

А.В.Хохлов, Т.Е.Вадивасова

**ИССЛЕДОВАНИЕ  
СОБСТВЕННЫХ И ВЫНУЖДЕННЫХ  
КОЛЕБАНИЙ  
ЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА**

*Учебное пособие для спецпрактикума по курсу  
"Теория колебаний"*

**Ц е л ь р а б о т ы:** изучить собственные и вынужденные колебания линейного диссипативного осциллятора при малом, критическом и за критическом затухании.

**Литература:**

1. Мандельштам Л.И. Лекции по теории колебаний. М.: Наука, 1972.
2. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959; М.: Наука, 1981.
3. Анищенко В.С. Знакомство с нелинейной динамикой: учебное пособие. Саратов. Изд-во Гос. УНЦ "Колледж", 2000.
4. Стрелков С.П. Введение в теорию колебаний.- М.: Наука, 1964
5. Трубецков Д.И., Рожнев А.Г. Линейные колебания и волны: учебное пособие для вузов. М.: Наука, 2000.

**Контрольные вопросы:**

1. Какие режимы собственных колебаний возможны в линейном диссипативном осцилляторе?
2. Какой вид имеют фазовые портреты собственных колебаний линейного осциллятора и каковы возможные движения системы в окрестности состояний равновесия?
3. Запишите дифференциальные уравнения и их решения для собственных и вынужденных колебаний. Сформулируйте условия резонанса.
4. Изобразите резонансные кривые для различных значений затухания. Как рассчитать по резонансной кривой величину добротности линейного осциллятора?
5. Как определить коэффициент затухания осциллографическим методом?

## ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Колебаниями называются движения или процессы, обладающие той или иной степенью повторяемости во времени. Они свойственны различным явлениям природы. В физике особо выделяются механические и электромагнитные колебания. Электрические колебания возникают в  $LCR$ -контуре, который можно рассматривать в качестве радиотехнической модели линейного диссипативного

осциллятора. Модель содержит три идеализированных элемента - индуктивность  $L$ , емкость  $C$  и сопротивление  $R$ .

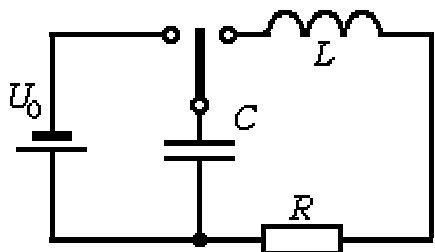
Использование моделей, составленных из идеализированных элементов позволяет абстрагироваться от многих свойств реальных колебательных систем. Прежде всего, исключаются геометрические размеры элементов и они представляются сосредоточенными в точке. При этом сокращается до двух число независимых переменных, необходимых для полного описания колебательных процессов, т.е. число *степеней свободы* равно 1.

В общем случае параметры осциллятора зависят от его мгновенного состояния, т.е. реальные колебательные системы *нелинейны*. Только при малой амплитуде колебаний параметры можно считать независимыми от динамических переменных, а колебательную систему - *линейной*. Линейные колебательные системы описываются линейными уравнениями, а протекающие в них процессы удовлетворяют принципу суперпозиции.

В лабораторной работе будут исследоваться колебательные процессы в линейной диссипативной системе с одной степенью свободы на примере  $LCR$ -контура. Собственные колебания визуально наблюдаются на экране осциллографа. Измеряется их частота и затухание. В режиме вынужденных колебаний снимаются резонансные кривые осциллятора и рассчитываются его основные характеристики.

## Дифференциальное уравнение $LCR$ -контура и его решение

Пусть конденсатор с электрической емкостью  $C$ , заряженный до напряжения



$U_0$ , замыкается через цепь, состоящую из катушки с индуктивностью  $L$  и резистора с сопротивлением  $R$  (рис. 1). Конденсатор начинает разряжаться, а затем и перезаряжаться. В цепи возникает переменный ток  $I(t)$ , амплитуда которого с течением времени падает до нуля, когда запасенная в емкости энергия перейдет в тепло.

Рис. 1: Возбуждение колебаний в  $LCR$ -контуре

Падения напряжений на индуктивности  $L$ , сопротивлении  $R$  и емкости  $C$  в произвольный момент времени удовлетворяют соотношениям:

$$U_L(t) = L \frac{dI}{dt} = L \frac{d^2q}{dt^2}, \quad U_R = RI = R \frac{dq}{dt}, \quad U_C(t) = \frac{1}{C}q = \frac{1}{C} \int I(t)dt,$$

а их сумма равна нулю, т.е. получаем однородное интегро-дифференциальное уравнение для тока  $I(t)$ :

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C} \int I(t)dt = 0.$$

Дифференцируя уравнения по  $t$  и умножая на  $1/L$ , получим

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC}I = 0$$

или

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + 2\delta \frac{dI}{dt} + \omega_0^2 I = 0, \quad (1)$$

где  $\delta = R/2L$  - показатель затухания контура,  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  - круговая частота собственных колебаний при отсутствии потерь (консервативный  $LC$ -контур). Аналогичное уравнение можно записать для заряда конденсатора

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + 2\delta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0. \quad (2)$$

В теоретической механике такое уравнение называется уравнением линейного осциллятора с вязким (линейным) трением. Оно описывает собственные (свободные) колебания.

*Собственными колебаниями* называют колебания в системе, не подвергавшейся внешним воздействиям и обусловленные запасенной энергией.

Если правая часть уравнения отлична от нуля и представляет функцию времени, то дифференциальное уравнение становится неоднородным. Неоднородное дифференциальное уравнение описывает *вынужденные колебания* в  $LCR$ -контуре.

Будем искать решение уравнения (1) в виде:  $I = Ae^{st}$ . Подставляя в (2), получим характеристическое уравнение

$$s^2 + 2\delta s + \omega_0^2 = 0. \quad (3)$$

Оно имеет корни

$$s_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta \pm \beta, \quad (4)$$

а общее решение дифференциального уравнения (2) принимает вид:

$$I(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} = e^{-\delta t} (A_1 e^{\beta t} + A_2 e^{-\beta t}).$$

Для определения постоянных  $A_1$  и  $A_2$  используем начальные условия задачи: при  $t = 0$   $I = 0$ , а из (1)  $\frac{dI}{dt} = -\frac{U_0}{L}$ . Тогда

$$I(0) = A_1 + A_2 = 0, \text{ т.е. } A_2 = -A_1$$

$$L \left. \frac{dI}{dt} \right|_{t=0} = A_1 s_1 + A_2 s_2 = 2\beta L A_1 = -U_0, \text{ т.е. } A_1 = -\frac{U_0}{2\beta L},$$

и частное решение дифференциального уравнения при заданных значениях начальных условий имеет вид:

$$I(t) = -\frac{U_0}{2\beta L} e^{-\delta t} (e^{\beta t} - e^{-\beta t}) = -\frac{U_0}{\beta L} e^{-\delta t} \operatorname{sh} \beta t. \quad (5)$$

Теперь рассмотрим механический осциллятор. Колебания груза с массой  $m$ , подвешенного на пружине с жесткостью  $k$ , с учетом коэффициента трения  $h$  описываются уравнением (2). В этом легко убедиться, используя электромеханические аналогии, т.е. аналогии между электрическим зарядом  $q$  и смещением  $x$

груза, током  $I$  и скоростью движения груза  $\dot{x}$ , индуктивностью  $L$  и массой  $m$ , емкостью  $C$  и податливостью пружины  $1/k$ , резистивным сопротивлением  $R$  и коэффициентом трения  $h$ . Тогда  $\delta = h/2m$ ,  $\omega_0^2 = k/m$ .

