

ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРЫ РАДИОСИГНАЛОВ СПЕКТРАЛЬНЫМ МЕТОДОМ (Цифровой измерительный прибор)

*Учебное пособие для спецпрактикума по курсу
«Радиоэлектроника»*

Ц е л ь р а б о т ы: изучить структуру периодических, непериодических и модулированных по амплитуде и частоте сигналов спектральным методом.

Литература

1. Приходько А.И. Детерминированные сигналы. Уч. пособие для вузов М.: Горячая Линия - Телеком, 2013. 326 с.
2. Хохлов А.В. Теоретические основы радиоэлектроники. Уч. пособие. Саратов. Изд-во Сар.ун-та, 2005. 206 с.
3. Раушер К., Йанссен Ф., Минихольд Р. Основы спектрального анализа Пер. с англ. М.: Горячая линия-Телеком, 2006. 224 с.

Контрольные вопросы

1. Что понимают под спектром периодического сигнала? Что такое амплитудный и фазовый спектры периодического спектра? Как различаются спектры периодических, непериодических и квазипериодических сигналов?
2. Запишите в аналитической форме и изобразите графически вещественный и комплексный спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов. Как изменится спектр при изменении длительности импульсов, их амплитуды и частоты повторения?
3. Запишите аналитическое выражение для однотонового и многотонового АМ-колебаний и изобразите их амплитудные спектры.
4. Запишите аналитическое выражение для однотонового ЧМ-колебания и изобразите его амплитудный спектр при малом и большом значениях индекса частотной модуляции. При каких условиях в спектре ЧМ-колебания отсутствуют несущая, первая боковая или вторая боковая составляющая?

ТЕОРИТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Регулярными (детерминированными) называются сигналы, мгновенные значения которых в любой момент времени можно точно предсказать. Детерминированные колебания могут быть периодическими, квазипериодическими, непериодическими, хаотическими.

Спектром сигнала (частотным спектром) называется распределение энергии сигналов по частотам.

1. Спектры периодических колебаний

Разложение сигналов в тригонометрические ряды Фурье.

Периодическими называют колебания, мгновенные значения которых повторяются через интервал T , называемым *периодом*:

$$x(t + nT) = x(t), \quad -\infty < t < \infty, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Период T - это наименьший промежуток времени, через который сигнал возвращается в произвольное первоначальное состояние. Периодический сигнал, удовлетворяющий условиям Дирихле, можно разложить в тригонометрический ряд Фурье, если в качестве базиса использовать систему ортонормальных на отрезке $[-T/2, T/2]$ тригонометрических функций с кратными частотами:

$$x(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (c_{kC} \cos k \frac{2\pi}{T} t + c_{kS} \sin k \frac{2\pi}{T} t), \quad (1)$$

где

$$c_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt, \quad (2)$$

$$c_{kC} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos k \Omega_I t dt, \quad (3)$$

$$c_{kS} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin k \Omega_I t dt. \quad (4)$$

Здесь и в дальнейшем $\Omega_I = 2\pi/T$ - угловая частота первой (*основной гармоники*) периодической функции $x(t)$.

Для целей спектрального анализа такое разложение не удобно, так как каждой частоте $k\Omega_I$ отвечают одновременно две составляющие ряда, и необ-

ходимо устройство, способное их различать. Более рациональной является так называемая *амплитудно-фазовая формулировка* рядов Фурье.

Амплитудно-фазовая формулировка ряда Фурье.

Каковы бы не были коэффициенты Фурье c_{kC} и c_{kS} , можно найти такое $c_k > c_{kC}$, c_{kS} и такой угол φ_k , чтобы выполнялись соотношения

$$c_{kC} = c_k \cos \varphi_k, \quad c_{kS} = c_k \sin \varphi_k.$$

Тогда

$$x(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(k\Omega_I t - \varphi_k). \quad (5)$$

Это тоже тригонометрический ряд Фурье, но все его гармоники представлены одной *амплитудой* $c_k = \sqrt{c_{kC}^2 + c_{kS}^2}$ и *начальной фазой* $\varphi_k = \operatorname{arctg} \frac{c_{kS}}{c_{kC}}$.

- Итак, *периодическое колебание, удовлетворяющее условиям Дирихле, можно представить математической моделью в виде суммы постоянной составляющей и гармонических колебаний кратных частот (гармоник).*

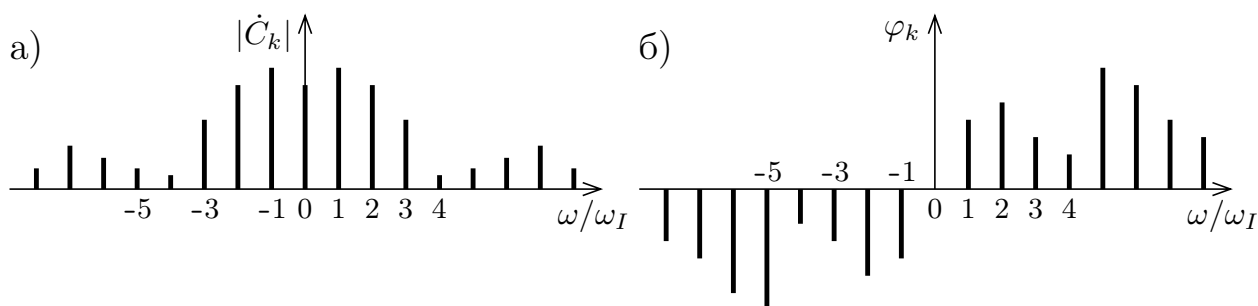


Рис. 1. Комплексный спектр сигнала $x(t)$ (а), фазовый спектр сигнала $x(t)$ (б).

Совокупность гармоник, на которые разлагается функция $x(t)$ называется *спектром периодического колебания* $x(t)$. Совокупность амплитуд гармоник c_k (рис. 1,а) составляет *амплитудный*, а совокупность начальных фаз φ_k (рис. 1,б) – *фазовый спектр* $x(t)$, которые изображаются в виде *спектральных диаграмм*. При этом каждой гармонике сигнала ставят в соответствие вертикальный отрезок, длина которого пропорциональна амплитуде или начальной фазе, а местоположение на горизонтальной оси соответствует частоте.

- Спектральные линии периодического сигнала $k\Omega_I$ образуют *экви-дистантный дискретный* или *экви-дистантный линейчатый* спектр.

Представление ряда Фурье в комплексной форме.

