

**А.В.Павлов**

**Исследование режимов динамики  
генератора Чуа**

**Учебное пособие для спецпрактикума по курсу "Теория  
колебаний"**

### **Цель работы:**

Исследование динамики генератора Чуа методами численного и физического эксперимента. Проведение бифуркационного анализа. Исследование сценария перехода к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода. Анализ устойчивости режимов динамики.

### **Литература:**

1. Мандельштам Л.И. Лекции по теории колебаний. - М.: Наука, 1972.
2. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн: учебное пособие. - М.: Наука, 1984.
3. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. - Саратов. Изд-во Саратовского ун-та, 1999.
4. Постнов Д.Э. Бифуркации регулярных аттракторов. - Саратов. Изд-во ГосУНЦ "Колледж", 1996.

### **Контрольные вопросы:**

1. Каким образом анализируется устойчивость состояний равновесия? Как определяются собственные значения особых точек?
2. Что такое аттрактор, репеллер? Каковы особенности регулярных и странных (хаотических) аттракторов?
3. В чем состоит критерий устойчивости Ляпунова? Что понимают под устойчивостью по Пуассону? В каких случаях используется критерий устойчивости Пуассона?
4. В чем состоит явление мультистабильности? Что такое мультипликатор?
5. Какие режимы динамики демонстрирует цепь Чуа?
6. В чем состоит универсальность сценария перехода к хаосу?
7. Какие бифуркации демонстрирует цепь Чуа при изменении управляющих параметров?
8. Какие изменения в спектре мощности вызывают бифуркации удвоения периода?
9. Как вычисляется и что характеризует старший показатель Ляпунова?

## Краткая теория

### 1. Предварительные замечания и основные определения.

За последние десятилетия значительный прогресс был достигнут в понимании такого явления как *детерминированный хаос*. Сложные режимы колебаний в нелинейных диссипативных системах, называемые *хаотическими*, на первый взгляд имеют вид случайных процессов, однако они подчиняются определенным закономерностям. Само явление детерминированного хаоса к настоящему времени обнаружено в самых различных областях современного естествознания: в физике, радиотехнике, химии, биологии, механике и т.д. Примером радиотехнической системы со сложной динамикой, способной демонстрировать хаотические режимы колебаний, служит генератор (или цепь) Чуа. Исследование динамики данного генератора методами радиофизического и численного экспериментов представляет собой цель данной работы. Прежде чем приступить непосредственно к рассмотрению генератора Чуа, введем самые необходимые понятия нелинейной теории колебаний (нелинейной динамики), которые нам потребуются в дальнейшем.

Предметом изучения нелинейной динамики являются *динамические системы*. Под динамической системой понимают любой объект или процесс, для которого можно ввести *состояние* (как совокупность некоторых переменных, однозначно характеризующих систему в данный момент времени) и указать закон, описывающий изменение начального состояния с течением времени (*оператор эволюции*). В частности, для радиотехнической цепи состояние определяется значениями токов, протекающих в цепи, и падениями напряжения на ее элементах. Оператор эволюции, позволяющий определять будущие состояния цепи по ее начальному состоянию, записывается на основе законов Кирхгофа.

В рамках нелинейной теории колебаний исследование режимов функционирования динамических систем сводится к изучению поведения траекторий в фазовом пространстве. Это означает, что переменные, определяющие состояние системы в произвольный момент времени (например, токи и напряжения), рассматриваются в качестве координат точки в пространстве. Изменению состояния во времени соответствует движение изображающей точки вдоль некоторой линии (фазовой траектории). Переход в фазовое пространство осуществляется, как правило, для безразмерных переменных, поэтому вначале переменные состояния преобразуются к безразмерному виду. Закон эволюции в общем случае записывается следующим образом:

$$\frac{dx_j}{dt} = F_j(x_1, \dots, x_n, \mu_1, \dots, \mu_n), \quad j = 1, \dots, n, \quad (1)$$

где  $x_j$  - набор безразмерных (динамических) переменных,  $F_j$  - некоторые функции (для существования колебаний хотя бы одна из них должна быть

нелинейной),  $n$  - число переменных (уравнений),  $\mu_j$  - набор параметров, определяющих динамику системы (1).

Анализ математической модели (1) обычно начинают с поиска состояний равновесия и исследования их устойчивости. Состояния равновесия представляют собой точки в фазовом пространстве, соответствующие нулевой скорости движения:

$$\frac{dx_j}{dt} = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Характер движения фазовых траекторий в малой окрестности состояний равновесия определяется тем, являются ли они устойчивыми или неустойчивыми. Анализ на устойчивость проводится путем исследования реакции системы (1) на малое возмущение (отклонение от состояния равновесия). Обозначим через  $x_j^0$  координаты анализируемой особой точки, а через  $\bar{x}_j$  - малые добавки (отклонения по различным направлениям). Подставив в уравнения (1) вместо  $x_j \rightarrow x_j^0 + \bar{x}_j$  и ограничившись первым приближением для малых величин, получим систему уравнений следующего вида:

$$\frac{d\bar{x}_j}{dt} = \left( \frac{\partial F_j}{\partial x_1} \right) \bar{x}_1 + \left( \frac{\partial F_j}{\partial x_2} \right) \bar{x}_2 + \dots + \left( \frac{\partial F_j}{\partial x_n} \right) \bar{x}_n, \quad (3)$$

