

А.В.Хохлов

**ИССЛЕДОВАНИЕ
СТРУКТУРЫ РАДИОСИГНАЛОВ
СПЕКТРАЛЬНЫМ МЕТОДОМ
(Цифровой измерительный прибор)**

*Учебное пособие для спецтрактажума по курсу
"Теоретические основы радиоэлектроники"*

Ц е л ь р а б о т ы: исследование периодических и модулированных сигналов спектральным методом.

Литература

1. Калинин В.И., Герштейн Г.М. Введение в радиофизику. М.: Гостехиздат, 1957.
2. Хохлов А.В. Теоретические основы радиоэлектроники. Саратов. Изд-во Саратов. ун-та, 2005.
3. Зернов Н.В., Карлов В.Г. Теория радиотехнических цепей. Л.: Энергия, 1972.
4. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник. М.: Выспш.шк., 1983.
5. Харкевич А.А. Спектры и анализ. М.: Гостехиздат, 1957.
6. Мирский Г.Я. Радиоэлектронные измерения. М.: Энергия, 1975.
7. Кушнир Ф.В. Электрорадиоизмерения. Л.: Энергоатомиздат, 1983.

Контрольные вопросы:

1. Что понимают под спектральным представлением сигнала?
2. Как представить в аналитической форме и графически вещественный и комплексный спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов? В чем различие вещественного и комплексного спектров? Как изменится спектр при изменении длительности импульсов и частоты повторения?
3. Как можно промодулировать высокочастотное гармоническое колебание? Какие виды модуляции Вам известны и в чем их физический смысл?
4. Как представить аналитические выражения и амплитудные спектры для однотонового и многотонового АМ-колебаний?
5. Как представить аналитические выражения и амплитудные спектры для однотонового ЧМ-колебания при малом и большом значениях индекса частотной модуляции?

6. При каких условиях в спектре ЧМ-колебания отсутствуют несущая, первая боковая или вторая боковая составляющие?
7. Каковы функциональная схема и принцип действия сканирующего анализатора спектра?

Задания для самостоятельной работы

1. Вывести интегральные формулы для коэффициентов c_0 и c_k в разложении (8).
2. Вывести формулы (16), (35), (36) для расчета α , Q и R_L в режиме собственных колебаний.
3. Вывести соотношения для спектрального представления ЧМ-сигнала при $\beta \rightarrow 0$.
4. Используя таблицы функций Бесселя из приложения, рассчитать амплитудные спектры ЧМ-сигналов при $\beta = 2.4$, $\beta = 3.8$, $\beta = 5.1$ и $\beta = 5.5$.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Спектры периодических колебаний

Разложение в тригонометрические ряды Фурье. Будем рассматривать периодические колебания

$$x(t + T) = x(t),$$

где T - период колебания, а в качестве базиса используем следующую систему тригонометрических функций с кратными частотами:

$$\begin{aligned} \Phi_0(t) &= \sqrt{\frac{1}{T}}, \\ \Phi_{1C}(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \frac{2\pi}{T} t, & \Phi_{1S}(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{2\pi}{T} t, \\ \Phi_{2C}(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \cos 2 \frac{2\pi}{T} t, & \Phi_{2S}(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \sin 2 \frac{2\pi}{T} t, \\ &\dots & \dots & \dots \end{aligned}$$

Представленная совокупность функций является ортонормальной на отрезке $[0, T]$, т.е.

$$\int_{t_1}^{t_2} \Phi_k(t) \Phi_m^*(t) dt = \delta_{km} = \begin{cases} 1, & k = m, \\ 0, & k \neq m, \end{cases} \quad (1)$$

где δ_{km} - символ Кронекера. Тогда колебание $x(t)$ можно представить соотношением

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \dot{\alpha}_i \Phi_i(t). \quad (2)$$

Приложение 1
Значения функций Бесселя $J_0(\beta) - J_7(\beta)$

β	$J_0(\beta)$	$J_1(\beta)$	$J_2(\beta)$	$J_3(\beta)$	$J_4(\beta)$	$J_5(\beta)$	$J_6(\beta)$	$J_7(\beta)$
0	1	0	0	0	0	0	0	0
.1	.997	.050	.001	0	0	0	0	0
.2	.990	.099	.005	0	0	0	0	0
.3	.977	.148	.011	.0006	0	0	0	0
.4	.960	.196	.020	.0013	0	0	0	0
.6	.912	.287	.044	.0044	.0003	0	0	0
.8	.846	.369	.076	.0102	.001	0	0	0
1	.765	.440	.115	.0196	.0025	.0002	0	0
1.2	.671	.498	.159	.0329	.0050	.0006	0	0
1.4	.567	.542	.207	.0505	.0091	.0012	0	0
1.6	.455	.570	.257	.0725	.015	.0024	0	0
1.8	.340	.581	.306	.0988	.0232	.0043	0	0
2	.224	.577	.353	.1289	.0339	.0070	.0012	.0002
2.2	.110	.556	.395	.1623	.0476	.0109	.0021	.0003
2.4	.002	.520	.431	.1981	.0643	.0162	.0034	.0006
2.6	-.097	.471	.459	.2353	.0840	.0232	.0035	.0010
2.8	-.185	.410	.478	.2727	.1067	.0321	.0079	.0016
3	-.260	.339	.486	.3091	.1320	.0430	.0114	.0025
3.2	-.320	.261	.483	.3430	.1597	.0562	.0160	.0038
3.4	-.364	.179	.470	.3734	.1892	.0718	.0219	.0056
3.6	-.392	.095	.445	.3988	.2198	.0897	.0293	.0080
3.8	-.402	.013	.409	.4180	.2507	.1098	.0383	.0112
4	-.397	-.066	.364	.4302	.2811	.1321	.0491	.0152
4.2	-.376	-.139	.310	.4344	.3100	.1561	.0617	.0202
4.4	-.342	-.203	.250	.4301	.3364	.1816	.0763	.0264
4.6	-.296	-.257	.185	.4171	.3594	.2080	.0927	.0340
4.8	-.240	-.298	.115	.3952	.3780	.2347	.1110	.0429
5	-.177	-.328	.0466	.3648	.3912	.2611	.1310	.0534
5.1	-.143	-.335	.0203	.3455	.3948	.2728	.1417	.0594
5.2	-.11	-.343	-.022	.3265	.3985	.2865	.1525	.0654
5.4	-.041	-.345	-.087	.2811	.3991	.3101	.1751	.0791
5.5	-.007	-.34	-.115	.255	.3957	.3205	.1867	.0862
5.6	.027	-.334	-.146	.2298	.3926	.3310	.1986	.0945

Множитель $\sqrt{2/T}$ принято включать в коэффициенты c_k , а ряд (2) записывать в виде

$$x(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos k \frac{2\pi}{T} t + c_{kS} \sin k \frac{2\pi}{T} t, \quad (3)$$

где

$$c_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt, \quad (4)$$

$$c_{kC} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos k\omega t dt, \quad (5)$$

$$c_{kS} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin k\omega t dt. \quad (6)$$

Здесь и в дальнейшем $\omega T = 2\pi/T$ – угловая частота основной гармоники периодической функции $x(t)$.

