

А.В.Хохлов

# ИССЛЕДОВАНИЕ ЧАСТОТНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ РАДИОСИГНАЛОВ В $LC$ -ЦЕПЯХ (Линейные $LC$ -фильтры)

*Учебное пособие для спецпрактикума по курсу  
"Теоретические основы радиоэлектроники"*

Ц е л ь р а б о т ы: исследование особенностей частотной фильтрации радиосигналов в  $LC$ -цепях и принципов создания  $LC$ -фильтров нижних и верхних частот, полосовых и заграждающих (режективных).

## Литература

1. Калинин В.И., Герштейн Г.М. Введение в радиофизику. М.: Гостехиздат, 1957.
2. Хохлов А.В. Теоретические основы радиоэлектроники. Саратов. Изд-во Сарат. ун-та, 2005.
3. Зернов Н.В., Карпов В.Г. Теория радиотехнических цепей. Л.: Энергия, 1972.
4. Нефедов В.И. Основы радиоэлектроники. М.: Высш.шк., 2000.
5. Каяцкас А.А. Основы радиоэлектроники. М.: Высш.шк., 1988.

## Контрольные вопросы:

1. Дайте определение электрического частотного фильтра, ФНЧ, ФВЧ, ПФ и ЗФ.
2. Изобразите эквивалентные схемы ФНЧ, ФВЧ, ПФ и ЗФ в виде Т- и П-образных звеньев. Запишите формулы для частот среза в ФНЧ, ФВЧ, ПФ, ЗФ. Как определить полосу пропускания фильтра графически?
3. Как записать условия пропускания  $LC$ -фильтра? Изобразите частотные зависимости функций затухания  $\alpha(\omega)$ , ФЧХ  $\beta(\omega)$  и характеристических сопротивлений  $Z_0^T$  и  $Z_0^П$  для ФНЧ, ФВЧ, ПФ, ЗФ.
- 4\*. Поясните принципы увеличения крутизны кривых ослабления вблизи частот среза с помощью производных  $m$ -звеньев. Изобразите эквивалентные схемы последовательно-производного и параллельно-производного звена ФНЧ ФВЧ,

## Задания для самостоятельной работы

1. Вывести формулы (11) - (14) для ФНЧ и (15) - (18) для ФВЧ.
2. По заданным параметрам фильтров, рассчитать частоты среза  $f_{cp}$  для ФНЧ и ФВЧ, а также полосы пропускания  $f_{cp2} - f_{cp1}$  для ПФ и задерживания  $f_{cp2} - f_{cp1}$  для ЗФ.
3. По формулам (12), (14), (16) и (18) рассчитать для ФНЧ и ФВЧ фазо-частотные характеристики  $\beta(f)$  и частотные зависимости характеристических сопротивлений.
4. По формулам (12) и (16) рассчитать резонансные частоты замкнутого на конце 8-мизвенных ФНЧ и ФВЧ при условиях, что на полной длине фильтра укладывается четверть волны, 1, 2 или 4 полуволны напряжения.

## ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Электрическим частотным фильтром (или сокращенно просто *Фильтром*) называется устройство, предназначенное для частотного разделения электрических сигналов и представляющее четырехполюсник, ослабление которого в некоторой полосе частот мало по сравнению с остальными частотами (рис. 1). Частотные свойства фильтра определяются амплитудно-частотной  $K(\omega) = |\dot{K}(\omega)|$  и фазо-частотной  $\arg \dot{K}(\omega)$  характеристиками (АЧХ и ФЧХ). Вместо АЧХ обычно используется функция ослабления  $\alpha(\omega) = -20 \lg K(\omega)$ .

Диапазон частот, в котором ослабление меньше заданного значения  $\alpha_n$ , называется *полосой пропускания*, а область или области спектра, в которых ослабление больше заданного значения  $\alpha_z$ , называется *полосой задерживания*. По расположению полос пропускания и задерживания различают *фильтры нижних* (а не низких!) *частот* (ФНЧ), *верхних* (а не высоких!) *частот* (ФВЧ), *полосовые* (ПФ) и *режективные* или *заграждающие* (РФ или ЗФ).

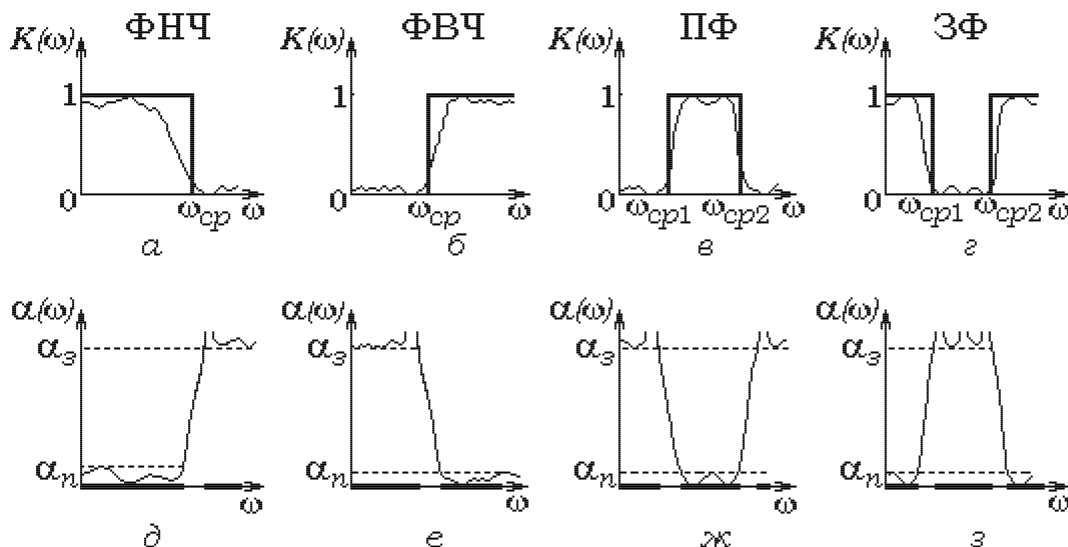


Рис. 1. Зависимости  $K(\omega)$  и  $\alpha(\omega)$  для ФНЧ (а, д), ФВЧ (б, е), ПФ (в, ж) и ЗФ (г, з)