где частные производные вычисляются в точке  $x_j^0$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Данная система позволяет анализировать эволюцию во времени малых отклонений  $\bar{x}_j$ . Если они будут со временем уменьшаться, можно говорить об устойчивости состояния равновесия к малым возмущениям. Соответственно, рост во времени малых отклонений свидетельствует о неустойчивости особой точки. Чтобы выяснить вопрос об устойчивости, в системе (3) проводится экспоненциальная подстановка  $e^{s\tau}$  для переменных  $\bar{x}_j$ . Данная подстановка позволяет свести дифференциальные уравнения к алгебраическим (поскольку в этом случае  $d\bar{x}_j/dt = s\bar{x}_j$ ), после чего можно записать характеристическое уравнение следующего вида:

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial F_j}{\partial x_1} - s & \frac{\partial F_j}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_j}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_j}{\partial x_1} & \frac{\partial F_j}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_j}{\partial x_n} - s \end{bmatrix} = 0. \quad (4)$$

и найти его корни  $s_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , которые называются собственными числами (или собственными значениями) состояния равновесия и в общем случае являются комплексными  $s_i = \sigma_i + j\omega_i$ . Они определяют возрастание или затухание начального возмущения. (Возмущение возрастает, если  $Re s_i = \sigma_i > 0$ , и затухает в противоположном случае.  $Im s_i = \omega_i \neq 0$  характеризует вращательное движение вокруг особой точки.)

Важным понятием в теории динамических систем является понятие аттрактора. Под аттрактором понимается притягивающее предельное множество фазовых траекторий. Данное определение подразумевает наличие

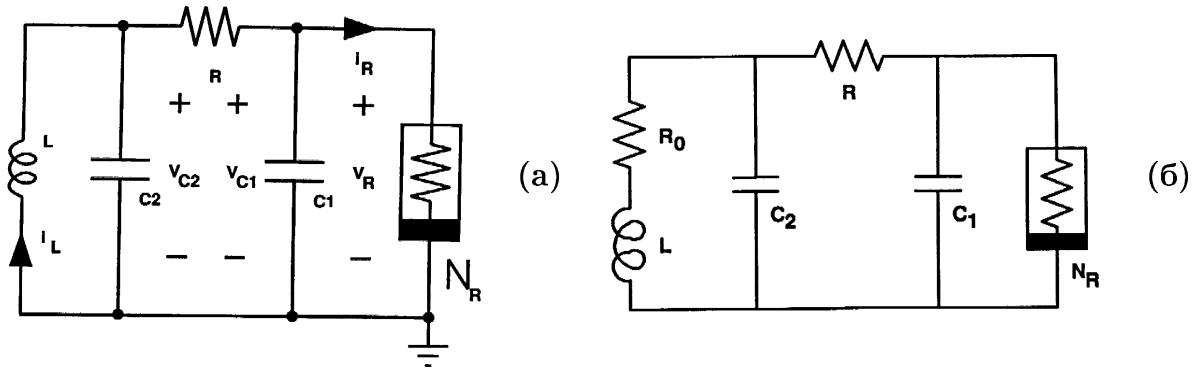
некоторой области (*бассейна притяжения*), "стартуя" из которой, фазовые траектории попадают на аттрактор. В нелинейных системах могут одновременно сосуществовать несколько аттракторов, "попадание" на тот или иной притягивающий режим определяется выбором начального состояния. В этом случае говорят о явлении *мультистабильности*. Устойчивые состояния равновесия и устойчивые периодические движения (предельные циклы в случае периодических колебаний или многомерные торы в случае квазигармонических колебаний с несколькими независимыми частотами) относятся к регулярным аттракторам. К числу притягивающих предельных множеств относятся также нерегулярные (странные или хаотические) аттракторы, которые могут наблюдаться в системах с размерностью фазового пространства  $n \geq 3$ . Для регулярных аттракторов (состояние равновесия, устойчивый предельный цикл или тор) малые отклонения от решения с течением времени затухают. Этот критерий позволяет судить об устойчивости данных решений. Иная ситуация наблюдается в случае хаотической динамики. Хаотические колебания представляют собой режим динамики, которому в фазовом пространстве соответствуют геометрически сложные множества, называемые *странными аттракторами*. Фазовые траектории на странном аттракторе напоминают запутанный клубок ниток, они не пересекаются и не замыкаются. Эти траектории являются неустойчивыми по Ляпунову (т.е. малые возмущения в их окрестности со временем нарастают), но устойчивыми по Пуассону (траектория при  $t \rightarrow \infty$  не покидает ограниченной области фазового пространства). В этом состоит одно из отличий странных аттракторов от регулярных. Регулярные аттракторы являются устойчивыми и по Ляпунову и по Пуассону. Устойчивость по Пуассону означает, что находясь бесконечно долго в ограниченной области фазового пространства, траектории неизбежно возвращаются в сколь угодно малую окрестность начальной точки. Времена возврата соответствуют периоду колебаний при периодическом движении и представляют собой случайную последовательность для режима динамического хаоса.