Ряд (3) называется *рядом Фурье в тригонометрической форме*. Для целей спектрального анализа такое разложение не удобно, так как каждой частоте $k\omega t$ отвечают одновременно две составляющие ряда, и необходимо устройство, способное их различать.

Более рациональной является так называемая *амплитудно-фазовая формулировка рядов Фурье*.

Амплитудно-фазовая формулировка ряда Фурье. Каковы бы не были коэффициенты Фурье c_{kC} и c_{kS} , можно найти такое $c_k > c_{kC}$, c_{kS} и такой угол φ_k , чтобы выполнялись соотношения

$$c_{kC} = c_k \cos \varphi_k, \quad c_{kS} = c_k \sin \varphi_k. \quad (7)$$

Подставляя (7) в (3), получим:

$$x(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(k\omega t - \varphi_k). \quad (8)$$

Это тоже тригонометрический ряд Фурье, но его каждая гармоническая составляющая представлена *амплитудой* $c_k = \sqrt{c_{kC}^2 + c_{kS}^2}$ и *начальной фазой* φ_k .

Совокупность гармоник, на которые разлагается функция $x(t)$ называется *спектром периодического колебания $x(t)$* . Совокупности амплитуд c_k и начальных фаз φ_k составляют *амплитудный и фазовый спектры $x(t)$* . Они изображаются в виде *спектральных диаграмм* (рис. 1). При этом каждой гармонике сигнала соответствует вертикальный отрезок, длина которого

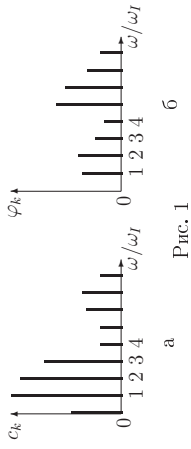


Рис. 1

пропорциональна амплитуде или начальной фазе, а местоположение на горизонтальной оси соответствует частоте.

- *Интерпретируемые периодические сигналы [2, с.30] можно представить математической моделью в виде суммы постоянной составляющей и гармонических колебаний кратных частот.*
- Спектральные линии периодического сигнала образуют *эвидентный-ный дискретный или эвидентный линейчатый спектр* с частотами $k\omega_1$.
- Тригонометрический ряд (8) представляет *вещественные модели* реальных периодических сигналов.
- Структура спектров зависит от симметрии функций [2, с.29].

Представление ряда Фурье в комплексной форме Представляя каждую гармоническую функцию в (8) суммой комплексно-сопряженных слагаемых, получим:

$$x(t) = \frac{1}{2} \left(c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{j(k\omega_1 t - \varphi_k)} + c_k e^{-j(k\omega_1 t - \varphi_k)} \right). \quad (9)$$

Если ввести комплексные амплитуды гармоник $\dot{C}_k = c_k e^{-j\varphi_k}/2$ и $\dot{C}_k^* = c_k e^{j\varphi_k}/2$, то уравнение (9) можно представить в виде:

$$x(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \dot{C}_k e^{jk\omega_1 t} + \sum_{k=-\infty}^{-1} \dot{C}_k^* e^{-jk\omega_1 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k e^{jk\omega_1 t}, \quad (10)$$

где $\dot{C}_0 = c_0/2$, а $\dot{C}_{-k} = \dot{C}_k^*$.

$$\dot{C}_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) (\cos k\omega_1 t - j \sin k\omega_1 t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_1 t} dt. \quad (11)$$

Комплексный ряд (10) содержит гармоники с отрицательными частотами. Они не имеют физического смысла и порождены комплексным представлением гармонических колебаний [2, с.31].

Формулы (11) и (10) часто называют *парой преобразований Фурье*, так как первая из них позволяет определить совокупность комплексных амплитуд по заданной функции $x(t)$ (прямое преобразование Фурье \mathbf{F}), а вторая

2. Увеличивая девиацию частоты а при необходимости и частоту несущего колебания, получить и зарисовать спектр для случая, когда амплитуда несущей частоты обращается в нуль. Произвести измерение боковых частот и их относительных амплитуд и сравнить с теоретически рассчитанными по известному индексу модуляции. Рассчитать ширину спектра и девиацию частоты при частоте модуляции 400 Гц.

3*. Произвести аналогичные расчеты, измерения и зарисовки спектров для случая еще больших индексов модуляции, при которых обращаются в нуль амплитуды первой, второй и т.д. боковых частот (в том числе повторного обращения в нуль несущей). Каждый раз подсчитывать число всех отчетливо наблюдаемых спектральных линий (эффективных боковых колебаний) по одну и другую сторону от несущей и, сравнивая это число с индексом модуляции, проверять известное теоретическое соотношение между ними. Для каждого значения индекса модуляции рассчитывать эффективную полосу спектра (ширину практически получаемого спектра).

модуляция синусоидального колебания высокой частоты синусоидальным или несинусоидальным колебанием более низкой частоты (от генератора GFG-8216A), модуляция несинусоидального (прямоугольного или треугольного) колебания высокой частоты синусоидальным или несинусоидальным колебанием более низкой частоты (от генератора GFG-8216A).

1. Для исследования однонаправленных АМ-колебаний достаточно установить на GFG-8219A синусоидальную форму сигнала, выбрать частоту несущей порядка 1-2 кГц, с помощью кнопки "MOD ON/OFF" задать режим внутренней амплитудной модуляции с частотой 400 Гц.

Зарисовать картины АМ-колебаний и их спектры для трех-четырёх значений коэффициента модуляции m (в том числе равного и большего 100%). Произвести измерение коэффициентов модуляции по осциллограмме и спектрограмме для каждого значения m . Вычислить ширину спектра для различных коэффициентов модуляции. Объяснить, как изменяется форма и спектр колебания при перемодуляции, что происходит с фазой несущего колебания при перемодуляции.

2. Произвести аналогичные измерения для многонаправленных АМ-сигналов, используя в качестве политармонического управляющего (модулирующего) генератор GFG-8216A в режиме генерации прямоугольных и треугольных напряжений (выход генератора GFG-8216A соединяется с разъемом "MOD" на задней стенке генератора GFG-8219A, а сам генератор устанавливается в режим внешней амплитудной модуляции (кнопки "MOD ON/OFF" и "MOD EXT").

Установить на генераторе GFG-8216A частоту 500 Гц. Изменяя его выходное напряжение и регулируя коэффициент модуляции в генераторе GFG-8219A, получить АМ-колебания с глубиной модуляции 50% и 100%.

Зарисовать полученные осциллограммы и спектрограммы. Сравнить спектры, полученные в данном п. и п. А3, и используя [2, с.80-81], объяснить полученные результаты.

3*. Произвести аналогичные измерения при полигармонической амплитудной модуляции (прямоугольное и треугольное напряжение) негармонической несущей (прямоугольной или треугольной формы). Для этого установить частоту несущего сигнала 1.5 кГц и частоту модулирующего сигнала 150-160 Гц.

Зарисовать полученные осциллограммы и спектрограммы. Сравнить спектры, полученные в данном п. и п. А3, и используя [2, с.80-81], объяснить полученные результаты.

В. Исследование спектров частотно-модулированных сигналов

В работе предполагается исследовать только однонаправленные ЧМ-колебания. Наблюдать осциллограммы ЧМ-сигналов не представляется возможным, поэтому следует ограничиться спектральными измерениями.