На рис. 1, *a-z* показаны частотные зависимости коэффициентов передачи (жирные линии – для идеальных фильтров, тонкие – для реальных), а на рис. 1, *д-з* – ослабления  $\alpha$  различных фильтров. Для идеальных фильтров в полосе пропускания  $K=1$  (ослабление  $\alpha_n=0$ ), а в полосе задерживания  $K=0$  (ослабление  $\alpha_z=\infty$ ). Частоты, разделяющие полосы пропускания и задерживания, соответствуют точкам разрыва  $K(\omega)$  и называются *частотами среза*.

Реальные фильтры могут быть пассивными, состоящими из индуктивностей и емкостей (пассивные *LC*-фильтры) или из сопротивлений и емкостей (пассивные *RC*-фильтры), активными (*ARC*-фильтры), с переключающими конденсаторами (*AC*-фильтры), электромеханическими (кварцевыми), магнитострикционными, пьезоэлектрическими и другими. Они обладают конечными ослаблениями  $\alpha_n \neq 0$  в полосе прозрачности и  $\alpha_z \neq \infty$  в полосе задерживания (рис. 1, *a-z*), а  $K(\omega)$  соединяет  $\alpha_n$  и  $\alpha_z$  плавной кривой (рис. 1, *д-з*). Поэтому между полосами пропускания и задерживания (подчеркнуты) вводятся *переходные* (не подчеркнуты) *полосы* (или *зоны*).

## Основы теории *LC*-фильтров

Главными задачами теории являются:

- 1) определение условий пропускания и задерживания;
- 2) определение границ полос пропускания (частот среза);
- 3) вывод уравнений частотных характеристик;
- 4) исследование условий и методов согласования фильтров с нагрузочными сопротивлениями.

При построении теории фильтров используются методы и основные выводы теории четырехполюсников [2, с.154-163], а сами фильтры представляются эквивалентными схемами четырехполюсников. Теоретические модели *LC*-фильтров чаще всего строятся для симметричных Т- или П-звеньев

**Условия пропускания и задерживания. Частоты среза.** Если электрический фильтр в виде симметричного П- или Т-образного звена согласован на входе и выходе, то его можно описать уравнениями четырехполюсника с **A**-матрицей [2, с.156]

$$\begin{aligned} \dot{U}_{1m} &= \dot{A}_{11}\dot{U}_{2m} + \dot{A}_{12}\dot{I}_{2m} = \dot{U}_{2m}\text{ch}\dot{\gamma} + \dot{I}_{2m}\dot{Z}_0\text{sh}\dot{\gamma}, \\ \dot{I}_{1m} &= \dot{A}_{21}\dot{U}_{2m} + \dot{A}_{22}\dot{I}_{2m} = \frac{\dot{U}_{2m}}{\dot{Z}_0}\text{sh}\dot{\gamma} + \dot{I}_{2m}\text{ch}\dot{\gamma}, \end{aligned}$$

и выразить коэффициенты последней через характеристические параметры: сопротивление  $\dot{Z}_0$  и постоянную передачи  $\dot{\gamma} = \alpha + j\beta$  [2, с.158-160]:

$$A_{11} = \text{ch}\dot{\gamma} = \text{ch}(\alpha + j\beta) = \text{ch}\alpha \cos\beta + j\text{sh}\alpha \sin\beta = 1 + \frac{\dot{Y}\dot{Z}}{2}. \quad (1)$$

Для частотной фильтрации сигналов  $\dot{Z}$ - и  $\dot{Y}$ -ветви должны обладать различными сопротивлениями: одна – емкостным, другая – индуктивным. В противном случае первое уравнение имеет решение лишь при  $\alpha > 0$  и полоса пропускания отсутствует.

Пусть  $\dot{Z}$  и  $\dot{Y}$  – дуальные реактивные двухполюсники ( $\dot{Z} = jX$ ,  $\dot{Y} = jB$ ). Тогда  $\dot{Z}\dot{Y}/4 = -XB/4$ , а коэффициент передачи

$$A_{11} = \operatorname{ch} \alpha \cos \beta + j \operatorname{sh} \alpha \sin \beta = 1 + \frac{\dot{Z}\dot{Y}}{2} = 1 - \frac{XB}{2}$$

становится вещественной величиной, меньшей единицы. Отсюда следуют два равенства:

$$\operatorname{ch} \alpha \cos \beta = 1 + \frac{\dot{Z}\dot{Y}}{2} = 1 - \frac{XB}{2} < 1, \quad \operatorname{sh} \alpha \sin \beta = 0.$$

Второе равенство выполняется либо при  $\alpha = 0$  (полоса пропускания), либо при  $\beta = \pm\pi$  ( $\alpha \neq 0$ ) (полоса задерживания). Тогда в полосе пропускания идеального фильтра ( $\alpha_n = 0$ ) имеем

$$\alpha = 0, \quad \cos \beta = 1 - \frac{XB}{2} \quad \text{или} \quad \beta = \arccos \left( 1 - \frac{XB}{2} \right), \quad (2)$$

а в полосе задерживания

$$\beta = \pm\pi, \quad \operatorname{ch} \alpha = \frac{XB}{2} - 1 \quad \text{или} \quad \alpha = \operatorname{Arch} \left( \frac{XB}{2} - 1 \right), \quad (3)$$

где  $\operatorname{Arch}(z)$  – обратная  $z = \operatorname{ch} \alpha$  гиперболическая функция.

