

И.А.Хованов, Т.Е.Вадивасова

Исследование квазипериодических  
колебаний с помощью модельного  
отображения окружности

Учебное пособие для спецпрактикума по курсу "Теория  
колебаний"

**Цель работы:** Теоретическое и численное исследование динамики отображения окружности.

### **Литература:**

1. Анищенко В.С. "Сложные колебания в простых системах", Наука, 1990.
2. Мун Ф. "Хаотические колебания", Мир, 1990.
3. Шустер Г. "Детерминированный хаос. Введение", Мир, 1988.
4. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. "Введение в теорию нелинейных колебаний", Наука, 1987.
5. Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. "Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление", Техносфера, 2003.

### **Контрольные вопросы**

1. Дайте определение квазипериодических колебаний. Опишите свойства квазипериодических колебаний и их отличие от других типов колебаний.
2. Проведите сравнительный анализ свойств эргодического и резонансного торов.
3. Проведите вывод отображения на основе модели интегрирующего генератора при условии, что во времени меняется верхнее максимальное значение  $x_u = A \sin \omega t$ .
4. Запишите отображение окружности и перечислите основные свойства отображения.
5. Перечислите и опишите возможные бифуркации в отображении окружности при  $|K| < 1$ .

## **1 Краткие теоретические сведения**

### **1.1 Квазипериодические колебания, их временное и спектральное представление. Фазовый портрет квазипериодических колебаний**

Квазипериодические колебания широко распространены в природе и технике. Особенно часто с ними приходится иметь дело в радиофизике, т.к. в

многих радиofизических устройствах реализован принцип управления одной подсистемой сигналом с другой, чаще всего с так называемого задающего генератора или модулирующего генератора. Квазипериодические колебания тесно связаны с явлением синхронизации автоколебательных процессов и соответствуют режиму "биений" или несинхронному режиму, т.е. отсутствию синхронизации.

Понятие квазипериодичность определяет квазипериодическое движение, которое является регулярным, состоит из суперпозиции периодических движений, но никогда точно не повторяется. Для потоковых динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями, траектория  $x(t) \in \mathbf{R}^n$  называется  $k$ -квазипериодической,  $k \leq n$ , если она может быть записана в виде

$$x(t) = \Phi(\omega_1 t, \dots, \omega_k t),$$

где функция  $\Phi$  является гладкой периодической функцией с периодом  $2\pi$  относительно каждого из  $k$  аргументов, и частоты  $\omega_1, \dots, \omega_k$  являются рационально независимыми, т.е.  $\sum_1^k l_i \omega_i \neq 0$  для любых целых чисел  $l_1, \dots, l_k \in \mathbf{Z}$ ,  $\sum_1^k |l_i| > 0$ . Другими словами, отношение любых двух различных частот  $\omega_i$  и  $\omega_j$ ,  $i \neq j$ , соответствующих аргументам функции  $\Phi$ , не может быть записано в виде рациональной дроби:

$$\frac{\omega_i}{\omega_j} \neq \frac{p}{q},$$

здесь  $p$  и  $q$  произвольные целые числа. Квазипериодическая траектория в фазовом пространстве динамической системы лежит на  $k$ -мерном торе, который является инвариантом динамической системы. Как правило, термин квазипериодичность используется в связи с двумерным квазипериодическим движением, а для большей размерности используется термин  $N$ -квазипериодичность. Спектр квазипериодических колебаний в общем случае включает частоты вида

$$\omega = \sum_{i=1}^m l_i \omega_i, \quad (1)$$

где  $l_i$  и  $m$  — целые числа. Другими словами спектр состоит из гармоник базовых частот и различных комбинационных частот на их основе.

В простейшем случае квазипериодическое движение можно представить с помощью суммарного отклика двух периодических генераторов, отношение частот которых является иррациональным (см. рис. 1). Если бы отношение

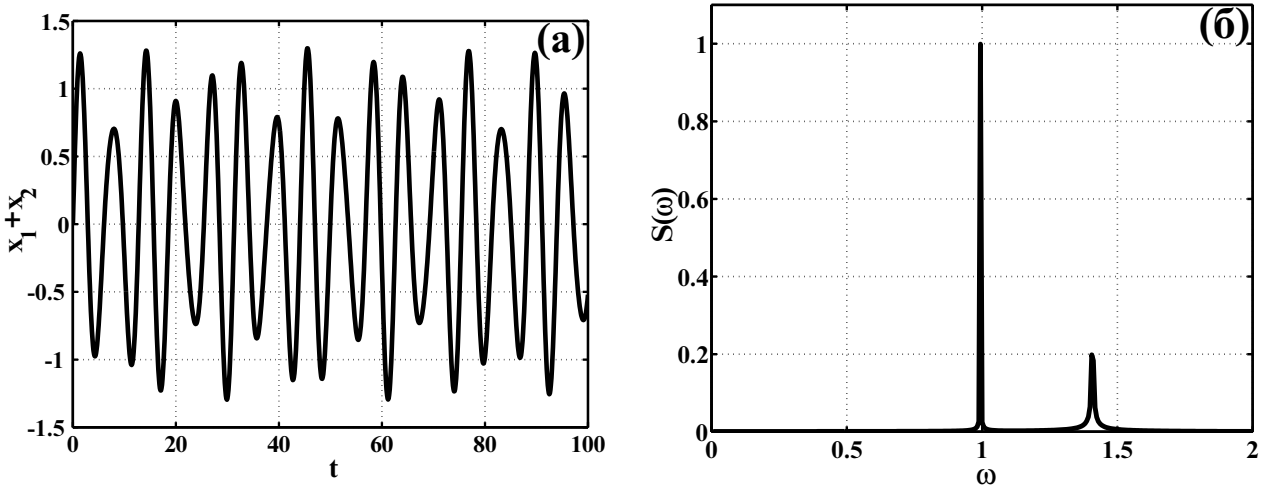


Рис. 1: Реализация (а) и спектр (б) суммарного сигнала двух генераторов с иррациональным отношением частот:  $\omega_1 = 1$  и  $\omega_2 = \sqrt{2}$ .

было рациональным, то можно было бы указать временной интервал, через который траектория повторила себя, т.е. в этом случае движение является периодическим и говорят о резонансе на торе, поскольку траектория замыкается сама на себя (рис. 2 (а)). В случае иррационального отношения между частотами не существует подобного временного интервала, траектория себя не повторяет, хотя и может пройти сколь угодно близко от предыдущего (по времени) значения (рис. 2 (б)). В фазовом пространстве 2-квазипериодическому движению соответствует двумерная замкнутая поверхность — эргодический двумерный тор. При  $t \rightarrow \infty$  траектория покрывает всю поверхность тора. Переход от эргодического тора (рис. 2 (б)) к резонансному тору (рис. 2 (а)) соответствует переходу от режима биений к синхронному режиму.