Представим каждую гармоническую функцию в (5) суммой комплексно-сопряженных слагаемых. Тогда имеем:

$$x(t) = \frac{1}{2} \left(c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{j(k\Omega_I t - \varphi_k)} + c_k e^{-j(k\Omega_I t - \varphi_k)} \right). \quad (6)$$

Если ввести комплексные амплитуды гармоник $\dot{C}_k = c_k e^{-j\varphi_k}/2$ и $\dot{C}_k^* = c_k e^{j\varphi_k}/2$, то уравнение (6) можно представить в виде:

$$x(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \dot{C}_k e^{jk\Omega_I t} + \sum_{k=-\infty}^{-1} \dot{C}_k^* e^{jk\Omega_I t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k e^{jk\Omega_I t}, \quad (7)$$

$$\dot{C}_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) (\cos k\Omega_I t - j \sin k\Omega_I t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\Omega_I t} dt, \quad (8)$$

где $\dot{C}_0 = c_0/2$, а $\dot{C}_{-k} = \dot{C}_k^*$. Комплексный ряд (7) содержит гармоники с отрицательными частотами. *Отрицательные частоты не имеют физического смысла и порождены комплексным представлением гармонических колебаний.* Кажущееся удвоение коэффициентов Фурье связано с введенными выше обозначениями ($|\dot{C}_k| = c_k/2$). Формулы и (7) и (8) часто называют *парой преобразований Фурье*, так как первая из них позволяет определить совокупность комплексных амплитуд по заданной функции $x(t)$ (прямое преобразование Фурье \mathbf{F}), а вторая – найти $x(t)$ по заданному множеству комплексных амплитуд гармоник (обратное преобразование Фурье \mathbf{F}^{-1}):

$$\dot{X}(k) = \mathbf{F}[x(t)] \quad x(t) = \mathbf{F}^{-1}[\dot{X}(k)].$$

Совокупность комплексных амплитуд гармоник \dot{C}_k называется *комплексным спектром периодического сигнала $x(t)$* . Формально на спектральных диаграммах изображаются гармоники с положительными и отрицательными частотами, т.е. амплитудный и фазовый спектры имеют вид, представленный на рис. 1, хотя реальные спектры физических процессов содержат только гармоники с положительными частотами, а их амплитуды вдвое больше амплитуд соответствующих гармоник комплексного спектра

Спектр последовательности прямоугольных видеоимпульсов.

Пусть периодическая последовательность импульсов с периодом T (рис. 2,а) задана аналитическим выражением:

$$x(t) = \begin{cases} E, & \text{при } nT - \tau/2 < t < nT + \tau/2 \quad (n - \text{целое число}) \\ 0, & \text{при } nT + \tau/2 < t < (n+1)T - \tau/2, \end{cases} \quad (9)$$

где E – амплитуда, τ – длительность импульсов, n – номер импульса.

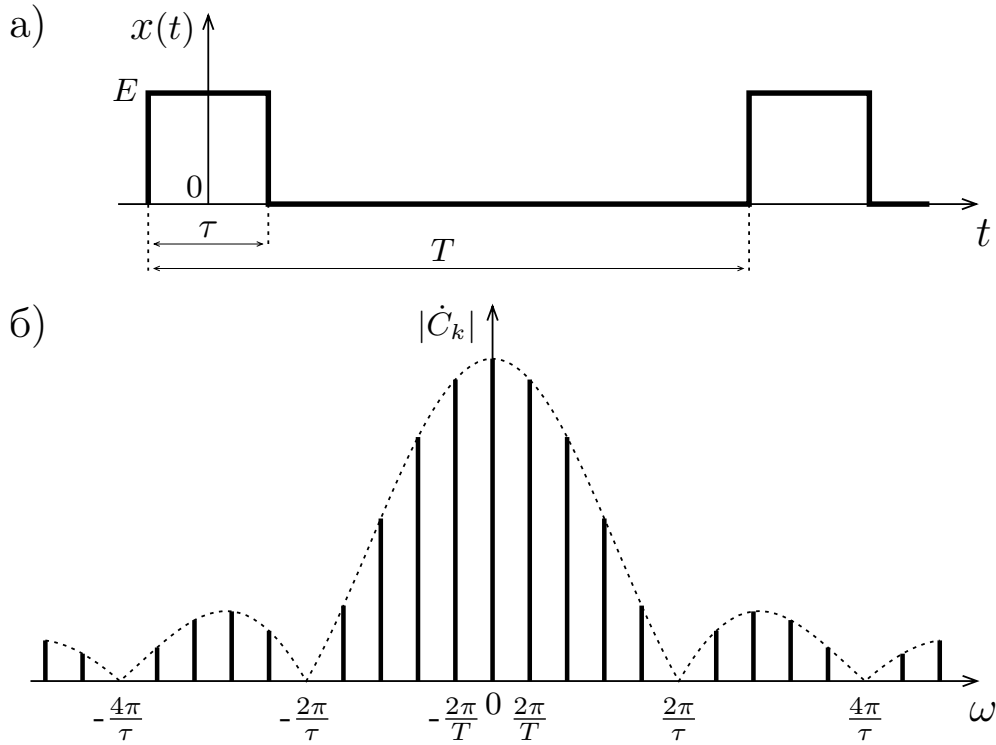


Рис. 2. Периодическая последовательность импульсов (а) и его спектр (б).

Подставляя $x(t)$ в (8), получим:

$$\begin{aligned} C_0 &= E \frac{\tau}{T}, \\ \dot{C}_k &= \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E e^{-jk\Omega_I t} dt = \frac{E}{T} \cdot \frac{e^{-jk\Omega_I t}}{-jk\Omega_I} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{E}{-jk\Omega_I T} (e^{-jk\Omega_I \tau/2} - e^{jk\Omega_I \tau/2}) = \\ &= E \frac{\tau}{T} \cdot \frac{\sin k\Omega_I \tau/2}{k\Omega_I \tau/2}, \end{aligned}$$

где $\Omega_I = 2\pi/T$ – частота основной (первой) гармоники $x(t)$. Амплитудный и фазовый спектры рассматриваемой последовательности импульсов представлены на рис. 2,а и 2,б соответственно. Итак, с учетом (7) последовательность прямоугольных импульсов $x(t)$ можно представить в виде следующего ряда Фурье:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} E \frac{\tau}{T} \cdot \frac{\sin k\Omega_1\tau/2}{k\Omega_1\tau/2} e^{jk\Omega_1 t} = E \frac{\tau}{T} + \sum_{k=1}^{\infty} 2E \frac{\tau}{T} \cdot \frac{\sin k\Omega_1\tau/2}{k\Omega_1\tau/2} \cos k\Omega_1 t = \\
&= \frac{E}{q} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\pi/q}{k\pi/q} \cos k\Omega_1 t \right), \tag{10}
\end{aligned}$$

где $q = T/\tau$ характеризует длительность паузы между импульсами и называется *скважностью последовательности* импульсов.