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (6)$$

Его решение имеет тот же вид, что и решение уравнения (2). Для определения постоянных  $A_1$  и  $A_2$  используем начальные условия задачи: при  $t = 0$   $x = x_0$ ,  $\frac{dx}{dt} = v_0$ . Частное решение дифференциального уравнения при заданных значениях начальных условий имеет вид (предлагается получить самостоятельно):

$$x(t) = e^{-\delta t} \left[ \frac{x_0\delta + v_0}{\beta} \operatorname{sh} \beta t + x_0 \operatorname{ch} \beta t \right] = A e^{-\delta t} \operatorname{sh} (\beta t + \varphi_0), \quad (7)$$

где  $A = \frac{\sqrt{(x_0\delta + v_0)^2 + (x_0\beta)^2}}{\beta}$ ,  $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{x_0\beta}{x_0\delta + v_0}$ .

Как следует из (5) и (7), состояние *динамической системы* в произвольный момент времени однозначно определяется ее начальным состоянием.

## Собственные колебания в $LCR$ -контуре

Характер собственных колебаний линейного осциллятора существенно зависит от соотношения величин запасенной и рассеиваемой энергии. В  $LCR$ -контуре соотношение энергий можно характеризовать, сравнивая параметры  $L$  и  $R$  или  $\omega_0^2$  и  $\delta^2$ . При этом в консервативном контуре ( $\delta = 0$ ) возникают незатухающие гармонические колебания, а в диссипативном контуре – затухающий колебательный или апериодический процесс.

**Собственные колебания консервативного контура.** При  $\delta = 0$  корни характеристического уравнения (3) становятся мнимыми ( $\beta = \pm j\omega_0$ ). Решение (5) принимает вид:

$$I(t) = -\frac{U_0}{\omega_0 L} \sin \omega_0 t, \quad (8)$$

а падения напряжений на индуктивности и емкости описываются соотношениями

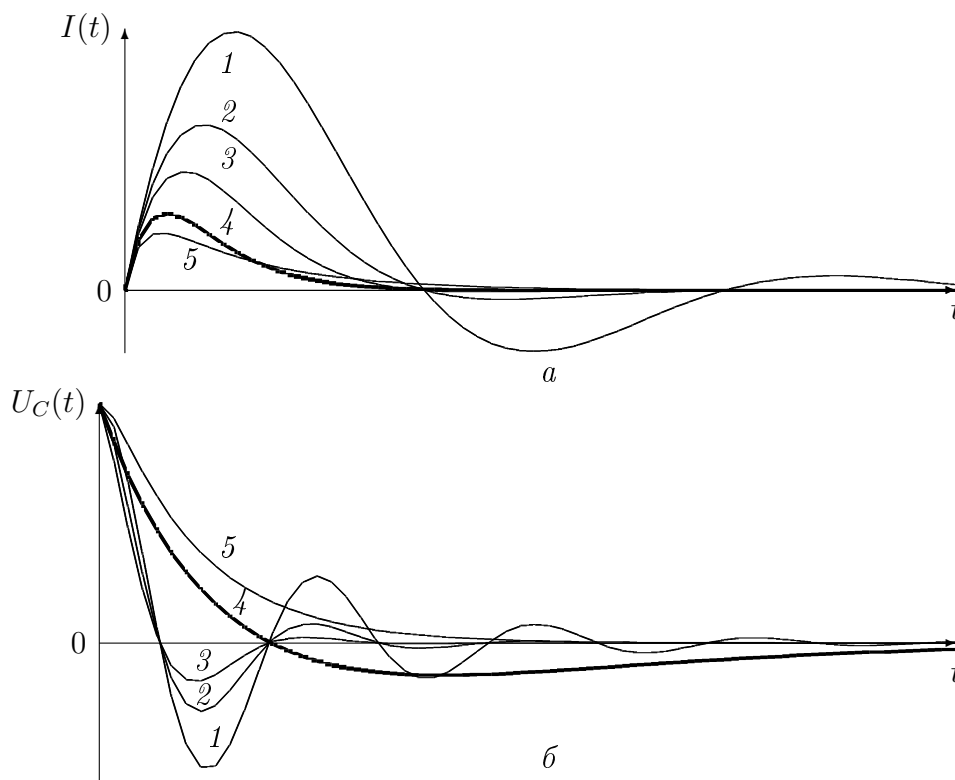
$$U_L(t) = L \frac{dI}{dt} = -U_0 \cos \omega_0 t,$$

$$U_C(t) = \frac{1}{C} \int I(t) dt = \frac{U_0}{LC\omega_0^2} \cos \omega_0 t = U_0 \cos \omega_0 t.$$

Таким образом,

- собственные колебания в консервативном контуре описываются гармоническими функциями,
- амплитуда колебаний однозначно определяется начальными условиями задачи, а частота – параметрами элементов контура, отвечающих за накопление энергии, и не зависит от начальных условий,

- ток и напряжения на элементах контура сдвинуты по фазе на  $\pi/2$ , т.е. максимум магнитной энергии соответствует нулевой электрической энергии и наоборот. Процесс колебаний носит реактивный характер.



**Рис. 2.** Изменения тока (а) и напряжения на емкости (б) в диссипативном контуре при различных значениях показателя затухания  $\delta$ :  
 1 -  $\delta = 0.2\omega_0 (R = 0.4\rho)$ ; 2 -  $\delta = 0.4\omega_0 (R = 0.8\rho)$ ; 3 -  $\delta = 0.6\omega_0 (R = 1.2\rho)$ ;  
 4 -  $\delta = \omega_0 (R = 2\rho)$ ; 5 -  $\delta = 1.5\omega_0 (R = 3\rho)$

**Собственные колебания в контуре с малым затуханием** ( $\delta^2 < \omega_0^2$ ). Корни характеристического уравнения (3) становятся комплексно сопряженными. Обозначим  $\beta = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = \pm j\omega_c$ . Частоту  $\omega_c$  будем называть *круговой частотой собственных колебаний диссипативного контура*. С учетом введенных обозначений ток свободных колебаний нетрудно получить из (5) в виде:

$$I(t) = -\frac{U_0}{\omega_c L} e^{-\delta t} \sin \omega_c t, \quad (9)$$

а для напряжения на емкости имеем:

$$U_C(t) = \frac{1}{C} \int I(t) dt = \frac{U_0 \omega_0}{\omega_c} e^{-\delta t} \sin(\omega_c t + \varphi), \quad (10)$$

где  $\operatorname{tg} \varphi = \omega_c / \delta$ . Как следует из формул (9) и (10), в диссипативной системе амплитуда колебаний уменьшается со временем по экспоненциальному закону. Скорость убывания амплитуды зависит от показателя затухания системы  $\delta$ . На рис. 2 представлены временные изменения тока и напряжения на емкости для различных значений  $\delta$ . При малых значениях  $\delta$  (кривые 1 на рис. 2) ток и

напряжение многократно изменяют знак прежде, чем достигают пренебрежимо малой величины.