1. Установить GFG-8219A в режим частотной модуляции и частоту несущего колебания 4.5 кГц. Изменяя девиацию частоты с помощью регулятора "MOD/DEPTH - SWEEP/RATE", установить по спектрограмме малый индекс частотной модуляции β . Зарисовать полученные спектрограммы и, используя таблицу функций Бесселя (Приложение 1), объяснить, до каких значений β можно считать малым.

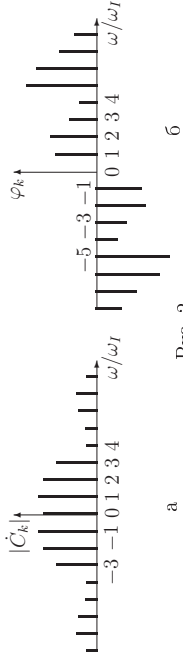


Рис. 2

– найти $x(t)$ по заданному множеству комплексных амплитуд гармоник (обратное преобразование Фурье \mathbf{F}^{-1}). Чтобы подчеркнуть дуальность преобразований Фурье, в литературе (особенно зарубежной) вместо \dot{C}_k вводят дискретно-определенные функции $\dot{X}(k)$ или просто $X(k)$. Тогда

$$\dot{X}(k) = \mathbf{F}[x(t)] \quad x(t) = \mathbf{F}^{-1}[\dot{X}(k)].$$

Совокупность комплексных амплитуд гармоник \dot{C}_k называется *комплексным спектром периодического сигнала* $x(t)$.

Комплексный спектр можно изобразить в виде единой спектральной диаграммы, если над вертикальными отрезками амплитудного спектра указать численные значения начальных фаз гармоник.

Пример. Спектр последовательности прямоугольных видеоимпульсов (рис. 3) задана аналитическим выражением:

$$x(t) = \begin{cases} E, & nT - \tau/2 < t < nT + \tau/2 \quad (n - \text{целое число}), \\ 0, & nT + \tau/2 < t < (n+1)T - \tau/2, \end{cases} \quad (12)$$

где E – амплитуда, а τ – длительность импульсов.

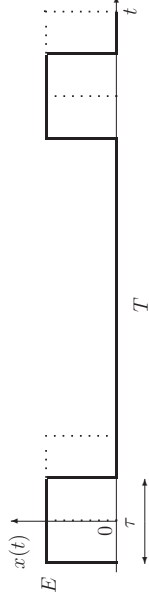


Рис. 3

Подставляя $x(t)$ в (11), получим

$$\begin{aligned} C_0 &= E \frac{\tau}{T}, \quad C_k = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E e^{-jk\omega t} dt = \frac{E}{T} \cdot \frac{e^{-jk\omega t}|_{-\tau/2}^{\tau/2}}{-jk\omega} = \\ &= \frac{E}{-jk\omega T} (e^{-jk\omega\tau/2} - e^{jk\omega\tau/2}) = E \frac{\tau}{T} \cdot \frac{\sin k\omega\tau/2}{k\omega\tau/2}, \end{aligned} \quad (13)$$

где $\omega_1 = 2\pi/T$ – частота основной (первой) гармоники $x(t)$.

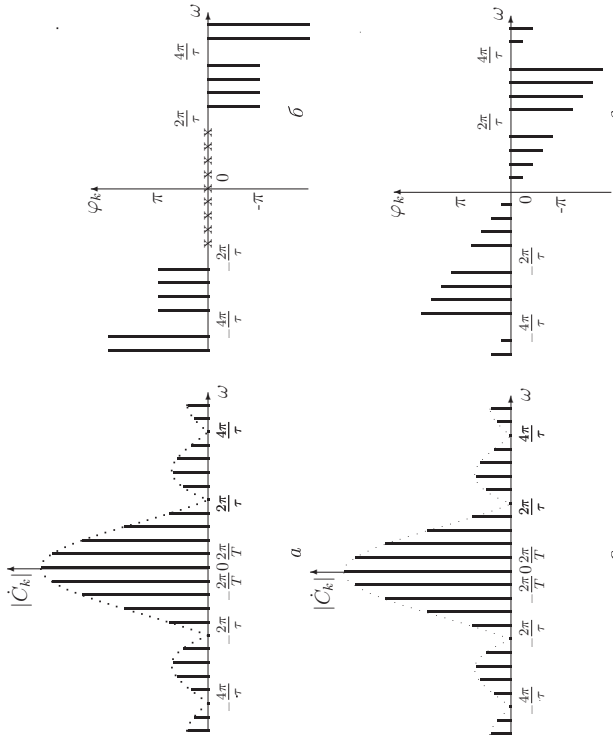


Рис. 4
Амплитудный и фазовый спектры рассматриваемой последовательности импульсов, т.е. зависимости амплитуд и фаз C_k от частот гармоник, представлены на рис. 2.5.а и 2.5.б соответственно.

С учетом (10) сигнал $x(t)$ можно представить в виде следующего ряда Фурье:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} E \frac{\tau}{T} \cdot \frac{\sin k\omega_1\tau/2}{k\omega_1\tau/2} e^{jk\omega_1 t} = E \frac{\tau}{T} + \sum_{k=1}^{\infty} 2E \frac{\tau}{T} \cdot \frac{\sin k\omega_1\tau/2}{k\omega_1\tau/2} \cos k\omega_1 t = \frac{E}{q} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\pi/q}{k\pi/q} \cos k\omega_1 t \right), \quad (14)$$

где величина $q = T/\tau$ характеризует длительность паузы между импульсами и называется *скважностью последовательности* (спектральные диаграммы рис. 4 построены для скважности 5).

Если фронт импульса совпадает с началом отсчета времени (пунктирная кривая на рис. 3), то

$$x(t) = \begin{cases} E, & nT < t < nT + \tau \\ 0, & nT + \tau < t < (n+1)T, \end{cases} \quad (n - \text{целое число}), \quad (15)$$

$$C_k = \frac{1}{T} \int_0^{\tau} E e^{-jk\omega_1 t} dt = \frac{E}{T} \cdot \frac{e^{-jk\omega_1 \tau} - 1}{-jk\omega_1} = \frac{E}{-jk\omega_1 T} (e^{-jk\omega_1 \tau} - 1) =$$

сканирования спектра (клавиша S). При нажатии клавиши на экране появляется вертикальная линия, которая перемещается плавно с помощью клавиш ← и → и скачкообразно при использовании клавиш Ctrl ← и Ctrl →. Для перехода от измерений спектра к режиму осциллографа режим сканирования следует отключать.

Порядок выполнения работы

1. Ознакомиться с инструкцией по эксплуатации ЦИПа.
2. Включить компьютер, найти директорию -SP и запустить программу **danu133.exe**. Включить функциональный генератор GFG-8219A и соединить его со входом АЦП, входящего в состав ЦИП.
3. Установить на GFG-8219A синусоидальную форму сигналов и, плавно изменяя частоту сигнала от 100 Гц до 10 кГц, наблюдать форму сигнала в режиме "осциллограф", а его спектр – в режиме "спектральный зазор". Измерить в режиме "спектральный зазор" частоту сигнала в трех-четырёх точках диапазона и сопоставить ее с показаниями электронного частотомера генератора. Объяснить источники расхождений в результатах измерений.