Существование хаотических колебаний в *нелинейных диссипативных* системах возможно только при наличии внешнего возбуждения (например, осциллятор Дуффинга) или при существовании отрицательного сопротивления (в этом случае мы имеем дело с генератором). Для генерации колебаний необходимо наличие постоянного источника энергии, диссипативной колебательной системы, нелинейного элемента и обратной связи.

## **2. Уравнения генератора.**

Рассмотрим динамику цепи Чуа, представляющей один из примеров генераторов с 1.5 степенями свободы (число степеней свободы генератора вдвое меньше размерности фазового пространства  $n$ , поэтому 1.5 степени свободы означает, что  $n = 3$ ). Схема цепи приведена на рис.1а без уче-

та резистивных потерь катушки индуктивности и на рис.1б с учетом этих потерь ( $R_0$ ):



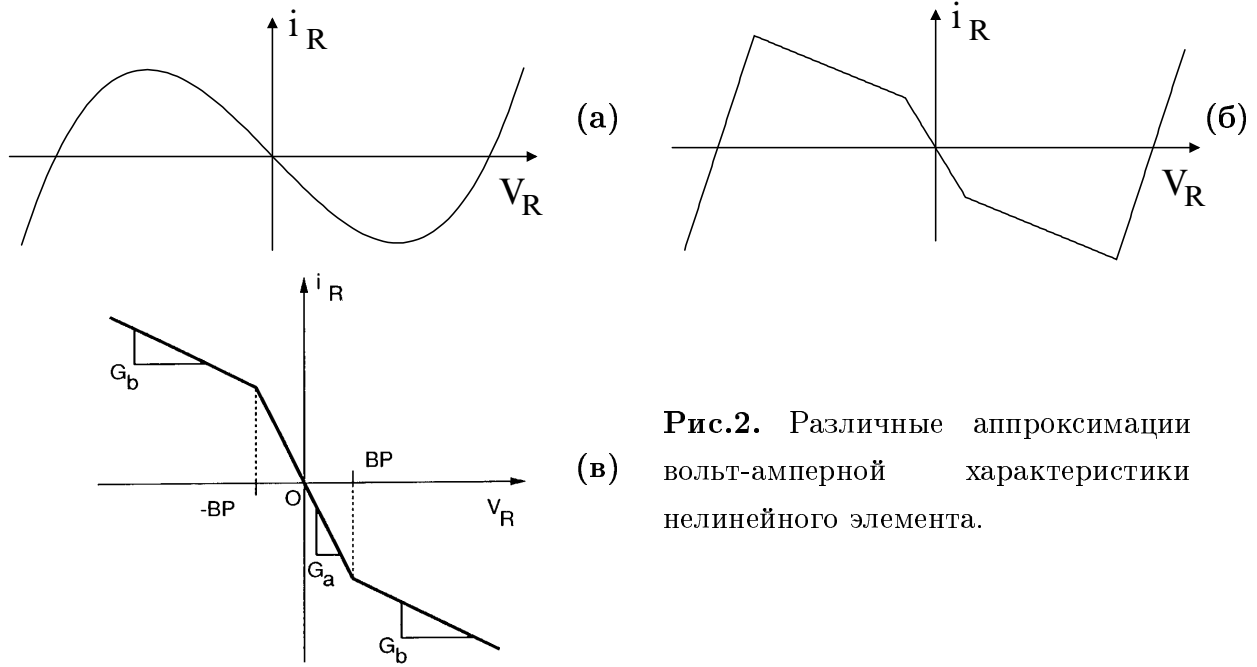
**Рис. 1.** Схема генератора Чуа без учета (а) и с учетом (б) резистивных потерь катушки индуктивности.

Наряду с катушкой индуктивности  $L$ , двумя конденсаторами  $C_1$  и  $C_2$ , резистором  $R$ , она включает нелинейный элемент  $N_R$ . Без учета  $R_0$  процессы, протекающие в цепи Чуа, описываются следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dV_{C_1}}{dt} &= \frac{1}{R}(V_{C_2} - V_{C_1}) - f(V_{C_1}), \\ C_2 \frac{dV_{C_2}}{dt} &= \frac{1}{R}(V_{C_1} - V_{C_2}) + i_L, \\ L \frac{di_L}{dt} &= -V_{C_2}, \end{aligned} \quad (5)$$

записанной на основе законов Кирхгофа, где функция  $f(V_{C_1})$  представляет собой аппроксимацию вольт-амперной характеристики нелинейного элемента. В качестве  $f(V_{C_1})$  можно рассматривать гладкую функцию (например, полином 3-й степени) - рис. 2а. Гладкая функциональная зависимость в большей степени соответствует истинному виду вольт-амперной характеристики элемента  $N_R$ . С целью упрощения анализа математической модели цепи можно выбрать кусочно-линейную аппроксимацию (например, 5-сегментную) - рис. 2б. Для практических целей может использоваться любая из этих аппроксимаций. Каждая из них позволяет описать большинство интересных явлений, наблюдаемых в реальной цепи. Кусочно-линейная форма вольт-амперной характеристики нелинейного элемента  $N_R$  имеет ряд преимуществ по сравнению с полиномиальной зависимостью, поскольку дает возможность проводить аналитическое исследование модели (для каждого сегмента записывается линейная система уравнений, которую можно решать без помощи компьютера). В то же время, кусочно-линейная функция может не "ухватить" некоторые особенности реальной цепи Чуа, например, возникновение колебаний с малой амплитудой при бифуркации Андронова-Хопфа. Для исследования большинства явлений в

динамике реальной цепи Чуа очень часто ограничиваются более простой аппроксимацией нелинейного элемента – 3-сегментной кусочно-линейной характеристикой (рис. 2в).