Для описания квазипериодического движения удобно перейти к сечению Пуанкаре, вводя плоскость или поверхность (в общем случае размерности  $N - 1$ ), выбранную так, чтобы все траектории потоковой системы пересекали ее под ненулевым углом (см. рис. 3). Точки пересечения траектории с секущей Пуанкаре формируют отображение, которое для двумерного тора имеет вид замкнутой кривой. Эта кривая является инвариантом сечения Пуанкаре, которое может быть записано в виде двумерного (которое может далее быть сведено к одномерному) отображения, соответствующего потоковой системе. Отметим, что можно неоднократно применять сечение Пуанкаре и, например, свести (путем двукратного применения сечения Пуанкаре) трехмерный тор в четырехмерном фазовом пространстве, который сложно представить и изобразить, к одномерной кривой на плоскости. Именно отображения нашли

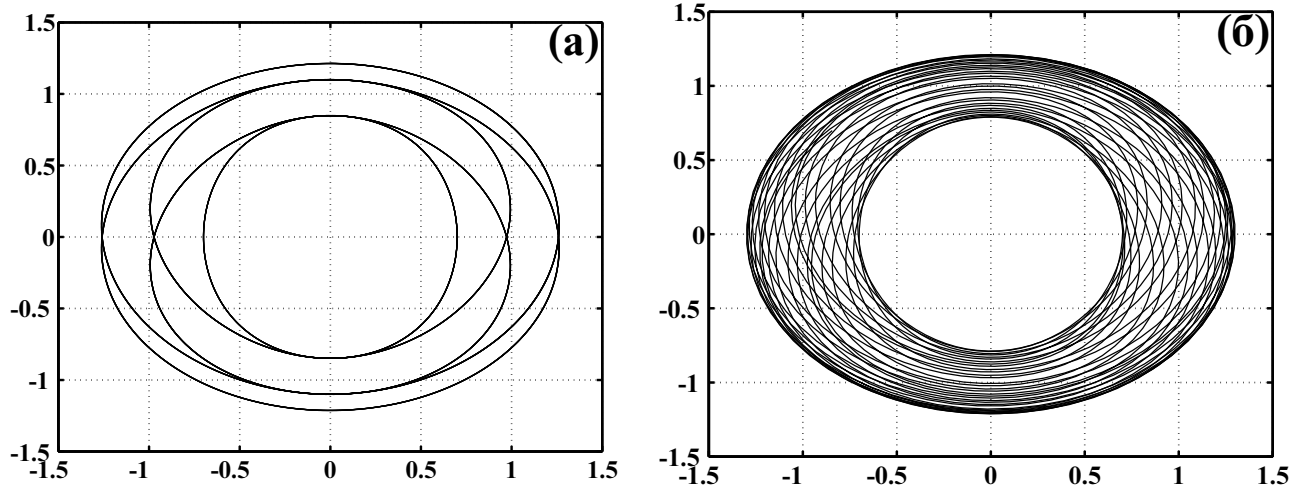


Рис. 2: Фазовая проекция на плоскость (а) резонансного тора, (б) эргодического тора.

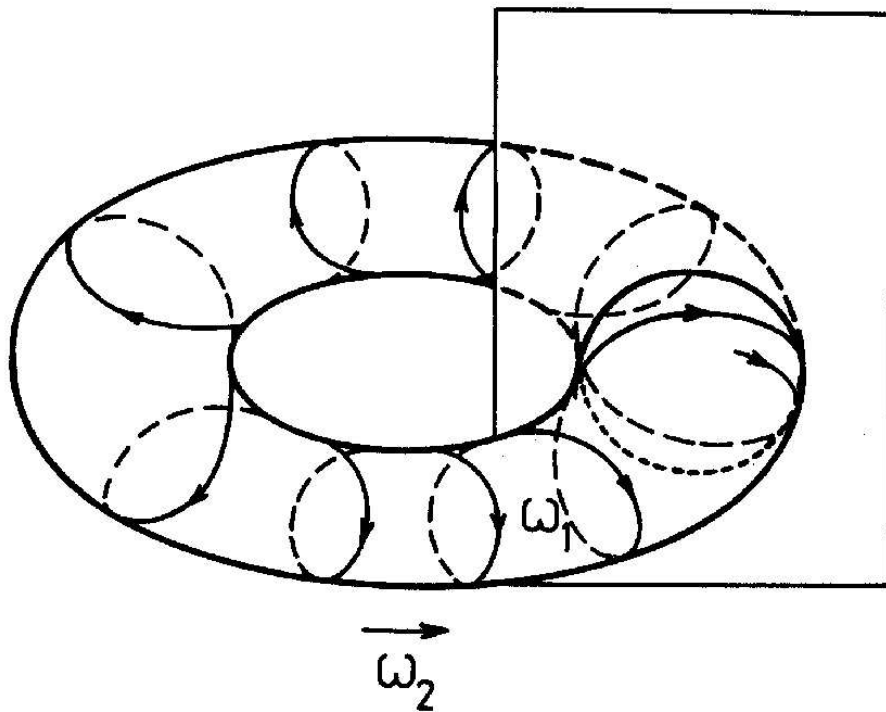


Рис. 3: Схематическая диаграмма движения на двумерном торе и сечения Пуанкаре. Линией обозначена траектория системы. Сечение Пуанкаре является пересечением плоскости и траектории системы.

широкое применение для описание свойств и характеристик квазипериодичности.

На рис. 3 показан тор, в сечении которого можно видеть окружность. Квазипериодическим колебаниям не всегда соответствует поверхность правильного по форме "бублика" (тора), также как периодическим колебаниям не всегда соответствует предельный цикл в виде окружности или эллипса. Чаще, в результате проявления нелинейных свойств системы, наблюдаются искажения формы тороидальной поверхности. Этому соответствует обогащение спектра гармониками и комбинационными частотами. В сечении такого деформированного тора будет уже не окружность, а инвариантная замкнутая кривая, гомеоморфная окружности.

Если мы построим точки пересечения фазовых траекторий на эргодическом торе с некоторой секущей плоскостью, то получим замкнутую кривую, в простейшем случае — окружность (см. рис. 3). В случае резонансного тора вместо окружности мы видим конечное число точек, соответствующих точкам пересечения предельного цикла с секущей плоскостью. В последнем случае эргодический тор стал неустойчивым, стал резонансным и на нем располагаются одновременно по меньшей мере два предельных цикла: устойчивый и седловой. Периоды циклов (и, соответственно, число точек в сечении) равны. Устойчивый цикл соответствует устойчивым синхронным периодическим колебаниям, которые наблюдаются экспериментально. На рис. 4 изображена окружность в сечении резонансного тора, с отмеченными на ней точками устойчивого  $L_o$  (кружки) и седлового  $L_+$  (крестики) циклов. Саму поверхность резонансного тора образуют неустойчивые многообразия седлового цикла  $L_+$ , замыкающиеся на устойчивый цикл  $L_o$  (направление многообразий на рис. 4 отмечено стрелками).