Так как  $|\cos \beta| \leq 1$ , то  $1 + \dot{Z}\dot{Y}/2$  может изменяться от  $-1$  до  $1$ , а условие прозрачности принимает вид

$$-1 \leq \frac{\dot{Z}\dot{Y}}{4} \leq 0. \quad (4)$$

Итак, в полосе прозрачности фильтра сопротивления продольных элементов  $\dot{Z}$  должны быть меньше, чем учетверенные сопротивления поперечных элементов

$$|\dot{Z}| \leq |4/\dot{Y}|. \quad (5)$$

Частоты среза  $LC$ -фильтра соответствуют предельным значениям сопротивлений, обеспечивающим равенства в (4). Это возможно, если  $\dot{Z} = 0$  или  $\dot{Y} = 0$  на одном краю и  $\dot{Z}\dot{Y} = -4$  на другом краю диапазона пропускемых частот или  $\dot{Z}\dot{Y} = -4$  на двух границах диапазона, а  $\dot{Z} = 0$  и  $\dot{Y} = 0$  где-нибудь внутри области прозрачности.

**Уравнения частотных характеристик** Для вывода уравнений частотных характеристик обратимся к формулам (3) и (4), примем во внимание, что  $\dot{Z}$  и  $\dot{Y}$  зависят от  $\omega$ , и проанализируем два случая  $\alpha = 0$  (полоса пропускания) и  $\alpha \neq 0$ ,  $\beta = \pm\pi$  (область задерживания). В полосе пропускания

$$\alpha = 0, \quad \beta(\omega) = \arccos \left( 1 - \frac{X(\omega)B(\omega)}{2} \right), \quad (6)$$

а в полосе задерживания

$$\alpha(\omega) = \operatorname{Arch} \left| \frac{X(\omega)B(\omega)}{2} - 1 \right|, \quad \beta = \pm\pi. \quad (7)$$

**Характеристические сопротивления. Проблемы согласования.** Согласно теории четырехполюсников [2, с.158-163] они удовлетворяют соотношениям

$$\dot{Z}_0^T = \sqrt{\frac{\dot{Z}}{\dot{Y}}} \sqrt{1 + \frac{\dot{Z}\dot{Y}}{4}}, \quad \dot{Z}_0^\Pi = \sqrt{\frac{\dot{Z}}{\dot{Y}}} / \sqrt{1 + \frac{\dot{Z}\dot{Y}}{4}} \quad (8)$$

и являются функциями частоты сигналов. Поскольку  $LC$ -фильтры образуют дуальные реактивные элементы сопротивление  $K = \sqrt{\dot{Z}/\dot{Y}}$  не зависит от  $\omega$ .

Электрические фильтры, составленные из дуальных реактивных элементов  $\dot{Z}$ ,  $\dot{Y}$  и обладающие вещественным сопротивлением  $K = \sqrt{\dot{Z}/\dot{Y}}$ , не зависящим от  $\omega$ , называются *фильтрами типа  $k$* .

В полосе пропускания  $-1 \geq \dot{Z}\dot{Y}/4 \geq 0$ , характеристические сопротивления  $k$ -фильтров  $\dot{Z}_0^T$  и  $\dot{Z}_0^H$  имеют резистивный характер и изменяются с частотой от  $K$  до 0 и от  $K$  до  $\infty$  соответственно.

Согласование фильтров с реальными нагрузками представляет сложную задачу, так как невозможно создать такое  $\dot{Z}_H$ , которое совпадало бы с  $\dot{Z}_0^T$  или с  $\dot{Z}_0^H$  в полосе пропускания.  $k$ -фильтр можно согласовать с сопротивлением нагрузки  $R_H$  только в области частот, где  $R_H \cong K$ .

Согласование  $LC$ -фильтра в большей части полосы пропускания оказывается возможным при введении между  $k$ -звеном и нагрузкой дополнительного  $\Gamma$ -образного звена, производного от  $k$ -прототипа и получившего название  $m$ -звена. Его входное сопротивление  $\dot{Z}_{01}^m$  должно совпадать с характеристическим сопротивлением  $k$ -звена, а выходное – с сопротивлением нагрузки. Производное  $m$ -звено получается из полузвена  $k$ -прототипа путем добавления в продольную или поперечную ветвь двухполюсника с дуальной проводимостью. В соответствии с этим различают последовательно- и параллельно-производные звенья типа  $m$ .

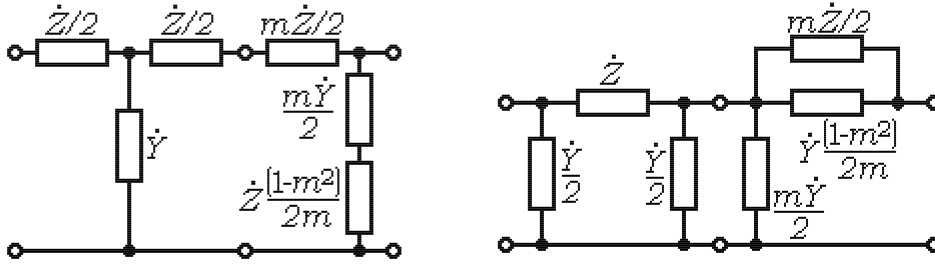


Рис. 2. Последовательно-производное (а) и параллельно-производное (б)  $\Gamma$ -звенья