**Рис.2.** Различные аппроксимации вольт-амперной характеристики нелинейного элемента.

Рассмотрим последний случай более подробно. Функция  $f(V_{C_1})$  имеет вид:

$$f(V_{C_1}) = \begin{cases} G_b V_{C_1} + (G_a - G_b) B_p, & V_{C_1} \geq B_p \\ G_a V_{C_1} & |V_{C_1}| \leq B_p \\ G_b V_{C_1} - (G_a - G_b) B_p, & V_{C_1} \leq -B_p \end{cases} \quad (6)$$

Переход к безразмерным уравнениям осуществляется путем замен переменных:

$$\begin{aligned} x &= \frac{V_{C_1}}{B_p} & y &= \frac{V_{C_2}}{B_p} & z &= \frac{i_L}{B_p} R \\ \tau &= \frac{t}{RC_2} & a &= RG_a & b &= RG_b \\ \alpha &= \frac{C_2}{C_1} & \beta &= \frac{R^2 C_2}{L} \end{aligned} \quad (7)$$

В результате получим традиционную форму записи уравнений генератора Чуа:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \alpha(y - x - f(x)), \\ \frac{dy}{d\tau} &= x - y + z, \\ \frac{dz}{d\tau} &= -\beta y, \end{aligned} \quad (8)$$

$$f(x) = \begin{cases} bx + a - b & x \geq 1 \\ ax & |x| \leq 1 \\ bx - a + b & x \leq -1 \end{cases} \quad (9)$$

где  $x, y, z$  - фазовые переменные,  $\alpha, \beta, a, b$  - параметры ( $\alpha > 0, \beta > 0, a < 0, b < 0$ ). Выбор иной аппроксимации меняет функцию  $f(x)$ .

### 3. Состояния равновесия и их устойчивость.

Для нахождения состояний равновесия приравняем нулю правые части системы (8). В результате получим 3 различных решения:

$$O = (0, 0, 0), \quad P^+ = \left(\frac{b-a}{b+1}, 0, -\frac{b-a}{b+1}\right), \quad P^- = \left(-\frac{b-a}{b+1}, 0, \frac{b-a}{b+1}\right). \quad (10)$$

Чтобы проанализировать их на устойчивость, введем малые отклонения  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  по различным направлениям от анализируемой особой точки ( $O, P^+$  или  $P^-$ ). Система уравнений для малых возмущений примет вид:

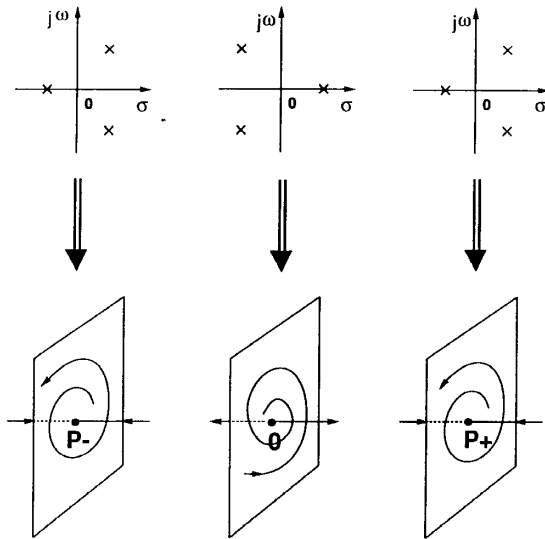
$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{d\tau} &= \alpha(\bar{y} - (1+c)\bar{x}), \\ \frac{d\bar{y}}{d\tau} &= \bar{x} - \bar{y} + \bar{z}, \\ \frac{d\bar{z}}{d\tau} &= -\beta\bar{y}, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $c = a$  для точки  $O$ ,  $c = b$  для точек  $P^+$  и  $P^-$ . Характеристическое уравнение будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} -\alpha(1+c) - s & \alpha & 0 \\ 1 & -1-s & 1 \\ 0 & -\beta & -s \end{bmatrix} &= 0 \rightarrow \\ \rightarrow s^3 + s^2(\alpha c + \alpha + 1) + s(\alpha c + \beta) + \beta\alpha(1+c) &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Решение данного уравнения в общем случае позволяет найти 3 различных корня  $s_i$  для каждого состояния равновесия ( $i = 1, 2, 3$ ). Заметим, что все состояния равновесия  $O, P^+$  и  $P^-$  в режиме генерации колебаний представляют собой седло-фокусы. Последнее означает, что у каждой из этих точек существует хотя бы одно собственное значение с положительной действительной частью  $\sigma_i > 0$  и существует хотя бы одно собственное значение с отрицательной действительной частью  $\sigma_i < 0$ . Кроме того, два из трех корней характеристического уравнения являются комплексно-сопряженными, а у третьего корня мнимая часть равна нулю. Поведение фазовой траектории в окрестности состояний равновесия  $O, P^+$  и  $P^-$ , а также их собственные значения схематично представлены на рис.3 в случае, когда параметры цепи Чуа были выбраны следующими:  $\alpha = 9, \beta = 14\frac{2}{7}, a = -\frac{8}{7}, b = -\frac{5}{7}$ .