Проанализируем полученные результаты:

1. Огибающая спектра согласно (10) определяется соотношением

$$\frac{2\tau}{T} \cdot \left| \frac{\sin k\Omega_I\tau/2}{k\Omega_I\tau/2} \right| = \frac{2}{q} \cdot \left| \frac{\sin k\pi/q}{k\pi/q} \right|, \tag{11}$$

имеет *лепестковую структуру* и не зависит от периода повторения импульсов.

2. Поскольку $\sin k\Omega_I\tau/2$ обращается в нуль, когда аргумент функции равен $K\pi$, огибающая спектра принимает нулевые значения на частотах $\Omega = 2K\pi/\tau$ или на гармониках с номерами $k = K \cdot q$. Первый нуль ($K = 0$) огибающей спектра последовательности прямоугольных импульсов имеет круговую частоту $\Omega = 2\pi/\tau$, следующий $\Omega = 4\pi/\tau$ и т.д., т.е. гармоники с номерами $k = q, 2q, 3q, \dots$ обращаются в нуль. В частности, при $q = 2$ (такая последовательность прямоугольных импульсов, у которой длительность импульса τ составляет точно полпериода (рис. 3,а), называется *меандр*) все четные гармоники в спектре отсутствуют (рис. 3,б).

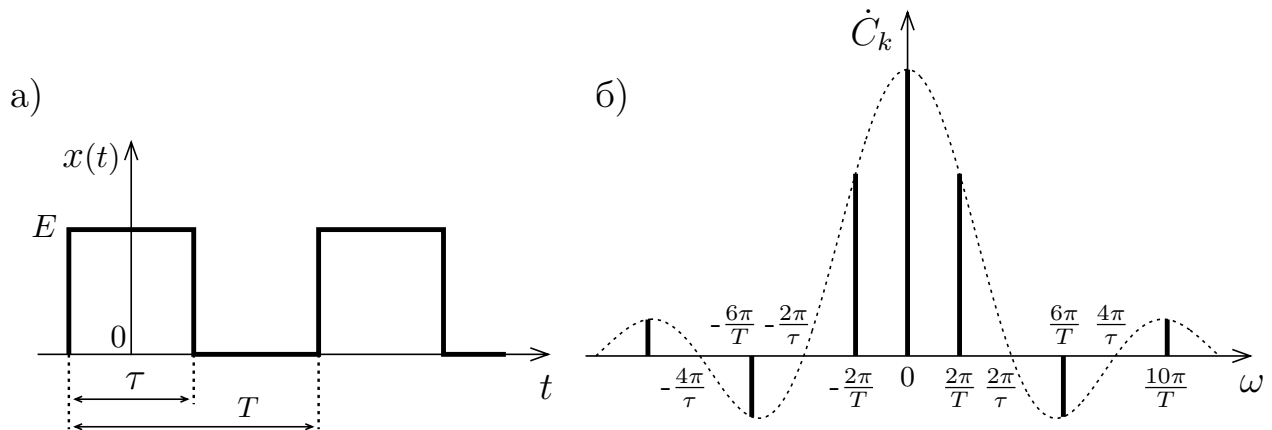


Рис. 3. Последовательность прямоугольных импульсов со скажностью $q = 2$ (*меандр*) (а), спектра *меандра* (б).

3. При уменьшении длительности импульсов τ нули огибающей перемещаются в область все более высоких частот, т.е. *спектр расширяется*, а ско-

рость убывания амплитуд гармоник и сами амплитуды уменьшаются. Так при $q = 2$ имеем $X(3)/X(1) = C_3/C_1 = 0.33$, $X(5)/X(1) = 0.2$, а при $q = 10$ — соответственно 0.97 и 0.9.

4. При постоянной длительности импульсов с увеличением периода повторения T количество спектральных линий в каждой лепестке диаграммы возрастает, а расстояния между отдельными линиями уменьшается. При $T \rightarrow \infty$, т.е. при переходе от последовательности к одиночному импульсу, спектр *из дискретного превращается в непрерывный, состоящий из бесконечно большого числа спектральных линий пренебрежимо малой амплитуды* ($|\dot{C}_k| \rightarrow 0$), расположенных сколь угодно близко друг к другу.

2. Модулированные радиосигналы и их спектры

Сигналы от источника сообщений чаще всего являются низкочастотными, и для передачи информации по радиоканалам требуемое сообщение необходимо внести во вспомогательное высокочастотное колебание, называемое *несущим*, т.е. изменить по заданному закону его параметры. В качестве несущих чаще других используются гармонические колебания.

- Физический процесс временного изменения одного или нескольких параметров несущего колебания в соответствии с передаваемым сообщением называется *модуляцией* несущего колебания.

Гармоническое несущее колебание

$$x(t) = A_m \cos(\omega t + \varphi_0)$$

имеет три независимых параметра: *амплитуду* A_m , *круговую частоту* ω и *фазу* $\Psi = \omega t + \varphi_0$. Управляя одним из них можно получить *три вида модуляции: амплитудную, частотную или фазовую* (В дальнейшем будем использовать сокращенное обозначение АМ, ЧМ и ФМ). Структура спектра модулированного колебания зависит и от спектральных характеристик передаваемого сообщения, и от вида модуляции. Обычно модулирующий сигнал *медленно изменяется во времени* по сравнению с несущим колебанием. Это означает, что *наивысшая частота в спектре передаваемого сообщения значительно ниже частоты несущего колебания*.

Однотональные АМ-сигналы.

Математической моделью АМ-сигнала (рис. 4) служит выражение:

$$x(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (12)$$

где $A(t) = A_m(1 + ms(t))$ – огибающая АМ-сигнала, ω_0 и φ_0 – круговая частота и начальная фаза высокочастотного заполнения, A_m – амплитуда несущего колебания в отсутствии модуляции, $s(t)$ – передаваемое сообщение (рис. 4,а), m – коэффициент модуляции.