Выражая  $\delta$  и  $\omega_0$  через первичные параметры контура, можно представить условие малого затухания в виде:

$$\frac{R}{2L} < \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{или} \quad R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Величина  $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$  имеет размерность сопротивления и называется *характеристическим сопротивлением LCR-контура*.

Так как для переменного тока с частотой  $\omega_0$  комплексные сопротивления реактивных элементов  $L$  и  $C$  соответственно равны  $j\omega_0 L$  и  $1/j\omega_0 C$ ,

- характеристическое сопротивление LCR-контура представляет среднее геометрическое или среднее пропорциональное из комплексных сопротивлений реактивных элементов контура на частоте  $\omega_0$ :

$$\sqrt{\frac{j\omega_0 L}{j\omega_0 C}} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho.$$

Формулу для характеристического сопротивления контура можно несколько видоизменить, если учесть, что  $\sqrt{LC} = 1/\omega_0$ . Тогда

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}. \quad (11)$$

**Апериодические процессы в LCR-контуре при большом затухании** ( $\delta^2 > \omega_0^2$ ). Корни характеристического уравнения (3) вещественны и различны, сопротивление потерь удовлетворяет соотношению

$$R > 2\rho,$$

а решение дифференциального уравнения (2) – соотношению (5). Как видно из рис. 2 (кривые 5), напряжение на емкости монотонно убывает, а ток контура с течением времени сначала нарастает, а затем монотонно убывает до нуля. Когда  $R \gg 2\rho$ , ток в контуре затухает почти линейно, т.е. влияние индуктивности в цепи пренебрежимо мало.

**Апериодические процессы в LCR-контуре при критическом затухании** ( $\delta^2 = \omega_0^2$ ,  $\beta = 0$ ,  $R = 2\rho$ ). Характеристическое уравнение (3) имеет единственный корень  $k = -\delta$  кратности 2.

Так как  $\beta = 0$ , решение (5) дифференциального уравнения содержит неопределенность типа  $0/0$ . Чтобы избавиться от нее, воспользуемся правилом Лопиталя. Тогда

$$I(t) = -\frac{U_0}{L} t e^{-\delta t}, \quad (12)$$

$$U_C(t) = U_0(1 + \delta t) e^{-\delta t}. \quad (13)$$

Зависимости тока и падения напряжения на емкости  $C$  от времени при критическом затухании представлены на рис. 2 полужирными кривыми 4. Из сопоставления кривых 4 и 5 следует, что при критическом затухании ток достигает наибольшего значения, при котором еще не происходит изменения знака, а изменение напряжения на емкости происходит с минимальной скоростью.

В заключение сформулируем общие свойства собственных колебаний.

1. Амплитуды переменных определяется начальными условиями задачи, а частота колебаний не зависит от начальных условий и является функцией параметров  $L$ ,  $C$  и  $R$ . Частота собственных колебаний диссипативного контура  $\omega_c$  меньше, чем у консервативного контура  $\omega_0$ , т.е. перекачка энергии между реактивными элементами замедляется с увеличением  $\alpha$ . Если  $R \rightarrow 0$ , то  $\omega_c \rightarrow \omega_0$ .

2. Сдвиги по фазе между током и напряжениями на реактивных элементах в диссипативном контуре отличаются от  $\pi/2$ : напряжение на емкости опережает ток на угол  $\varphi$ , а напряжение на индуктивности отстает от тока [2,с.176-179].

3. Когда затухание меньше критического, ток и напряжения в диссипативном контуре затухают во времени, периодически изменяя знак. Когда затухание больше или равно критическому, ток и напряжения изменяют знак не более одного раза. Другими словами, система, получив начальное возмущение, устремляется к состоянию покоя, при котором переменная и ее производная (ток и напряжение) равны нулю, аperiodически или путем периодического уменьшения отклонений от состояния покоя.

4. Переход от колебательного к аperiodическому процессу соответствует равенству  $R = 2\rho$ . Этому соотношению можно дать простое толкование, если воспользоваться соотношением (11) и представить одно  $\rho$  как модуль реактивного сопротивления индуктивности  $|\dot{Z}_L| = \omega_0 L$ , а другое - как модуль реактивного сопротивления емкости  $|\dot{Z}_C| = 1/\omega_0 C$ . Тогда модули реактивных сопротивлений можно сравнивать с резистивным сопротивлением  $R$ , а условие критичности колебаний принимает вид:

$$R = |\dot{Z}_L| + |\dot{Z}_C| = \omega_0 L + \frac{1}{\omega_0 C}, \quad (14)$$

- Процессы в диссипативном контуре имеют *колебательный характер*, когда сумма модулей реактивных сопротивлений превышает сопротивление потерь, и *aperiodический характер*, когда она меньше сопротивления потерь.

Переход от колебательного режима к аperiodическому легко объяснить скоростью расхода накопленной в контуре энергии: если за период колебаний в тепло превращается небольшая часть запасенной энергии, то в  $LCR$ -контуре совершается несколько переходов электрической энергии в магнитную и обратно, т.е. несколько колебаний напряжения и тока, пока запасенная энергия превратится в тепло полностью; если же потери энергии за период велики, то электрическая энергия не успевает перейти в магнитную. Такие переходы хорошо описывает энергетический параметр  $LCR$ -контура - добротность.

Подключенный к источнику напряжения  $U_0$  (рис. 1) конденсатор накапливает энергию  $W = CU_0^2/2$ . При замыкании контура конденсатор разряжается через индуктивность  $L$  и сопротивление  $R$ . Если процесс носит колебательный характер, то в контуре возникает переменный ток  $i(t) = I_m(t) \sin \omega_c t$ , амплитуда  $I_m(t)$  которого, в соответствии с выражением (9), убывает во времени по экспоненциальному закон:

$$I_m(t) = -\frac{U_0}{\omega_c L} e^{-\delta t}.$$

Накопленная в конденсаторе энергия электрического поля переходит в индуктивность в виде энергии магнитного поля. Через четверть периода колебаний вся энергия (кроме энергии потерь) сосредотачивается в индуктивности  $L$  и  $W = LI_m^2/2$ . Энергия потерь  $W_{\text{п}}$ , расходуемая за период колебаний в сопротивлении  $R$ , описывается формулой

$$W_{\text{п}} = \int_0^T i^2(t) R dt, \quad \text{где } T = \frac{2\pi}{\omega_c}.$$

Для малого показателя затухания  $\delta$  можно считать, что  $T \approx T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ , а амплитуда  $I_m(t)$  мало изменяется за период. В этом случае, вынося  $I_m$  из-под интеграла, получаем следующее приближенное выражение для энергии потерь:

$$W_{\text{п}} \cong \frac{I_m^2}{2} R T_0 = \frac{I_m^2}{2} R \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

- Безразмерная величина, превышающая в  $2\pi$  раз отношение полной энергии к энергии, рассеиваемой системой за период колебаний, называется *добротностью* колебательной системы:

$$Q = 2\pi \frac{W}{W_{\text{п}}} = \frac{1}{\omega_0 C R} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\rho}{R}, \quad (15)$$

а параметр  $\eta = R/\rho = 1/Q$ , обратный добротности  $Q$ , называется *затуханием контура*.