Симметричное  $T$ -звено  $k$ -фильтра легко согласовать с левым  $\Gamma$ -звеном. Пусть продольные сопротивления  $\Gamma$ -звена и  $T$ -прототипа отличаются в  $m$  раз. Приравнявая входное сопротивление  $\Gamma$ -звена и характеристическое сопротивление  $T$ -звена, имеем:

$$\sqrt{\frac{\dot{Z}}{\dot{Y}}} \sqrt{1 + \frac{\dot{Z}\dot{Y}}{4}} = \sqrt{\frac{m\dot{Z}}{\dot{Y}_m}} \sqrt{1 + \frac{m\dot{Z}\dot{Y}_m}{4}}.$$

Отсюда для проводимости  $\dot{Y}_m$  получаем равенство:

$$\frac{1}{\dot{Y}_m} = \frac{1}{m\dot{Y}} + \frac{\dot{Z}(1 - m^2)}{4m},$$

т.е. поперечная ветвь дополнительного  $\Gamma$ -звена состоит из последовательно соединенных взаимно-обратных реактивностей

$$\frac{2}{\dot{Y}_m} = \frac{2}{m\dot{Y}} + \frac{\dot{Z}(1 - m^2)}{2m}, \quad (9)$$

которые образуют *последовательный колебательный контур* (последовательно-производное  $m$ -звено).

Симметричное  $\Pi$ -звено  $k$ -фильтра удобно согласовать с правым  $\Gamma$ -звеном (рис. 2, б). Пусть поперечные проводимости  $\Gamma$ -звена и  $\Pi$ -прототипа отличаются в  $m$  раз. Приравнявая входное сопротивление  $\Gamma$ -звена и характеристическое сопротивление  $\Pi$ -звена, получим:

$$\sqrt{\frac{\dot{Z}}{\dot{Y}}} / \sqrt{1 + \frac{\dot{Z}\dot{Y}}{4}} = \sqrt{\frac{\dot{Z}_m}{m\dot{Y}}} / \sqrt{1 + \frac{\dot{Z}_m m \dot{Y}}{4}}.$$

Отсюда следует условие равенства сопротивлений

$$\frac{1}{\dot{Z}_m} = \frac{1}{m\dot{Z}} + \frac{\dot{Y}(1 - m^2)}{4m}.$$

Теперь из параллельно соединенных (отсюда название  $m$ -звена) взаимно-обратных реактивностей состоит продольная ветвь  $\Gamma$ -звена, представляющая *параллельный колебательный контур*:

$$\frac{2}{\dot{Z}_m} = \frac{2}{m\dot{Z}} + \frac{\dot{Y}(1 - m^2)}{2m}. \quad (10)$$

Формулы (9) и (10) имеют одинаковую структуру, и воздействие производных звеньев тоже одинаково. Коэффициент  $m$  может принимать значения от 0.1 до 1.

Корректирующее действие последовательно- и параллельно-производных  $m$ -звеньев зависит от величины коэффициента  $m$  и объясняется введением дополнительных реактивностей и образованием резонансных контуров. При этом ослабляется зависимость выходных сопротивлений фильтров от частоты и увеличивается крутизна функции ослабления вблизи частоты среза.

### Фильтр нижних частот

*Фильтром нижних частот* (ФНЧ) называется четырехполюсник, у которого полоса пропускания ( $\alpha \leq \alpha_n$ ) простирается от  $\omega = 0$  (постоянный ток) до некоторой частоты среза  $\omega_{ср}$ , а колебания с более высокими частотами существенно ослабляются ( $\alpha \geq \alpha_з$ ). Идеализированная и реальная АЧХ ФНЧ представлены на рис. 1, а, д. Заданную АЧХ можно обеспечить, если сопротивления  $\dot{Z}$  продольных ветвей и проводимости  $\dot{Y}$  поперечных ветвей фильтра выбрать такими, чтобы на низких частотах они обладали по возможности малой величиной.

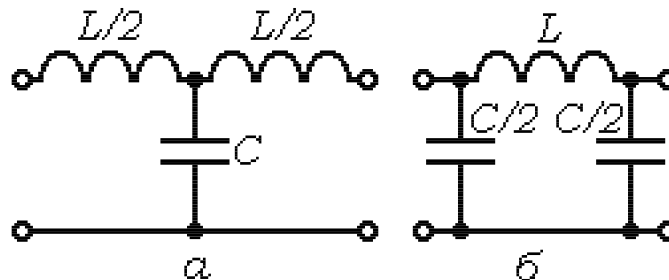


Рис. 3

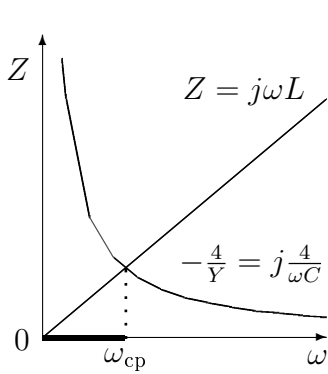


Рис. 4

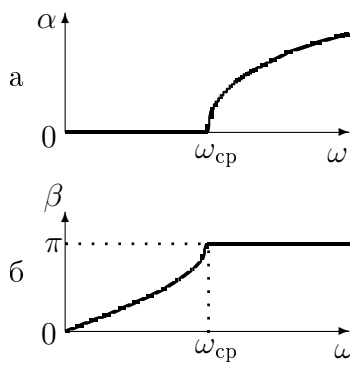


Рис. 5

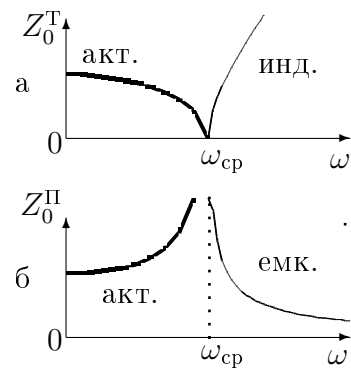


Рис. 6

Электрические схемы Т- и П-звеньев  $LC$ -фильтра нижних частот изображены на рис. 3, графическое определение полосы пропускания иллюстрируется рис. 4, частотные зависимости функции ослабления и ФЧХ представлены на рис. 5, а характеристических сопротивлений - на рис. 6. Характеристики  $LC$ -фильтра нижних частот описываются следующими соотношениями:

$$\omega_{ср} = \frac{2}{\sqrt{LC}}. \quad (11)$$

В полосе пропускания  $\alpha = 0, \quad \beta = \arccos \left( 1 - \frac{2\omega^2}{\omega_{ср}^2} \right), \quad (12)$