Указание. Рекомендуется при каждой настройке GFG-8219A поочередно наблюдать осциллограмму и спектр процесса, переключая ЦИП из режима "осциллограф" в режим "спектральный зазор" и обратно.

А. Исследование спектров периодических сигналов

1. Перевести GFG-8219A в режим прямоугольных сигналов. Установить частоту повторения импульсов в 1 кГц и используя ручку генератора "DUTY ADJ" для изменения скважности, наблюдать форму и спектр сигнала при скважности 2, 3, 4 и 5.
2. Измерить спектр (амплитуды и частоты всех отчетливо наблюдаемых гармоник) и для скважности, указанной преподавателем, сопоставить отбрасываемые измеренного и рассчитанного спектров. Объяснить, какие гармоники в спектре должны иметь нулевую амплитуду и почему?
3. Перевести GFG-8219A в режим треугольных сигналов и произвести аналогичные измерения для частоты повторения в 1 кГц. Используя ручку генератора "DUTY ADJ", превратить треугольный сигнал в пилообразный. Объяснить, как трансформируется спектр треугольного сигнала при превращении его в пилообразный.

Б. Исследование спектров амплитудно-модулированных сигналов

Функциональный генератор GFG-8219A позволяет создавать однонаправленные АМ- и ЧМ-колебания с помощью внутреннего генератора гармонических колебаний с частотой 400 Гц или дополнительного (внешнего) генератора с произвольной формой колебаний и частотой до 1 МГц. Одновременное использование двух функциональных генераторов (GFG-8219A и GFG-8216A) позволяет получить четыре различных вида амплитудной или частотной модуляции:

где $n = 0, 1, \dots, N - 1$ - условный номер гармоники. Вычисление по этой формуле связано с проведением N^2 операций сложения и умножения. Для ускорения вычислений были предложены специальные алгоритмы быстрого преобразования Фурье (БПФ). Все они используют группировку идентичных членов.

С помощью схемы выборки-хранения сигнал разбивается на одинаковые интервалы, преобразуется в цифровой код и записывается в памяти компьютера, пока не будет достигнут заданный размер выборки. Затем процессор выполняет БПФ, переводя точки из временной области памяти в частотную, где и формируются значения C_n .

Цифровые анализаторы спектра отличаются высоким быстродействием, так как одновременно вычисляют значения для всех частот на основе единой последовательности входных данных.

Экспериментальная часть

Экспериментальная установка

Экспериментальная установка состоит из цифрового измерительного прибора (ЦИП) и двух функциональных генераторов GFG-8219A и GFG-8216A. ЦИП построен на базе IBM PC с аналого-цифровым преобразователем (АЦП) и имеет несколько режимов, из которых в лабораторной работе используются режим осциллографа (клавиша F2) и режим цифровой анализатора спектра (клавиша F4). Наибольшая частота дискретизации ЦАП составляет 70 кГц. Выборка может быть установлена длиной 2048, 4096 или 8192 байта (клавиша V). Амплитуда входного сигнала устанавливается в пределах $\pm 2.56, \pm 5.12$ или ± 10.24 В (клавиша R). Клавиша Z увеличивает масштаб изображения, а Shift-Z - уменьшает его в любом из режимов ЦИПа. Клавиша F1 содержит Help, а клавиша Esc обеспечивает выход из программы.

ЦИП в режиме осциллографа. Чтобы достаточно полно отобразить на экране структуру исследуемого сигнала необходимо иметь 10 ÷ 12 отсчетов на период колебания. Поэтому максимальная частота сигнала прямоугольной формы должна быть не выше 5 кГц, а для треугольного и синусоидального сигналов не выше 20 ÷ 30 кГц. Амплитуда сигналов не должна превышать 10 В. Число периодов сигнала, наблюдаемых в пределах экрана дисплея (что эквивалентно изменению частоты развертки в обычных осциллографах) можно регулировать, используя клавиши Home - End (грубая настройка) или PageUp - PageDown (плавная настройка). Амплитуда исследуемого сигнала высвечивается в нижнем левом углу экрана.

ЦИП в режиме анализатора спектра. Наибольшая частота спектральных гармоник равна половине частоты дискретизации и составляет 35 кГц. По умолчанию прибор устанавливает наиболее удобный для исследований в лабораторной работе диапазон частот: от 43.596 до 8937 Гц. Клавиши Home - End позволяют сжимать или растягивать изображение спектра, а клавиши ← и → сменяют спектр. Клавиши ↑ и ↓ позволяют варьировать амплитуды спектральных составляющих. Программное обеспечение анализатора спектра предусматривает точное измерение амплитуд и частот спектральных составляющих. Для этого используется режим

$$= E \frac{\tau}{T} e^{-jk\omega\tau/2} \frac{\sin k\omega\tau/2}{k\omega\tau/2},$$

т.е. $\varphi_k = -k\omega\tau/2$, а $x(t)$ принимает вид:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} E \frac{\tau}{T} \cdot \frac{\sin k\omega\tau/2}{k\omega\tau/2} e^{jk(\omega t - \omega\tau/2)} = \\ = \frac{E}{q} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\pi/q}{k\pi/q} \cos(k\omega t - k\omega\tau/2) \right). \quad (16)$$

Таким образом, при задержке последовательности импульсов на $\tau/2$ амплитудный спектр не изменяется (рис. 4,а), а трансформируется только фазовый спектр (рис. 4,б).

Проанализируем полученные результаты.

1. Отгибающая спектра согласно (14) определяется соотношением

$$\frac{2\tau}{T} \cdot \left| \frac{\sin k\omega\tau/2}{k\omega\tau/2} \right| = \frac{2}{q} \cdot \left| \frac{\sin k\pi/q}{k\pi/q} \right|, \quad (17)$$

имеет *лестничную структуру* и принимает нулевые значения на частотах $\omega = 2K\pi/\tau$ или на гармониках с номерами $k = K \cdot q$. Первый нуль ($K = 0$) отгибающей спектра последовательности прямоугольных импульсов имеет круговую частоту $\omega = 2\pi/\tau$, следующий $\omega = 4\pi/\tau$ и т.д., т.е. в нуль обращаются гармоники с номерами $k = q, 2q, 3q, \dots$

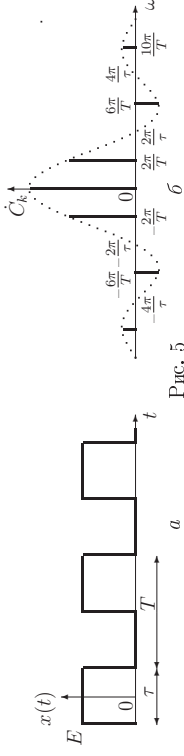


Рис. 5

В частности, при $q = 2$ амплитуды всех четных гармоник обращаются в нуль, а амплитуды нечетных уменьшаются обратно пропорционально номерам гармоник (рис. 5,б). Последовательность прямоугольных импульсов, длительность τ которых равна половине периода (рис. 5,а), называется *меандром*.