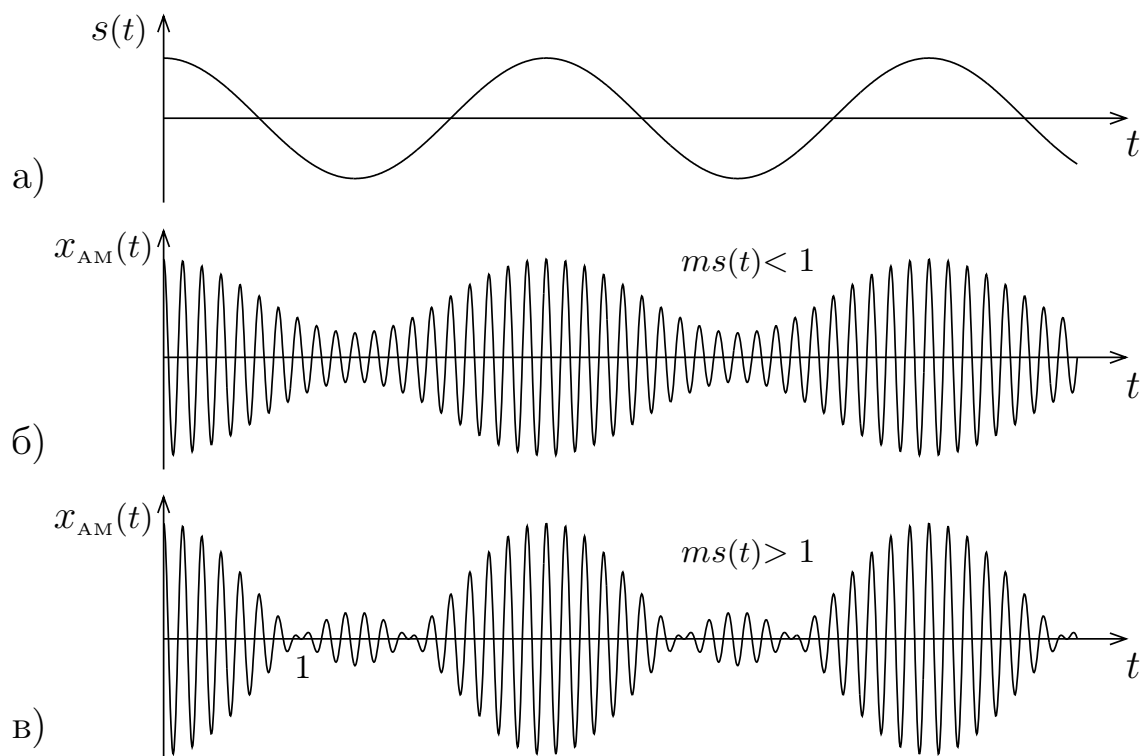


Рис. 4. Модулирующий (а) и АМ-сигнал при $m < 1$ и $m > 1$ (б, в), 1 – точка разрыва фазы несущего колебания.

Коэффициент модуляции является основным параметром АМ-колебания. Он обычно выражается в процентах и характеризует эффективность передачи сообщения. Пока $ms(t) < 1$ (рис. 4,б), передаваемая информация вносится в $x(t)$ без искажений. При этом эффективность использования мощности несущего колебания с ростом m увеличивается. Если же $ms(t) > 1$ (рис. 4,в), то происходит *перемодуляция* сигнала. В этом случае огибающая АМ-сигнала не соответствует передаваемому сообщению, а фаза несущего колебания претерпевает разрывы (точка 1 на рис. 4,в). При восстановлении передаваемого сообщения (демодуляции) из перемодулированного сигнала неизбежно возникают ошибки.

Пусть модулирующий сигнал $s(t)$ является гармоническим (однотональным) колебанием:

$$s(t) = A_s \cos(\Omega t + \Phi_0),$$

и частота Ω удовлетворяет условию $\Omega \ll \omega_0$. Тогда АМ-колебание называется *однотональным*, а его мгновенное значение описывается соотношением:

$$x(t) = A_m (1 + m \cos(\Omega t + \Phi_0)) \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (13)$$

где $m = A_s/A_m$. График (осциллограмма) однотонального АМ-колебания представлен на рис. 5,а. Амплитуда колебания изменяется от $A_{min} = A_m(1 - m)$ до $A_{max} = A_m(1 + m)$. Поэтому коэффициент модуляции можно определить по осциллограмме процесса с помощью формулы:

$$m = \frac{A_{max} - A_{min}}{A_{max} + A_{min}}.$$

Спектр сигнала получим, представляя (13) в виде суммы колебаний:

$$x(t) = A_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{mA_m}{2} \cos[(\omega_0 - \Omega)t + \varphi_0 - \Phi_0] + \frac{mA_m}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega)t + \varphi_0 + \Phi_0]. \quad (14)$$

Таким образом, однотональное АМ-колебание состоит из трех гармонических колебаний с близкими частотами, а ширина его спектра равняется удвоенной частоте модуляции.

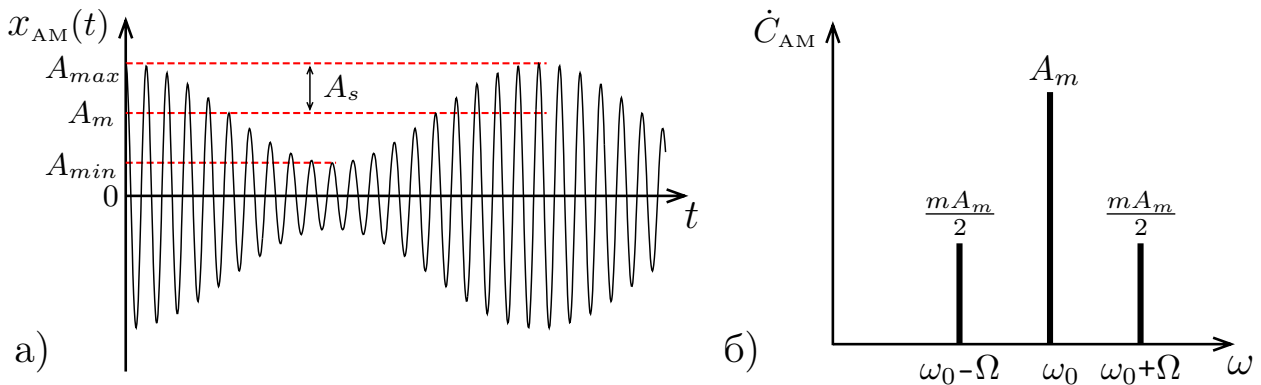


Рис. 5. Однотональный АМ-сигнал (а) и его спектр (б).

Первое слагаемое в правой части (14) является несущим колебанием. Его амплитуда A_m не зависит от коэффициента модуляции. Два других колебания возникают в результате модуляции и имеют равные амплитуды, пропорциональные m . Их частоты $\omega_0 - \Omega$ и $\omega_0 + \Omega$ располагаются на спектральной диаграмме (рис. 5,б) симметрично относительно частоты несущего колебания и называются *нижней* и *верхней* боковыми частотами.