Обратимся теперь к показателю затухания  $\delta$ . Согласно формуле (9) максимальные значения тока достигаются в моменты времени  $t_k$ , для которых  $\omega_c t_k = \pi/2 + 2\pi k$ , а  $t_k = \frac{\pi}{\omega_c} (\frac{1}{2} + 2k)$ , где  $k=0, 1, 2, \dots$ . Тогда

$$\ln \frac{I(t)}{I(t+T)} = \delta T = \Theta, \quad \text{где } T = 2\pi/\omega_c.$$

Параметр  $\Theta$  характеризует быстроту затухания колебаний в линейной системе и называется *декрементом затухания* (от лат. decrementum - уменьшение, убыль). Раскрывая  $\delta$ , можно установить связь декремента затухания с затуханием  $\eta$  в виде

$$\Theta = (R/2L)(2\pi/\omega_0) = \pi\eta.$$



**Дифференциальное уравнение контура в безразмерном виде.** Дифференциальное уравнение (1) можно привести к универсальному виду, пригодному для описания колебаний в любых физических системах (механических, оптических, атомных и молекулярных), если в качестве независимой переменной использовать безразмерную переменную  $x = I/I_{max}$  и перейти к "безразмерному" времени  $\tau = \omega_0 t$ . Поскольку  $\frac{d}{dt} = \omega_0 \frac{d}{d\tau}$ , получим

$$\omega_0^2 \frac{d^2 x}{d\tau^2} + \frac{\omega_0 R}{L} \frac{dx}{d\tau} + \omega_0^2 x = \frac{d^2 x}{d\tau^2} + \frac{R}{\omega_0 L} \frac{dx}{d\tau} + x = \frac{d^2 x}{d\tau^2} + \frac{R}{\rho} \frac{dx}{d\tau} + x = 0.$$

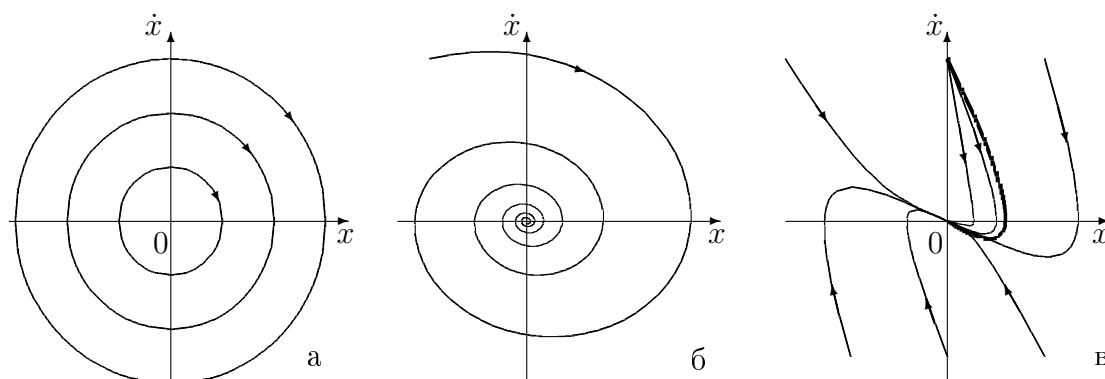
С учетом введенных обозначений дифференциальное уравнение в безразмерном времени принимает окончательный вид:

$$\ddot{x} + \eta \dot{x} + x = 0. \quad (16)$$

К аналогичному безразмерному виду приводится и уравнение (2).

### Графическое представление собственных колебаний в $LCR$ -контуре. Метод фазовой плоскости

Состояние осциллятора (16) в любой момент времени однозначно определяется двумя переменными:  $x$  и  $y = \frac{dx}{dt}$ . Переменные, задающие мгновенное состояние системы, называются *фазовыми переменными*, а плоскость фазовых переменных - *фазовой плоскостью*. Каждому моменту времени соответствует свое положение изображающей точки на фазовой плоскости, а каждое частное решение дифференциального уравнения (16) при заданных начальных условиях определяет на плоскости  $(x, y)$  кривую, называемую *фазовой траекторией* (рис. 3). Совокупность фазовых траекторий, соответствующих различным начальным условиям, образует *фазовый портрет системы*.



**Рис. 3.** Фазовые портреты линейных осцилляторов

Следует отметить, что с ростом порядка дифференциального уравнения и, следовательно, размерности фазового пространства, сложность анализа возрастает. Поэтому метод фазового пространства (как обобщение метода фазовой плоскости) является наглядным лишь для систем, описываемых дифференциальными уравнениями не выше третьего порядка.

## Уравнения и свойства фазовых траекторий

Дифференциальное уравнение осциллятора (16) можно заменить эквивалентной системой двух дифференциальных уравнений первого порядка, которые с учетом введенных обозначений принимают вид:

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad (17)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\eta y - x. \quad (18)$$

Если разделить почленно второе уравнение на первое, то получим дифференциальное уравнение, не содержащее  $t$ :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\eta y + x}{y} \quad (19)$$

Его решение  $y = y(x, K)$ , где  $K$  - произвольная постоянная, описывает семейство интегральных кривых или фазовых траекторий.<sup>1</sup>

Проанализируем свойства фазовых траекторий и характер фазовых портретов системы (17)–(18).

1. Состояниям равновесия соответствуют равенства  $\dot{x} = 0, \dot{y} = 0$ . Следовательно, в системе (17)–(18) имеется единственное состояние равновесия в нуле координат, где производная имеет неопределенные значения. Такие точки называются *особыми точками* дифференциального уравнения.

2. Характер движения системы в окрестностях особых точек целиком определяется видом корней характеристического уравнения (3). Характеристическое уравнение имеет два корня, которые могут быть чисто мнимыми, комплексно сопряженными или вещественными. Соответствующие им состояния равновесия будут иметь различный характер (рис.3).

3. В любой точке фазовой плоскости, кроме  $(0, 0)$  скорость отлична от нуля, и изображающая точка движется по фазовой траектории без остановки, причем в верхней полуплоскости  $\dot{x} > 0$ , переменная  $x(t)$  нарастает, а в нижней полуплоскости  $\dot{x} < 0$ , т.е. движение происходит по часовой стрелке.

4. Как следует из (19), все фазовые траектории пересекают ось абсцисс под прямым углом (если точка пересечения не является началом координат)

5. Интегральные кривые нигде кроме  $(0, 0)$  не пересекаются.

Рассмотрим конкретный вид фазовых траекторий, представляющих собственные колебания в консервативном и диссипативном контурах.

### Фазовые портреты колебательных контуров при различных значениях затухания

**Консервативный контур.** Полагая в (19)  $\eta = 0$ , получим:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad \text{или} \quad ydy = -xdx. \quad (20)$$

<sup>1</sup>Интегральные кривые и фазовые траектории - это близкие, но не тождественные понятия. Интегральные кривые могут проходить через седловые особые точки и, в этом случае, они состоят из нескольких фазовых траекторий. В седловых точках интегральные кривые могут пересекаться. Фазовые траектории нигде не пересекаются в силу теоремы Коши о существовании и единственности решения системы дифференциальных уравнений (см. [2] в списке литературы).

Интегрируя, находим

$$y^2 + x^2 = K^2, \quad (21)$$

где  $K$  - постоянная интегрирования.

Это уравнение окружности. Величина ее радиуса зависит от параметра  $K$ , который в свою очередь определяется начальными условиями задачи. Наличие замкнутых фазовых траекторий свидетельствует о существовании периодических процессов, а траектории в виде окружностей - о гармоническом характере колебаний. Изображающая точка совершает вращательное движение по часовой стрелке (рис. 3,а). Такой характер движения связан с наличием мнимых корней у характеристического уравнения.

