


Рис. 2. Зависимости нормированных собственных частот Ω_1 и Ω_2 от расстройки контуров ζ при трех значениях связи. Пунктирными линиями изображен ход нормальных частот при нулевой связи

Как следует из (9) и рис. 2, собственная частота ω_2 при всех значениях k превышает большую парциальную частоту, а ω_1 оказывается меньше меньшей парциальной частоты, т.е. всегда выполняется неравенство

$$\omega_1 \leq \omega_{01}, \omega_{02} \leq \omega_2.$$

сопротивлением от 0 до 1500 Ом. Оба контура одновременно перестраиваются с помощью двойного конденсатора переменной емкости $C_1 = C_2$. Для взаимной расстройки контуров параллельно C_2 включен дополнительный переменный конденсатор C_3 .

Генератор сигналов GFG-8210 подключается к контурам через делитель из R_3 и R_4 , обеспечивающий неизменность потребляемого тока при любых сопротивлениях нагрузки (источник тока). Для ослабления шумящего действия входных емкостей осциллографа и милливольтметра контуры соединены с разьемами "Выход 1" и "Выход 2" через повторители напряжения (на схеме не показаны).

На передней панели прибора расположены ручки управления кнопка "СЕТЬ" для подключения прибора к сети переменного тока, "С_{1,2}, пФ" - настройка контуров (C_1, C_2),

"РАССТРОЙКА ЧАСТОТА (-) (+)" - расстройка контуров (C_3),

"С_{св}, пФ" - величина связи,

"R₁, Ом" - сопротивление 1 контура (R_1),

"R₂, Ом" - сопротивление 2 контура (R_2),

"РЕЖИМ РАБОТЫ" - кнопочный переключатель режима работы (S_1) и три коаксиальных разъема:

"ВХОД 1" для подключения источника сигналов GFG-8210,

"ВЫХОД 1" для подключения 1-го канала осциллографа GOS-6031 "ВЫХОД 2" для подключения 2-го канала осциллографа GOS-6031 или электронного милливольтметра ВЗ-38.

Переключатель S_1 "РЕЖИМ РАБОТЫ" имеет пять положений.

В положении "СВЯЗ" исследуются связанные (собственные) колебания. Для этого к 1-му контуру подключается внутренний генератор коротких импульсов и 1-й канал осциллографа, а 2-й контур соединяется со 2-ым каналом осциллографа. Остальные 4 положения "ВЫНУЖД" предназначены для исследования вынужденных колебаний.

В положении "1" генератор сигналов GFG-8210, 1-й канал осциллографа и электронный милливольтметр подключаются к 1-му контуру, а 2-й контур закорачивается.

В положении "2" генератор сигналов GFG-8210, 1-й канал осциллографа и электронный милливольтметр подключаются к 2-му контуру, а 1-й контур закорачивается.

В положении "12" генератор сигналов подключается к 1-ому контуру, а 1-й канал осциллографа и электронный милливольтметр - к 2-му контуру.

В положении "21" генератор сигналов подключается к 2-му контуру, а 1-й канал осциллографа и электронный милливольтметр - к 1-му контуру.

Во всех измерениях развертка осциллографа синхронизируется с генератором сигналов.

Порядок выполнения работы

Ознакомиться с электрической схемой экспериментальной установки и подключить контрольно-измерительные приборы в соответствии с обозначениями на передней панели. Подключить приборы к сети переменного тока, Установить генератор GFG-8210 в режим синусоидальных колебаний.

Катушки индуктивности L_1 и L_2 содержат ферритовые сердечники, и

полном резонансе ($A=1$). Чем больше A , тем глубже провал на ω_b . Наиболее интересен случай, когда провал между горбами опускается до уровня 0.707 (-3 дБ) и полоса частот системы (рис. 7) оказывается наибольшей (кривая β).