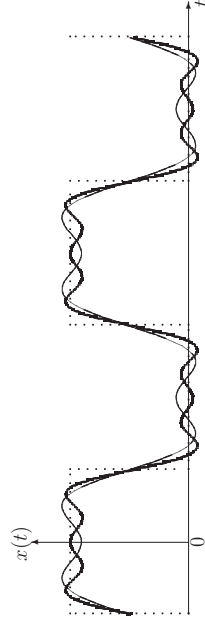


Рис. 6. Аппроксимация $x(t)$ укороченным рядом Фурье: $k = 3$ (тонкая линия), $k = 5$ (п/ж линия) и $k = 31$ (пунктирная линия)

Вклад различных составляющих в сигнал, аппроксимируемый рядом Фурье с конечным числом слагаемых, иллюстрирует рис. 6. При $k = 3$ суммируются всего 5 гармоник и $\hat{x}(t)$ сильно отличается от $x(t)$, но уже при $k = 31$ функции $\hat{x}(t)$ и $x(t)$ практически не различимы.

2. Уменьшение длительности импульсов τ сопровождается перемещением нулей огибающей в область все более высоких частот, т.е. *спектр расширяется*, а скорость убывания его амплитуд и сами амплитуды уменьшаются.

3. Увеличение T при неизменном значении τ вызывает рост числа спектральных линий в каждом лепестке диаграммы и уменьшение расстояний между ними. При $T \rightarrow \infty$, т.е. при переходе от последовательности к одиночному импульсу, спектр *из дискретного превращается в непрерывный, состоящий из бесконечно большого числа спектральных линий малой амплитуды* ($|\dot{C}_k| \rightarrow 0$); *расположенные сколь угодно близко друг к другу*.

Модулированные радиосигналы и их спектры

Сигналы, поступающие от источников сообщений, чаще всего являются низко-частотными и при передаче с помощью радиоволн их спектры переносятся в область высоких частот. Для этого достаточно изменить пропорционально передаваемому сообщению параметры высоко-частотного колебания, называемого *несущим*. В качестве несущих применяются непрерывные (аналоговые), импульсные или даже хаотические колебания. Чаще других используются однотоновые непрерывные сигналы, математической моделью которых является гармоническое колебание.

• Физический процесс изменения во времени одного или нескольких параметров несущего колебания в соответствии с передаваемым сообщением называется *модуляцией*.

Гармоническое несущее колебание

$$x_{\text{нес}}(t) = A_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (18)$$

имеет три параметра: *амплитуду* A_m , *угловую частоту* ω_0 и *начальную фазу* φ_0 . Управляя одним из них можно получить *три вида модуляции: амплитудную, частотную или фазовую* (в дальнейшем используются сокращенные обозначения АМ, ЧМ и ФМ).

Если при неизменных ω_0 и φ_0 амплитуда колебания (18) изменяется по закону

$$A(t) = A_m + \Delta A s(t), \quad (19)$$

где $s(t)$ – передаваемое сообщение, то колебание называется *амплитудно-модулированным*:

$$x_{\text{АМ}}(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = [A_m + \Delta A s(t)] \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (20)$$

Если при неизменных A_m и ω_0 текущая фаза колебания изменяется по закону

$$\Psi(t) = \Psi + \Delta \Psi s(t) = \omega_0 t + \varphi_0 + \Delta \Psi s(t), \quad (21)$$

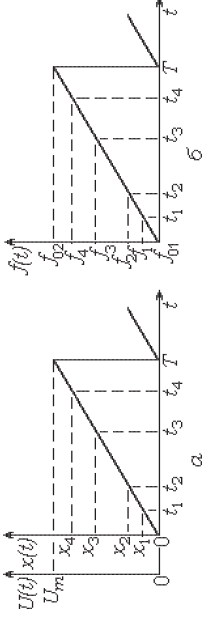


Рис. 14

из которых первые четыре с частотами $f_{01} \leq f_1 < f_2 < f_3 < f_4 \leq f_{02}$ попадают в полосу пропускания входного усилителя и в качестве $U_{\text{вх1}}$ поступают на первый вход перемножителя сигналов. На второй вход перемножителя поступает сигнал от гетеродина. ($U_{\text{вх2}} = U_{\text{мг}} \cos 2\pi f_{\Gamma}(t)$). Тогда

$$U_{\text{вых}} = K[U_1 \cos 2\pi f_1 t + U_2 \cos 2\pi f_2 t + U_3 \cos 2\pi f_3 t + U_4 \cos 2\pi f_4 t] U_{\text{мг}} \cos 2\pi f_{\Gamma}(t).$$

Каждое произведение можно представить полусуммой косинусов суммы и разности аргументов, т.е. на вход резонансного усилителя поступают восемь гармонических сигналов, из которых четыре содержат разностные частоты (подчеркнуты):

$$U_{\text{вых}} = \frac{KU_{\text{мг}}}{2} [U_1 \cos 2\pi(f_1 + f_{\Gamma}(t))t + U_1 \cos 2\pi(f_1 - f_{\Gamma}(t))t + U_2 \cos 2\pi(f_2 + f_{\Gamma}(t))t + f_{\Gamma}(t)t + U_2 \cos 2\pi(f_2 - f_{\Gamma}(t))t + U_3 \cos 2\pi(f_3 + f_{\Gamma}(t))t + U_3 \cos 2\pi(f_3 - f_{\Gamma}(t))t + U_4 \cos 2\pi(f_4 + f_{\Gamma}(t))t + U_4 \cos 2\pi(f_4 - f_{\Gamma}(t))t].$$

Выходной сигнал ГПН медленно изменяется (период сканирования T в тысячи раз превышает периоды измеряемых сигналов), а луч медленно смещается вдоль оси x . Пока $t < t_1$ ни одна из разностных частот не попадает в полосу пропускания резонансного келителя, и напряжение на y -входе ЭЛТ равно нулю. Когда $t \rightarrow t_1$, а $f_1 - f_{\Gamma}(t_1) < f_{\text{пр}}$, сигнал первой спектральной составляющей усиливается резонансным усилителем и создает вертикальное отклонение луча ЭЛТ $y_1 \sim U_1$. Чтобы отклонение луча происходило только вверх используется полупроводниковый диод.

Уже в следующий момент времени выходное напряжение резонансного усилителя снова обращается в нуль, и луч ЭЛТ не отклоняется в вертикальном направлении, прорисовывая горизонтальную прямую.

Таким же образом в моменты времени t_2, t_3 и t_4 возникают вертикальные отклонения в точках с координатами x_2, x_3 и x_4 длиной $y_2 \sim U_2, y_3 \sim U_3$ и $y_4 \sim U_4$. При $t = T$ ГПН возвращается в нулевое состояние, а гетеродин к частоте f_{01} и сканирование спектра повторяется.

Цифровой анализатор спектра. В основе работы анализатора лежит алгоритм, позволяющий вычислить обратное преобразование Фурье. Сигналы измеряются в дискретные моменты в течение ограниченного интервала времени, а коэффициенты ряда C_n вычисляются по формуле:

$$C_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x(m) e^{-j2\pi nm/N},$$

электронное сканирование частоты, то получим наиболее распространенный *сканирующий анализатор спектра* или *анализатор спектра с последовательным анализом*. Вместо одного перестраиваемого фильтра можно использовать набор фильтров с фиксированной полосой пропускания, настроенных на разные частоты и плотно (без зазоров) заполняющих частотный диапазон. Тогда получим *анализатор спектра с одновременным или параллельным анализом*, работающий в реальном времени [5].