- Особая точка, в окрестности которой фазовые траектории образуют концентрические окружности или эллипсы, называется *центром*.

**Особенности построения фазовых портретов диссипативных систем.** Построение фазового портрета диссипативного контура представляет более сложную задачу. Приближенное качественное представление о поведении фазовых траекторий можно получить *методом изоклин*. Полагая в дифференциальном уравнении (19)  $\frac{dy}{dx} = G = \text{const}$ , получим кривую ( $G$ -изоклину), в каждой точке которой наклон касательных к фазовым траекториям, пересекающим ее, одинаков и равен  $\text{arctg}G$ . Если построить достаточно много изоклин, соответствующих различным значениям  $G$ , то по известному полю направлений касательных можно воспроизвести фазовый портрет для любого начального условия. Эта методика детально рассмотрена в работе [2] специально для случая диссипативного контура с малым затуханием.

В настоящее время фазовые портреты не только линейных, но и сложных нелинейных систем, легко строятся на персональных компьютерах с помощью стандартных программ, но определение геометрии фазовых портретов, исходя из структуры дифференциальных уравнений, по-прежнему актуально. Как отмечалось выше, диссипативный контур при любом затухании обладает единственным состоянием равновесия, расположенным на фазовой плоскости в начале координат, а от величины диссипации зависит только характер состояния равновесия.

**Диссипативный контур с малым затуханием.** В соответствии с характеристическим уравнением для (17)–(18) его корни представляют комплексно сопряженные числа. Это означает, что система, получив начальное возмущение, устремляется к положению равновесия, сохраняя колебательный характер движения, а изображающая точка, как и в случае консервативного контура, совершает вращательное движение по часовой стрелке вокруг начала координат, но ее радиус-вектор постоянно уменьшается (рис. 3,б), причем уменьшение расстояния до  $(0, 0)$  по любым радиальным направлениям происходит с одинаковой скоростью. Таким образом, фазовые траектории имеют вид спиралей.

- Особая точка, в окрестности которой фазовые траектории имеют форму спиралей, называется *фокусом*. Фокус, к которому при  $t \rightarrow \infty$  траекто-

рии сходятся, называется *устойчивым*, а фокус от которого траектории расходятся, – *неустойчивым*.

Диссипативный контур обладает положительным затуханием, и фокус устойчивый. Если рассматривать проекции изображающей точки на оси координат, можно получить кривые, представленные на рис. 2.

**Диссипативный контур с критическим и закритическим затуханием.** Согласно (4) критическому затуханию соответствует единственный вещественный отрицательный корень кратности 2, а закритическому затуханию – два вещественных отрицательных корня. Начнем рассмотрение с закритического случая.

Наличие двух различных вещественных корней означает монотонное сжатие переменных одновременно по двум направлениям, но с разной скоростью. Система, получив начальное возмущение, устремляется к состоянию равновесия.

- Особая точка, асимптотическая для аperiодических траекторий, называется *узлом*. Узел, к которому сходятся траектории при  $t \rightarrow \infty$ , называется *устойчивым*, а узел, к которому траектории сходятся при  $t \rightarrow -\infty$ , – *неустойчивым*.

Контур обладает положительным затуханием, и узел – устойчивый.

Рассмотренные типы особых точек исчерпывают все возможные виды движений в окрестности состояния равновесия для линейного осциллятора (2). В общем случае на фазовой плоскости кроме выше рассмотренных возможны также следующие неподвижные точки, соответствующие состояниям равновесия: неустойчивый фокус, неустойчивый узел, седло. В фазовом пространстве размерности  $N \geq 3$  могут существовать более сложные особые точки [3].

## Вынужденные колебания в $LCR$ -контуре

*Вынужденными колебаниями* будем называть колебания, возникающие в системе под влиянием переменного, чаще всего *периодического* внешнего воздействия

Будем рассматривать вынужденные колебания в контуре при следующих условиях:

- 1) внешнее воздействие не изменяет параметры колебательной системы,
- 2) амплитуда, частота и фаза внешнего воздействия не зависят от свойств колебательной системы.

Эти ограничения необходимы, чтобы исключить влияние контура на источник возбуждающей силы. Нарушение любого из них сводит задачу о вынужденных колебаниях к совсем другой задаче - исследованию взаимодействия источника колебаний и колебательной системы.

Пусть на диссипативную колебательную систему воздействует источник гармонического сигнала  $E(t) = E_m \cos \omega t$ , где  $E_m$  - амплитуда,  $\omega$  - частота внешнего воздействия. Дифференциальное уравнение для заряда  $q$  в колебательном

контуре (2) становится неоднородным:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\delta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = E_m \cos \omega t. \quad (22)$$

Как уже отмечалось, заряд  $q$  является аналогом смещения  $x$  в механической колебательной системе. Общее решение уравнения (22) является суммой общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Пусть частное решение имеет вид:

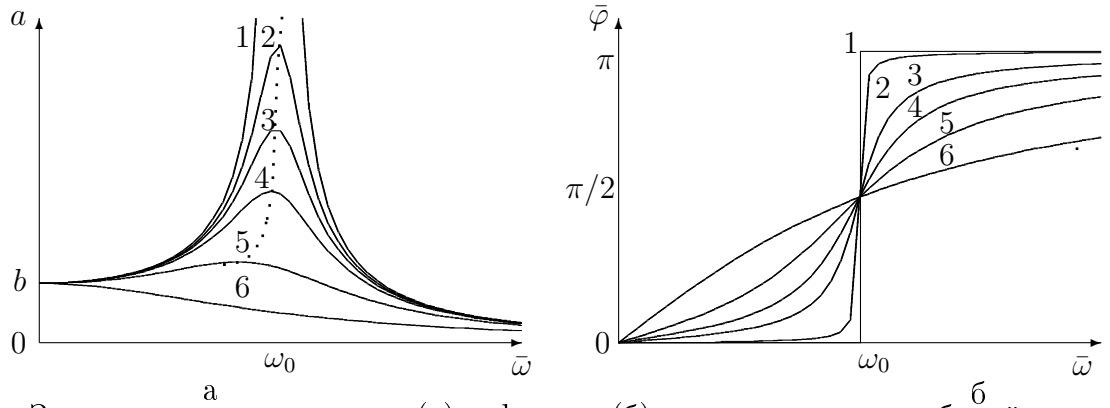
$$q_1 = a \cos(\omega t - \varphi). \quad (23)$$

Подставляя (23) в (22), получим:

$$(\omega_0^2 - \omega^2) \cos(\omega t - \varphi) - 2\delta\omega \sin(\omega t - \varphi) = E_m \cos(\omega t - \varphi) \cos \varphi - E_m \sin(\omega t - \varphi) \sin \varphi.$$

Отсюда

$$a = \frac{E_m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (24)$$



**Рис. 4.** Зависимость амплитуды  $a$  (а) и фазы  $\varphi$  (б) вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы  $\omega$  1 –  $\delta = 0$  ( $Q = \infty$ ), 2 –  $\delta = 0.05\omega_0$  ( $Q = 10$ ), 3 –  $\delta = 0.07\omega_0$  ( $Q = 7$ ), 4 –  $\delta = 0.1\omega_0$  ( $Q = 5$ ), 5 –  $\delta = 0.2\omega_0$  ( $Q = 2.5$ ), 6 –  $\delta = 0.5\omega_0$  ( $Q = 1$ )

Теперь полное решение неоднородного дифференциального уравнения (23) можно представить в виде:

$$q(t) = q_2(t) + x_1(t) = Ae^{-\delta t} \cos(\omega_c t + \varphi_c) + a \cos(\omega t - \varphi), \quad (25)$$

где  $A$ ,  $\delta$ ,  $\omega_c$  и  $\varphi_c$  - константы, характеризующие собственные колебания.

