

А.В.Хохлов, О.Н.Соколов

ИССЛЕДОВАНИЕ

КОЛЕБАНИЙ В LCR-КОНТУРЕ

*Учебное пособие для спецпрактикума по курсу
"Теоретические основы радиоэлектроники"*

Ц е л ь р а б о т ы: изучить собственные и вынужденные колебания в линейном LCR -контуре при гармоническом и полигармоническом воздействиях.

Литература

1. Калинин В.И., Герштейн Г.М. Введение в радиофизику. М.: Гостехиздат, 1957.
2. Хохлов А.В. Теоретические основы радиоэлектроники. Саратов. Изд-во Саратов. ун-та, 2005.
3. Зернов Н.В., Карпов В.Г. Теория радиотехнических цепей. Л.: Энергия, 1972.
4. Харкевич А.А. Основы радиотехники. М.: Связьиздат, 1963.
5. Грубецков Д.И., Рожнев А.Г. Линейные колебания и волны: учебное пособие для вузов. М.: Наука, 2000.

Контрольные вопросы:

1. Какие режимы собственных колебаний и при каких условиях возможны в линейном LCR -контуре?
2. Почему $UL = L\frac{dI}{dt}$?
3. Как записать интегро-дифференциальное и дифференциальное уравнения для собственных и вынужденных колебаний? Каковы их решения? В чем заключаются условия резонанса?
4. Какими формулами описываются и какой физический смысл имеют показатель затухания, характеристическое сопротивление, добротность и полосу пропускания LCR -контуров?
5. Как происходит установление колебаний в контуре, когда частота вынуждающей ЭДС близка к резонансной, когда далека от резонансной частоты контура? В чем проявляются особенности резонансных явлений при полигармоническом воздействии?
6. При каких условиях в контуре реализуется резонанс напряжений и при каких условиях резонанс токов? В чем состоит резонанс напряжений? В чем состоит резонанс токов? Как различаются резонансные сопротивления параллельного и последовательного контуров?

Задания для самостоятельной работы

1. Исследовать функцию $I_m(\omega)$ (формула (18)) на экстремум и определить резонансную частоту контура.
2. Вывести формулы (34), (35), (36) для расчета α , Q и R_L в режиме собственных колебаний.
3. Вывести уравнения резонансных кривых LCR -контура в виде $U_L/U_{Lmax} = F(f)$ и построить $U_L/U_{Lmax} = F(f)$ для заданных значений R .

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Колебаниями называются движения или процессы, обладающие той или иной степенью повторяемости во времени и своиственные различным явлениям природы. В физике особо выделяются механические и электромагнитные колебания. Электрические колебания возникают в LCR -контурах.

В общем случае параметры LCR -контура зависят от амплитуды колебаний, т.е. реальные колебательные системы *нелинейны*. Только при малой амплитуде колебаний параметры можно считать независимыми от нее, а колебательную систему - *линейной*. Линейные колебательные системы описываются линейными уравнениями, а протекающие в них процессы удовлетворяют принципу суперпозиции.

В лабораторной работе будут исследоваться собственные и вынужденные колебания в линейном LCR -контуре.

Дифференциальное уравнение LCR -контура и его решение

Пусть конденсатор с электрической емкостью C , заряженный до напряжения U_0 , соединен с целью, состоящей из катушки с индуктивностью L и резистора с сопротивлением R (рис. 1). Конденсатор начинает разряжаться, а затем и перезаряжаться. В цепи возникает переменный ток $I(t)$, величина которого с течением времени падает до нуля, когда вся запасенная в емкости энергия перейдет в тепло.

Падения напряжений на индуктивности L , сопротивлении R и емкости C в произвольный момент времени удовлетворяют соотношениям:

$$U_L(t) = L \frac{dI}{dt} = L \frac{d^2q}{dt^2}, \quad U_R = RI = R \frac{dq}{dt}, \quad U_C(t) = \frac{1}{C}q = \frac{1}{C} \int I(t)dt,$$

а их сумма равна нулю, т.е. получаем однородное интегро-дифференциальное уравнение для тока $I(t)$ или линейное дифференциальное уравнение второго порядка для заряда q :

$$L \frac{d^2I}{dt^2} + RI + \frac{1}{C} \int I(t)dt = 0, \quad (1)$$

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = 0. \quad (2)$$

2

(пункт А.3). Объяснить различия в добротностях с учетом выходного сопротивления $\Gamma I \cong 60$ Ом. Для каждого R рассчитать эквивалентные сопротивления последовательного и параллельного контура при резонансе.

2. Пронаблюдать прохождение амплитудно-модулированных колебаний через LCR -контур. Для этого соединить через тройник генератор GFG-8219A со входами LCR -контура и СН1 осциллографа, а Y -выход LCR -контура - со входом СН2 осциллографа. Установить емкость контура равной 600 пФ и тщательно настроить GFG-8219A на резонансную частоту контура.

Подключить генератор GFG-8210 к входу VCF/MOD в качестве источника модулирующего сигнала, установить режим AM, нажимая кнопки MOD EXT и MOD ON и выгнув ручку MOD/DEPTH для регулировки коэффициента модуляции. Коэффициент модуляции сигнала на входе контура контролировать по осциллографу и поддерживать равным 100%

2.1. Установить $R = 0$ и, изменяя частоту модуляции $f_{\text{мод}}$ от 500 Гц до 20 кГц, измерить коэффициент модуляции сигнала m_1 после прохождение через контур. Построить зависимость $m_1(f_{\text{мод}})$, зарисовать характерные осциллограммы и объяснить, почему m_1 уменьшается с ростом $f_{\text{мод}}$.

2.2. Установить $f_{\text{мод}} = 10$ кГц, $m = 100\%$ и, изменяя сопротивление R от 0 до 100 Ом, измерить по осциллограммам m_1 для различных R , построить зависимость $m_1(R)$ и объяснить, почему m_1 увеличивается с ростом R .

*2.3. Установить $R = 0$, перевести генератор низкочастотного модулирующего сигнала в режим прямоугольного выходного напряжения и, изменяя частоту модуляции от 100 Гц до 10 кГц, наблюдать изменение амплитудно-модулированного сигнала на выходе колебательного контура. Характерные осциллограммы зарисовать и объяснить.

2. Используя частотомер осциллографа, исследовать зависимость частоты собственных колебаний LCR -контура f_c от его емкости C , которую следует изменять не более, чем через каждые 100 пФ в пределах $100 \leq C \leq 1000$ пФ.

Построить график зависимости собственной частоты контура $f_c = F(C)$. Рассчитать и нанести на тот же график теоретическую кривую. Объяснить расхождение графиков.