Спектр однотонального АМ-колебания линейчатый и эквидистантный, но он является спектром периодического процесса только в тех случаях, когда $\omega_0/\Omega = M/N$, где M и N – целые числа. При этом $\omega_0 = \Omega$, а боковые частоты равны $\omega_0 - \Omega = (M - 1)\Omega$, $\omega_0 + \Omega = (M + 1)\Omega$.

Многотональные АМ-сигналы.

Однотональные АМ-колебания – очень удобная математическая модель, но такие сигналы не имеют практической ценности, так как не способны переносить информацию. В реальных системах передаваемые сообщения, а значит и модулирующие колебания имеют сложную спектральную структуру.

Пусть модулирующий сигнал $s(t)$ является полигармоническим (многотональным) колебанием:

$$s(t) = \sum_{i=1}^N A_i \cos(\Omega_i t + \Phi_i).$$

Спектр $s(t)$ может быть и неэквидистантным. Если последовательность частот Ω_i упорядочена так, что $\Omega_1 < \Omega_2 < \dots < \Omega_N$, то мгновенное значение многотонального АМ-колебания описывается соотношением

$$x(t) = A_m \left(1 + \sum_{i=1}^N m_i \cos(\Omega_i t + \Phi_i) \right) \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (15)$$

где $m_i = A_i/A_m$ – парциальные (частные) коэффициенты модуляции.

Спектральный состав сигнала получим, как и в случае однотонального АМ-колебания, с помощью тригонометрических формул. Тогда

$$x(t) = A_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \sum_{i=1}^N \frac{m_i A_m}{2} (\cos[(\omega_0 - \Omega_i)t + \varphi_0 - \Phi_i] + \cos[(\omega_0 + \Omega_i)t + \varphi_0 + \Phi_i]). \quad (16)$$

Спектр многотонального АМ-сигнала содержит две группы колебаний с верхними от $(\omega_0 + \Omega_1)$ до $(\omega_0 + \Omega_N)$ и нижними от $(\omega_0 - \Omega_N)$ до $(\omega_0 - \Omega_1)$ боковыми частотами. Таким образом, колебания боковых частот располагаются попарно-симметрично относительно частоты несущего колебания.

В качестве примера многотонального АМ-сигнала рассмотрим высокочастотное колебание, промодулированное по амплитуде переменным напряжением прямоугольной формы. В качестве такого напряжения можно использовать последовательность прямоугольных импульсов со скважностью $q = 2$, если принять $C_0 = 0$ в силу симметрии $x(t)$ (рис. 3,а) и использовать формулу (10). Тогда

$$x(t) = A_m \left(1 + 2m \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin(2i+1)\pi/2}{(2i+1)\pi/2} \cos(2i+1)\Omega t \right) \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (17)$$

где $m = E/A_m$ – коэффициент модуляции, E – амплитуда прямоугольного сигнала, Ω – частота основной гармоники $s(t)$, а спектральное разложение $x(t)$ – в виде:

$$x(t) = A_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + m A_m \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin(2i+1)\pi/2}{(2i+1)\pi/2} \cos[(\omega_0 - (2i+1)\Omega)t + \varphi_0] + \cos[(\omega_0 + (2i+1)\Omega)t + \varphi_0].$$

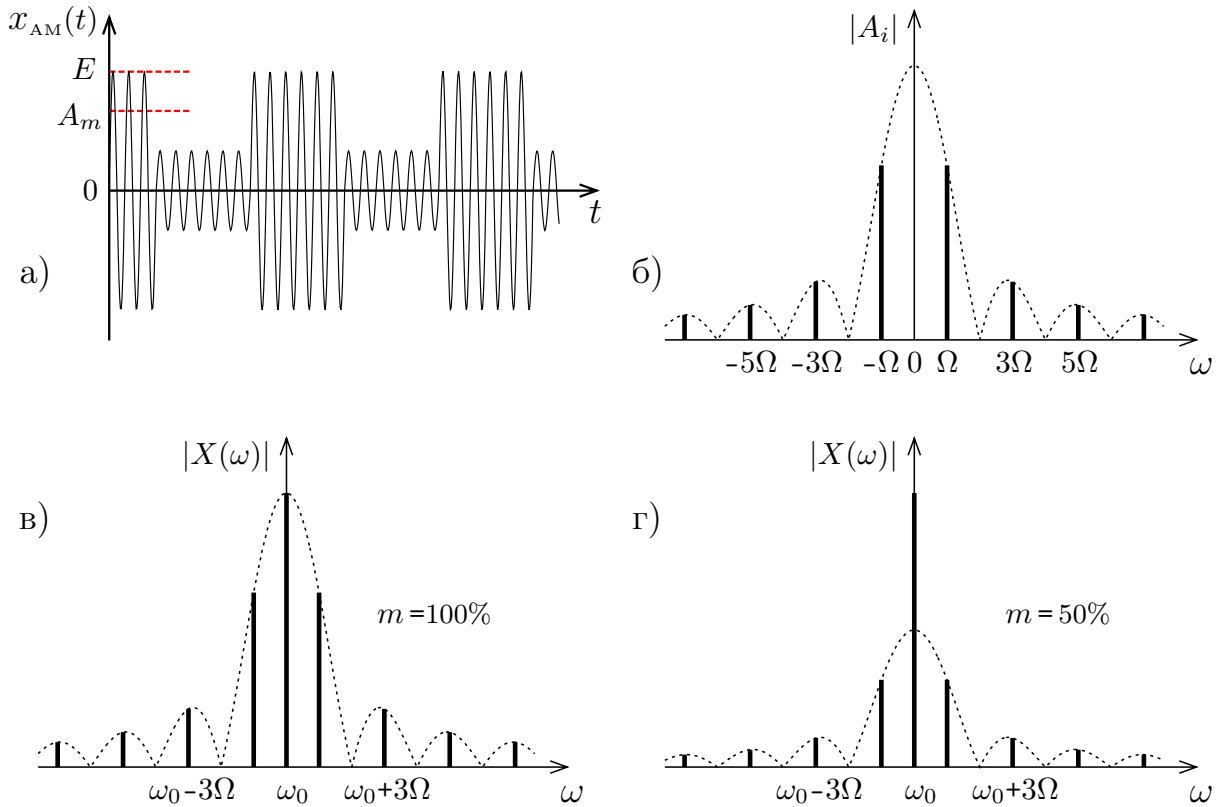


Рис. 6. Временная реализация АМ-сигнала (а), спектр прямоугольной огибающей (б), спектры АМ сигнала при $m = 100\%$ (в) и $m = 50\%$ (г).