## 1.2 Переход от непрерывного времени к дискретному

Рассмотрим схему перехода от систем с непрерывным временем к системам с дискретным временем, т.е. отображениям. Как правило, одномерные отображения получаются при описании динамики релаксационных генераторов. Релаксационные автоколебания можно реализовать, например, в генераторах типа генератора Ван-дер-Поля при больших значениях параметра нелинейности. Другим примером релаксационного генератора является мультивибратор.

Наиболее простой (но не динамической) моделью является, так называемая

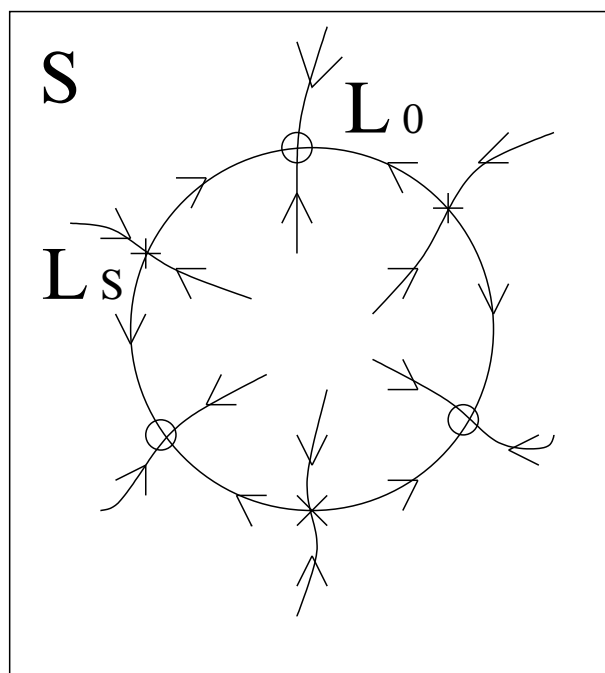


Рис. 4: Сечение Пуанкаре резонансного тора.

мый, генератор ”накопление-сброс”. Состояние этого генератора задается одной переменной  $x(t)$  меняющейся от  $x_d$  до  $x_u$  и динамика определяется следующей процедурой, состоящей из медленного и быстрого движения (см. рис. 5 (а)):

1) накопление (релаксация): переменная  $x$  линейно увеличивается от величины  $x_d$  во времени по закону  $x(t) = (t - t_n)/T_0$ , здесь  $T_0$  является периодом генератора и  $t_n$  предыдущей момент времени, когда переменная  $x$  достигла максимального значения  $x_u$ ;

2) сброс: в момент достижения переменной  $x$  значения  $x_u$  величина  $x$  мгновенно уменьшается до значения  $x_d$  (для простоты дальнейших рассуждений выберем  $x_d = 0$  и  $x_u = 1$ ).

Отметим, что данная нединамическая модель описывает черты реальных систем. Электронный генератор Ван-дер-Поля и Ван-дер-Марка на неоновой лампе имеет очень схожую динамику. Генератор состоит из источника постоянного напряжения, конденсатора, сопротивления и неоновой лампы (рис. 6). Динамика генератора состоит в следующем (рис. 7). Сначала конденсатор медленно заряжается; характерное время этого процесса  $t_1$  определяется величинами емкости и сопротивления. Когда напряжение достигает некоторого критического уровня, в неоновой лампе возникает газовый разряд и она начинает проводить ток, что сопровождается свечением. В результате, конденса-

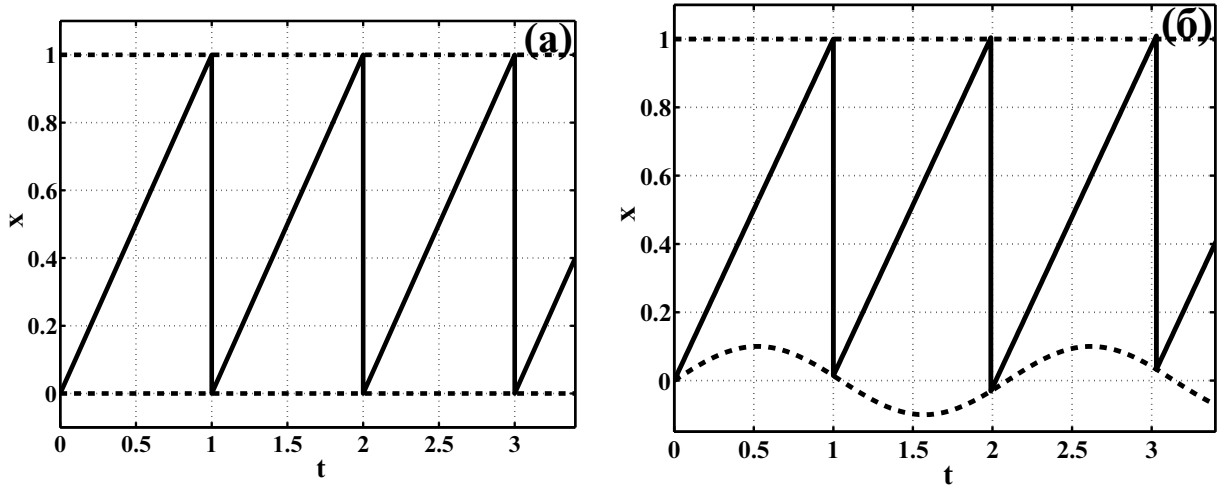


Рис. 5: Реализация сигнала генерирующего генератора в отсутствие (а) и при наличии (б) внешнего сигнала. Максимальное  $x_u$  и минимальное  $x_d$  значения показаны пунктирными линиями.

тор быстро разряжается за время  $t_2$  через лампу, напряжение на конденсаторе падает, и газовый разряд прекращается. Лампа вновь становится непроводящей, и этот процесс повторяется. Электрический ток через лампу (рис. 7 (а)) возникает в виде последовательности коротких импульсов (и, соответственно, коротких вспышек света), в то время как напряжение имеет пилообразную форму (рис. 7 (б)). Генераторы такого типа широко используются в электрических цепях, например в генераторах развертки осциллографов.