3. Возбудить собственные колебания в контуре при $C = 600$ пФ и определить его показатель затухания α и добротность Q для указанных в задании значений R . Построить зависимость $Q = F(R)$.

4. Зная Q для двух значений R , рассчитать резистивное сопротивление R_L индуктивности контура по формулам:

$$Q = \frac{2\pi f_0 L}{R_L + R}, \quad R_L = \frac{Q_2 R_2 - Q_1 R_1}{Q_1 - Q_2}, \quad (36)$$

которые предлагается вывести самостоятельно. Вычислить среднее для трех полученных значений R_L и объяснить полученные результаты.

Используя R_L , по формуле (36) можно определить величину индуктивности L . Сравнить найденную величину L с ее истинным значением.

5. Используя полученные в п.3 значения α , рассчитать поправку δf_c к собственной частоте контура, обусловленную его затуханием, и построить соответствующую зависимость $\delta f_c = F(Q)$.

6. Установить переменный конденсатор в положение, соответствующее наибольшей емкости, перевести осциллограф в режим $X - Y$ для наблюдения фазовых траекторий. Пронаблюдать и зарисовать фазовые траектории при различных значениях сопротивления контура от 0 до 100 Ом, фиксировав каждый раз число витков спирали. Пронаблюдать и зарисовать фазовые портреты при изменении сопротивления контура от 1500 до 1600 Ом. Объяснить полученные результаты.

Б. Исследование вынужденных колебаний

1. Исследовать резонансные кривые контура при возбуждении его от генератора высокочастотных гармонических колебаний. Для этого поставить кнопку в положение "ВЫНУЖ." и подключить генератор GFG-8210 через тройник к исследуемому контуру и каналу СН1 осциллографа. Выходное напряжение генератора установить не более 0.15 В и поддерживать постоянным при изменении частоты сигнала. Амплитуду напряжения контура пролировывать с помощью осциллографа.

Установить емкость контура 600 пФ. Подключить милливольтметр ВЗ-28 к Y -выходу контура, снять и построить для указанных в задании значений R зависимости амплитуды колебаний в контуре от частоты возбуждения. Вблизи резонанса измерения следует проводить особенно тщательно.

Экспериментальные кривые сопоставить с теоретически рассчитанными, изобразив их на одних и тех же графиках в одинаковом масштабе. По резонансным кривым для каждого значения R определить полосу пропускания на уровне половинной мощности и добротность контура. Сопоставить экспериментально полученные значения добротности с величинами добротности, найденными при исследовании свободных колебаний. Для этого вновь полученные значения добротности нанести на график $Q(R)$

Дифференцируя эти уравнения по t и умножая на $1/L$, получим

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} I = 0$$

или

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + 2\alpha \frac{dI}{dt} + \omega_0^2 I = 0, \quad (3)$$

где $\alpha = R/2L$ – *показатель затухания* колебаний в контуре, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ – *круговая частота собственных колебаний в системе без потерь* (консервативный LC -контур). В теоретической механике такое уравнение называется уравнением линейного осциллятора с вязким трением. Оно описывает собственные (свободные) колебания.

Собственными колебаниями будем называть колебания возникающие в системе, не подвергающейся переменным внешним воздействиям, и обусловленные первоначально запасенной энергией.

Будем искать решение уравнения (3) в виде: $I(t) = Ae^{kt}$. Подставляя $I(t)$ в (3), получим уравнение для определения k

$$k^2 + 2\alpha k + \omega_0^2 = 0. \quad (4)$$

Оно имеет корни

$$k_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha \pm \beta, \quad (5)$$

а общее решение уравнения (3) принимает вид:

$$I(t) = A_1 e^{k_1 t} + A_2 e^{k_2 t} = e^{-\alpha t} (A_1 e^{\beta t} + A_2 e^{-\beta t}).$$

Для определения постоянных A_1 и A_2 используем начальные условия задачи. При $t = 0$ цепь замыкается. Начальный ток $I = 0$, а скорость его изменения отлична от нуля и $L \frac{dI}{dt} = -U_0$. Тогда

$$\begin{aligned} I(0) &= A_1 + A_2 = 0, \text{ т.е. } A_2 = -A_1; \\ L \left. \frac{dI}{dt} \right|_{t=0} &= A_1 k_1 + A_2 k_2 = 2\beta L A_1 = -U_0, \text{ т.е. } A_1 = -\frac{U_0}{2\beta L}. \end{aligned}$$

При заданных значениях начальных условий

$$I(t) = -\frac{U_0}{2\beta L} e^{-\alpha t} (e^{\beta t} - e^{-\beta t}) = -\frac{U_0}{\beta L} e^{-\alpha t} \text{sh } \beta t. \quad (6)$$

Итак, переменные $I(t)$ и $\frac{dI}{dt}(t)$, описывающие состояние колебательной системы в произвольный момент времени, определяются ее начальным состоянием.

Общее решение дифференциального уравнения (3) можно представить геометрически на *фазовой плоскости* $x(t) = I(t)$, $y(t) = \dot{x}(t) = dI/dt$ с помощью ориентированных фазовых траекторий. Совокупность фазовых траекторий при всех возможных начальных условиях образует *фазовый портрет системы* [1, с.31-37, 2, с.181-185].

Собственные колебания в LCR -контуре

Характер собственных колебаний существенно зависит от соотношения величин запасенной и рассеиваемой энергии. В LCR -контуре соотношение

энергий можно характеризовать, сравнивая параметры L и R или ω_0^2 и α^2 . При этом в консервативном контуре ($\alpha = 0$) возникают незатухающие гармонические колебания, а в диссипативном контуре – затухающие (при $0 < \alpha^2 < \omega_0^2$) колебания или аperiodические процессы (при $\alpha^2 \geq \omega_0^2$).

1. Собственные колебания в консервативном контуре. Пусть $\alpha = 0$. При этом корни уравнения (4) становятся мнимыми ($\beta = \pm j\omega_0$), а решение (6) принимает вид:

$$I(t) = -\frac{U_0}{\omega_0 L} \sin \omega_0 t. \quad (7)$$

Частота собственных колебаний консервативного контура равна ω_0 , а падения напряжений на индуктивности и емкости описываются соотношениями

$$U_L(t) = L \frac{dI}{dt} = -U_0 \cos \omega_0 t,$$

$$U_C(t) = \frac{1}{C} \int I(t) dt = \frac{U_0}{LC\omega_0^2} \cos \omega_0 t = U_0 \cos \omega_0 t.$$

Таким образом,

- 1) собственные колебания в консервативном контуре описываются гармоническими функциями,
- 2) амплитуда колебаний определяется начальными условиями задачи, а частота – параметрами элементов контура, отвечающих за накопление энергии, и не зависит от начальных условий,
- 3) ток и напряжения на реактивных элементах контура сдвинуты по фазе на $\pi/2$, т.е. максимум магнитной энергии соответствует нулевой электрической энергии и наоборот.