Амплитудные спектры АМ-процесса, построенные по формуле (17) для $m = 100\%$ и $m = 50\%$, представлены на рис. 6,в и 6,г соответственно. Как следует из формулы (17), при $m = 100\%$ амплитуды первых боковых гармоник близки к амплитуде несущей, а все последующие убывают по закону $1/(2i+1)$. При такой модуляции $x(t)$ представляет *последовательность прямоугольных радиопульсов*. При 50%-ной модуляции структура боковых полос сохраняется, но амплитуды первых боковых составляющих уменьшаются вдвое (рис. 6,г), что вполне согласуется с уменьшением коэффициента модуляции вдвое.

Частотно- и фазо-модулированные сигналы.

У произвольного гармонического колебания

$$x(t) = A_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = A_m \cos \Psi(t)$$

набег полной фазы $\Psi(t_2) - \Psi(t_1)$ за конечный отрезок времени $t_2 - t_1$ пропорционален угловой частоте ω_0 , т.е. $\Psi(t_2) - \Psi(t_1) = \omega_0(t_2 - t_1)$. Когда частота колебания зависит от времени, имеем

$$\Psi(t_2) - \Psi(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \omega(t) dt, \quad \omega(t) = \frac{d\Psi(t)}{dt}. \quad (18)$$

Таким образом, изменения во времени частоты и полной фазы колебания взаимосвязаны. Отсюда для текущей фазы колебания с переменной частотой имеем

$$\Psi(t) = \int_0^t \omega(t) dt + \varphi_0, \quad (19)$$

где φ_0 – начальная фаза колебания. Воспользуемся этими соотношениями для анализа структуры ФМ- и ЧМ-колебаний. *Фазо-модулированным* называется колебание, у которого полная фаза $\Psi(t)$ изменяется пропорционально модулирующему сигналу $s(t)$ при неизменной амплитуде колебания, т.е.

$$\Psi(t) = \varphi_0 + m \cdot s(t) = \varphi_0 + \Delta\Psi \cdot s(t).$$

Величина $m = \Delta\Psi$ называется *индексом фазовой модуляции*. Математическую модель ФМ-колебания можно построить, если функцию $\Psi(t)$ внести в модель гармонического сигнала. Тогда

$$x(t) = A_m \cos[\omega_0 t + \varphi_0 + \Delta\Psi \cdot s(t)]. \quad (20)$$

Частотно-модулированным называется колебание, частота которого изменяется пропорционально модулирующему сигналу $s(t)$ при неизменной амплитуде колебания $\omega(t) = \omega_0 + \Delta\omega \cdot s(t)$. Величина $\Delta\omega$ называется *девиацией частоты*. Представленное выражение для частоты ЧМ-колебания нельзя непосредственно подставить в модель гармонического сигнала. Однако с по-

мощью (19) можно построить полную фазу ЧМ-процесса, а ее уже вносить в модель гармонического сигнала. Тогда

$$\begin{aligned} x(t) &= A_m \cos \Psi(t) = A_m \cos \left(\int_0^t \omega(t) dt + \varphi_0 \right) = \\ &= A_m \cos \left(\omega_0 t + \Delta\omega \int_0^t s(t) dt + \varphi_0 \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Соотношения (20) и (21) идентичны. Поэтому частотную и фазовую модуляцию обычно рассматривают в рамках единой *угловой модуляции*. Единственное различие состоит в способе внесения сообщения в полную фазу колебания. При этом различия в зависимостях текущей фазы колебания от $s(t)$ тем существеннее, чем сложнее функция $s(t)$.

Если $s(t) = \cos(\Omega t + \Phi_0)$, то $x(t)$ превращается в однотональное ЧМ-колебание, а соотношение (21) принимает вид:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_m \cos \left[\omega_0 t + \varphi_0 + \Delta\omega \int_0^t \cos(\Omega t + \Phi_0) dt \right] = \\ &= A_m \cos \left[\omega_0 t + \varphi_0 + \beta \sin(\Omega t + \Phi_0) \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

Величина $\beta = \Delta\omega/\Omega$ представляет девиацию фазы ЧМ-сигнала и называется *индексом частотной модуляции однотонального ЧМ-сигнала*.

Спектральное представление однотонального ЧМ-сигнала.

Спектр ЧМ-сигнала (22) при произвольном β и $\Phi_0 = 0$ получим для комплексного представления $x(t) = \text{Re}\{A_m \exp j(\omega_0 t + \beta \sin \Omega t + \varphi_0)\}$:

$$\exp j(\omega_0 t + \beta \sin \Omega t + \varphi_0) = \exp(j\beta \sin \Omega t) \exp j(\omega_0 t + \varphi_0) = z(t) \exp j(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Функцию $z(t)$ можно представить рядом Фурье

$$z(t) = \exp(j\beta \sin \Omega t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta) \exp(jk\Omega t). \quad (23)$$

Подставляя (24) в $x(t)$ и вычисляя $\text{Re}(\cdot)$, окончательно получим:

$$x(t) = A_m \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta) \cos[(\omega_0 + k\Omega)t + \varphi_0]. \quad (24)$$

Итак, спектр однотонального модулированного по частоте колебания эквидистантный и содержит бесконечное число боковых гармоник, попарно симметричных относительно несущей частоты. Амплитуды всех составляющих, в том числе и несущей, пропорциональны значениям функций Бесселя.

Функции Бесселя (рис. 7,а и 7,б) представляют собой медленно затухающие функции. Значения β , при которых функции Бесселя нулевого, первого и второго порядка обращаются в нуль, представлены в табл. 1, а значения функций Бесселя $J_0(\beta), J_1(\beta) - J_6(\beta)$ при фиксированных значениях β – в табл. 2.