Колебания генератора Ван-дер-Поля и Ван-дер-Марка имеют быстрые и медленные участки, минимальная размерность такой системы равняется двум, т.е. нужно две переменные для описания подобного движения на языке дифференциальных уравнений. Динамика генератора на неоновой лампе может быть описана следующим уравнением:

$$\ddot{x} = \epsilon(1 - |x - 1|)\dot{x} + \omega_0^2 x \quad (2)$$

здесь переменная  $x$  соответствует напряжению на конденсаторе,  $\epsilon$  — параметр нелинейности.

Добавим к автономному генератору ”накопление-сброс” внешний гармонический сигнал, действие которого на генератор приводит к модуляции значения порога  $x_d = A \sin \omega t$  (см. рис 5 (б)). В этом случае временные интервалы, в течение которых переменная  $x$  проходит от  $x_d$  до  $x_u$ , будут зависеть от фазы внешнего сигнала  $\omega t$  и последовательные моменты времени  $t_{n+1}$  и  $t_n$ , когда переменная достигает значения  $x_u$ , связаны между собой через итерационное



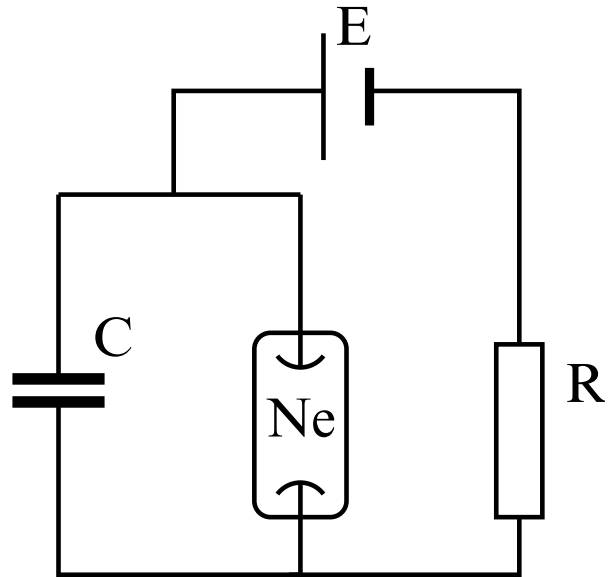


Рис. 6: Схема релаксационного генератора на неоновой лампе.

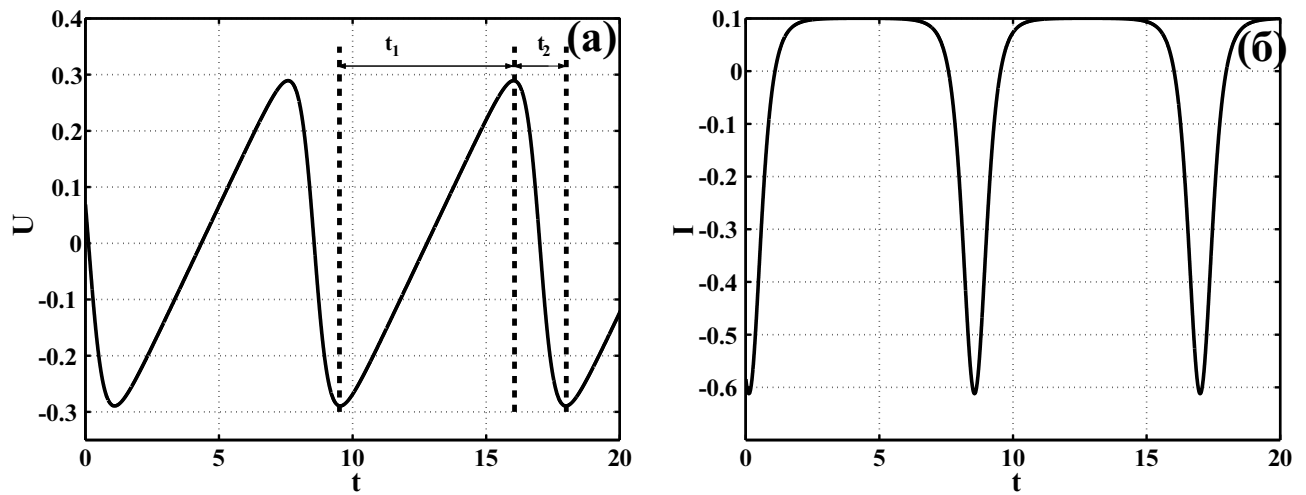


Рис. 7: (а) Напряжение на конденсаторе и (б) ток через лампу.

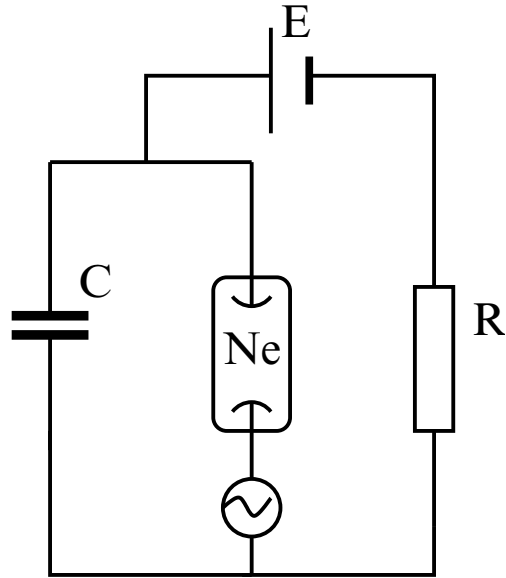


Рис. 8: Схема релаксационного генератора на неоновой лампе с модуляцией порога зажигания лампы.

соотношение:

$$t_{n+1} = t_n + T_0 - AT_0 \sin \omega t_n. \quad (3)$$

Обозначим приведенную к единичному интервалу фазу гармонического сигнала в момент достижения системой максимального значения  $x_u$  как  $\varphi_n = \frac{\omega t_n}{2\pi}$ . Умножим уравнение (3) на величину  $\omega$  и разделим на  $2\pi$ , обозначим собственную частоту генератора как  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$  и приходим к уравнению в следующей форме:

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \frac{\omega}{\omega_0} - A \frac{\omega}{\omega_0} \sin 2\pi \varphi_n, \quad \text{mod } 1. \quad (4)$$

Говорят, что итерационная формула (4) определяет отображение на окружности, поскольку переменной отображения является фаза, определенная на интервале  $0 \leq \varphi < 1$ <sup>1</sup>.

Аналогичное отображение можно получить модулируя пороговое значение  $x_u = A \sin \omega t$ . В этом случае модуляцию порога можно реализовать в генераторе на неоновой лампе с помощью дополнительного источника переменного напряжения, включенного в цепь катода лампы (рис. 8).

<sup>1</sup>Изменение приведенной фазы  $\varphi$  от 0 до 1 можно трактовать как полный круг вращения радиус-вектора по окружности.