2. Собственные колебания в контуре с малым затуханием. Пусть $\alpha^2 < \omega_0^2$. Корни характеристического уравнения (4) становятся комплексно сопряженными. Обозначим $\beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = \pm j\omega_c$.

Частоту $\omega_c = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ будем называть *круговой частотой собственных колебаний диссипативного контура*. Собственные колебания тока согласно (6) описываются формулой:

$$I(t) = -\frac{U_0}{\omega_c L} e^{-\alpha t} \sin \omega_c t. \quad (8)$$

Для нахождения аналитической зависимости от времени падения напряжения на емкости C необходимо произвести дополнительный расчет [2, с. 176-177], в результате которого получим

$$U_C(t) = \frac{U_0 \omega_0}{\omega_c} e^{-\alpha t} \sin(\omega_c t + \varphi), \quad (9)$$

где $\tan \varphi = \omega/\alpha$. Как следует из формул (8) и (9), в диссипативной системе из-за рассеяния энергии амплитуда колебаний уменьшается со временем по экспоненциальному закону. Скорость убывания амплитуды зависит от величины показателя затухания α (рис. 2, кривые 1-3).

логафа, то на экране возникнет резонансная кривая исследуемого контура.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА

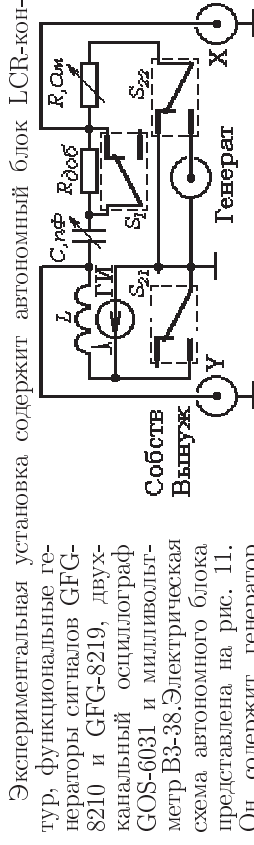


Рис. 1: Блок-схема экспериментальной установки прямуютольных импульсов (выходное сопротивление генератора составляет $\approx 60 \text{ Ом}$) и последовательный колебательный контур, состоящий из катушки индуктивности ($L=460 \text{ мкГн}$) конденсатора переменной емкости ($C=25 \div 1000 \text{ пФ}$, последовательно соединенных резисторов с переменным сопротивлением $R=0 \div 100 \text{ Ом}$ и постоянным сопротивлением $R_{\text{доб}}=1500 \text{ Ом}$).

На передней панели установки расположены кнопки включения напряжения сети, ручки управления "С, пФ" и "R, Ом", кнопка S_2 "Собств.-Вывух", тумблер S_1 "0 – 100 – 1500 – 1600" и три coaxialных разъема "Генератор" для подключения генератора синусоидальных или амплитудно-модулированных колебаний, "X" и "Y" для подключения соответствующих входов осциллографа.

Собственные и вынужденные колебания в работе можно исследовать для произвольного набора резисторов. При выполнении работы предлагается использовать один из четырех вариантов задания по указанию преподавателя.

Задание 1: $R=0$, 10 и 50 Ом.

Задание 2: $R=0$, 40 и 80 Ом.

Задание 3: $R=0$, 40 и 100 Ом.

Задание 4: $R=0$, 20 и 50 Ом.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Ознакомиться с блок-схемой экспериментальной установки, подключить входы осциллографа и включить кнопку сети переменного тока. При этом загорается индикаторная лампочка.

А. Исследование собственных колебаний в LCР-контуре

1. Произвести наблюдения собственных затухающих колебаний контура. Для этого установить кнопку в режим **СОБСТВ** и использовать только канал **Y** осциллографа.

Исследование собственных колебаний предполагает кроме наблюдения характера затухания колебаний определение количественных параметров процесса: частоты собственных колебаний, показателя затухания и добротности.

Частота собственных колебаний измеряется с использованием кабрированной развертки осциллографа.

Показатель затухания и добротность контура при малых затуханиях можно определить

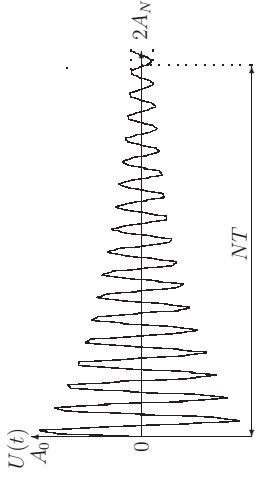


Рис. 10: Затухающее колебание

$$\alpha = \frac{1}{NT} \ln \frac{A_0}{A_N}, \quad (34)$$

где T - период собственных колебаний, A_0 и A_N - максимальные отклонения, разделенные N квазипериодами (рис. 10).

Для расчета добротности обычно используется следующая формула, вывод которой также предлагается проделывать самостоятельно:

$$Q = \frac{\pi N}{\ln \frac{A_0}{A_N}} = \frac{\pi N}{2.3 \lg \frac{A_0}{A_N}}. \quad (35)$$

Следует заметить, что точность расчета показателя затухания и добротности зависит от точности измерения амплитуд колебаний и количества периодов.

Методика исследования вынужденных колебаний. Изучение вынужденных колебаний происходит в установившемся режиме, когда собственные колебания контура полностью затухают, и позволяет прежде всего оценить частотную избирательность контура и особенности преобразования сигналов различных частот. По результатам измерений частоты колебаний можно рассчитать такие параметры колебательного контура, как добротность и полосу пропускания на уровне половинной мощности. Для этого генератор сигнала включается в цепь контура и при изменении его частоты с помощью электронного вольтметра измеряется напряжение на одном из элементов контура, т.е. снимается резонансная кривая контура для заданного сопротивления потерь. По резонансной кривой можно измерить полосу пропускания на уровне половинной мощности, рассчитать добротность контура и показатель затухания.