С развитием компьютеров появился новый тип анализаторов спектра, основанных на дискретном преобразовании Фурье, - *цифровые анализаторы спектра*.

Сканирующий супергетеродинный анализатор спектра. Действие анализатора спектра напоминает работу обычного радиоприемника с электронной перестройкой, но только очень узкополосного.

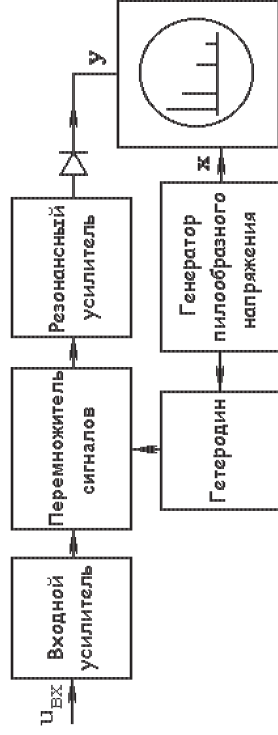


Рис. 13

Анализатор спектра (рис. 13) содержит: входной усилитель с полосой пропускания от f_{01} до f_{02} , определяющий полосу пропускания анализатора спектра, гетеродин – генератор с периодически изменяющейся частотой $f_T(t)$, генератор пилообразного напряжения (ГПН) $U(t) = \frac{U_m}{T}t$ (рис. 14, а), задающий горизонтальное отклонение луча электронно-лучевой трубки (ЭЛТ) и управляющий сканированием частоты гетеродина (рис. 14, б):

$$f_T(t) = f_{01} + \frac{f_{02} - f_{01}}{T}t, \quad (0 \leq t \leq T, \quad f_{01} \leq f_T(t) \leq f_{02}),$$

перемножитель сигналов ($u_{\text{вых}} = K u_{\text{вх1}} \cdot u_{\text{вх2}}$), где K - характеристический параметр перемножителя, узкополосный резонансный усилитель, настроенный на частоту $f_{\text{пр}} \ll f_{01}$, и индикатор спектра в виде ЭЛТ.

Пусть на вход анализатора спектра поступает сигнал, содержащий N гармонических составляющих:

$$u_{\text{вх}}(t) = \sum_{k=1}^N U_k \cos 2\pi f_k t,$$

то получаем *фазомодулированное* колебание:

$$x_{\text{ФМ}}(t) = A_m \cos [\omega_0 t + \varphi_0 + \Delta\Psi \cdot s(t)], \quad (22)$$

где $\Delta\Psi$ – максимальное отклонение или *девиация* фазы колебания.

Наконец, когда постоянны A_m и φ_0 , частота колебания удовлетворяет соотношению

$$\omega(t) = \omega_0 + \Delta\omega s(t), \quad (23)$$

где $\Delta\omega$ – максимальное отклонение (девиация) частоты несущего колебания, то сигнал называется *частотно-модулированным*.

Поскольку каждому значению $\omega(t)$ соответствует определенное значение фазы сигнала, для текущей фазы $\Psi(t)$ колебания с переменной частотой имеем

$$\Psi(t) = \int_0^t \omega(t) dt + \varphi_0, \quad (24)$$

где φ_0 – начальная фаза колебания, а $x_{\text{ЧМ}}(t)$ принимает вид:

$$x_{\text{ЧМ}}(t) = A_m \cos \left(\int_0^t \omega(t) dt + \varphi_0 \right) = A_m \cos \left(\omega_0 t + \Delta\omega \int_0^t s(t) dt + \varphi_0 \right). \quad (25)$$

Частотная и фазовая модуляции сопровождаются изменением одного и того же параметра – фазы (или угла) Ψ несущего колебания и поэтому часто рассматриваются в рамках единой *угловой модуляции*. Однако девиации фазы и частоты ЧМ- и ФМ-сигналов по-разному зависят от частоты модулирующего сигнала Ω .

Ширина и структура спектров модулированных колебаний зависят и от спектральных характеристик передаваемого сообщения, и от вида модуляции. В реальных радиосистемах передаваемое сообщение непредсказуемо, а $s(t)$ является случайной функцией. Ее спектр обычно занимает полосу частот от десятков герц до десятков килогерц. Это означает, что *наибольшая частота в спектре передаваемого сообщения значительно ниже частоты несущего колебания* и модулированное колебание можно считать *узкополосным* или даже *квазигармоническим*.

Однотональные АМ-сигналы

Математической моделью АМ-сигнала служит выражение

$$x_{\text{АМ}}(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (26)$$

где $A(t) = A_m(1 + m s(t))$ – огибающая АМ-сигнала; ω_0 и φ_0 – круговая частота и начальная фаза высокочастотного заполнения; A_m – амплитуда несущего колебания в отсутствие модуляции; $m = \Delta A / A_m$ – *коэффициент модуляции*.

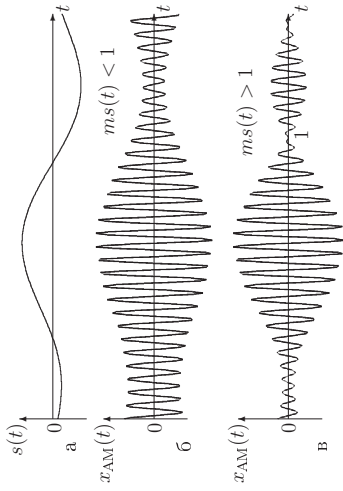


Рис. 7. Передаваемое сообщение (а) и АМ-колебание при $|ms(t)| < 1$ (б) и $|ms(t)| > 1$ (в), 1 – точка разрыва фазы несущего колебания

Пока $|ms(t)| < 1$ (рис. 7, б), передаваемое сообщение вносится в $x_{AM}(t)$ без искажений [2, с.76]. Исследование свойств и структуры АМ-процессов начнем с простейшей модели – однотонального АМ-колебания.

Пусть модулирующий сигнал $s(t)$ является гармоническим:

$$s(t) = A_s \cos(\Omega t + \Phi_0),$$

Такое АМ-колебание называется *однотональным*, а его мгновенное значение описывается соотношением

$$x_{AM}(t) = A_m (1 + m \cos(\Omega t + \Phi_0)) \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (27)$$

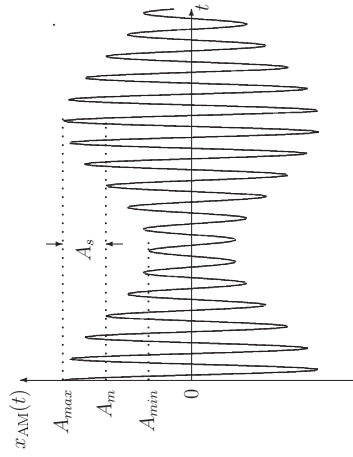


Рис. 8. Однотональное АМ-колебание

Спектральный состав АМ-сигнала получим, представляя произведение функций в (27) в виде суммы гармонических колебаний:

$$x_{AM}(t) = A_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{mA_m}{2} \cos[(\omega_0 - \Omega)t + \varphi_0 - \Phi_0] + \frac{mA_m}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega)t + \varphi_0 + \Phi_0]. \quad (28)$$

колебания, имеющих существенную для расчетов величину [2, с.84-86], и по структуре не отличается от спектра однотонального АМ-сигнала. При больших значениях β существенную для расчетов величину имеют функции Бесселя, порядок которых k не превышает $\beta + 1$, т.е. реальная ширина спектра УМ-сигнала составляет $2(\beta + 1)\Omega = 2(\Delta\omega + \Omega) \simeq 2\Delta\omega = 2\beta\Omega$ и в 2β раз превышает ширину спектра аналогичного однотонального АМ-сигнала. Спектры двух УМ-сигналов для $A_m = 1$ при $\beta = 1$ и $\beta = 2.5$ представлены на рис. 12, а, б соответственно. Отметим, что амплитуда несущей может быть не только много меньше амплитуд боковых колебаний, но и при $\beta = 2.405, 5.52, \dots$ (см. табл. 1) вообще отсутствует в спектре УМ-колебания.