В общем случае переход от неавтономной потоковой системы к отображению состоит из двух этапов. Первый заключается в переходе от первоначальной системы, например, в виде:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F_1(x, y, A \sin \omega t), \\ \dot{y} &= F_2(x, y)\end{aligned}$$

к дифференциальному уравнению для фазы колебаний  $\varphi$ :

$$\dot{\varphi} = \omega_0 + AQ(\varphi, t),$$

здесь  $\omega_0$  — собственная частота автогенератора,  $A$  — амплитуда внешнего воздействия обычно полагаемая малой по сравнению с амплитудой автоколебаний. Второй этап состоит в применении различных асимптотических подходов для перехода к отображению, которое связывает два последовательных значения фазы, в моменты пересечения секущей Пуанкаре, которая может быть проведена в фазовом пространстве системы или во временной области определяя значения фазы через равные интервалы времени:

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \Omega + AW(\varphi_n), \quad \text{mod} 2\pi.$$

### 1.3 Модельное отображение окружности

Формально отображение можно представить как последовательность точек на замкнутой кривой  $\gamma$ , возникающей в сечении тороидальной поверхности. Положение изображающей точки можно задать введя некоторый угол поворота радиус-вектора  $\phi$  (см. рис. 9). Точки кривой  $\gamma$  отображаются в точки этой же кривой. В результате получаем отображение

$$\phi_{n+1} = \Phi(\phi_n, \beta), \quad \text{mod} 1, \quad (5)$$

которое представляет собой отображение окружности. Процедура  $\text{mod} 1$  означает, что  $\phi \in [0, 1]$  (иногда фазу приводят к интервалу  $[0, 2\pi]$  и тогда пишут  $\text{mod} 2\pi$ ).  $\beta$  — вектор параметров системы (5).

Чтобы (5) моделировало квазипериодические колебания функция последования  $\Phi(\cdot)$  должна удовлетворять следующим требованиям: 1)  $\Phi(\phi + 1) = 1 + \Phi(\phi)$ , т.е. это функция периодична с периодом 1. 2) В некоторой области значений  $\beta$  функция  $\Phi(\cdot)$  и обратная к ней функция  $\Phi^{-1}(\phi)$  — существуют и дифференцируемы (т.е.  $\Phi(\cdot)$  определяет диффеоморфизм окружности).

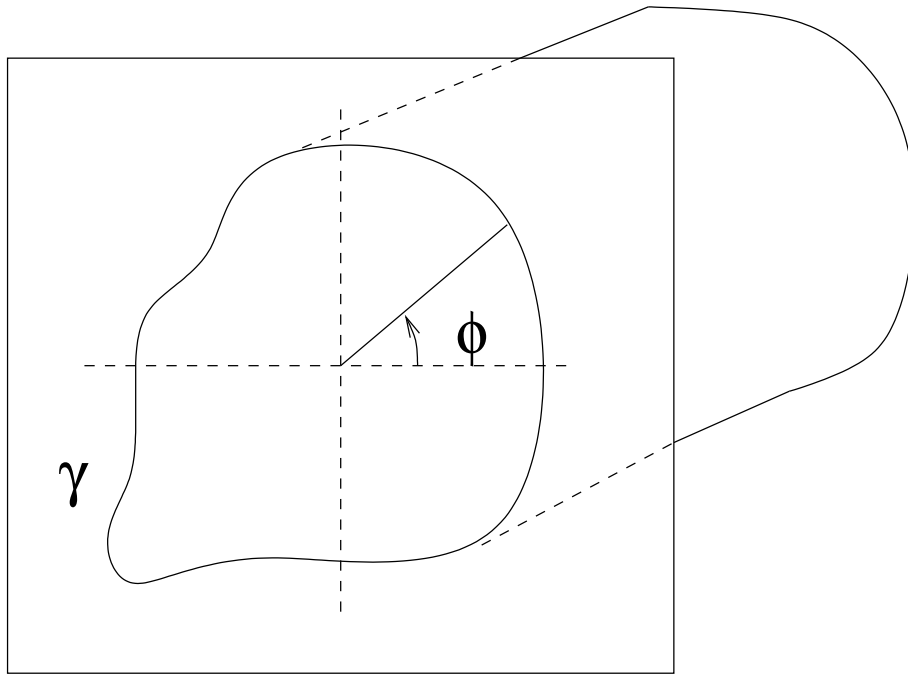


Рис. 9: Инвариантная кривая  $\gamma$  в сечении тора.

Наиболее часто используется следующий конкретный вид отображения окружности, которое часто называют гармоническим отображением окружности:

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \Omega - \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi\phi_n), \quad \text{mod} 1. \quad (6)$$

Отображение (6) имеет два управляющих параметра:  $\Omega$  и  $K$ . Так как функция последования  $\Phi(\phi_n)$  — периодическая с периодом 1, то можно рассматривать значения  $\Omega$ , ограничиваясь интервалом  $[0, 1]$ . При  $K < 1$  система (6) — обратимое дифференцируемое отображение. Его рассматривают как модель для описания фазовой синхронизации автогенератора внешним периодическим воздействием. При этом переменная  $\phi$  соответствует разности фаз автоколебаний и воздействия, параметр  $\Omega$  имеет смысл расстройки частот автогенератора и внешнего сигнала, а параметр  $K$  можно трактовать как величину, пропорциональную амплитуде воздействия.

При  $K = 1$  обратная функция  $\Phi^{-1}$  становится недифференцируемой в точке  $\phi = 0$ , а при  $K > 1$  она будет неоднозначной. На рис. 10 приведены графики функции последования  $\phi_{n+1} = \Phi(\phi_n)$  при  $\Omega = 0$  и различных  $K$ :  $K = 0.9$  (а),  $K = 1$  (б),  $K = 1.5$  (в). Точки пересечения графика функции с биссектрисой соответствуют неподвижным точкам отображения (6). При  $K > 1$ , отображение (6) перестает быть обратимым, т.е. если извест-