Более удобный способ построения частотной характеристики связан с использованием генератора частотно-модулированных колебаний. Если задать в генераторе линейное изменение частоты в нужном диапазоне и синхронизовать закон изменения частоты и горизонтальную развертку осцил-

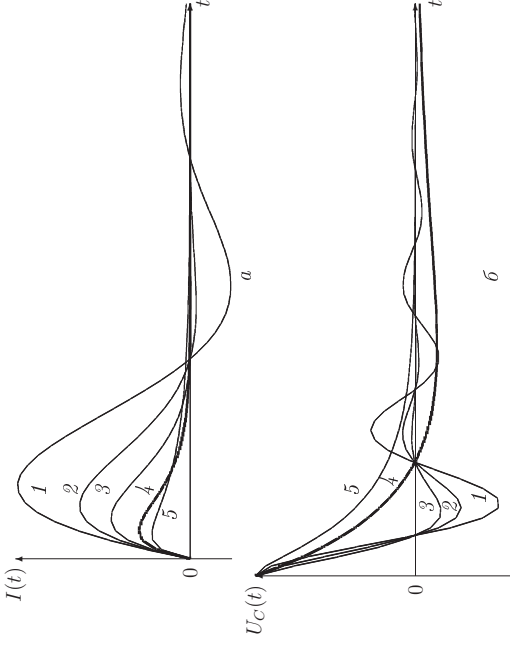


Рис. 2. Изменения тока (а) и напряжения на емкости (б) в диссипативном контуре
1 - $\alpha = 0.2\omega_0$, 2 - $\alpha = 0.4\omega_0$, 3 - $\alpha = 0.6\omega_0$, 4 - $\alpha = \omega_0$, 5 - $\alpha = 1.5\omega_0$

Выражая α и ω_0 через первичные параметры контура, можно представить условие малого затухания в виде:

$$\frac{R}{2L} < \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{или} \quad R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Величина $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$ имеет размерность сопротивления и называется *характеристическим сопротивлением LCR-контура*.

Формулу для характеристического сопротивления контура можно несколько видоизменить, если учесть, что $\sqrt{LC} = 1/\omega_0$. Тогда

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}. \quad (10)$$

3. Аперидические процессы в контуре при большом затухании. Пусть $\alpha^2 > \omega_0^2$. В этом случае корни уравнения (4) вещественны и различны, сопротивление потерь удовлетворяет соотношению [2, с. 178-179] $R > 2\rho$,

а решение дифференциального уравнения - соотношению (6). Как видно из рис. 2 (кривые 5), напряжение на емкости монотонно убывает, а ток в контуре сначала нарастает, а затем убывает до нуля, т.е. имеет место *аперидический процесс*. Можно показать, что $U_C(t)$ удовлетворяет соотношению [2, с.178]:

$$U_C(t) = \frac{U_0 \omega_0}{\beta} e^{-\alpha t} \text{sh}(\beta t + \text{arcsinh}(\frac{\beta}{\omega_0})).$$

Аперидические движения широко используются в различных областях техники, например, в стержневых электроизмерительных приборах для подавления колебательных процессов.

Загущение при $\alpha^2 = \omega_0^2$ будем называть критическим. Характеристическое уравнение (4) имеет единственный корень $k = -\alpha$ кратности 2. Так как $\beta = 0$, решение (6) содержит неопределенность типа $0/0$. Чтобы избавиться от нее, воспользуемся правилом Лопиталя. Тогда

$$I(t) = -\frac{U_0}{L} t e^{-\alpha t}, \quad (11)$$

Зависимости тока и падения напряжения на емкости C от времени при критическом загущении представлены на рис. 2 кривыми 4. Из сопоставления кривых 4 и 5 следует, что при критическом загущении ток достигает наибольшего значения, при котором еще не происходит изменения знака. В заключение сформулируем общие свойства собственных колебаний.

1. Амплитуды переменных определяется начальными условиями задачи, а частота колебаний не зависит от начальных условий и является функцией параметров L , C и R . Частота собственных колебаний диссипативного контура ω_c меньше, чем у консервативного контура ω_0 , т.е. перекатка энергии между реактивными элементами замедляется с увеличением α . Если $R \rightarrow 0$, то $\omega_c \rightarrow \omega_0$.

2. Сдвиг по фазе между током и напряжениями на реактивных элементах в диссипативном контуре отличается от $\pi/2$: напряжение на емкости опережает ток на угол φ , а напряжение на индуктивности отстает от тока [2, с.176-179].

3. Когда загущение меньше критического, ток и напряжения в диссипативном контуре загущают во времени, периодически изменяя знак. Когда загущение больше или равно критическому, ток и напряжения изменяют знак не более одного раза. Другими словами, система, получив начальное возмущение, устремляется к состоянию покоя, при котором переменная и ее производная (ток и напряжение) равны нулю, аperiодически или путем периодического уменьшения отклонений от состояния покоя.

4. Переход от колебательного к аperiодическому процессу соответствует равенству $R = 2\rho$. Этому соотношению можно дать простое толкование, если воспользоваться соотношением (10) и представить одно ρ как модуль реактивного сопротивления индуктивности $|Z_L| = \omega_0 L$, а другое - как модуль реактивного сопротивления емкости $|Z_C| = 1/\omega_0 C$. Тогда модули реактивных сопротивлений можно сравнить с резистивным сопротивлением R , а условие критичности колебаний принимает вид:

$$R = |Z_L| + |Z_C| = \omega_0 L + \frac{1}{\omega_0 C}, \quad (13)$$

- Процессы в диссипативном контуре имеют *колебательный характер*, когда сумма модулей реактивных сопротивлений превышает сопротивление потерь, и *аperiодический характер*, когда она меньше сопротивления потерь.

Переход от колебательного режима к аperiодическому легко объяснить скоростью расхода накопленной в контуре энергии: если за период колебаний в тепло превращается небольшая часть запасенной энергии, то в LCR -контуре совершается несколько переходов электрической энергии в магнитную и обратно, т.е. несколько колебаний напряжения и тока, пока запасенная энергия превратится в тепло полностью; если же потери

лезной аналитическая связь полосы пропускания на уровне половинной мощности и добротности контура.

Связь добротности и полосы пропускания контура. Рассмотрим уравнение нормированной резонансной кривой (32). При нулевой расстройке ($\nu = 0$) имеем $|\dot{x}_m| = |\dot{x}_{mрез}|$. Определим расстройку ν , при которых $|\dot{x}_m|/|\dot{x}_{mрез}| = 1/\sqrt{2} \cong 0.707$, т.е. мощность ослабляется точно в два раза. Тогда $\frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\xi^2 = Q^2 \nu^2 = 1$, $\nu = \pm \frac{1}{Q}$.

Подставляя выражение для относительной расстройки в виде (21), получим

$$Q = \frac{\omega_0}{2\Delta\omega} \quad \text{или} \quad 2\Delta\omega = \omega_0. \quad (33)$$

Величина $2\Delta\omega$ по условиям построения как раз представляет ширину резонансной кривой на уровне половинной мощности (рис. 8).

Формула (33) дает возможность рассчитать добротность колебательной системы по экспериментально снятой резонансной кривой.