Пусть при некотором значении фактора связи A и $\xi = 0$ выполняется соотношение $|U_{2m}(A, 0)|/|U_{2\max}| = 1/\sqrt{2}$. Тогда $A^2 - 2\sqrt{2}A + 1 = 0$ и $A = \sqrt{2} \pm 1$. Так как $A > 1$, выбираем $A \cong 2.41$. С ростом расстройки $|U_{2m}(2.41, \xi)|/|U_{2\max}|$ сначала растёт, достигая единичного значения, затем снова убывает. Значения $\xi = \pm \xi_{гр}'$, при которых $|U_{2m}(2.41, \xi)|/|U_{2\max}| = 1/\sqrt{2}$ (рис. 7), удовлетворяют равенству

$$\frac{1}{4.82} = \frac{1}{\sqrt{(1 + 2.42^2 - \xi_{гр}')^2 + 4\xi_{гр}'^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отсюда $\xi_{гр}'^4 - 9.616\xi_{гр}'^2 - 0.114 = 0$, $\xi_{гр}'^2 = 4.808 \pm \sqrt{4.808^2 + 0.114} \cong 9.628$ (второе значение не имеет физического смысла), а $\xi_{гр}' = Q\nu \cong 3.103$.

- Двухконтурная связанная система при $\zeta = 1$ и критической связи ($A > 1$) обладает двугорбой АЧХ, и полоса пропускаемых на уровне -3 дБ частот при $A \cong 2.41$ в 3.1 раза превышает полосу пропускания парциальных контуров.

Экспериментальная установка

Экспериментальная установка состоит из автономного блока (прибора) "СВЯЗАННЫЕ LCR-КОНТУРЫ", генератора сигналов GFG-8210, двухканального осциллографа GOS-6031 и электронного милливольтметра ВЗ-38, используемых в качестве измерительных приборов.

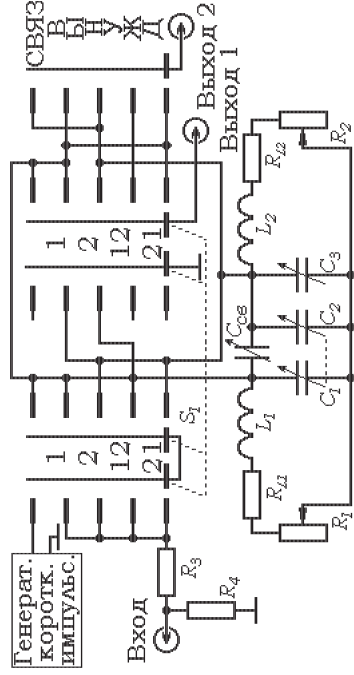


Рис. 8. Электрическая схема блока связанных контуров

Электрическая схема прибора "СВЯЗАННЫЕ LCR-КОНТУРЫ" представлена на рис. 8. Прибор содержит генератор коротких импульсов, два параллельных контура, связанных между собой переменным конденсатором с регулируемой емкостью $C_{ев}$ от 5 до 40 пФ. Контуры имеют одинаковые катушки индуктивности $L_1 = L_2$ и резисторы R_1 и R_2 с регулируемым

При $\zeta = 0$ имеем $\Omega_1 = 0$, а $\Omega_2 = 1/\sqrt{1-k^2}$. При $\zeta \neq 0$ и малой связи ($k \rightarrow 0$)

$$\Omega_{1,2} = \sqrt{\frac{1 + \zeta^2 \pm (1 - \zeta^2)}{2}}$$

. Отсюда при $\omega_{01} > \omega_{02}$ ($\zeta < 1$) имеем $\Omega_1 = \zeta$, $\Omega_2 = 1$, а при $\omega_{01} < \omega_{02}$ ($\zeta > 1$) - $\Omega_1 = 1$, $\Omega_2 = \zeta$ (пунктирные линии на рис. 2).