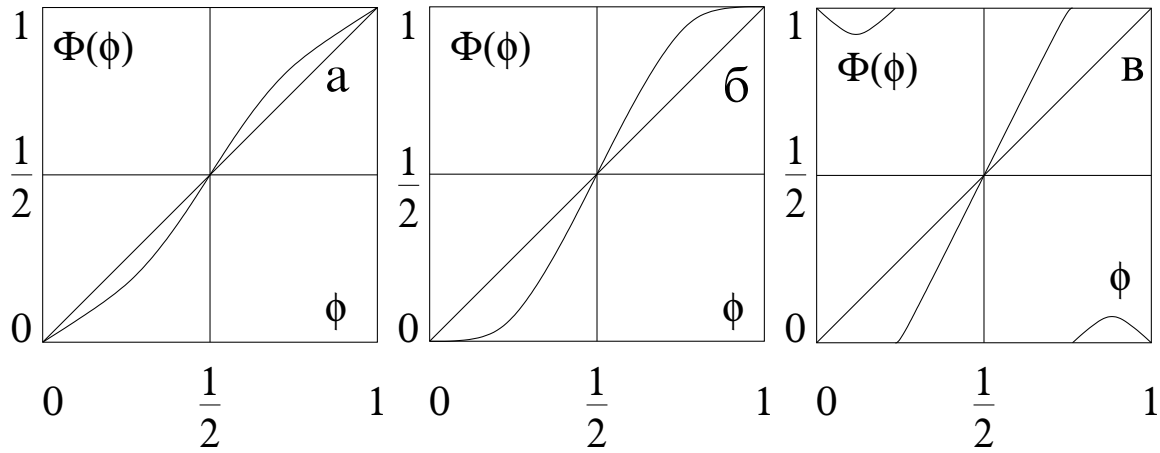


Рис. 10: Графики функции последования  $\phi_{n+1} = \Phi(\phi_n)$  при  $\Omega = 0$  и различных  $K$ :  $K = 0.9$  (а),  $K = 1$  (б),  $K = 1.5$  (в).

но значение переменной  $\phi$  в момент времени  $n$ , то невозможно однозначно определить её значения в предшествующие моменты времени. В этом случае отображение (6) перестает служить моделью квазипериодических движений (когда фазовые траектории лежат на двумерном торе). Однако, и в закритической области ( $K > 1$ ) отображение окружности позволяет выявить много интересных закономерностей, связанных с явлением разрушения квазипериодических колебаний и возникновением хаотической динамики, образом которой в фазовом пространстве является так называемый странный аттрактор (СА). СА возникает в окрестности разрушившегося двумерного тора, т.к. фазовые траектории в режиме хаотических колебаний не могут располагаться на двумерной поверхности.

#### 1.4 Особенности динамики отображения окружности при $|K| \leq 1$

Динамика точки под действием отображения (6) характеризуется числом вращения  $\theta$ . Числом вращения называется средняя угловая скорость вращения изображающей точки по окружности, т.е. для данной начальной точки  $\phi_0$  число вращения определяет средний сдвиг фаз на одну итерацию:

$$\theta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi_n - \phi_0}{n}, \quad (7)$$

где в числителе дроби стоит полный угол поворота радиус-вектора за  $n$  итераций отображения;  $\phi^n$  — значение переменной через  $n$  итераций без учета операции mod 1. Рассматривая (6) как модель динамики разности фаз автогенератора и внешнего воздействия можно трактовать число вращения  $\theta$  как

частоту биений (т.е. разность частот автоколебаний и воздействия), отнесенную к частоте воздействия.

В области  $K \leq 1$  предел (7) существует и не зависит от начальной точки  $\phi_0$ . При иррациональном значении  $\theta$  отображение окружности не имеет неподвижных точек или циклов (что соответствует эргодическому тору), а при рациональном значении  $\theta = \frac{p}{q}$ , где  $p$  и  $q$  — взаимно простые числа, оно имеет устойчивый и неустойчивый циклы с периодом  $q$  (или, что то же самое, устойчивую и неустойчивую неподвижные точки кратности  $q$ ). Точки устойчивого цикла отображения соответствуют точкам в сечении устойчивого резонансного цикла на двумерном торе, а точки неустойчивого цикла отображения — точкам седлового резонансного цикла (см. рис. 4). Числитель  $p$  определяет число оборотов изображающей точки по окружности за  $q$  итераций.

Неподвижные точки (циклы периода 1) отображения окружности легко найти, решив уравнение:

$$\phi^* = \Phi(\phi^*, \Omega, K) = \phi^* + \Omega - \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi\phi^*), \quad \text{mod}1. \quad (8)$$

Если при выбранных значениях параметров уравнение (8) не имеет действительных корней, то неподвижных точек не существует. Отсюда легко найти границы области существования неподвижных точек отображения на плоскости параметров  $\Omega, K$ . Аналогично, для отыскания циклов отображения периода  $m$  надо решить уравнение

$$\phi^* = \Phi^m(\phi^*, \Omega, K), \quad \text{mod}1 \quad (9)$$

где  $\Phi^m$  —  $m$ -кратно примененная функция последования. Для характеристики устойчивости циклов отображения вводят величины, называемые мультипликаторами цикла. Устойчивость циклов одномерного отображения характеризуется только одним мультипликатором (см. Приложение). Цикл одномерного отображения остается устойчивым пока его мультипликатор по абсолютной величине не превышает единицы. Равенство абсолютной величины мультипликатора единице соответствует бифуркации цикла. В одномерном отображении возможны только два вида бифуркаций:  $\mu = +1$ ,  $\mu = -1$ . Первая из них называется касательной. В момент касательной бифуркации устойчивый и неустойчивый циклы сливаются и исчезают (или, наоборот, возникают). Вторая бифуркация называется бифуркацией удвоения периода цикла. В общем случае она может быть суперкритической и субкритической.

Мы остановимся только на суперкритической бифуркации удвоения. В этом случае в момент бифуркации из цикла периода  $t$  рождается устойчивый цикл периода  $2t$ , при этом цикл периода  $t$  становится неустойчивым.

Резонансная структура на торе является грубой, т.е. при  $K > 0$  рациональное значение числа вращения  $\theta = \frac{p}{q}$  сохраняется неизменным в некоторой области значений параметров. Рассмотрим зависимость числа вращения от параметра  $\Omega$  при фиксированном  $K$ . Рациональным значениям  $\theta$  соответствуют горизонтальные участки (ступеньки) на графике функции  $\theta(\Omega)$ , а иррациональным — точки. График функции  $\theta(\Omega)$  похож на лестницу с бесконечным числом ступенек, поэтому её (и вообще зависимость числа вращения от какого-либо параметра) часто называют чертовой лестницей. Сумма длин всех ступенек чертовой лестницы  $l_r$  (совокупная мера значений параметра  $\Omega$  в интервале  $[0, 1]$ , соответствующих рациональным числам вращения) при  $0 < K < 1$  будет больше нуля, но меньше единицы. При  $K = 0$  отображение (6) задает простое вращение на угол  $\Delta\phi = \Omega$  за итерацию (число вращения  $\theta = \Omega$ ) и сумма длин ступенек обращается в ноль. С ростом  $K$  мера значений  $\Omega$ , соответствующих иррациональным числам вращения возрастает. При  $K = 1$  она становится равной единице ( $l_r = 1$ ). Еще существуют значения параметра  $\Omega$ , при которых  $\theta$  иррационально, но их совокупная мера равна нулю. Чертова лестница при  $K = 1$  называется полной. При  $K < 1$  функция  $\theta(\Omega)$  остается однозначной (но не взаимнооднозначной).