**Рис.3.** Схематичное изображение собственных значений и движения фазовой траектории вблизи особых точек.

У состояния равновесия в начале координат ( $O$ ) один корень является действительным и положительным, характеризую направление, в котором начальное возмущение будет возрастать. Пара комплексно-сопряженных корней с отрицательной действительной частью определяет наличие вращательного движения и скручивание траектории к особой точке в плоскости вращения. У каждого из двух других состояний равновесия  $P^+$  и  $P^-$ , напротив, движение является неустойчивым в плоскости вращения (действительные части пары комплексно-сопряженных корней больше нуля), в то же время существует направление, в котором фазовая траектория приближается к особой точке.

Поскольку собственные числа корней характеристического уравнения (12) зависят от параметров системы  $\alpha, \beta, a, b$ , изменение параметров может приводить к смене типа устойчивости – в этом случае говорят о бифуркациях особых точек.

### 3. Режимы динамики генератора Чуа.

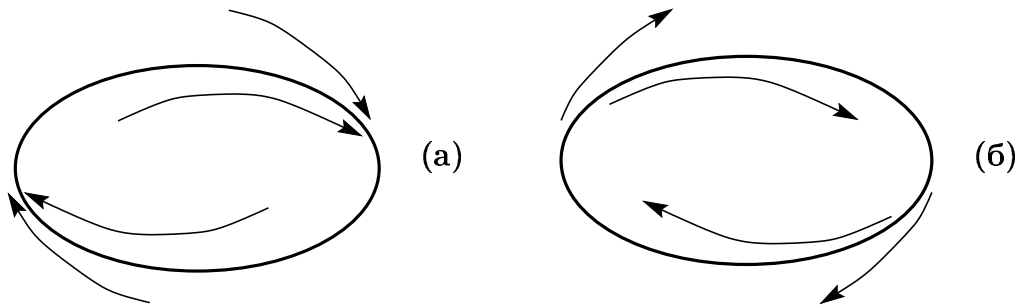
Все решения математической модели генератора Чуа можно разделить на устойчивые и неустойчивые. Устойчивые режимы можно наблюдать как в физическом эксперименте (реальной радиотехнической цепи), так и численно (анализируя математическую модель). Неустойчивые режимы динамики в физическом эксперименте не наблюдаются, и их можно обнаружить только путем анализа уравнений цепи. Рассмотрим подробнее динамику генератора.

#### 3.1. Предельные циклы.

Простейшими режимами колебаний являются периодические решения, которым в фазовом пространстве соответствуют предельные циклы – изолированные замкнутые траектории. (Изолированность периодического решения означает существование окрестности, не содержащей других перио-

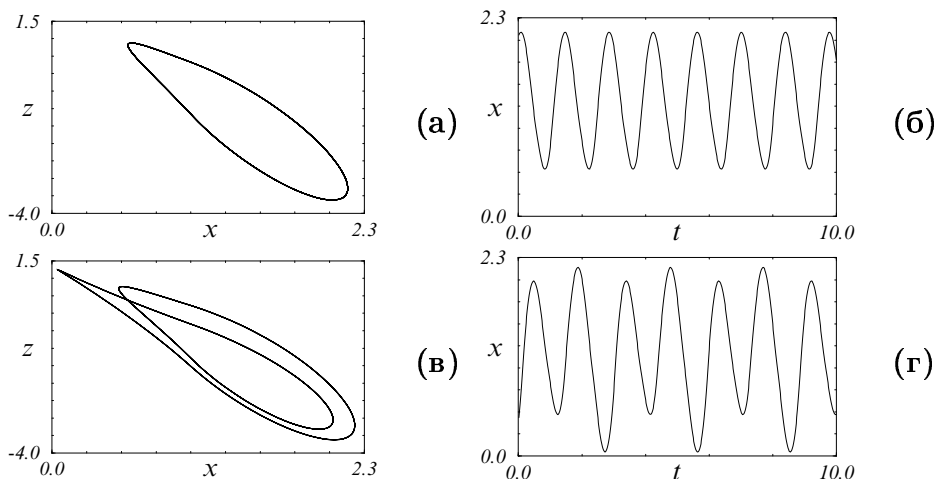
дических решений.)

Предельный цикл может быть аттрактором (т.е. притягивающим предельным множеством, в окрестности которого любые малые отклонения будут затухать - рис.4а), репеллером (отталкивающим предельным множеством - рис.4б) или седлом (т.е. быть устойчивым по одним направлениям и неустойчивым по другим). Предельные циклы, являющиеся аттракторами и репеллерами (рис.4), меняются ролями при инверсии времени ( $t \rightarrow -t$ ).