Степень взаимосвязи между парциальными системами наиболее полно описывается специальным коэффициентом, введенным академиком Л.И.Манин-дельштамом [2, с.219] и получившим название *связанности*:

$$\sigma = \frac{2k\omega_{01}\omega_{02}}{|\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2|} = \frac{2k\zeta}{|1 - \zeta^2|}. \quad (10)$$

Связанность двухконтурной системы зависит и от величины коэффициента связи, и от соотношения собственных частот парциальных систем. Если частоты парциальных контуров близки, то даже при малых коэффициентах связи физические процессы в контурах существенно влияют друг на друга. И наоборот, при большой расстройке связанность контуров остается слабой. Отметим, что потери в контурах значительно ослабляют их связанность.

Связанные колебания при совпадении парциальных частот

Пусть контуры имеют одинаковые парциальные частоты $\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_0$ (индуктивности контуров могут отличаться и $k_1 \neq k_2$).

Нормальные частоты такой связанной системы удовлетворяют равенствам

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+k}}, \quad \omega_2 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-k}}. \quad (11)$$

При $k \rightarrow 1$ собственные частоты "расходятся": $\omega_1 \rightarrow \omega_0/\sqrt{2}$, $\omega_2 \rightarrow \infty$.

Кроме нормальных частот в общем решении (8) входят четыре неизвестные амплитуды $A_{11} \div A_{22}$ и две начальные фазы φ_{10} и φ_{20} . Для определения последних используем начальные условия задачи. Пусть при $t = 0$ имеем $U_1(0) = U_0$, $U_2(0) = 0$, $dU_1/dt(0) = dU_2/dt(0) = 0$. Тогда

$$U_1(0) = A_{11} \cos \varphi_1 + A_{12} \cos \varphi_2 = U_0, \quad U_2(0) = A_{21} \cos \varphi_1 + A_{22} \cos \varphi_2 = 0,$$

а в результате дифференцирования (8), имеем

$$\frac{dU_1}{dt}(0) = -A_{11}\omega_1 \sin \varphi_1 - A_{12}\omega_2 \sin \varphi_2 = 0,$$

$$\frac{dU_2}{dt}(0) = -A_{21}\omega_1 \sin \varphi_1 - A_{22}\omega_2 \sin \varphi_2 = 0,$$

Эти соотношения выполняются только при $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. Тогда

$$U_1(t) = A_{11} \cos \omega_1 t + A_{12} \cos \omega_2 t,$$

$$U_2(t) = A_{21} \cos \omega_1 t + A_{22} \cos \omega_2 t.$$

Для определения величин амплитуд $A_{11} \div A_{22}$ подставим (8) в одно из уравнений (4), например в первое, и получим

одинаковую частоту и связь между контурами соответствует полной передаче тока из первичного контура во вторичный [2, с. 230], такой резонанс называется *полным*. Как было показано (рис. 5, б, жирная кривая), реактивная часть входной проводимости при $A = 1$ обращается в нуль не только на частоте ω_0 , но и в ее окрестности. Вторичный ток в этой области частот достигает максимального значения, АЧХ (рис. 7, кривая 1) принимает П-образную форму, а полса частот на уровне половинной мощности (-3 дБ) оказывается шире, чем у парциальных контуров. Рассчитаем эту полосу частот.

При $A = 1$ имеем

$$\frac{|U_{2m}(1, \xi)|}{|U_{2\max}|} = \frac{2}{\sqrt{(2 - \xi^2)^2 + 4\xi^2}}$$

На границах полосы пропускания, т.е. при $\xi = \pm\xi_{\text{гр}}$ (рис. 7)

$$\left(\frac{|U_{2m}(1, \xi_{\text{гр}})|}{|U_{2\max}|} \right)^2 = \frac{4}{(2 - \xi_{\text{гр}}^2)^2 + 4\xi_{\text{гр}}^2} = \frac{1}{2}.$$

Отсюда $\xi_{\text{гр}}^4 = 4$, а $\xi_{\text{гр}} = \pm\sqrt{2} \cong 1.41$. Поскольку $\xi_{\text{гр}} = Q\nu$, где Q – добротность контура; ν – расстройка, для полосы частот получаем

$$2\Delta\omega = 2(\omega - \omega_0) = \sqrt{2}\omega_0/Q.$$

Отметим, что полный резонанс возможен и при $G_1 \neq G_2$, если

$$B_{\text{св}} = \sqrt{G_1 G_2}.$$

• При полном резонансе в двухконтурной системе ($\omega_{01} = \omega_{02}$, $A = 1$) АЧХ системы имеет П-образную форму и принимает максимальное значение в окрестности $\omega = \omega_0$. Полоса частот на уровне -3 дБ в $\sqrt{2}$ раз шире, чем у парциальных контуров, образующих связанную систему.