На плоскости параметров  $\Omega, K$  каждому рациональному значению  $\theta = \frac{p}{q}$  соответствует область, сужающаяся при  $K \rightarrow 0$  в форме клюва, опирающегося острием на точку  $\Omega = \frac{p}{q}$  на оси значений параметра  $\Omega$ . Такие области получили название клювов (или языков) Арнольда. Клювы Арнольда — это области синхронизации, в которых существуют резонансные циклы на торе. Границы клювов определяются линиями касательных бифуркаций циклов. Устойчивый и неустойчивый циклы сливаются и исчезают на границе при выходе из клюва.

Вид нескольких областей синхронизации для отображения (6) качественно представлен на рис. 11. Области тем уже, чем больше знаменатель соответствующего числа вращения. Существует определенный порядок в расположении областей синхронизации, называемый порядком Фейри. Если имеются два клюва с числами вращения  $\theta_1 = \frac{p}{q}$  и  $\theta_2 = \frac{r}{s}$ , то между ними находится клюв с числом вращения  $\theta_3 = \frac{(r+p)}{(s+q)}$ . Начав с  $\theta_1 = \frac{0}{1}$  (при  $\Omega = 0$ ) и  $\theta_2 = \frac{1}{1}$  (при  $\Omega = 1$ ) можно построить всю бесконечную последовательность областей

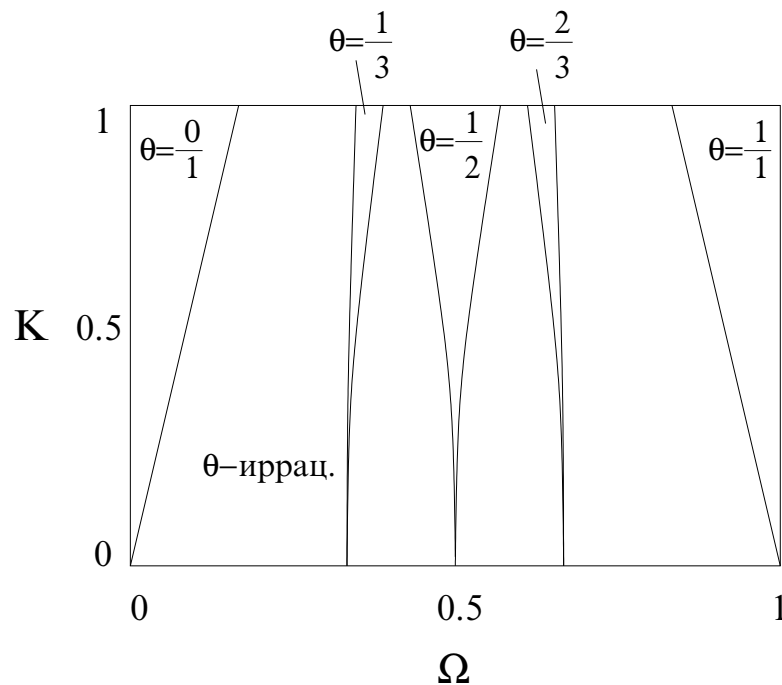


Рис. 11: Области синхронизации для различных чисел вращения.

синхронизации. Вне областей синхронизации число вращения принимает иррациональные значения, что соответствует квазипериодическим режимам.

### 1.5 Особенности динамики отображения окружности при $|K| > 1$

В закритической области  $K > 1$  число вращения может оказаться зависящим от начальной точки  $\phi_0$  или вообще не сходиться к какому-то пределу. Функция зависимости числа вращения от параметра  $\Omega$  (там, где она определена) становится неоднозначной. Горизонтальные участки на графике  $\theta(\Omega)$  перекрываются, что соответствует перекрытию резонансных областей. Квазипериодических режимов (с иррациональными значениями числа вращения) в области  $K > 1$  больше не существует, но при определенных значениях параметров возникают хаотические режимы. Они характеризуются положительным ляпуновским показателем  $\lambda > 0$ .

Ляпуновские показатели (в общем случае их число равно размерности фазового пространства динамической системы) являются характеристиками локальной устойчивости любых фазовых траекторий (в том числе хаотических). Наличие хотя бы одного положительного ляпуновского показателя свидетельствует о неустойчивости траектории по ляпунову. В режиме динамического хаоса все фазовые траектории, соответствующие установившемуся колеба-



ям, являются неустойчивыми по ляпунову и должны иметь положительный ляпуновских показатель. Для траекторий одномерного отображения вводится только один ляпуновский показатель. В обозначениях введенных для отображения окружности его можно определить как

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_i^n \ln \left| \frac{d\Phi(\phi_i, \Omega, K)}{d\phi_i} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_i^n \ln |1 - K \cos(2\pi\phi_i)|. \quad (10)$$

В областях хаотической динамики отображение (6) уже не моделирует поведение фазовых траекторий на двумерном торе. Но можно считать, что если сжатие фазового объема в моделируемой потоковой системе велико, то странный аттрактор располагается в очень узкой окрестности разрушившегося тора. Сечение аттрактора продолжает на вид оставаться прежним (похожим на замкнутую кривую), хотя на самом деле уже имеет поперечную фрактальную структуру. Наличие такой структуры как раз и отражается в необратимости отображения окружности.

В каждой области синхронизации резонансные циклы отображения (6) с ростом параметра  $K$  претерпевают последовательность бифуркаций удвоения периода, в результате которой возникает хаос. При дальнейшем увеличении  $K$  странные аттракторы, соответствующие разным областям объединяются. Причем сначала объединяются странные аттракторы, возникающие в клювах, характеризующихся числами вращения с большим знаменателем. Общий вид полученной численно диаграммы режимов отображения (6) на плоскости параметров представлен на рис. 12. Она обладает симметрией относительно вертикальной линии  $\Omega = \frac{1}{2}$ . Штриховкой показаны области периодических режимов, соответствующие периоды обозначены цифрами. В незакрашенных областях при  $K < 1$  существуют квазипериодические режимы, а при  $K > 1$  — хаотические режимы.