Графики зависимостей амплитуды  $a$  и фазы  $\varphi$  вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы представлены на рис. 4.

Проанализируем полученное решение.

1. Первое слагаемое в (25) описывает затухающие собственные колебания (рис. 5,б и 5,д). Частота и начальная фаза этих колебаний полностью определяются параметрами колебательного контура, а амплитуда зависит от начального запаса энергии. По истечении определенного промежутка времени амплитуда собственных колебаний уменьшается до нуля.

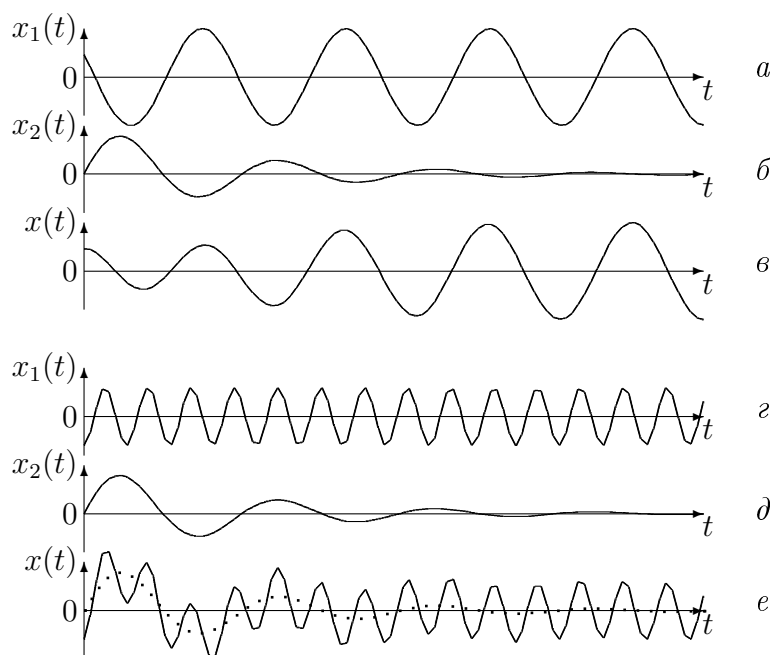
2. Второе слагаемое в (25) описывает *установившийся процесс*. Частота установившихся колебаний не зависит от  $\omega_0$  и совпадает с частотой вынуждающей силы (рис. 5,а и 5,г), а на начальную фазу колебаний влияют и частота вынуждающей силы, и параметры контура. После того, как собственные колебания полностью затухнут, остается только это слагаемое (рис. 5,в и 5,е),

3. Амплитуда установившихся колебаний резко возрастает, когда частота вынуждающей силы приближается к собственной частоте контура.

- Увеличение амплитуды установившихся колебаний до максимума при приближении частоты внешнего воздействия к собственной частоте колебательной системы называется *резонансом*.

4. Максимум амплитуды установившихся колебаний (рис. 4,а) достигается при  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$ . С увеличением  $\delta$  частота резонансных колебаний все сильнее отличается от  $\omega_0$  (пунктирная кривая на рис. 4,а), а максимум амплитуды становится все менее резким.

5. При малых значениях показателя затухания  $\delta$  резонансная амплитуда может возрасти в сотни или тысячи раз, но время установления стационарных колебаний большой амплитуды становится огромным, так как резко возрастает длительность затухания собственных колебаний.



**Рис. 5.** Установление колебаний при  $\omega = 1.1\omega_0$  (а, б, в) и при  $\omega = 6\omega_0$  (г, д, е): временные изменения вынуждающей силы (а, г), затухания собственных колебаний (б, д) и результирующих колебаний (в, е) осциллятора

**Уравнения резонансных кривых. Избирательность контура.** Резонансной кривой колебательного контура будем называть его амплитудно-частотную характеристику, т.е. зависимость амплитуды тока в контуре от частоты воздействия  $\omega$  (рис. 6,а).

<sup>2</sup>Это соотношение предлагается получить самостоятельно, дифференцируя амплитуду  $a$  в (25) по  $\omega$

Уравнение резонансной кривой контура можно получить различными способами. Для этого можно разрешить неоднородное дифференциальное уравнение относительно тока или использовать метод комплексных амплитуд. Метод комплексных амплитуд не только проще, но и более эффективен при оценке параметров расстроенного контура и установлении связи избирательности и добротности контура.

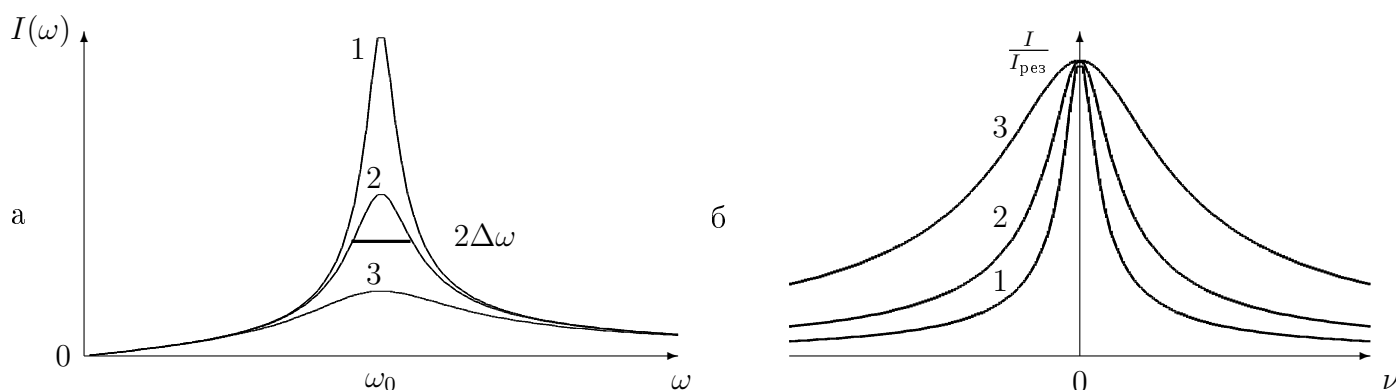
Пусть в последовательный  $LCR$ -контур включен источник гармонических колебаний с ЭДС  $E(t) = E_m e^{j\omega t}$ . Комплексная амплитуда тока в  $LCR$ -контуре зависит от величины его полного или входного сопротивления

$$\dot{Z}_{\text{вх}} = R_{\text{вх}} + jX_{\text{вх}} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right). \quad (26)$$

Отсюда

$$\dot{I}_m(\omega) = \frac{\dot{E}_m}{R + j(\omega L - 1/\omega C)} \quad \text{или} \quad I_m(\omega) = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}$$

На рис. 6,а изображены резонансные кривые для трех различных значений добротности. Более удобными при теоретическом анализе оказались нормированные (приведенные) резонансные кривые (рис. 6,б). Для построения последних введем параметры расстроенного контура.