3. Сложный резонанс ($\zeta = 1, A > 1$). Напомним, что при закритической связи ($A > 1$) АЧХ связанных контуров становятся двугорбыми. При этом выходное напряжение достигает в максимумах одинаковых значений, а на средней частоте ω_0 существует минимум.

Резонанс в связанных контурах при закритической связи называется *слабым*. Частотные характеристики связанных контуров для двух значений закритической связи изображены на рис. 7 (кривые 2 и 3).

С увеличением фактора связи $A = B_{\text{св}}/\sqrt{G_1 G_2}$ (а следовательно, и коэффициента связи $k = C_{\text{св}}/\sqrt{C_{1\Sigma} C_{2\Sigma}}$) резонансные частоты расходятся, ширина АЧХ увеличивается, причем амплитуды выходного напряжения в расходящихся максимумах (рис. 6, б) имеют величину, которая достигается при

$(\omega_0^2 - \omega_1^2)A_{11} + k_1^C \omega_1^2 A_{21} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + [(\omega_0^2 - \omega_2^2)A_{12} + k_1^C \omega_1^2 \omega_2^2 A_{22}] \cos(\omega_2 t + \varphi_2) = 0$,
С учетом (11) имеем

$$A_{21} = -\frac{\omega_0^2 - \omega_1^2}{k_1^C \omega_1^2} A_{11} = -\frac{\omega_0^2 - \omega_0^2/(1+k)}{k_1^C \omega_0^2/(1+k)} A_{11} = -\frac{k}{k_1^C} A_{11} = -\sqrt{\frac{C_{1\Sigma}}{C_{2\Sigma}}} A_{11},$$

$$A_{22} = -\frac{\omega_0^2 - \omega_2^2}{k_1^C \omega_2^2} A_{12} = -\frac{\omega_0^2 - \omega_0^2/(1-k)}{k_1^C \omega_0^2/(1-k)} A_{12} = \frac{k}{k_1^C} A_{12} = \sqrt{\frac{C_{1\Sigma}}{C_{2\Sigma}}} A_{12}.$$

Согласно начальным условиям

$$U_1(0) = A_{11} + A_{12} = U_0, \quad U_2(0) = \sqrt{C_{1\Sigma} C_{2\Sigma}} (A_{11} - A_{12}) = 0, \quad \text{а } A_{11} = A_{12} = U_0/2.$$

Отсюда

$$U_1(t) = \frac{U_0}{2} (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) = U_0 \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t, \quad (12)$$

$$U_2(t) = \frac{U_0}{2} \sqrt{\frac{C_{1\Sigma}}{C_{2\Sigma}}} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) = U_0 \sqrt{\frac{C_{1\Sigma}}{C_{2\Sigma}}} \sin \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t. \quad (13)$$

Итак, связанные колебания в парциальных контурах являются бигармоническими (суммы нормальных мод), причем в первом контуре колебания первой и второй мод приходят в фазе, а во втором – в противофазе.

При больших значениях k связанные колебания $I_1(t)$ и $I_2(t)$ имеют сложную форму (рис. 3, а и 3, б). При малых значениях k разность нормальных частот удовлетворяет приближенному равенству

$$\omega_2 - \omega_1 = \omega_0/\sqrt{1-k} - \omega_0/\sqrt{1+k} \cong \omega_0(1+k/2) - \omega_0(1-k/2) = \omega_0 k,$$

и связанные колебания в контурах приобретают форму *биений*¹ (рис. 3, в и 3, г). При этом $I_0 \cos(\omega_2 - \omega_1)t/2$ и $I_0 \sqrt{L_1/L_2} \sin(\omega_2 - \omega_1)t/2$ можно трактовать как медленно меняющиеся амплитуды колебаний в первом и втором контурах с частотой $(\omega_1 + \omega_2)/2$ (см. [1, с. 100-104, 2, с. 221]).