Если на экспериментальной кривой $U(f)$ определить резонансную частоту f_0 и отметить частоты f_1 и f_2 , для которых $U(f) = 0.7U_{рез}$ (или $I(f) = 0.7I_{рез}$), то $2\Delta f = f_2 - f_1$ является шириной полосы пропускания (рис. 8), а отношение $f_0/2\Delta f$ представляет экспериментально измеренное значение добротности Q . Интересно, что полуширина резонансной кривой численно равна показателю загущения колебаний в контуре

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{2Q} = \frac{\omega_0 L/R}{2L} = \alpha.$$

Методика экспериментальных исследований

В лабораторной работе используются постоянная индуктивность L и переменная емкость C , что позволяет варьировать собственную частоту контура. Для изменения степени диссипации в контур вводится переменный резистор (реостат). Отметим, что колебания в таком контуре будут загущать даже при нулевом сопротивлении резистора, так как проводник катушки индуктивности обладает конечным резистивным сопротивлением. Напряжения, возникающие на элементах колебательного контура, можно измерить электронным вольтметром или осциллографом.

Методика исследования собственных колебаний LCR -контура. Экспериментальное исследование собственных колебаний возможно проводить с помощью осциллографа, если генератор коротких импульсов периодически, с периодом большим, чем время загущения колебаний, подклучать к исследуемому контуру.

Как показано в [2, с.189], сигналы, соответствующие собственным колебаниям, возникают на элементах контура при внешнем возбуждении в виде δ -функций. При частоте колебаний контура в 300 кГц хорошим приближением к δ -функции может служить короткий прямоугольный импульс длительностью $1 \div 2 \text{ мкс}$. Последовательность прямоугольных импульсов с такой длительностью и частотой повторения $6 \div 8 \text{ кГц}$ позволяет наблюдать $40 \div 50$ периодов загущающих колебаний.

Если теперь снять напряжения с сопротивления и индуктивности и подать на X- и Y-входы осциллографа, то на экране осциллографа появятся фазовые портреты загущающих колебаний.

Уравнения резонансных кривых. Избирательность контура

Согласно (18) амплитуда вынужденных колебаний тока в последовательном LCR -контуре достигает наибольшего значения на резонансной частоте ω_0 , причём она зависит от соотношения потерь или добротности Q . Это - резонансные кривые LCR -контура. На рис. 8 изображены резонансные кривые для трех различных значений сопротивления потерь или добротности. Аналогичный вид имеют и зависимости резонанса от частоты модуля потерь падений напряжения на всех элементах последовательных и параллельных контуров. Это позволяет построить обобщенные зависимости модуля одной из переменных от относительной или обобщенной расстройки, т.е. нормированные (приведенные) резонансные кривые (рис. 9) LCR -контура:

$$\frac{|i_m|}{|i_{mрез}|} \approx \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}}, \quad (32)$$

где i_m - комплексная амплитуда напряжения или тока. Как следует из рис. 8 и 9, колебательные контуры обладают частотной избирательностью.

Для количественной оценки избирательности используются величины *полос пропускания на уровне половинной мощности* или *обобщенный коэффициент избирательности* B .

Полосой пропускания на уровне половинной мощности или *полосой пропускания контура* называется область частот, в которой мощность сигнала ослабляется не более чем в два раза, а напряжение или ток в $\sqrt{2}$ раз.

Избирательность B определяется отношением резонансного значения напряжения или тока к его значению на заданной частоте и согласно (32) удовлетворяет соотношению:

$$B = \sqrt{1 + \xi^2} = \sqrt{1 + Q^2\nu^2}.$$

Избирательность LCR -контура обычно выражается в децибелах (дБ).

И ширину полосы пропускания контура, и избирательность, нетрудно определить по нормированной резонансной кривой или рассчитать, используя ее аналитическое представление. В последнем случае оказывается по-

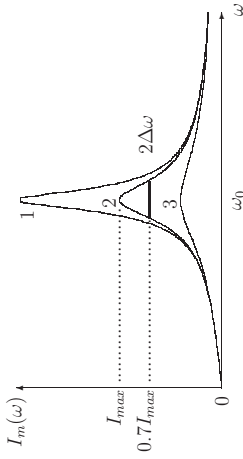


Рис. 8: Резонансные кривые LCR -контура при различных значениях добротности: 1 - $Q = 10$, 2 - $Q = 5$, 3 - $Q = 2$

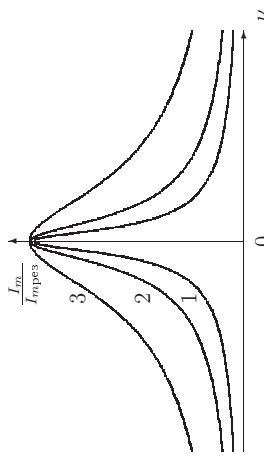


Рис. 9: Нормированные резонансные кривые LCR -контура при различных значениях добротности: 1 - $Q = 10$, 2 - $Q = 5$, 3 - $Q = 2$

энергии за период велики, то электрическая энергия не успевает перейти в магнитную. Такие переходы хорошо описывает энергетический параметр LCR -контура - добротность.

Пусть при замыкании контура в нем возникает переменный ток с амплитудой I_m . Тогда запасенная в индуктивности энергия W описывается соотношением $W = LI_m^2/2$. Средняя за период мощность потерь P , возникающих в сопротивлении R , удовлетворяет равенству $P = RI_m^2/2$, а полная энергия потерь за период колебаний имеет вид $W_n = P \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{\pi RI_m^2}{\omega_0}$.

- Безразмерная величина, превышающая в 2π раз отношение полной энергии к энергии, рассеиваемой системой за период колебаний, называется *добротностью* колебательной системы:

$$Q = 2\pi \frac{W}{W_n} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\rho}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR}, \quad (14)$$

а параметр $d = R/\rho = 1/Q$, обратный добротности Q , называется *затуханием контура*.