**Рис. 6.** Ненормированные (а) и нормированные (б) резонансные кривые линейного колебательного контура при различных значениях добротности 1 –  $Q = 10$ , 2 –  $Q = 5$ , 3 –  $Q = 2$

Реактивную часть входного сопротивления  $X_{\text{вх}}$  можно представить в виде:

$$X_{\text{вх}} = \omega_0 L \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = \rho \nu, \quad (27)$$

где  $\rho = \omega_0 L = \sqrt{L/C}$  – характеристическое сопротивление контура, а  $\nu = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}$  – относительная расстройка частоты контура. Во всех практически важных случаях относительная расстройка частоты удовлетворяет соотношению  $\nu \ll 1$  и только при  $\omega = \omega_0$  обращается в нуль. Поэтому абсолютная расстройка частоты  $\Delta\omega = \omega - \omega_0$  связана с  $\nu$  простым соотношением:

$$\nu = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega_0 \omega} = \frac{(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0)}{\omega_0 \omega} \cong \frac{2\Delta\omega}{\omega_0} \quad (28)$$

С учетом (27) полное входное сопротивление контура удовлетворяет соотношению:

$$Z_{\text{вх}} = R_{\text{вх}} + jX_{\text{вх}} = R + j\rho\nu = R(1 + j\frac{\rho}{R}\nu) = R(1 + jQ\nu), \quad (29)$$

где  $Q$  – добротность контура.

Если построить зависимость отношения токов  $I/I_{\text{рез}}$  от относительной расстройки  $\nu$ , то получим нормированные резонансные кривые (рис. 6,б). Они описываются соотношением:

$$\frac{I}{I_{\text{рез}}} = \frac{|\dot{E}|}{R\sqrt{1+Q^2\nu^2}} / \frac{|\dot{E}|}{R} = \frac{1}{\sqrt{1+Q^2\nu^2}} \quad (30)$$

и имеют одинаковый вид и для тока, и для напряжений на элементах контура.

Как следует из рис. 6, избирательность колебательного контура, т.е. способность пропускать только те колебания, частота которых близка к резонансной частоте, тем выше, чем больше добротность контура  $Q$ . Для количественного описания избирательности обычно используется полоса пропускания контура.

*Полосой пропускания на уровне половинной мощности* или просто *полосой пропускания контура* называется область частот, в которой мощность сигнала ослабляется не более чем в два раза, а напряжение или ток в  $\sqrt{2}$  раз. Ширину полосы пропускания контура можно найти графически по резонансной кривой контура или рассчитать, используя аналитическое представление резонансной кривой. В последнем случае удастся установить связь добротности контура и его полосы пропускания на уровне половинной мощности.

**Связь добротности и полосы пропускания контура.** Рассмотрим уравнение нормированной резонансной кривой (30). При нулевой расстройке частоты ( $\nu = 0$ ) имеем  $I = I_{\text{рез}}$ . Определим расстройки  $\nu$ , при которых  $I/I_{\text{рез}} = 1/\sqrt{2} \cong 0.707$ , т.е. мощность ослабляется точно в два раза. Тогда

$$\frac{1}{\sqrt{1+Q^2\nu^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

откуда

$$Q^2\nu^2 = 1 \quad \nu = \pm \frac{1}{Q}.$$

Подставляя выражение для относительной расстройки в виде (28), получим

$$Q = \frac{\omega_0}{2\Delta\omega} \quad \text{или} \quad 2\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}. \quad (31)$$

Но  $2\Delta\omega$  как раз и представляет ширину резонансной кривой на уровне половинной мощности (рис. 6,а). Формула (31) открывает возможность определения добротности колебательной системы по экспериментально снятой резонансной кривой. Если измерить частоту  $f_0$ , для которой переменная принимает наибольшее значение, и отметить частоты  $f_1$  и  $f_2$ , на которых она спадает до 0.7 от максимальной, то  $2\Delta f = f_2 - f_1$  является шириной полосы пропускания (рис. 6,а), а отношение  $f_0/2\Delta f$  соответствует экспериментально измеренному значению добротности  $Q$ . Интересно, что полуширина резонансной кривой численно равна показателю затухания контура

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{2Q} = \frac{\omega_0}{2\omega_0 L/R} = \frac{R}{2L} = \delta.$$

**Методика экспериментальных исследований колебаний линейного диссипативного осциллятора на модели LCR-контура**



Выбор  $LCR$ -контура в качестве модели линейного осциллятора не случаен и диктуется рядом причин. Во-первых, в этом случае в качестве переменной, описывающей колебательный процесс, выступает электрический сигнал, удобный для измерения электронным вольтметром или осциллографом. Во-вторых, в  $LCR$ -контуре легко изменять параметры осциллятора и устанавливать нужную частоту колебаний и показатель затухания контура. В-третьих, выбирая  $L$  и  $C$  соответствующей величины, можно установить такую частоту колебаний, которая удобна для измерений и достаточно хорошо защищена от помех.

В лабораторной работе целесообразно использовать постоянную индуктивность  $L$  ( $460 \text{ мкГн}$ ) и переменную емкость  $C$ , изменяющуюся от  $180$  до  $900 \text{ пФ}$ , что позволяет варьировать резонансную частоту от  $550$  до  $250 \text{ кГц}$ . Для изменения степени диссипации в контур вводится переменный резистор (реостат). Отметим, что колебания в таком контуре будут затухать даже при нулевом сопротивлении резистора, так как проводник катушки индуктивности обладает конечным активным сопротивлением.

**Методика исследования собственных колебаний.** Экспериментальное исследование собственных колебаний  $LCR$ -контура возможно проводить с помощью осциллографа, если периодически, с периодом большим, чем время затухания колебаний, колебательный контур подключать к генератору коротких импульсов. Когда длительность импульсов значительно меньше, чем полупериод колебаний, то за время его действия конденсатор контура только успевает зарядиться, а его разряд через индуктивность и резистор, как показано выше, будет происходить уже в режиме собственных колебаний. При частоте колебаний контура в  $300 \text{ кГц}$  этим условиям удовлетворяет последовательность прямоугольных импульсов с длительностью  $1 \div 2 \text{ мкс}$  и частотой повторения  $6 \div 8 \text{ кГц}$ , т.е. возможно наблюдать  $40 \div 50$  периодов затухающих колебаний.

Если теперь снять напряжения с сопротивления и индуктивности и подать на X- и Y-входы осциллографа, то можно пронаблюдать фазовые портреты при различных затуханиях.

Исследование собственных колебаний предполагает не только наблюдение характера затухания колебаний, но и определение количественных параметров процесса: частоты собственных колебаний, показателя затухания и добротности.