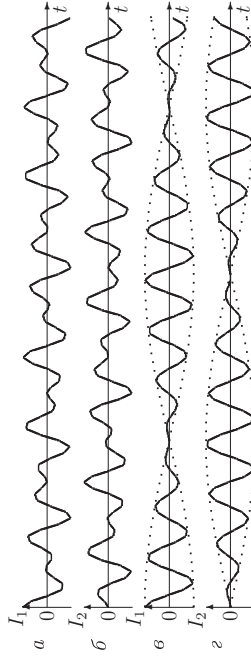


Рис. 3. Связанные колебания в первом (а, в) и втором (б, г) контурах двухконтурной системы для $k = 0.5$ (а, б) и $k = 0.15$ (в, г)

Как следует из (12) и (13), не только отгибающие, но и сами колебания в контурах сдвинуты по фазе на 90° , т.е. максимальная величина тока в

¹Биения – колебания с периодически изменяющейся амплитудой, возникающие при наложении двух гармонических колебаний с близкими частотами

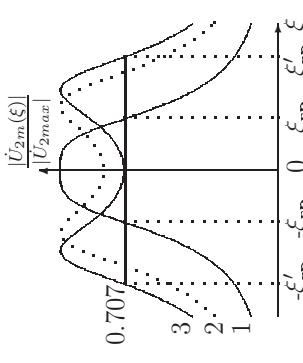


Рис. 7. АЧХ контуров: 1 – $A = 2$; 2, 3 – $A = 2.41$

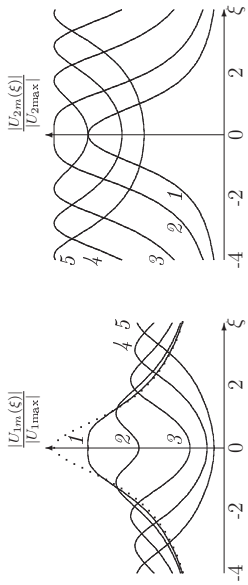


Рис. 6. Нормированные АЧХ первичного (а) и вторичного (б) контуров: $I - A = 0.5$; $2 - A = 1$; $3 - A = 2$; $4 - A = 3$; $5 - A = 4$. Пунктир - АЧХ первичного контура при $A = 0$

Как показывает анализ [2, с. 231-233], АЧХ при малых значениях параметра A имеют вид однокорневых резонансных кривых. При $A > 0.5$ АЧХ первичного тока и при $A > 1$ (после достижения критической связи) АЧХ вторичного тока становятся двукоревыми. С ростом связи резонансные частоты удаляются от ω_0 , а минимум на частоте ω_0 углубляется. При этом резонансные амплитуды $|U_{1m}|/|U_{\max}|$ уменьшаются, а $|U_{2m}|$ сохраняют то же значение, которого оно достигает при критической связи ($U_{2m}(A = 1, \xi = 0) = |U_{2\max}| = |J_m|/2\sqrt{G_1G_2}$). Покажем это.

Когда функция принимает экстремальные значения, ее производная по ξ обращается в нуль. Приравняв эту производную нулю, получим

$$\xi^3 - (A^2 - 1)\xi = 0 \quad \text{или} \quad \xi_{1,2,3} = \pm\sqrt{A^2 - 1},$$

где $\xi_{2,3}$ соответствуют максимальным значениям $|U_{2m}|$:

$$|U_{2m}(A > 0, \xi = \pm\sqrt{A^2 - 1})|/|U_{2\max}| = 1.$$

Это замечательный результат!

- При закритической связи с ростом A полюса пропускания связанной системы увеличиваются, а максимальные значения выходного (вторичного) тока не изменяются.