**Рис.4.** Устойчивый (а) и неустойчивый (б) предельные циклы.

Как уже отмечалось, в физическом эксперименте мы можем наблюдать только устойчивые режимы колебаний (притягивающие предельные циклы). Амплитуда и форма колебаний зависят от управляющих параметров системы ( $\alpha, \beta$ ) и претерпевают изменения при их вариации. Смена параметров может приводить к бифуркациям предельных циклов – качественной перестройке фазового портрета. Среди множества возможных бифуркаций мы пока отметим бифуркацию удвоения периода, играющую ключевую роль в одном из "сценариев" возникновения динамического хаоса. Визуально, мы фиксируем данную бифуркацию, если при изменении управляющего параметра период колебаний устойчивого предельного цикла становится вдвое больше по сравнению с периодом колебаний  $T_0$  до точки бифуркации – возникает режим колебаний удвоенного периода  $2T_0$  (рис. 5).



**Рис.5.** Периодические колебания с периодом  $T_0$  (а,б) и периодом  $2T_0$  (в,г).

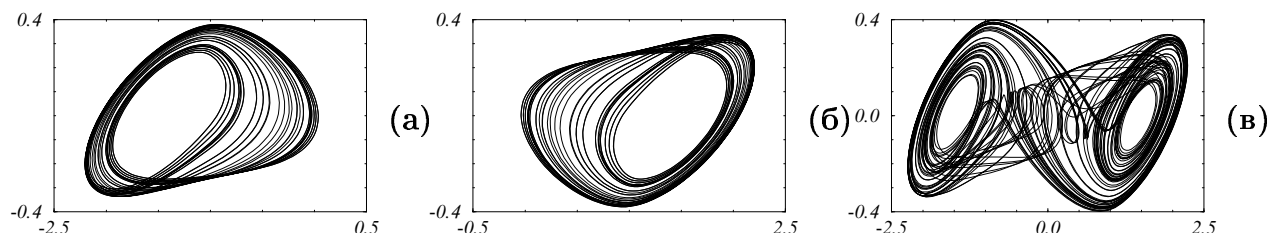
Если и дальше продолжать менять параметр, то бифуркацию удвоения будет претерпевать режим  $2T_0$ , в результате чего наблюдаются колебания с периодом  $4T_0$ . Дальнейший рост параметра приводит к появлению режимов  $8T_0, 16T_0, \dots$ . Происходит каскад бифуркаций удвоения периода, приводящий к хаотическому режиму колебаний. Данный "сценарий" возникновения хаоса является универсальным для систем, демонстрирующих бифуркации удвоения, и наблюдается во многих математических моделях. Универсальность его состоит в общих закономерностях и в возможности прогнозировать бифуркационные значения параметров. Если обозначить через  $\alpha_k$  значение управляющего параметра, соответствующее  $k$ -й бифуркации удвоения, то для всех динамических систем, демонстрирующих данный "сценарий" перехода к хаосу, существует сходимость к некоторому конечному пределу:

$$\delta = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{k+1} - \alpha_k}{\alpha_{k+2} - \alpha_{k+1}} = 4.669201\dots$$

Более строгий анализ бифуркаций предельных циклов требует введение понятия мультипликаторов периодического решения  $p_i$ . Они характеризуют изменение первоначального возмущения периодического движения по различным направлениям через период колебаний  $T_0$ . Величина возмущения через период определяется как произведение первоначального возмущения и соответствующего мультипликатора  $p_i$ . Для затухания возмущения необходимо  $|p_i| < 1$ . Бифуркация удвоения периода соответствует обращению одного из мультипликаторов  $p_1$  в  $-1$ . Это означает, что малое возмущение  $\epsilon$  в соответствующем направлении через период  $T_0$  меняет направление на противоположное  $\epsilon_T = \epsilon p_1 = -\epsilon$ . Через два оборота ( $2T_0$ ) траектория замыкается, вернувшись в исходную точку  $\epsilon_{2T} = \epsilon p_1 p_1 = \epsilon$ .

### 3.2. Хаотические колебания.

В цепи Чуа наблюдается большое разнообразие хаотических режимов колебаний: аттракторы спирального типа (движение в фазовом пространстве осуществляется вокруг каждого из состояний равновесия  $P^+$  и  $P^-$  отдельности) - рис.ба,б, аттрактор, называемый "двойным завитком" ("double scroll" движение охватывает одновременно все особые точки) - рис.бв и другие.



**Рис.6.** Хаотические аттракторы спирального типа (а,б), симметричные относительно начала координат и аттрактор "double scroll"(в).

Исследуемая цепь обладает симметрией относительно начала координат: уравнения математической модели инвариантны к замене переменных  $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z)$ . В силу этого симметрией будут обладать аттракторы, реализующиеся в цепи Чуа. Проводя анализ режимов функционирования системы, мы будем сталкиваться с явлением мультистабильности: "попадание" на тот или иной аттрактор будет определяться выбором начальных условий.