Обратимся теперь к показателю затухания α . При малых диссипациях можно считать, что следующие друг за другом наибольшие отклонения в одну сторону разделены интервалом, равным T_0 , и выполняется равенство:

$$\ln \frac{I(t)}{I(t + T_0)} = \alpha T_0 = \Theta, \quad \text{где } T_0 = 2\pi/\omega_c.$$

Параметр Θ характеризует быстроту затухания колебаний и называется *декрементом затухания* (от лат. *decrementum* - уменьшение, убыль). Раскрывая α , можно установить связь декремента затухания с затуханием d в виде

$$\Theta = (R/2L)(2\pi/\omega_0) = \pi d.$$

Вынужденные колебания в LCR-контуре

Вынужденными колебаниями будем называть колебания, возникающие в системе под влиянием переменного, чаще всего *периодического* внешнего воздействия

Пусть к последовательному LCR -контуре подключен источник гармонической ЭДС $E(t) = E_m \cos \omega t$, где E_m - амплитуда, ω - частота внешнего воздействия. Тогда интегрируемое дифференциальное уравнение (1) принимает вид

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C} \int I(t) dt = E_m \sin \omega t. \quad (15)$$

Дифференцируя (15) по времени и умножая на $1/L$, получим неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + 2\alpha \frac{dI}{dt} + \omega_0^2 I = \frac{\omega}{L} E_m \cos \omega t. \quad (16)$$

Общее решение уравнения (16) является суммой общего решения соответствующего однородного уравнения (получено выше в виде (6)) и частного решения неоднородного уравнения. Будем искать частное решение в виде:

$$I_1(t) = I_m \sin(\omega t - \varphi'). \quad (17)$$

Подставляя (17) в (16), и записывая ωt в виде суммы $(\omega t - \varphi')$ и φ' , получим:

$$I_m(\omega_0^2 - \omega^2) = -\frac{\omega}{L} E_m \sin \varphi', \quad 2I_m \alpha \omega = \frac{\omega}{L} E_m \cos \varphi'.$$

Отсюда

$$I_m = \frac{E_m \omega / L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2 \omega^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi' = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\alpha \omega}. \quad (18)$$

Зависимости I_m и φ' от частоты внешнего воздействия представлены в виде графиков на рис. 3.

Теперь общее решение неоднородного дифференциального уравнения (16) с учетом общего решения соответствующего однородного уравнения можно представить в виде:

$$I(t) = I_1(t) + I_2(t) = I_m \sin(\omega t - \varphi') + Ae^{-\alpha t} \sin \omega_c t, \quad (19)$$

где $A = U_0 / \omega_c L$, α и ω_c - константы, описывающие собственные колебания.

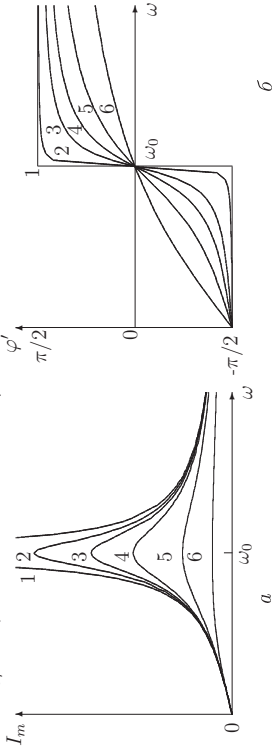


Рис. 3. Зависимости амплитуды I_m (а) и фазы φ' (б) вынужденных колебаний тока в LCR -контуре от частоты внешнего воздействия ω
 1 - $\alpha = 0(Q = \infty)$, 2 - $\alpha = 0.05\omega_0(Q = 10)$, 3 - $\alpha = 0.07\omega_0(Q = 7)$, 4 - $\alpha = 0.1\omega_0(Q = 5)$, 5 - $\alpha = 0.2\omega_0(Q = 2.5)$, 6 - $\alpha = 0.5\omega_0(Q = 1)$

1. Слагаемое $I_2(t) = Ae^{-\alpha t} \sin \omega_c t$ описывает *переходный процесс* затухания собственных колебаний (рис. 4, б и 4, д). Частота этих колебаний определяется параметрами колебательного контура, а амплитуда зависит от начального запаса энергии.

2. Слагаемое $I_1(t) = I_m \sin(\omega t - \varphi')$ описывает вынужденное колебание - *установившийся процесс*. Частота установившихся вынужденных колебаний не зависит от ω_0 и совпадает с частотой внешнего воздействия (рис. 4, е), а на начальную фазу колебаний, согласно (18), влияют и частота внешнего воздействия, и параметры контура. Когда собственные колебания полностью затухают, остается только это слагаемое, что иллюстрируют рис. 4, в и 4, с.

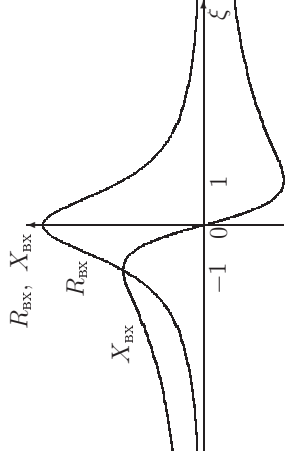


Рис. 7. Зависимости $R_{\text{вх}}$ и $X_{\text{вх}}$ параллельного LCR -контура от обобщенной расстройки ξ

можно привести к виду (рис. 5, в). Распараллельный контур (рис. 5, б) можно использовать, проводимость которого сохраняется неизменными, а в качестве G использовать проводимость параллельного контура на резонансной частоте $G = 1/R_{\text{рез}} = R/\rho^2$ [2, с.186-187]. Тогда входная или эквивалентная комплексная проводимость параллельного контура принимает вид:

$$\dot{Y}_{\text{вх}} = j_m / \dot{U}_m = G_{\text{вх}} + jB_{\text{вх}} = G + j(\omega C - \frac{1}{\omega L}). \quad (28)$$

Вводя относительную расстройку частоты контура, получим

$$B_{\text{вх}} = \omega_0 C \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = \frac{1}{\rho} \nu, \quad \dot{Y}_{\text{вх}} = G + j \frac{1}{\rho} \nu = G(1 + j \frac{1}{\rho G} \nu) = G(1 + j\xi), \quad (29)$$

где $1/\rho$ - характеристическая проводимость контура, $Q = 1/\rho G$ - добротность контура, равная отношению его характеристической и резистивной проводимостей. При таком определении условие резонанса в параллельном контуре имеет вид:

$$B_{\text{вх}} = 0.$$

Резонанс токов. Согласно (25) $\dot{U}_m = \dot{Z}_{\text{вх}} \dot{J}_m = j_m \rho^2 / R(1 + j\xi)$, а выражения для отношений комплексных амплитуд токов имеют вид

$$\frac{\dot{I}_{Lm}}{\dot{J}_m} = -j \frac{\omega_0}{\omega} Q \frac{1}{1 + j\xi}, \quad \frac{\dot{I}_{Cm}}{\dot{J}_m} = j \frac{\omega}{\omega_0} Q \frac{1}{1 + j\xi}. \quad (30)$$

Исследование этих соотношений на экстремум показывает, что напряжение на контуре достигает максимума на резонансной частоте ω_0 , а напряжения на реактивных элементах - при небольших отклонениях от частоты ω_0 : \dot{I}_{Lm} при $\omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 - 1/2Q^2}$, а \dot{I}_{Cm} при $\omega_2 = \omega_0 \sqrt{1 + 1/2Q^2}$ [2, с.198]. В реальных контурах отклонения малы. На резонансной частоте $\omega = \omega_0$:

$$\dot{I}_{Lm} = -jQ \dot{J}_m = Q \dot{J}_m e^{-j\pi/2}, \quad \dot{I}_{Cm} = jQ \dot{J}_m = Q \dot{J}_m e^{j\pi/2}. \quad (31)$$

• Эффект увеличения токов реактивных элементов в Q раз по сравнению с током генератора, возникающий в *параллельном колебательном контуре*, называется *резонансом токов*.