Итак, $|U_{2\max}| = |J_m|/2\sqrt{G_1G_2}$ при любых $A \geq 1$. Это позволяет представить нормированную АЧХ связанной системы контуров в виде

$$\frac{|U_{2m}(A, \xi)|}{|U_{2\max}|} = \frac{2A}{\sqrt{(1 + A^2 - \xi^2)^2 + \xi^4}}. \quad (22)$$

Индивидуальный, полный и сложные резонансы

Пусть $\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_0$ и $Q_1 \cong Q_2$. Тогда возможны три разновидности резонансных явлений.

1. **Индивидуальный резонанс** ($A < 1$). Все реактивные проводимости связанной системы обращаются в нуль только на частоте ω_0 ($B_1 = B_2 = B_{\text{вн}} = B_{\text{вк}} = 0$). АЧХ имеет единственный максимум.

2. **Полный резонанс** ($A = 1$). Поскольку оба контура настроены на

одном контуре достигается тогда, когда ток в другом контуре отсутствует. Огибающие сдвинуты во времени на четверть периода разностной частоты, т.е. каждую четверть периода

$$\frac{T}{4} = \frac{\pi/2}{(\omega_2 - \omega_1)/2} = \frac{\pi}{\omega_0 k}$$

происходит перекачка энергии из одного контура в другой.

До сих пор рассматривались собственные колебания в связанных системах контуров без потерь. При наличии потерь связанные колебания в парциальных контурах заглушают и форма колебаний изменяется. Так, например, при малых значениях k по-прежнему имеют место биения собственных мод, но амплитуда огибающей уменьшается с течением времени по экспоненциальному закону (см [1, с. 101, рис. 5.3, б]).

Вынужденные колебания

Вынужденные колебания в связанных системах возникают под воздействием внешних источников (для упрощения анализа гармонических) и обычно рассматриваются в диссипативных системах, т.е. при наличии конечных потерь.

Характер процессов в диссипативных связанных системах определяется связанными колебаниями с нормальными частотами ω_1, ω_2 и вынужденными колебаниями с частотой внешнего воздействия ω . Поскольку собственные колебания с течением времени полностью заглушают, установившиеся гармонические колебания всех координат имеют частоту ω .

Основные задачи анализа вынужденных колебаний в связанных системах заключаются в определении резонансных частот и построении амплитудно-частотных характеристик (АЧХ). С этой целью можно составить и решить неоднородные дифференциальные уравнения или (что оказывается быстрее и проще) использовать *метод замещения связанных контуров эквивалентным одноичным контуром*.

Замещение связанных контуров эквивалентным контуром

Сущность предлагаемой процедуры заключается во введении такого одноконтурного контура, у которого входные токи и напряжения совпадают с входными токами и напряжениями замещаемой связанной системы. Это условие будет выполнено при равенстве комплексных входных сопротивлений или проводимостей замещаемых систем.

Пусть в первичном контуре двухконтурной системы (рис. 1, в) действует гармонический ток

$$j(t) = J_m e^{j\omega t}.$$

Тогда для парциальных контуров получим следующие алгебраические уравнения

$$\begin{aligned} (G_1 + jB_{1\Sigma})\dot{U}_{1m} - jB_{\text{св}}\dot{U}_{2m} &= \dot{Y}_1\dot{U}_{1m} - jB_{\text{св}}\dot{U}_{2m} = \dot{J}_m, \\ -jB_{\text{св}}\dot{U}_{1m} + (G_2 + jB_{2\Sigma})\dot{U}_{2m} &= -jB_{\text{св}}\dot{U}_{1m} + \dot{Y}_2\dot{U}_{2m} = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

где \dot{J}_m , \dot{U}_{1m} и \dot{U}_{2m} - комплексные амплитуды тока, напряжения на первичном и на вторичном контурах; $\dot{Y}_1 = G_1 + jB_{1\Sigma}$, $\dot{Y}_2 = G_2 + jB_{2\Sigma}$ - комплексные проводимости первичного и вторичного контуров (G_1 и G_2 - их резистивные, а $B_{1\Sigma} = \omega C_{1\Sigma} - 1/\omega L_1$ и $B_{2\Sigma} = \omega C_{2\Sigma} - 1/\omega L_2$ - реактивные составляющие); $B_{\text{св}} = \omega C_{\text{св}}$ - реактивная проводимость элемента связи.