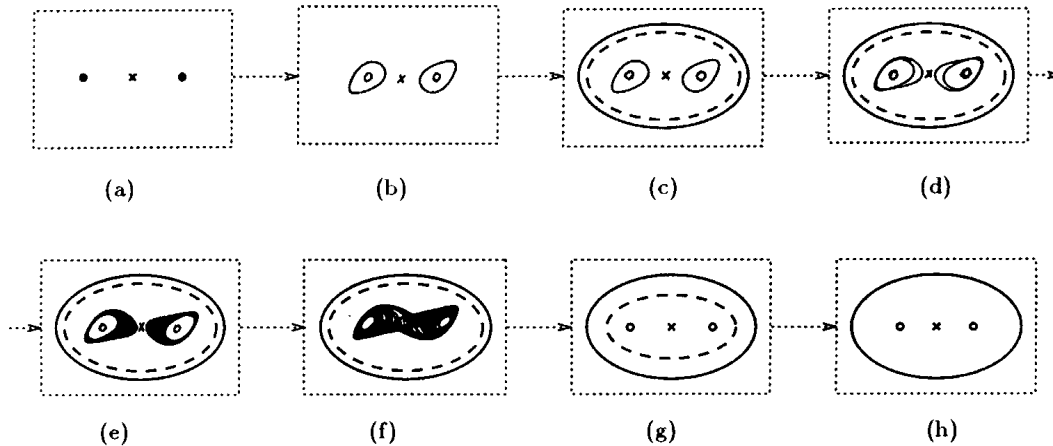
Отметим, что принципиальное влияние на динамику генератора Чуа оказывают некоторые особые траектории, которые не наблюдаются в физическом эксперименте и могут быть зафиксированы только численно при определенных значениях параметров. К их числу относятся, в частности, петля сепаратрисы седло-фокуса (траектория, соединяющая состояние равновесия с ним же самим - ее возникновение и разрушение при определенных условиях приводит к образованию хаотического аттрактора) и двойная петля сепаратрисы седло-фокуса (более сложная структура, соединяющая два различных состояния равновесия, которая порождает и более сложный тип хаотического аттрактора - "двойной завиток").

#### 4. Бифуркационный анализ.

С целью ознакомления с основными бифуркациями, которые демонстрирует цепь Чуа, проведем вначале однопараметрический бифуркационный анализ математической модели с гладкой нелинейной характеристикой. Рассмотрим систему (8), в которой

$$f(x) = \frac{1}{16}x^3 - \frac{7}{6}x, \quad (13)$$

а параметр  $\beta$  зафиксирован ( $\beta = 14$ ). Вариация  $\alpha$  приводит к изменениям режима функционирования исследуемой динамической системы. Схематически, различные бифуркации при увеличении  $\alpha$  представлены на рис. 7.



**Рис.7.** Схематичное представление различных бифуркаций в генераторе Чуа с гладкой нелинейной характеристикой. Параметр  $\beta = 14$ , параметр  $\alpha$  варьируется от 6 до 14.

- Проанализируем вначале, что будет происходить с состояниями равновесия  $P^+$  и  $P^-$  при увеличении параметра  $\alpha$ . Пока  $\alpha < 6.578$ , эти особые точки являются устойчивыми (они схематично изображены черными кружочками на рис.7а). Собственные значения каждого состояния равновесия ( $P^+$  и  $P^-$ ) следующие:  $Re s_1 < 0$ ,  $Im s_1 = 0$ ,  $Re s_{2,3} < 0$ ,  $Im s_{2,3} \neq 0$ .

- При  $\alpha = 6.578$  происходит бифуркация Андронова-Хопфа (бифуркация рождения предельного цикла): возникают периодические колебания с очень малой амплитудой. В зависимости от выбора начальных условий фазовая траектория будет вращаться вокруг той или иной особой точки по замкнутой траектории (рис.7б: белые кружочки - состояния равновесия, траектории вокруг них - возникающие в ходе бифуркаций предельные циклы). В силу симметрии анализ можно проводить для одного из состояний равновесия  $P^+$  или  $P^-$  – для другого будет полная аналогия. Размах колебаний (соответственно, размер цикла) будет плавно увеличиваться с дальнейшим ростом параметра (это характерно для мягкой бифуркации Андронова-Хопфа). Момент бифуркации характеризуется тем, что действительные части пары комплексно-сопряженных собственных чисел состояния равновесия  $P^+$  (как и  $P^-$ ) становятся равными нулю ( $Re s_{2,3} = 0$ ,  $Im s_{2,3} \neq 0$ ). Сразу после бифуркации  $Re s_{2,3} > 0$ ,  $Im s_{2,3} \neq 0$  - движение становится неустойчивым в плоскости вращения, и траектории, "раскручиваясь", из окрестности состояния равновесия попадают на предельный цикл.

- Дальнейший рост параметра приводит к седло-узловой бифуркации ( $\alpha = 7.302$ ), состоящей в рождении пары циклов, охватывающих все особые точки (рис.7в), один из которых является устойчивым (обозначен сплошной линией), а другой - седловым (пунктир).

- При  $\alpha = 8.192$  периодические движения вокруг особых точек  $P^+$ ,  $P^-$

претерпевают бифуркации удвоения (рис.7г). Это соответствует обращению в -1 одного из мультипликаторов предельного цикла.