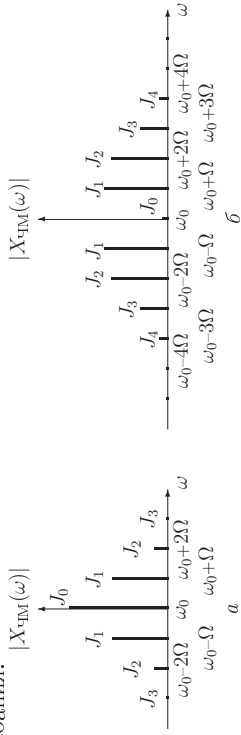


Рис. 12. Спектры УМ-сигналов при $\beta = 1$ (а) и $\beta = 2.5$ (б)

- Ширина спектра однотонального УМ-колебания при больших индексах модуляции близка к удвоенной девиации частоты и не зависит от частоты модулирующего сигнала.
- Одновременное присутствие многих составляющих, содержащих информацию о модулирующем сигнале, позволяет обеспечить высокую достоверность при передаче сообщений и осуществить высококачественное радиовещание, а присутствие амплитуды УМ-сигналов, точнее независимость амплитуды УМ-колебания от передаваемого сообщения, обеспечивает помехоустойчивость приема.
- Необходимая широкополосность УМ-сигналов может быть обеспечена только при достаточно высокой частоте несущего колебания, т.е. в области метровых или более коротких волн. Поэтому ЧМ-колебания (их проще создавать и демодулировать) используются при трансляции стереопередач в УКВ-диапазоне и звукового сопровождения телевизионных передач.

Методика экспериментального исследования спектров радиосигналов и электронные приборы для спектрального анализа (анализаторы спектра)

Исследования частотных спектров сигналов выполняются с помощью электронных приборов, называемых *анализаторами спектра*.

В простейшем случае амплитуды различных частотных составляющих сигнала можно измерить с резонансным селективным вольтметром, переключая его частоту. Если его перестройку автоматизировать, используя

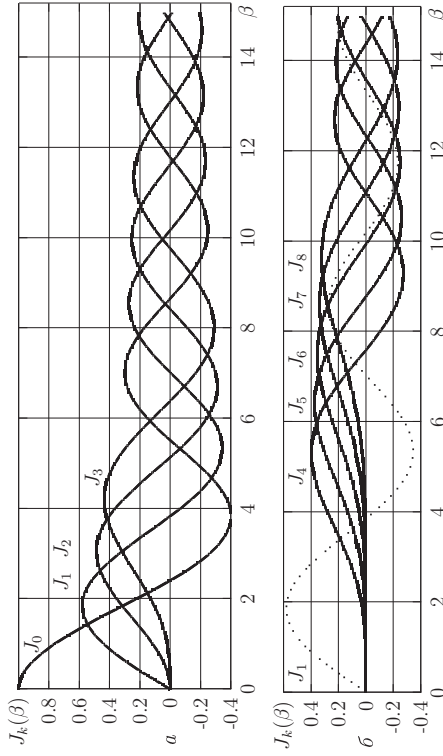


Рис. 11. Функции Бесселя нулевого – третьего порядка (а) и четвертого – восьмого порядка (б)

- Спектр даже однотонального модулированного по частоте (или в общем случае по углу) колебания содержит бесконечное число боковых гармоник, попарно симметричных относительно несущей частоты колебания. У однотональных колебаний спектр эквидистантный. Амплитуды всех составляющих, в том числе и несущей, пропорциональны значениям функций Бесселя.

Значения β , при которых функции Бесселя нулевого, первого и второго порядка обращаются в нуль, представлены в табл.1, а значения функций Бесселя $J_0(\beta)$, $J_1(\beta) - J_6(\beta)$ при фиксированных значениях β – в табл. 2.

Таблица 1
Значения первых пяти корней функций Бесселя $J_0(\beta)$, $J_1(\beta)$ и $J_2(\beta)$

β	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5
$J_0(\beta)$	2.405	5.52	8.65	11.79	14.93
$J_1(\beta)$	3.83	7.01	10.17	13.31	16.47
$J_2(\beta)$	5.13	8.41	11.62	14.79	17.96

Таблица 2
Значения функций Бесселя $J_0(\beta)$, $J_1(\beta) - J_6(\beta)$ при фиксированных значениях β

β	$J_0(\beta)$	$J_1(\beta)$	$J_2(\beta)$	$J_3(\beta)$	$J_4(\beta)$	$J_5(\beta)$	$J_6(\beta)$
$\beta = 0.5$	0.938	0.242	0.03	$\rightarrow 0$	$\rightarrow 0$	$\rightarrow 0$	$\rightarrow 0$
$\beta = 1.0$	0.765	0.44	0.114	0.02	$\rightarrow 0$	$\rightarrow 0$	$\rightarrow 0$
$\beta = 1.5$	0.511	0.558	0.232	0.06	0.008	$\rightarrow 0$	$\rightarrow 0$
$\beta = 2.0$	0.224	0.576	0.352	0.13	0.034	0.007	$\rightarrow 0$
$\beta = 2.5$	-0.04	0.497	0.446	0.241	0.097	0.29	0.007

Как следует из табл. 2, при $\beta \leq 0.5$ амплитудный спектр ЧМ-сигнала (предлагается считать самостоятельно) содержит всего 3 гармонических

Итак, однотональное АМ-колебание состоит из трех гармонических колебаний с близкими частотами. Ширина его спектра равна удвоенной частоте модуляции. Первое слабое в правой части (28) является несущим колебанием. Два других колебания возникают в результате модуляции. Они имеют равные амплитуды, пропорциональные m , симметричные относительно несущего колебания фазы $-\Phi_0$ и $+\Phi_0$ и частоты $\omega_0 - \Omega$ и $\omega_0 + \Omega$, называемые *нижней и верхней боковыми частотами*. Формулу (28) можно интерпретировать графически [2, с.78].