Разрешая уравнения (14) относительно \dot{U}_{1m} и \dot{U}_{2m} [2, с. 225], получим

$$\dot{U}_{1m} = \frac{Y_2}{Y_1 Y_2 + B_{cb}^2} j_m, \quad \dot{U}_{2m} = \frac{j B_{cb}}{Y_1 Y_2 + B_{cb}^2} j_m, \quad (15)$$

и эквивалентную проводимость системы (рис. 4, а)

$$\begin{aligned} \dot{Y}_{вк} &= \frac{j_m}{\dot{U}_{1m}} = G_{вк} + j B_{вк} = \\ &= \dot{Y}_1 + \frac{B_{cb}^2}{Y_2} = G_1 + j B_{1\Sigma} + \frac{B_{cb}^2}{G_2^2 + B_{2\Sigma}^2} (G_2 - j B_{2\Sigma}). \end{aligned} \quad (16)$$

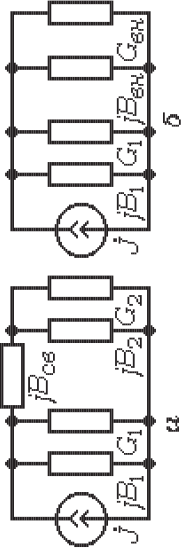


Рис. 4. Эквивалентные схемы: связанных контуров (а), контура замещения (б). Комплексная проводимость контура замещения включает вносимые проводимости $G_{вн} = B_{cb}^2 G_2 / (G_2^2 + B_{2\Sigma}^2)$ и $B_{вн} = -B_{cb}^2 B_{2\Sigma} / (G_2^2 + B_{2\Sigma}^2)$.

Введение одноконтурных схем замещения является решающим фактором при изучении резонансных явлений, так как позволяет использовать развитую для одиночных контуров методологию.

Условия резонанса и резонансные частоты

Введем относительные (ν_1, ν_2) и обобщенные (ξ_1, ξ_2) расстройки контуров и новый параметр – *фактор связи* A . Тогда

$$\dot{Y}_1 = G_1 + j\omega_01 C_{1\Sigma} (\omega/\omega_01 - \omega_01/\omega) = G_1 (1 + j\omega_01 C_{1\Sigma} \nu_{01} / G_1) = G_1 (1 + j\xi_{01}),$$

$$\dot{Y}_2 = G_2 + j\omega_02 C_{2\Sigma} \omega / \omega_02 - \omega_02/\omega = G_2 (1 + j\omega_02 C_{2\Sigma} \nu_{02} / G_2) = G_2 (1 + j\xi_{02}),$$

где ν_{01}, ν_{02} – относительные, $\xi_{01} = \nu_{01} Q_1, \xi_{02} = \nu_{02} Q_2$ – обобщенные расстройки первого и второго контуров; Q_1 и Q_2 – их добротности, а

$$\dot{U}_{1m} = \frac{G_2 (1 + j\xi_2) j_m}{G_1 G_2 (1 + j\xi_1) (1 + j\xi_2) + B_{cb}^2} = \frac{(1 + j\xi_2) j_m / G_1}{(1 + j\xi_1) (1 + j\xi_2) + A^2}, \quad (17)$$

$$\dot{U}_{2m} = \frac{j B_{cb} j_m}{G_1 G_2 (1 + j\xi_1) (1 + j\xi_2) + B_{cb}^2} = \frac{j A j_m / \sqrt{G_1 G_2}}{(1 + j\xi_1) (1 + j\xi_2) + A^2}, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \dot{Y}_{вк} &= G_1 (1 + j\xi_{01}) + \frac{B_{cb}^2}{G_2 (1 + j\xi_{02})} = G_1 (1 + j\xi_{01} + \frac{B_{cb}^2 (1 - j\xi_{02})}{G_1 G_2 (1 + \xi_{02}^2)}) = \\ &= G_1 \left[1 + \frac{A^2}{1 + \xi_{02}^2} + j \left(\xi_{01} - \frac{A^2}{1 + \xi_{02}^2} \xi_{02} \right) \right], \end{aligned} \quad (19)$$