В полосе задерживания  $\alpha = \text{Arch} \left( \frac{2\omega^2}{\omega_{ср}^2} - 1 \right), \quad \beta = \pi. \quad (13)$

$$\dot{Z}_0^T = \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_{ср}^2}}, \quad \dot{Z}_0^\Pi = \sqrt{\frac{L}{C}} / \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_{ср}^2}}. \quad (14)$$

Эти соотношения предлагается вывести самостоятельно.

### Фильтр верхних частот

Фильтром верхних частот (ФВЧ) называется четырехполюсник, у которого полоса пропускания ( $\alpha \leq \alpha_n$ ) простирается от некоторой частоты среза  $\omega_{ср}$  до сколь угодно больших частот ( $\omega \rightarrow \infty$ ), а колебания более низких частот существенно ослабляются ( $\alpha \geq \alpha_з$ ). Идеализированная и реальная АЧХ ФВЧ представлены на рис. 1, б, в. Заданную АЧХ можно получить, если сопротивления  $\dot{Z}$  продольных ветвей и проводимости  $\dot{Y}$  поперечных ветвей фильтра выбрать такими, чтобы на высоких частотах они обладали по возможности малой величиной.

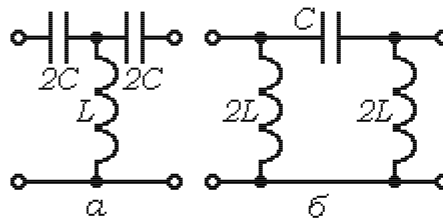


Рис. 7

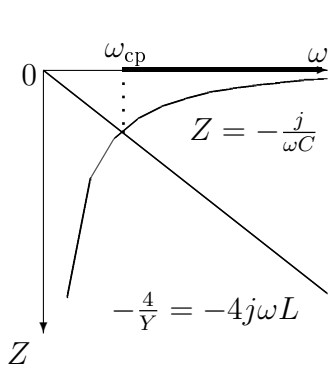


Рис. 8

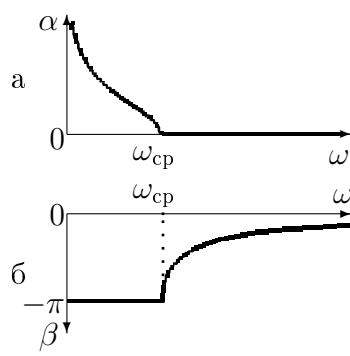


Рис. 9

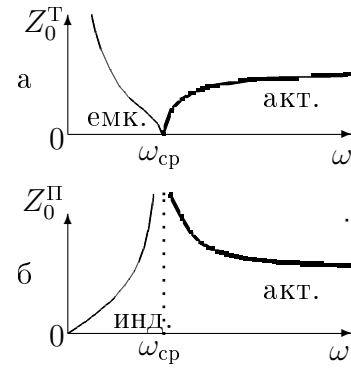


Рис. 10

Электрические схемы Т- и П-звеньев  $LC$ -фильтра верхних частот изображены на рис. 7, графическое определение полосы пропускания иллюстрируется рис. 8, частотные зависимости функции ослабления и ФЧХ представлены на рис. 9, а характеристических сопротивлений - на рис. 10. Характеристики  $LC$ -фильтра верхних частот описываются следующими соотношениями:

$$\omega_{cp} = \frac{1}{2\sqrt{LC}}. \quad (15)$$

В полосе пропускания  $\alpha = 0, \quad \beta = \arccos \left( 1 - \frac{2\omega_{cp}^2}{\omega^2} \right), \quad (16)$

В полосе задерживания  $\alpha = \text{Arch} \left( \frac{2\omega_{cp}^2}{\omega^2} - 1 \right), \quad \beta = -\pi. \quad (17)$

$$\dot{Z}_0^T = \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{1 - \frac{\omega_{cp}^2}{\omega^2}}, \quad \dot{Z}_0^\Pi = \sqrt{\frac{L}{C}} / \sqrt{1 - \frac{\omega_{cp}^2}{\omega^2}}. \quad (18)$$

Эти соотношения предлагается вывести самостоятельно.

## Полосовой и заграждающий фильтры

*Полосовым фильтром* (ПФ) называется четырехполюсник, у которого полоса пропускания ( $\alpha \leq \alpha_n$ ) занимает конечную область частот от  $\omega_{cp1}$  до  $\omega_{cp2}$ , а колебания всех других частот существенно ослабляются ( $\alpha \geq \alpha_3$ ). Идеализированная и реальная АЧХ ПФ представлены на рис. 1, в, ж.

*Заграждающим (режективным) фильтром* (ЗФ или РФ) называется четырехполюсник, у которого ослабление сигналов в диапазоне частот от 0 до  $\omega_{cp1}$  и от  $\omega_{cp2}$  до  $\infty$  мало ( $\alpha \leq \alpha_n$ ), а колебания с частотами от  $\omega_{cp1}$  до  $\omega_{cp2}$  существенно ослабляются ( $\alpha \geq \alpha_3$ ). Идеализированная и реальная АЧХ ЗФ представлены на рис. 1, г, з.