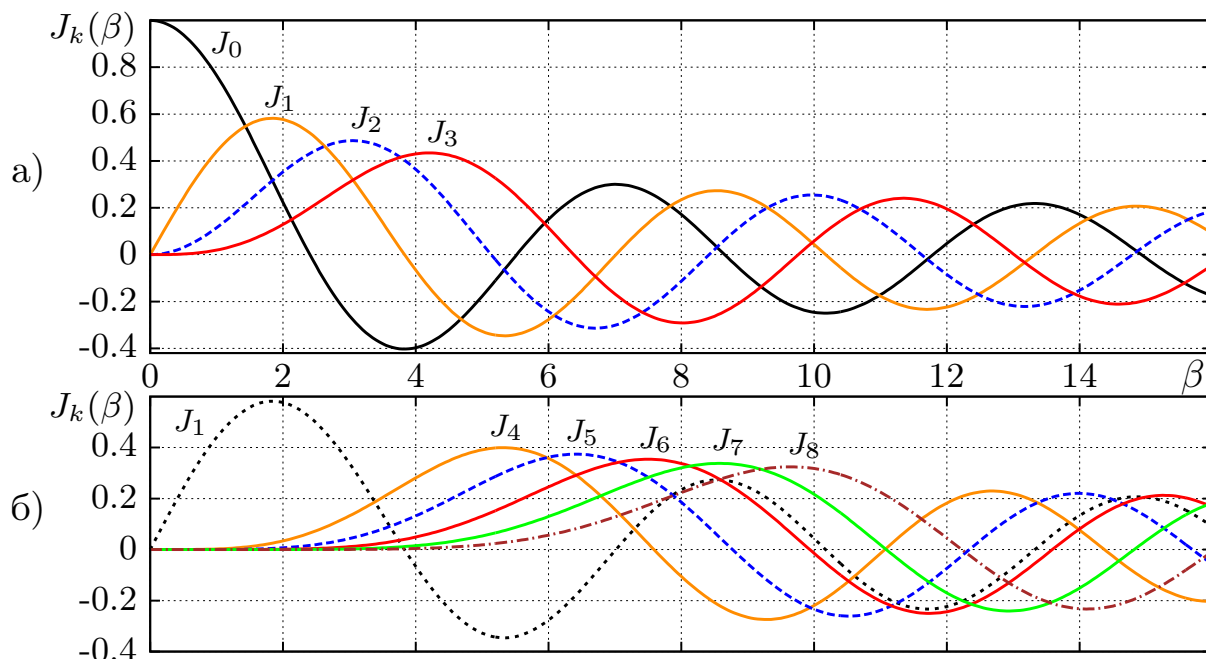


Рис. 7. Функции Бесселя нулевого — третьего порядка (а) и четвертого — восьмого порядка (б).

β	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5
$J_0(\beta)$	2.405	5.52	8.65	11.79	14.93
$J_1(\beta)$	3.83	7.01	10.17	13.31	16.47
$J_2(\beta)$	5.13	8.41	11.62	14.79	17.96

Таблица 1. Значения первых пяти корней функций Бесселя $J_0(\beta)$, $J_1(\beta)$ и $J_2(\beta)$.

β	$J_0(\beta)$	$J_1(\beta)$	$J_2(\beta)$	$J_3(\beta)$	$J_4(\beta)$	$J_5(\beta)$	$J_6(\beta)$
$\beta = 0.5$	0.938	0.242	0.03	$\rightarrow 0$	$\rightarrow 0$	$\rightarrow 0$	$\rightarrow 0$
$\beta = 1.0$	0.765	0.44	0.114	0.02	$\rightarrow 0$	$\rightarrow 0$	$\rightarrow 0$
$\beta = 1.5$	0.511	0.558	0.232	0.06	0.008	$\rightarrow 0$	$\rightarrow 0$
$\beta = 2.0$	0.224	0.576	0.352	0.13	0.034	0.007	$\rightarrow 0$
$\beta = 2.5$	-0.04	0.497	0.446	0.241	0.097	0.29	0.007

Таблица 2. Значения функций Бесселя $J_0(\beta), J_1(\beta) - J_6(\beta)$ при фиксированных значениях β .

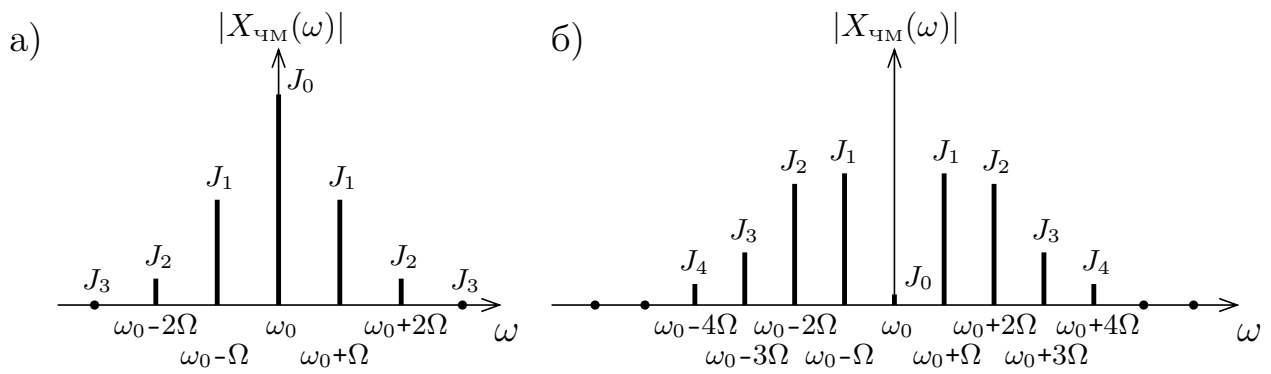


Рис. 8. Спектр ЧМ-сигналов с индексами модуляции $\beta = 1$ (а) и $\beta = 2.5$ (б)

Интересно, что при больших значениях β существенную для расчетов величину имеют только те функции Бесселя, порядок которых k не превышает $\beta + 1$, т.е. реальная ширина спектра модулированного по частоте сигнала составляет $2(\beta + 1)\Omega = 2(\Delta\omega + \Omega) \simeq 2\Delta\omega$ и в 2β раз превышает ширину спектра однотонового АМ-сигнала. Спектры двух ЧМ-сигналов при $\beta = 1$ и $\beta = 2.5$ представлены на рис. 8,а и 8,б соответственно. Отметим, что амплитуда несущей может быть не только много меньше амплитуд боковых колебаний, но и при $\beta = 2.405, 5.52, \dots$ (см. табл. 1) вообще отсутствует в спектре ЧМ-колебания. Поэтому мощность передающего генератора используется более эффективно.

- Итак, *ширина спектра однотонового ЧМ-колебания при больших индексах модуляции близка к удвоенной девиации частоты и не зависит от частоты модулирующего сигнала.*
- Одновременное присутствие многих составляющих, содержащих информацию о модулирующем сигнале, позволяет обеспечить высокую достоверность при передаче сообщений и осуществить высококачественное радиовещание, а постоянство амплитуды ЧМ-сигналов, точнее независимость амплитуды ЧМ-колебания от передаваемой информации, обеспечивает помехоустойчивость приема.
- Необходимая широкополосность ЧМ-сигналов может быть обеспечена только при достаточно высокой частоте несущего колебания, т.е. в области метровых или более коротких волн. Поэтому ЧМ-колебания используются при трансляции стереопередач в УКВ-диапазоне и звукового сопровождения телевизионных передач.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Экспериментальная установка состоит из генератора сигналов специальной формы GFG-3015 и персонального компьютера с программным комплексом LabVIEW-8.5, ориентированным на проведение лабораторных исследований, измерений и сбор данных.