Это позволяет рассматривать последовательный контур как трансформатор, преобразующий малое входное напряжение в Q раз большее выходное. При реальных значениях Q и небольших расстройках ξ и $\nu(\omega \cong \omega_0)$ отношения модулей $|\dot{I}_m|$, $|\dot{U}_{Rm}|$, $|\dot{U}_{Lm}|$, $|\dot{U}_{Cm}|$ к $|\dot{E}_m|$ обладают одинаковыми зависимостями от ξ и пропорциональны $1/\sqrt{1+\xi^2}$.

Резонансные явления в параллельном LCR-контуре. Пусть к параллельному контуру (рис. 5,б) подключен идеализированный источник тока гармонической формы с частотой ω и комплексной амплитудой \dot{J}_m . Предположим, что он создает на зажимах контура гармоническое напряжение с комплексной амплитудой \dot{U}_m . Обозначим комплексные амплитуды токов, протекающих в ветвях контура, через \dot{I}_{Lm} и \dot{I}_{Cm} . Тогда

$$\dot{I}_{Lm} = \frac{\dot{U}_m}{j\omega L + R_L}, \quad \dot{I}_{Cm} = \frac{\dot{U}_m}{1/j\omega C + R_C}, \quad \dot{J}_m = \dot{I}_{Lm} + \dot{I}_{Cm}.$$

Входное или эквивалентное сопротивление параллельного контура $\dot{Z}_{\text{вх}}$ будет удовлетворять соотношению:

$$\dot{Z}_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_m}{\dot{J}_m} = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_{Lm} + \dot{I}_{Cm}} = \frac{j(\omega L + R_L)(1/j\omega C + R_C)}{j(\omega L - 1/\omega C) + R_L + R_C},$$

а резонансная частота параллельного контура (рис. 5,б) равна [1,с.79]

$$\omega_{\text{рез}} = \omega_0 \sqrt{(\rho^2 - R_C^2)/(R_L^2 - R_C^2)}.$$

Принимая во внимание, что резистивные сопротивления реактивных элементов контура малы, т.е. удовлетворяют неравенствам $\omega L \gg R_L$ и $1/\omega C \gg R_C$, получим

$$\dot{Z}_{\text{вх}} = \frac{L/C}{j(\omega L - 1/\omega C) + R},$$

где $R = R_L + R_C$. Отсюда

$$\dot{Z}_{\text{вх}} = \frac{\rho^2}{R + j\omega_0 L\nu} = \frac{\rho^2/R}{1 + jQ\nu} = \frac{\rho^2/R}{1 + j\xi}, \quad (25)$$

где ρ - характеристическое сопротивление, Q - добротность контура, ν , ξ - относительная и обобщенная расстройки.

Представим входное сопротивление параллельного контура в виде

$$\dot{Z}_{\text{вх}} = R_{\text{вх}} + jX_{\text{вх}} = \frac{\rho^2/R}{1 + \xi^2} - j\xi \frac{\rho^2/R}{1 + \xi^2}. \quad (26)$$

Зависимости $R_{\text{вх}}$ и $X_{\text{вх}}$ от обобщенной расстройки ξ представлены на рис. 7. Как следует из (26) и рис. 7, резистивная составляющая входного сопротивления на резонансной частоте достигает наибольшего значения ρ^2/R и с увеличением расстройки монотонно уменьшается.

Будем называть *резонансным сопротивлением параллельного контура*

$$R_{\text{рез}} = \rho^2/R = Q\rho = Q^2 R = \frac{L}{CR}. \quad (27)$$

Резонансное сопротивление параллельного контура велико: в Q^2 раз

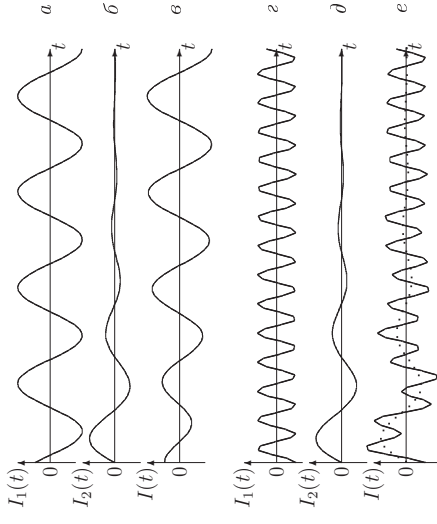


Рис. 4. Установление колебаний при $\omega = 1.1\omega_0$ (а, б, в) и при $\omega = 3.65\omega_0$ (г, д, е); временные изменения вынужденных (а, г), затухающих собственных колебаний (б, д) и результирующих колебаний (в, е)

3. Амплитуда установившихся колебаний возрастает, когда частота внешнего воздействия приближается к ω_0 .

• Увеличение амплитуды установившихся вынужденных колебаний до максимума при приближении частоты внешнего воздействия к собственной частоте колебательной системы называется *резонансом*.

4. Если воздействие является полигармоническим $E(t) = \sum E_{mi} \sin \omega_i t$, то установившиеся колебания будут полигармоническими. Их амплитудный и фазовый спектры отличаются от спектров воздействия: колебательный контур тем сильнее реагирует на гармоники сигнала, чем ближе их частоты к собственной частоте колебательной системы и

$$I_{mi}(\omega_i) = \frac{E_{mi}}{L\omega_i \sqrt{(\frac{\omega_i^2}{\omega_0^2} - 1)^2 + 4(\frac{\omega_i}{\omega_0})^2}},$$

где i - номер гармоники воздействия.

Резонансные явления в LCR-контуре

На характер резонансных явлений в LCR-контуре заметно влияют свойства соединения элементов контура с источником внешнего воздействия. Если источник включается в разрыв последовательного соединения индуктивности L , сопротивления R и емкости C (рис. 5,а), то колебательный контур называется *последовательным*. Если же индуктивность L , емкость C и источник сигналов включены параллельно (рис. 5,б и 5,в), то колебательный контур называется *параллельным*. На рис. 5,б сопротивление R_L и R_C представляют потери в реактивных элементах, на рис. 5,а эти сопротивления включены последовательно и потому объединены в R . Последовательный контур (рис. 5,а) и параллельный контур (рис. 5,б) являются *дуальными* и описываются аналогичными дифференциальными уравнениями [2, с. 186-187].