Чтобы обеспечить хорошее пропускание сигналов в диапазоне частот от  $\omega_{cp1}$  до  $\omega_{cp2}$ , в этой частотной области модули сопротивлений  $\dot{Z}(\omega)$  и проводимостей  $\dot{Y}(\omega)$  должны обладать малой величиной. Таким условиям удовлетворяют в качестве  $\dot{Z}(\omega)$  продольных ветвей последовательные колебательные  $LC$ -контур, настроенные на среднюю частоту диапазона



$\omega_0$ , а в качестве  $\dot{Y}(\omega)$  поперечных ветвей – параллельные колебательные контуры, настроенные на ту же резонансную частоту (рис. 11, а).

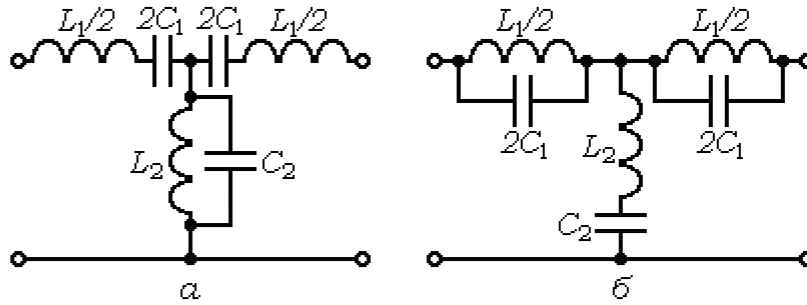


Рис. 11. Электрические схемы Т-звена ПФ (а) и Т-звена ЗФ (б)

Для реализации заграждающего фильтра достаточно взаимно-обратные реактивности поменять местами, т.е. составить продольные ветви из параллельных колебательных контуров ( $\dot{Z} = \frac{L_1/C_1}{j(\omega L_1 - 1/\omega C_1)}$ ), а поперечные ветви – из последовательных контуров ( $\dot{Y} = \frac{1}{j(\omega L_2 - 1/\omega C_2)}$ ), настроенных на среднюю частоту полосы задерживания  $\omega_0$  (рис. 11, б).

Полосы пропускания ПФ и ЗФ можно определить графически (рис. 12, а, б подчеркнуты), если  $-4/\dot{Y}(\omega)$  и  $\dot{Z}(\omega)$  изобразить на одном графике и воспользоваться неравенством (4).

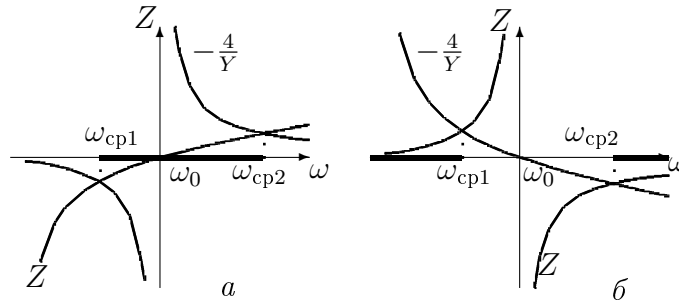


Рис. 12. Графическое определение полос пропускания ПФ (а) и ЗФ (б)

Характеристики  $LC$ -фильтра верхних частот описываются следующими соотношениями.

Для ПФ  $\omega_{cp1} = \omega_0(\sqrt{q+1} - \sqrt{q})$ ,  $\omega_{cp2} = \omega_0(\sqrt{q+1} + \sqrt{q})$ ,  $q = \frac{C_1}{C_2} = \frac{L_2}{L_1}$ ,

В полосе пропускания  $\alpha = 0$ ,  $\beta(\omega) = \arccos [1 - \nu^2/2q]$ ,  $\nu = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}$  (19)

В полосе задерживания  $\alpha(\omega) = \text{Arch} [1 - \nu^2/2q]$ ,  $\beta = \mp\pi$ , (20)

$\dot{Z}_0^T(\omega) = \sqrt{L_1/C_2} \sqrt{1 - \nu^2/4q}$ ,  $\dot{Z}_0^П(\omega) = \sqrt{L_1/C_2}/\sqrt{1 - \nu^2/4q}$ . (21)

Для ЗФ  $\omega_{cp1} = \frac{\omega_0}{4}(\sqrt{q'+16} - \sqrt{q'})$ ,  $\omega_{cp2} = \frac{\omega_0}{4}(\sqrt{q'+16} + \sqrt{q'})$ ,  $q' = \frac{L_1}{L_2} = \frac{C_2}{C_1}$ ,

В полосе пропускания  $\alpha = 0$ ,  $\beta(\omega) = \arccos [1 - q'/2\nu^2]$ ,  $\nu = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}$  (22)

В полосе задерживания  $\alpha(\omega) = \text{Arch} [1 - q'/2\nu^2]$ ,  $\beta = \pm\pi$ . (23)

$\dot{Z}_0^T(\omega) = \sqrt{L_2/C_1} \sqrt{1 - q'/4\nu^2}$ ,  $\dot{Z}_0^\Pi(\omega) = \sqrt{L_2/C_1}/\sqrt{1 - q'/4\nu^2}$ . (24)

Вывод частотных характеристик ПФ и ЗФ подробно рассмотрен в работе [2, с.250-253], а рассчитанные по этим формулам частотные зависимости для ПФ функции ослабления и ФЧХ представлены на рис. 13, характеристических сопротивлений - на рис. 14, а для ЗФ на рис. 15 и 16 соответственно.