Генератор сигналов GFG-3015 представляет собой источник вырабатывающий сигналы синусоидальной, треугольной или прямоугольной формы с частотой от 0.1 Гц до 15 МГц с амплитудой от 0.01 до 10.0 В, амплитудно и частотно модулированные колебания с частотой модуляции от 0.1 Гц до 10 кГц с коэффициентом АМ от 0 до 100 % и девиацией частоты ЧМ сигнала от 1 % до 15 % от значения установленной частоты несущего колебания.

Спектроанализатор «Spectrum.vi» разработанный в LabVIEW-8.5 измеряет частоты и амплитуды спектральных гармоник сигналов в диапазоне от 0 до 30 кГц. Учтите, что амплитуды гармоник пропорциональны их мощности. Максимальная частота спектральных гармоник и частота развертки временных изображений сигналов регулируется с помощью ползунков.

Порядок выполнения работы

1. Подключите генератор сигналов GFG-3015 к входу А0 терминального блока NI BNC-2110.

2. Включите компьютер и запустите программу «Spectrum.vi». На экране монитора появятся два окна, расположенных одно под другим.

3. Включите электропитание генератора нажатием кнопки «СЕТЬ». Затем установите настройки по умолчанию, для этого нажмите синюю кнопку «ПРЕФ» и «RS232 (НАЧАЛЬН)». На дисплее генератора по умолчанию появится информация о частоте и амплитуде выходного сигнала. Убедитесь, что гармоническому сигналу соответствует единственная линия в спектре. Поранблюдайте как изменяется положение линии на спектре, и как изменяется длина линии с изменением амплитуды сигнала.

А. Исследование спектров периодических сигналов

1. С помощью кнопки «ФОРМА» на генераторе установите прямоугольную форму сигнала, зафиксируйте изменения, произошедшие в спектре сигнала, измерьте амплитуды и частоты всех отчетливо наблюдаемых гармоник,

определите скважность импульсов q . Объясните, почему в спектре присутствуют не все кратные частоты. По указанию преподавателя установите частоту генератора от 1 до 4 кГц. Измерьте амплитуды и частоты гармоник, рассчитайте отношения амплитуд всех гармоник к амплитуде первой гармоники и сопоставьте огибающие измеренного и рассчитанного спектров (как отношения амплитуд).

2. Используя кнопку генератора «АСИММ» установите скважности последовательности импульсов $q = 3, 4$ и 5 . Объясните какие гармоники отсутствуют и почему. Для скважности, указанной преподавателем, сопоставить огибающие измеренного и рассчитанного спектров.

3. Измените форму сигнала генератора из прямоугольной в треугольную для каждого значения q и зафиксируйте в отчете изменения амплитуд гармоник. По окончании раздела **A** следует нажать кнопки «ПРЕФ», затем «RS232 (НАЧАЛЬН)» и генератор сигналов возвратится к настройкам по умолчанию.

Б. Исследование спектров амплитудно-модулированных сигналов

1. Установить частоту несущих колебаний 10 кГц и амплитуду колебаний 3 В. По умолчанию установлен режим АМ-колебаний (активна надпись «АМ») и на экране генератора показана информация о частоте и амплитуде несущего колебания. В этом состоянии можно установить нужные значения параметров несущей.

2. Нажмите кнопку «МОД ВКЛ». Внизу экрана генератора около надписи «АМ» загорится индикатор «ВКЛ». Нажимая кнопки «МодГен» и «Парам» получаем на экране генератора частоту модуляции 1 кГц и коэффициент модуляции 50 %. В этом состоянии можно установить нужные значения параметров модулирующего сигнала: частоту в диапазоне от 0.1 Гц до 10 кГц, коэффициент модуляции. Форму модулирующего сигнала можно изменить нажатием клавиш «ПРЕФ» и «Парам (ИСТОЧНИК)»

3. Изменяя частоту модулирующих колебаний от 0.1 до $2 \div 3$ кГц, зарисовать временные реализации АМ-колебаний и их спектры при неизменном коэффициенте модуляции для двух - трех значений частоты модуляции. Измерьте ширину спектра. По осциллограмме и спектрограмме рассчитайте коэффициент модуляции АМ-сигнала для двух значений частоты модуляции сопоставить с 50 %.

4. Установить прямоугольную форму модулирующего сигнала и для частоты модулирующих колебаний 1 кГц, зарисовать картину АМ-колебания и его спектр. Объясните происхождение различных гармоник.

*5. Пронаблюдайте АМ-колебание и его спектр, когда и несущее, и модулирующее колебания имеют прямоугольную форму. По окончании раздела **Б** следует сбросить настройки генератора на заводские.

В. Исследование спектров частотно-модулированных сигналов

В работе предполагается исследовать только однотоновые ЧМ-колебания. Наблюдать осциллограммы ЧМ-колебаний не представляется возможным, поэтому следует пользоваться результатами измерения спектров.

1. Установите частоту несущих колебаний $f_{\text{нес}} = 10$ кГц и амплитуду колебаний 3 В. По умолчанию установлен режим АМ-колебаний. Чтобы генератор сигналов перевести в режим ЧМ-колебаний следует нажать кнопки «ПРЕФ» и «АМ (ЧМ)». При этом внизу экрана генератора становится активной надпись «ЧМ». Если теперь нажать кнопку «МОД ВКЛ», то внизу экрана генератора около надписи «ЧМ» загорится индикатор «ВКЛ». Нажимая кнопку «МодГен» получаем на экране частоту модуляции 1 кГц, а кнопка «Парам» показывает по умолчанию девиацию частоты 5 %, оба параметра могут регулироваться.

2. Изменяя девиацию частоты Δf выходного сигнала от $0.01f_{\text{нес}}$ до $0.15f_{\text{нес}}$, измерьте ширину полосы частот и зарисуйте спектры для четырех значений Δf , равных 0.01, 0.05, 0.1, $0.15f_{\text{нес}}$. Рассчитать для каждого значения индекс частотной модуляции. Определите девиацию частоты и индекс частотной модуляции ЧМ-сигнала, у которого несущая имеет минимальную амплитуду.

3. Установить частоту модуляции 0.2 кГц. Изменяя девиацию частоты Δf выходного сигнала от $0.01f_{\text{нес}}$ до $0.15f_{\text{нес}}$, зафиксируйте значения Δf , при которых обращается в нуль амплитуды несущей (два значения), первых боковых и вторых боковых гармоник. Для каждого значения рассчитайте для каждого значения индекс частотной модуляции. По окончании раздела **В** установите настройки генератора по умолчанию.