## 2 Экспериментальная часть

### 2.1 Описание используемых программ

### 2.2 Задания по работе

1. Рассчитать (аналитически) координаты неподвижных точек отображения (циклов периода 1). Определить области их существования ( т.е. границы областей синхронизации с числами вращения  $\theta = \frac{0}{1}$  и  $\theta = \frac{1}{1}$ ). изобразить

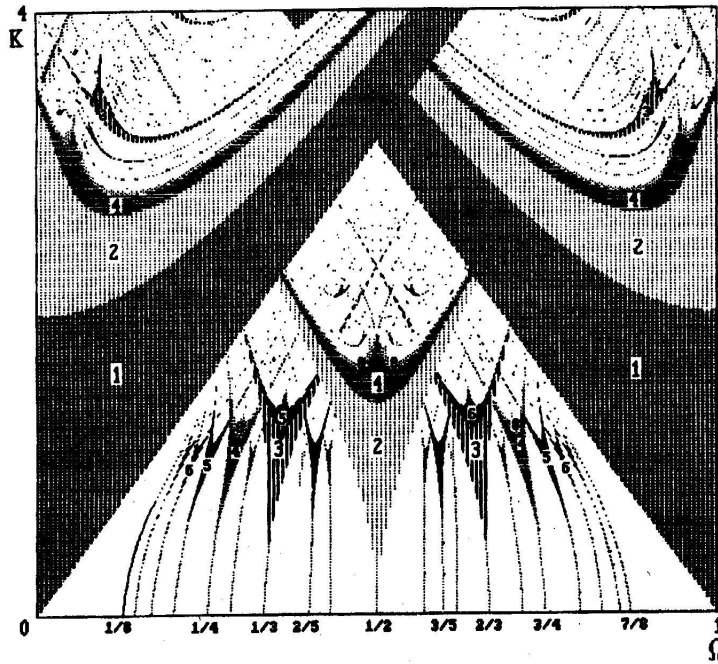


Рис. 12: Диаграмма режимов отображения (6) на плоскости параметров  $\Omega - K$ .

устойчивую и неустойчивую неподвижные точки на окружности при  $K = 0.9, \Omega = 0; 0.1$ . Построить границы областей синхронизации  $\frac{0}{1}, \frac{1}{1}$  на плоскости параметров  $\Omega, K$  ( $0 < K \leq 4$ ).

Рассчитать (аналитически) линию бифуркации первого удвоения периода цикла в областях синхронизации  $\frac{0}{1}, \frac{1}{1}$ . для этого определить значения параметров, при которых мультипликатор устойчивой неподвижной точки равен "1". Нанести линии на бифуркационную диаграмму.

2. Исследовать вид функции последования в момент бифуркаций неподвижной точки отображения. Численно построить график функции последования  $\phi_{n+1} = \Phi(\phi_n), \text{mod } 1$ , выбрав значения параметров  $\Omega, K$  соответствующими а) касательной бифуркации на границе области синхронизации, б) бифуркации удвоения периода. Посмотреть, как ведут себя временные зависимости  $\phi(n)$  до и после бифуркаций. Описать и пояснить наблюдаемое поведение. На основании графика функции последования объяснить происхождение термина "касательная бифуркация".

3. Численно построить границы резонансного клюва  $\theta = \frac{1}{2}$  и линию первой бифуркации удвоения в нём. Нанести эти линии на бифуркационную диаграмму.

### 3 Приложение

Рассмотрим некоторые понятия теории точечных отображений  $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$ , здесь  $\mathbf{x}$  — вектор состояний,  $\mathbf{f}$  — вектор функция.

Точка  $\mathbf{x}^*$  называется неподвижной точкой отображения  $\mathbf{f}$ , если  $\mathbf{x}^* = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*)$ . Неподвижная точка отображения соответствует предельному циклу в дифференциальных уравнениях. Поэтому часто неподвижную точку в отображении называют циклом периода 1.

Найдем условия устойчивости неподвижной точки  $\mathbf{x}^*$ . Пусть  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^* + \delta\mathbf{x}$ , причем  $\delta\mathbf{x}$  — малая по сравнению с  $\mathbf{x}^*$  величина. Тогда отображение (2) примет вид

$$\mathbf{x}^* + \delta\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^* + \delta\mathbf{x}_n). \quad (11)$$

Разлагая правую часть (11) в ряд в окрестности точки  $\mathbf{x}^*$  и отбрасывая члены порядка малости выше первого, находим

$$\mathbf{x}^* + \delta\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}_n} \right|_{\mathbf{x}^*} \delta\mathbf{x}_n. \quad (12)$$

Отсюда, поскольку точка  $\mathbf{x}^*$  является неподвижной, получим

$$\delta\mathbf{x}_{n+1} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}_n} \right|_{\mathbf{x}^*} \delta\mathbf{x}_n, \quad (13)$$

или, вводя обозначение  $a_{ik} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_n^k} \right|_{x^*}$ , будем иметь покомпонентно:

$$\delta x_{n+1}^i = \sum_{k=1}^N a_{ik} \delta x_n^k. \quad (14)$$

Это есть линейное точечное отображение. Собственные значения  $\rho_k$  матрицы  $\mathbf{A}$  с элементами  $a_{ik}$  называются мультипликаторами. Неподвижная точка  $\mathbf{x}^*$  исходного отображения (2) является устойчивой, если все мультипликаторы  $\rho_k$  удовлетворяют условию  $|\rho_k| < 1$ . Если среди мультипликаторов  $\rho_k$  имеются такие, для которых  $|\rho_k| > 1$ , то неподвижная точка отображения (2) будет неустойчивой.

Для одномерного отображения условие устойчивости неподвижной точки  $x^*$  сводится к выполнению неравенства  $|f'(x^*)| < 1$ . Если  $|f'(x^*)| > 1$ , неподвижная точка неустойчива.

Кроме неподвижных точек периода 1 одномерные отображения могут иметь циклы больших периодов. Циклом порядка  $m$  (или циклом- $m$ ) точечного ото-

бражения называется последовательность точек  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , удовлетворяющих условиям

$$x_2 = f(x_1), x_3 = f(x_2), \dots, x_1 = f(x_m), \quad (15)$$

причем никакие два элемента в наборе  $x_1, x_2, \dots, x_m$  не совпадают.

Заметим также, что точки цикла  $x_1, x_2, \dots, x_m$  называют иногда  $m$ -кратными неподвижными точками.

Поскольку для  $m$ -кратных неподвижных точек

$$x_1 = f^m(x_1) = f(f(f \dots f(x_1) \dots)), \quad (16)$$

то каждая из  $m$  точек, соответствующих  $m$ -кратному циклу, одновременно является однократной неподвижной точкой отображения  $f^m$ .

Условия устойчивости и неустойчивости  $m$ -кратной неподвижной точки одномерного отображения сводятся соответственно к выполнению неравенств

$$|f'(x_1^*)f'(x_2^*) \dots f'(x_m^*)| < 1, \quad |f'(x_1^*)f'(x_2^*) \dots f'(x_m^*)| > 1. \quad (17)$$