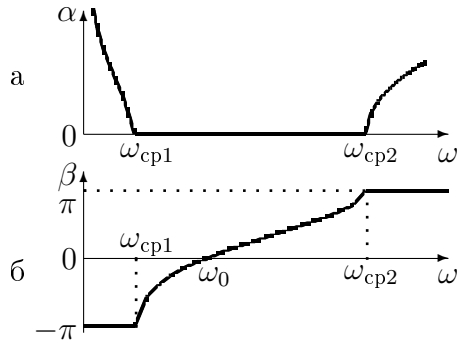


Рис. 13

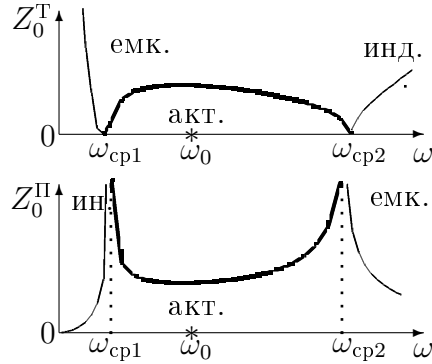


Рис. 14

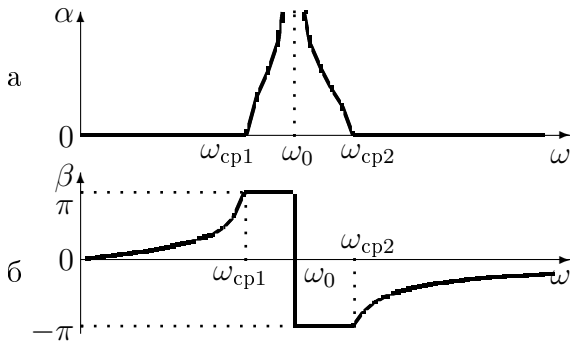


Рис. 15

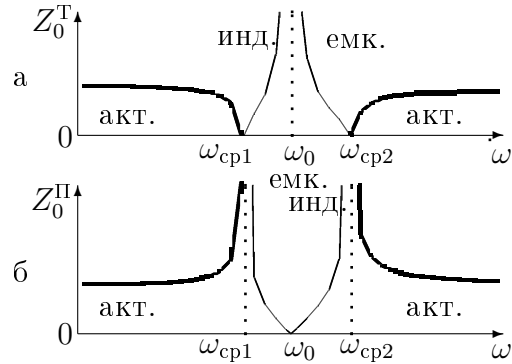


Рис. 16

## Многозвенные фильтры

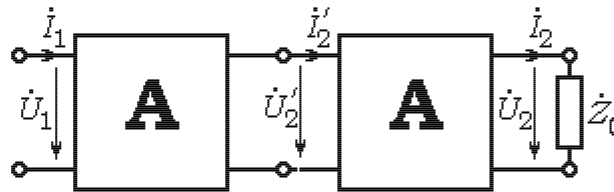


Рис. 17

На практике часто используются каскадные соединения Т- или П-образных элементарных звеньев фильтров (рис. 17), при которых выходы предыдущих звеньев соединен со входами последующих звеньев. Результирующая матрица  $\mathbf{A}_{\text{рез}}$  такого соединения равна произведению матриц  $\mathbf{A}$  отдельных звеньев:

$$\mathbf{A}_{\text{рез}} = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_3 \cdot \dots \cdot \mathbf{A}_N. \quad (25)$$

Перемножение матриц  $\mathbf{A}_i$  даже при полной идентичности звеньев приводит к сложным вычислениям. Математические выкладки существенно упрощаются, если в уравнениях (1)  $\text{ch}\gamma$  и  $\text{sh}\gamma$  представить в виде суммы и разности экспонент. Тогда

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= \dot{A}_{11}\dot{U}_2 + \dot{A}_{12}\dot{I}_2 = \frac{1}{2} (\dot{U}_2 + \dot{I}_2\dot{Z}_0) e^{-\gamma} + \frac{1}{2} (\dot{U}_2 - \dot{I}_2\dot{Z}_0) e^{\gamma}, \\ \dot{I}_1 &= \dot{A}_{21}\dot{U}_2 + \dot{A}_{22}\dot{I}_2 = \frac{1}{2} \left( \dot{I}_2 + \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_0} \right) e^{-\gamma} + \frac{1}{2} \left( \dot{I}_2 - \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_0} \right) e^{\gamma}.\end{aligned}\quad (26)$$

Когда каскадное соединение содержит  $N$  идентичных звеньев, описываемых характеристической постоянной передачи  $\gamma$ , уравнения принимают вид

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= \frac{1}{2} (\dot{U}_2 + \dot{I}_2\dot{Z}_0) e^{-N\gamma} + \frac{1}{2} (\dot{U}_2 - \dot{I}_2\dot{Z}_0) e^{N\gamma}, \\ \dot{I}_1 &= G \frac{1}{2} \left( \dot{I}_2 + \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_0} \right) e^{-N\gamma} + \frac{1}{2} \left( \dot{I}_2 - \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_0} \right) e^{N\gamma}\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= \dot{A}_{11\text{pez}}\dot{U}_2 + \dot{A}_{12\text{pez}}\dot{I}_2 = \dot{U}_2 \text{ch}N\gamma + \dot{I}_2\dot{Z}_0 \text{sh}N\gamma, \\ \dot{I}_1 &= \dot{A}_{21\text{pez}}\dot{U}_2 + \dot{A}_{22\text{pez}}\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_0} \text{sh}N\gamma + \dot{I}_2 \text{ch}N\gamma.\end{aligned}\quad (27)$$

В полосе прозрачности фильтра  $\dot{\gamma} = j\beta$ , и уравнения (27) принимают вид