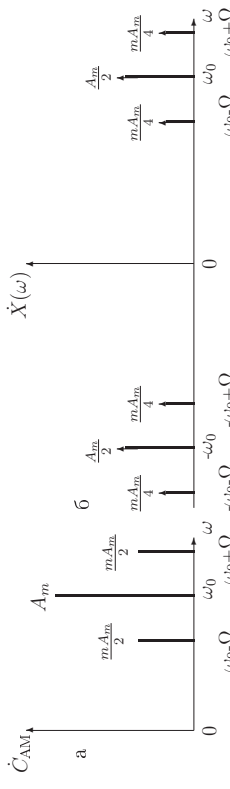


Рис. 9. Вещественный (а) и комплексный (б) спектры однотонального АМ-сигнала

Вещественный спектр однотонального АМ-сигнала в общем случае – линейчатый спектр квазипериодического процесса [2, с.11]. Только в тех случаях, когда $\omega_0/\Omega = N$, где N – целое число, процесс становится периодическим, а линии спектра – $(N - 1)$ -й, N -й и $(N + 1)$ -й гармониками частоты модуляции.

Многотональные АМ-колебания Пусть модулирующий сигнал $s(t)$ является полигармоническим (многотональным) колебанием:

$$s(t) = \sum_{i=1}^N A_i \cos(\Omega_i t + \Phi_i).$$

Спектр $s(t)$ может быть неэквидистантным. Если последовательность частот Ω_i упорядочена так, что $\Omega_1 < \Omega_2 < \dots < \Omega_N$ (рис. 5.5,а), то мгновенное значение многотонального АМ-колебания описывается соотношением

$$x_{AM}(t) = A_m \left(1 + \sum_{i=1}^N m_i \cos(\Omega_i t + \Phi_i) \right) \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (29)$$

где $m_i = A_i/A_m$ – парциальные (частные) коэффициенты модуляции. Тогда

$$x_{AM}(t) = A_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \sum_{i=1}^N \frac{m_i A_m}{2} \cos[(\omega_0 - \Omega_i)t + \varphi_0 - \Phi_i] + \sum_{i=1}^N \frac{m_i A_m}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega_i)t + \varphi_0 + \Phi_i]. \quad (30)$$

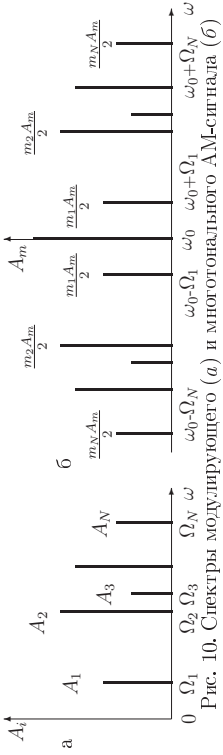


Рис. 10. Спектры модулирующего (а) и многотонального АМ-сигнала (б)

Спектр многотонального АМ-сигнала содержит две группы колебаний с верхними от $(\omega_0 + \Omega_1)$ до $(\omega_0 + \Omega_N)$ и нижними от $(\omega_0 - \Omega_N)$ до $(\omega_0 - \Omega_1)$ боковыми частотами. При этом структуры спектров верхней боковой полосы частот и модулирующего сигнала идентичны, а спектральные компоненты верхней боковой полосы частот получают при зеркальном отражении боковых частот расположения попарно-симметрично относительно частоты несущего колебания. Полный спектр содержит $2N + 1$ составляющих, а его ширина определяется величиной максимальной частоты в спектре модулирующего сигнала и равна $2\Omega_N$.

Частным случаем многотонального АМ-сигнала является высокочастотное колебание, промодулированное по амплитуде последовательностью прямоугольных импульсов [2, с. 80-81].

Однотональные ЧМ-сигналы

Пусть $s(t) = \cos(\Omega t + \Phi_0)$. Тогда для мгновенных значений ЧМ-сигнала получим выражение

$$\begin{aligned} x_{\text{ЧМ}}(t) &= A_m \cos[\omega_0 t + \varphi_0 + \Delta\omega \int_0^t \cos(\Omega t + \Phi_0) dt] = \\ &= A_m \cos[\omega_0 t + \varphi_0 + \beta \sin(\Omega t + \Phi_0)]. \end{aligned} \quad (31)$$

Величина $\beta = \Delta\omega/\Omega$ представляет *девиацию фазы ЧМ-сигнала* и называется *индексом частотной модуляции* однотонального ЧМ-сигнала.

Не нарушая общности анализа, положим $\Phi_0 = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} x_{\text{ЧМ}}(t) &= A_m \cos[\beta \sin \Omega t] \cos(\omega_0 t + \varphi_0) - \\ &- A_m \sin[\beta \sin \Omega t] \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \end{aligned} \quad (32)$$

Функции $\cos[\beta \sin \Omega t]$ и $\sin[\beta \sin \Omega t]$ – периодические функции с периодом $T/4 = \pi/2\Omega$, и их можно разложить в ряды Фурье. При разложении функций $\cos[\beta \sin \Omega t]$ амплитуды нечетных гармоник обращаются в нуль, а для C_{2k} получаем выражение:

$$C_{2k} = \frac{4}{T} \int_0^{T/4} \cos(\beta \sin \Omega t) \cos 2k\Omega t dt, \quad (33)$$

которое совпадает с известной формулой интегрального представления функций Бесселя четного порядка $J_{2k}(\beta)$. Таким образом, разложение функции $\cos[\beta \sin \Omega t]$ имеет вид

$$\cos[\beta \sin \Omega t] = \sum_{k=0}^{\infty} J_{2k}(\beta) \cos(2k\Omega t). \quad (34)$$

При разложении функции $\sin[\beta \sin \Omega t]$ в нуль обращаются амплитуды четных гармоник, а для C_{2k+1} имеем

$$C_{2k+1} = \frac{4}{T} \int_0^{T/4} \sin(\beta \sin \Omega t) \sin(2k+1)\Omega t dt = J_{2k+1}(\beta).$$

В результате получаем следующее разложение функции $\sin[\beta \sin \Omega t]$:

$$\sin[\beta \sin \Omega t] = \sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1}(\beta) \sin[(2k+1)\Omega t]. \quad (35)$$

Подставляя (34) и (35) в (32), получим:

$$\begin{aligned} x_{\text{ЧМ}}(t) &= A_m \sum_{k=0}^{\infty} J_{2k}(\beta) \cos(2k\Omega t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \\ &+ A_m \sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1}(\beta) \sin[(2k+1)\Omega t] \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \end{aligned} \quad (36)$$

После внесения $\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ и $\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$ под знаки сумм и использования тригонометрических уравнений

$$\begin{aligned} \cos(2k\Omega t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) &= \frac{1}{2} \cos(\omega_0 t + \varphi_0 - 2k\Omega t) + \frac{1}{2} \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + 2k\Omega t); \\ \sin[(2k+1)\Omega t] \sin(\omega_0 t + \varphi_0) &= \frac{1}{2} \cos(\omega_0 t + \varphi_0 - (2k+1)\Omega t) - \\ &- \frac{1}{2} \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + (2k+1)\Omega t) \end{aligned}$$

разложение в спектр однотонального ЧМ-сигнала с произвольным индексом модуляции принимает окончательный вид

$$x_{\text{ЧМ}}(t) = A_m \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta) \cos[(\omega_0 + k\Omega)t + \varphi_0]. \quad (37)$$

При выводе этого соотношения было также учтено, что $J_{-k}(\beta) = (-1)^k J_k(\beta)$, т.е. $J_{-2k}(\beta) = J_{2k}(\beta)$, $J_{-(2k+1)}(\beta) = -J_{2k+1}(\beta)$.