**Частота собственных колебаний** может быть найдена с использованием калиброванной развертки осциллографа.

**Показатель затухания и добротность контура** могут быть найде-

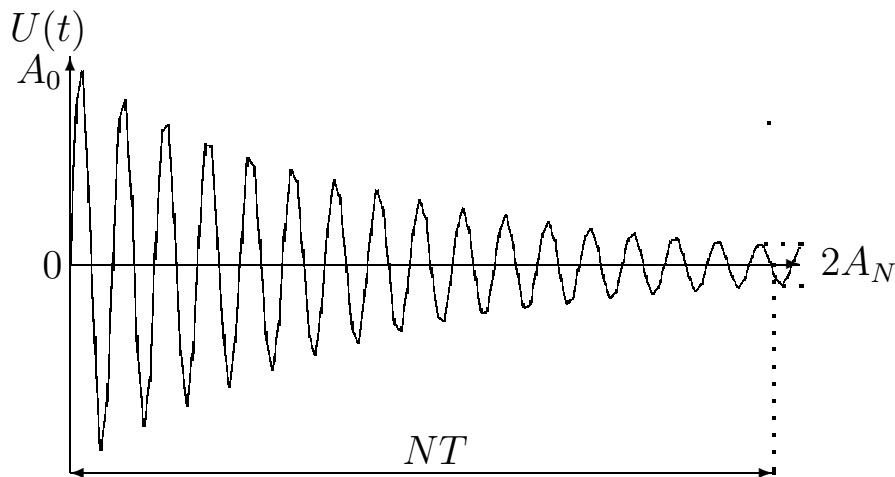


Рис. 7: Затухающее колебание

которое предлагается вывести самостоятельно:

$$\delta = \frac{1}{NT} \ln \frac{A_0}{A_N},$$

где  $T$  - период собственных колебаний,  $A_0$  и  $A_N$  - амплитуды колебаний, разделенные  $N$  квазипериодами (рис. 7).

Для расчета добротности обычно используется следующая формула, вывод которой также предполагается проделать самостоятельно:

$$Q = \frac{\pi N}{\ln \frac{A_0}{A_N}} = \frac{\pi N}{2.3 \lg \frac{A_0}{A_N}}. \quad (32)$$

Следует заметить, что точность расчета показателя затухания и добротности зависит от точности измерения амплитуд колебаний и количества периодов. С увеличением показателя затухания точность расчета падает.

### Методика исследований вынужденных колебаний

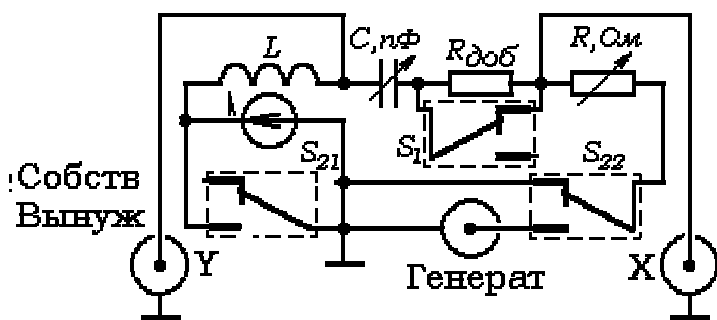
Исследование вынужденных колебаний происходит в установившемся режиме, когда собственные колебания контура полностью затухают. Поэтому изучение вынужденных колебаний позволяет прежде всего оценить частотную избирательность контура и особенности преобразования в диссипативном контуре сигналов различных частот. При этом удастся использовать более совершенные частотные методы определения таких параметров колебательного контура, как добротность и полоса пропускания на уровне половинной мощности.

Если генератор высокочастотных сигналов включить в цепь контура, а на одном из его элементов с помощью электронного вольтметра измерять напряжение, то, изменяя частоту генератора в окрестности резонансной частоты контура можно построить его амплитудно-частотную характеристику, т.е. зависимость коэффициента передачи от частоты. По этой характеристике можно определить полосу пропускания на уровне половинной мощности и по известным формулам рассчитать добротность контура и показатели затухания.

ны по осциллограмме затухающего колебания только при малых затуханиях. Поскольку амплитуда колебаний убывает по экспоненциальному закону (рис. 7), отношение амплитуд колебания, отстоящих на расстоянии  $N$  квазипериодов, удовлетворяет соотношению, ко-

# Экспериментальная установка

Экспериментальная установка состоит из автономного блока LCR-КОНТУР,



функциональных генератор сигналов GFG-8210, двухканального осциллографа GOS-6031 и милливольтметра ВЗ-38. Электрическая схема автономного блока представлена на рис. 8. Он содержит генератор прямоугольных импульсов с большой скважностью и последо-

**Рис. 8:** Блок-схема экспериментальной установки вательный колебательный контур, состоящий из катушки индуктивности ( $L=460 \text{ мкГн}$ ), конденсатора переменной емкости ( $C = 25 \div 1100 \text{ нФ}$ ), последовательно соединенных резисторов с переменным сопротивлением  $R = 0 \div 100 \text{ Ом}$  и постоянным сопротивлением  $R_{\text{доб}}=1500 \text{ Ом}$ .

На передней панели установки расположены кнопка включения напряжения сети, ручки управления **C, пФ** и **R, Ом**, кнопка  $S_1$  **Собств.- Вынужд.**, тумблер  $S_2$  **0 ÷ 100 – 1500 ÷ 1600** и три коаксиальных разъема **Генерат** для подключения внешнего генератора синусоидальных колебаний, **X** и **Y** для подключения соответствующих входов осциллографа.

## Порядок выполнения работы

Ознакомиться с блок-схемой экспериментальной установки, подключить к разъему **X** вход осциллографа и с помощью тумблера "СЕТЬ" подключить установку к сети переменного тока.

### А. Исследование свободных колебаний

1. Произвести наблюдения собственных затухающих колебаний контура. Для этого установить кнопку в режим **СОБСТВ** и использовать только канал **X** осциллографа.

2. Используя частотомер осциллографа, исследовать зависимость частоты свободных колебаний от емкости контура  $C$ , которую следует изменять не более, чем через каждые 100 пФ в пределах  $100 \leq C \leq 1100 \text{ пФ}$ .

Построить график зависимости резонансной частоты контура  $f_0 = F(C)$ . Рассчитать и нанести на тот же график теоретическую кривую. Объяснить расхождение графиков.

3. Возбудить свободные колебания в контуре при  $C_1 = 650 \text{ пФ}$  и определить его показатель затухания  $\delta$  и добротность  $Q$  для значений сопротивления  $R_1 = 0$  и  $10 \text{ Ом}$  по описанной выше методике. Зная  $Q$ , определить полосу пропускания контура  $2\Delta f$  для двух значений  $R_1$ .

4. Подключить выход установки **Y** ко второму входу осциллографа и перевести осциллограф в режим **X – Y**. Пронаблюдать изменения фазового портрета

при варьировании частоты контура и его сопротивления потерь. Зарисовать и объяснить полученные результаты.

**Внимание !!!** Чтобы не повредить люминесцентное покрытие электронно-лучевой трубки осциллографа, наблюдение фазовых портретов проводить при минимальной яркости и в течение коротких интервалов времени.

## Б. Исследование вынужденных колебаний

1. Снять резонансные кривые контура при возбуждении его от генератора высокочастотных гармонических колебаний GFG-8210A. Для этого переключатель  $S_1$  поставить в положение "ВЫНУЖ." и включить генератор. Выходное напряжение генератора установить не более 0.15 В (для этого кнопкой включить аттенюатор генератора).

Включить милливольтметр ВЗ-38 и, изменяя частоту генератора, снять зависимость амплитуды колебаний в контуре от частоты возбуждения. Вблизи резонанса измерения следует проводить особенно тщательно. Резонансные кривые снять для  $C_1 = 650$  пФ и  $R_1 = 0$  и 20 Ом. По резонансным кривым для каждого значения  $R_1$  определить полосу пропускания на уровне половинной мощности и добротность контура. Сопоставить найденные значения с величинами, полученными ранее при исследовании свободных колебаний.