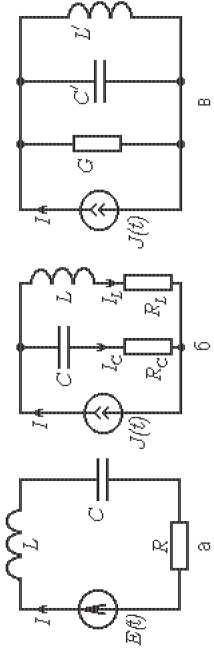


Рис. 5. Последовательный (а), параллельный (б) и дуальный к (а) параллельный (в) контуры

При анализе резонансных явлений наиболее интересны установившиеся колебания при гармонических воздействиях. Для описания последних целесообразно использовать метод комплексных амплитуд, а дифференциальные уравнения свести к алгебраическим уравнениям.

Резонансные явления в последовательном LCR-контуре. Пусть в последовательный LCR-контур (рис. 5,а) включен идеализированный источник гармонической ЭДС (внутреннее сопротивление источника равно нулю)

$$\dot{E}(t) = \dot{E}_m e^{j\omega t},$$

где ω - частота воздействия, \dot{E}_m - комплексная амплитуда ЭДС. Приравняв сумму падений напряжения на элементах контура ЭДС источника, получим следующее алгебраическое уравнение для комплексных амплитуд:

$$\dot{I}_m(j\omega L + R + \frac{j\omega C}{1}) = \dot{E}_m.$$

Отношение комплексных амплитуд ЭДС и тока будем называть *входным* или *эквивалентным* комплексным сопротивлением контура $\dot{Z}_{\text{вх}} = \dot{E}_m / \dot{I}_m$. Входное сопротивление контура на частоте ω можно представить в виде суммы действительной (резистивной) и мнимой (реактивной) составляющих. Тогда

$$\dot{Z}_{\text{вх}} = R_{\text{вх}} + jX_{\text{вх}} = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}).$$

Резистивная составляющая входного сопротивления $R_{\text{вх}}$ не зависит от частоты ЭДС и равна сопротивлению потерь R , а реактивная составляющая $X_{\text{вх}}$ изменяется от $-\infty$ (при $\omega=0$) до ∞ (при $\omega \rightarrow \infty$). Частотные зависимости $R_{\text{вх}}$, $X_{\text{вх}}$, а также реактивных сопротивлений индуктивности $X_L = \omega L$ и емкости $X_C = -1/\omega C$ изображены на рис. 6. При сближении частоты внешнего воздействия с ω_0 ток в контуре достигает резонансного значения, а реактивная составляющая входного сопротивления стремится к нулю.

Условием резонанса в колебательной системе может служить не только равенство частот воздействия и собственных колебаний контура, но

и обращение в нуль реактивной составляющей входного сопротивления

$$\omega = \omega_0 \quad \text{или} \quad X_{\text{вх}} = 0.$$

Последнее условие оказывается весьма полезным, когда подключаемая к источнику ЭДС цепь содержит большое число реактивных элементов, например, при определении условий резонанса в системах связанных колебательных контуров.

Рассмотрим поведение колебательного контура при расстройке, т.е. когда частота внешнего воздействия не совпадает с резонансной частотой контура. Для этого представим $X_{\text{вх}}$ в виде:

$$X_{\text{вх}} = \omega_0 L \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = \rho \nu, \quad (20)$$

где $\rho = \omega_0 L = \sqrt{L/C}$ - характеристическое сопротивление контура, а $\nu = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}$ - относительная расстройка частоты контура. В окрестности резонанса относительная расстройка частоты удовлетворяет неравенству $\nu \ll 1$, а при $\omega = \omega_0$ она обращается в нуль. Поэтому абсолютная расстройка частоты $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ связана с ν простым соотношением:

$$\nu = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega(\omega + \omega_0)} \cong \frac{2\Delta\omega}{\omega_0}. \quad (21)$$

Иногда для относительной расстройки используется другое приближенное соотношение, которое можно получить, если умножить ν на $\omega_0/\omega \cong 1$. Тогда

$$\nu = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \cong 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}.$$

С учетом введенных обозначений сопротивление контура принимает вид:

$$Z_{\text{вх}} = R_{\text{вх}} + jX_{\text{вх}} = R + j\rho\nu = R(1 + jQ\nu) = R(1 + j\xi), \quad (22)$$

где Q - добротность контура, $\xi = Q\nu$ - обобщенная расстройка контура.

Резонанс напряжений. Комплексные амплитуды тока (\dot{I}_m) и напряжений на сопротивлении, индуктивности и емкости (\dot{U}_{Rm} , \dot{U}_{Lm} , \dot{U}_{Cm}) в последовательном контуре описываются формулами:

$$\begin{aligned} \dot{I}_m &= \frac{\dot{E}_m}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} = \frac{\dot{E}_m}{R(1 + j\xi)}, & \dot{U}_{Rm} &= \frac{\dot{E}_m R}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} = \frac{\dot{E}_m}{1 + j\xi}, \\ \dot{U}_{Lm} &= j\omega L \dot{I}_m = j \frac{\omega}{\omega_0} Q \frac{\dot{E}_m}{1 + j\xi}, & \dot{U}_{Cm} &= \frac{1}{j\omega C} \dot{I}_m = -j \frac{\omega_0}{\omega} Q \frac{\dot{E}_m}{1 + j\xi}. \end{aligned} \quad (23)$$

Исследование этих соотношений на экстремум показывает, что ток в контуре и напряжение на сопротивлении достигают наибольших значений на резонансной частоте ω_0 , а напряжения на реактивных элементах - при небольших отклонениях от частоты ω_0 : \dot{U}_{Lm} при $\omega_1 = \omega_0/\sqrt{1-1/2Q^2}$, а \dot{U}_{Cm} при $\omega_2 = \omega_0\sqrt{1-1/2Q^2}$ [2, с. 195-196], но эти отклонения в реальных контурах, т.е. при больших величинах Q , ничтожно малы.

На резонансной частоте $\omega = \omega_0$:

$$\dot{U}_{Lm} = jQ\dot{E}_m = Q\dot{E}_m e^{j\pi/2}, \quad \dot{U}_{Cm} = -jQ\dot{E}_m = Q\dot{E}_m e^{-j\pi/2}. \quad (24)$$

• Напряжения на реактивных элементах равны по амплитуде, протivoположны по знаку и *превышают ЭДС в Q раз*. Поэтому резонанс в последовательном LCR-контуре обычно называют *резонансом напряжений*.