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= \dot{U}_2 \cos N\beta + j\dot{I}_2\dot{Z}_0 \sin N\beta, \\ \dot{I}_1 &= \dot{I}_2 \cos N\beta + j\frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_0} \sin N\beta.\end{aligned}\quad (28)$$

Эти соотношения аналогичны уравнениям отрезка длинной линии без потерь, нагруженной на произвольное комплексное сопротивление:

$$\begin{aligned}\dot{U}_{\text{ex}} &= \dot{U}_2 \cos \beta l + j\dot{I}_2\dot{Z}_0 \sin \beta l, \\ \dot{I}_{\text{ex}} &= \dot{I}_2 \cos \beta l + j\frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_0} \sin \beta l,\end{aligned}\quad (29)$$

где  $l$  – длина отрезка линии. Таким образом, число звеньев  $N$  многозвенного фильтра соответствует длине  $l$  эквивалентной длинной линии. Продолжая эту аналогию, можно говорить о существовании в цепочках фильтров бегущих и стоячих волн, о фазовой и групповой скорости волн, а также о резонансных (собственных) частотах многозвенного фильтра.

Так скорость распространения вдоль цепочки фильтров фиксированной фазы гармонического сигнала по аналогии с длинной линией называется *фазовой скоростью*:

$$v_\phi = \frac{\omega}{\beta l/N} \quad (30)$$

и имеет размерность  $\left[\frac{\text{число звеньев}}{c}\right]$ .

При закорачивании цепочки фильтров система становится резонансной и на определенных (резонансных) частотах вдоль цепочки укладывается целое число полувольт напряжения стоячей волны, т. е.

$$\beta N = n\pi, \quad (n = 1, 2, \dots, N). \quad (31)$$

Это позволяет определить сдвиги фаз  $\beta$ , возникающие в элементарных звеньях фильтра на резонансных частотах и сопоставить их с теоретически рассчитанными по формуле (13), (17), (25) или (33) в зависимости от вида фильтра.

## Экспериментальная установка

Экспериментальная установка содержит  $LC$ -фильтры нижних частот (ФНЧ), верхних частот (ФВЧ), полосовой (ПФ) и заграждающий (ЗФ).

Схемы фильтров приведены на установке, а номиналы элементов соответствуют /следующей таблице:

Таблица 1

ФНЧ	ФВЧ	ПФ	ЗФ
$L=284$ мкГн	$L=158$ мкГн	$L_1=530$ мкГн	$L_1=160$ мкГн
$C=300$ пФ	$C=160$ пФ	$L_2=120$ мкГн	$L_2=250$ мкГн
		$C_1=120$ пФ	$C_1=250$ пФ
		$C_2=530$ пФ	$C_2=160$ пФ

В качестве измерительных приборов в лабораторной работе используются функциональный генератор сигналов GFG-8210 с режимом свипирования частоты и встроенным частотомером, осциллограф GOS-620 и милливольтметр ВЗ-38 для поточечного измерения АЧХ.

## Порядок выполнения работы

Учитывая, что частота генератора сигналов проградуирована в герцах и килогерцах, во всех теоретических формулах следует перейти от  $\omega$  к частоте  $f = \omega/2\pi$ .

1. Пронаблюдать и зарисовать АЧХ согласованных с нагрузками фильтров ( $R \cong Z_0$ ) в режиме свипирования частоты генератора. Для этого тумблеры на всех фильтрах установить в положение "согл.", на генераторе установить синусоидальную форму колебаний и диапазон частот – 1 МГц. Обе ручки регулировки частоты (грубо и плавно) установить в крайнее правое положение, соответствующее максимальной частоте выбранного диапазона 1 МГц и включить режим свипирования частоты. Соединить генератор со входом одного из фильтров.

Установить горизонтальную линию развертки вблизи нижнего края экрана осциллографа, длительность развертки – в положение 20 ms, переключатель источника синхронизации MODE – в положение NORM и проверить, что ручка плавного регулятора частоты развертки находится в крайнем правом положении. Соединить вход СН1 с выходом фильтра и регулируя диапазон свипирования и длительность свипирования на генераторе, а также уровень сигнала синхронизации на осциллографе, добиться устойчивой

картины АЧХ фильтра. Последовательно подключая генератор и осциллограф ко всем фильтрам, зарисовать АЧХ фильтров ( $K(f)$ ).

2. Переводя генератор из режима свипирования в режим гармонических колебаний и перестраивая его вручную, измерить частоты среза для каждого вида фильтров. Сопоставить экспериментально полученные частоты среза с рассчитанными в п.2 задания для самостоятельной работы.

Для заданного преподавателем фильтра измерить частоты и уровень выходных напряжений для максимумов и минимумов АЧХ и объяснить происхождение этих локальных экстремумов.

3. Представить рассчитанные в п. 3 задания для самостоятельной работы зависимости в виде графиков  $\beta(f)$  и  $Z_0(f)$ .

4\*. Для одного из фильтров по указанию преподавателя рассчитать элементы последовательно- и параллельно-производного  $m$ -звена при  $m = 0.6$  и представить полученные схемы ячеек  $m$ -звеньев. Объяснить преимущества  $m$ -звеньев перед  $k$ -звеном и механизм улучшения характеристик фильтра.

5. Пронаблюдать образование стоячих волн в замкнутых на концах цепочках ФНЧ- и ФВЧ-звеньев. Для этого замкнуть тумблерами выходные клеммы фильтров. Поочередно устанавливая на генераторе частоты, вблизи резонансных, полученные в п.4 задания для самостоятельной работы, и используя специальные гнезда на панели фильтров, измерить милливольтметром ВЗ-38 распределения напряжения вдоль ячеек фильтров. Объяснить закономерности полученных распределений напряжения.