где $A = B_{cb} / \sqrt{G_1 G_2}$ – фактор связи контуров.

Зависимости $G_{вк}(\xi)$ и $B_{вк}(\xi)$ связанных контуров при $\zeta = 1$ ($\xi_{01} = \xi_{02} = \xi$) и одинаковых добротностях $Q_1 \cong Q_2$ для трех значений A представлены

на рис. 5. Они показывают, что резистивная часть входной проводимости (рис. 5, а) увеличивается с ростом A и достигает наибольшего значения при совпадении собственных частот парциальных контуров с частотой воздействия.

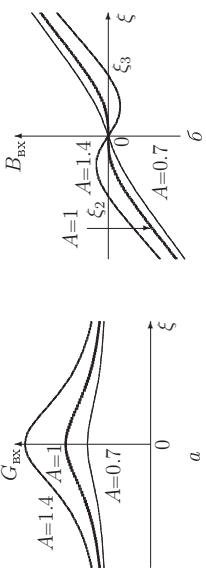


Рис. 5. Зависимости резистивной (а) и реактивной (б) составляющих входной проводимости связанных контуров от ξ при трех значениях фактора связи A

Реактивная часть входной проводимости (рис. 5, б) для малых A изменяется почти линейно и обращается в нуль при $\xi = 0$. Для $A = 1$ можно указать интервал частот в окрестности $\xi = 0$, в котором $B_{вк}(\xi) \cong 0$.

Обращение в нуль реактивной составляющей входной проводимости

$$\xi \left(1 - \frac{A^2}{1 + \xi^2} \right) = 0 \quad (20)$$

можно рассматривать [2, с. 197–198] в качестве *условий резонанса в двухконтурной системе* параллельных контуров. Таким образом, при $A < 1$ связанная система имеет единственную резонансную частоту $\omega = \omega_0$.

При $A > 1$ появляются еще два значения ξ_2 и ξ_3 (рис. 5, 5, б), для которых $B_{вк}(\xi) = 0$, т.е. реактивная составляющая входной проводимости эквивалентного контура при $A > 1$ обращается в нуль на трех различных частотах внешнего воздействия (см. рис. 5, б). Можно показать [2, с. 227], что $|\dot{U}_{2m}|$ достигает максимальных значений при ξ_2 и ξ_3 (резонанс), а при $\xi_1 = 0$ напряжение на вторичном контуре оказывается меньше резонансных значений.

Точные значения резонансных частот [2, с. 228] удовлетворяют соотношениям

$$\omega_1 = \omega_0, \quad \omega_2 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + \sqrt{k^2 - d^2}}}, \quad \omega_3 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \sqrt{k^2 - d^2}}}, \quad (21)$$

где $d^2 = G_2^2 / \omega^2 C_{2\Sigma}^2$.

Уравнения амплитудно-частотных характеристик

Пусть $\omega_{01} = \omega_{02}$. Тогда из (17) и (18) имеем

$$|\dot{U}_{1m}(A, \xi)| = \frac{\sqrt{1 + \xi^2} |j_m| / G_1}{\sqrt{(1 + A^2 - \xi^2)^2 + 4\xi^2}}, \quad |\dot{U}_{2m}(A, \xi)| = \frac{A |j_m| / \sqrt{G_1 G_2}}{\sqrt{(1 + A^2 - \xi^2)^2 + 4\xi^2}}.$$

Графики нормированных АЧХ для различных значений A представлены на рис. 6.