- Продолжая увеличивать параметр  $\alpha$ , мы зафиксируем каскад бифуркаций удвоения периода, приводящий к возникновению хаотического режима динамики (аттрактора спирального типа - рис.7д: траектория охватывает одно из состояний равновесия, "попадание" на тот или иной притягивающий режим определяется начальными условиями).

- При  $\alpha = 8.785$  происходит "склеивание" (или объединение) хаотических аттракторов: образуется "двойной завиток" ("double scroll") - рис.7е.

- Последующее увеличение параметра приводит к тому, что седловой предельный цикл начинает приближаться к аттрактору "double scroll"; при  $\alpha = 10.769$  они "сталкиваются", в результате чего хаотический режим исчезает. Седловой цикл при этом не претерпевает бифуркаций; но если ранее он разделял области притяжения различных аттракторов, то теперь этого уже не происходит: единственным аттрактором остается устойчивый предельный цикл.

- При достижении значения  $\alpha = 13.380$  седловой цикл исчезает в результате седло-узловой бифуркации (он "сливается" с устойчивым периодическим циклом, который не изображен на рис.7(в-з) в целях упрощения бифуркационного анализа).

Мы проанализировали кратко некоторые режимы функционирования, которые демонстрирует система (8) при значении параметра  $\beta = 14$  (но не все). В частности, в области динамического хаоса не рассмотрены небольшие интервалы по параметру  $\alpha$ , которые соответствуют "окнам периодичности". Более строгий подход к изучению динамики системы требует проведения двухпараметрического бифуркационного анализа. В этом случае мы фиксируем уже не точки бифуркаций, а линии на плоскости двух управляющих параметров, при переходе через которые происходят качественные изменения режима функционирования. Построение множества бифуркационных линий дает наглядное представление о динамике системы, в то время как проведение однопараметрического анализа часто недостаточно для глубокого понимания ее поведения и возможностей управления им. (В рамках настоящей работы предлагается провести самостоятельно бифуркационный анализ системы (8) с 3-сегментной кусочно-линейной характеристикой).

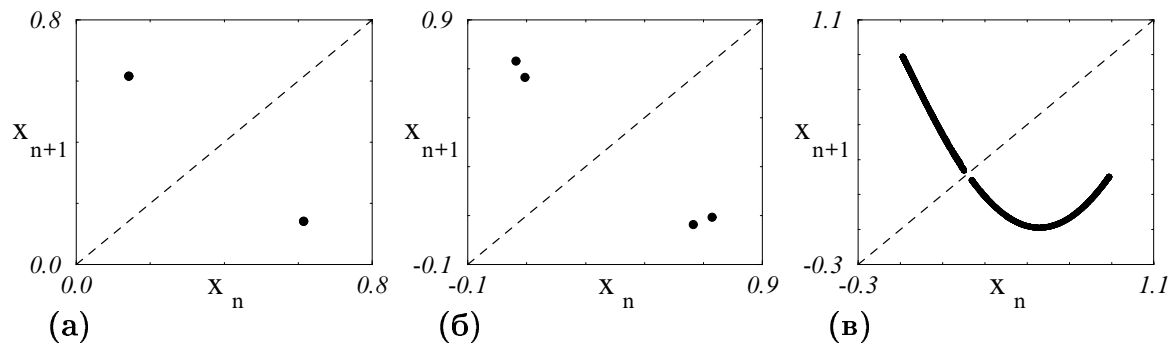
## **5. Методы анализа сложных режимов колебаний.**

### **5.1. Отображение Пуанкаре.**

Визуальный анализ хаотической динамики в 3-х мерном фазовом пространстве является не очень наглядным: мы наблюдаем проекцию на плоскость сложного движения изображающей точки, в этом случае может быть проблематичным исследование геометрических особенностей предельного

множества. Существует более удобный в ряде случаев метод анализа хаотических колебательных режимов – введение секущей Пуанкаре. Секущая представляет собой плоскость (или поверхность) в фазовом пространстве, выбранную таким образом, чтобы все траектории пересекали ее трансверсально (под ненулевым углом). На ней фиксируется множество точек, соответствующих последовательным пересечениям секущей Пуанкаре фазовой траекторией в одном направлении. Замкнутые траектории образуют конечные последовательности точек в секущей (одна точка - для предельного цикла с периодом  $T_0$ , две - для цикла удвоенного периода  $2T_0$  и т.д.), непериодическим колебательным режимам соответствуют бесконечные последовательности точек.

Если зафиксировать одну из координат последовательных пересечений секущей Пуанкаре:  $x_1, x_2, x_3, \dots$ , можно построить отображение Пуанкаре, которое называют отображением последования (зависимость  $x_{n+1}$  от  $x_n$ ). Переход к отображению Пуанкаре понижает размерность рассматриваемого множества на единицу, что делает более наглядным анализ геометрических особенностей аттрактора (из 3-х мерного пространства мы переходим на плоскость). Отображения последования для некоторых режимов представлены на рис. 8.



**Рис.8.** Отображения последования для периодических колебаний с периодом  $2T_0$  (а),  $4T_0$  (б) и хаотического аттрактора спирального типа (в).

### 5.2. Спектральный и корреляционный анализ.

Наглядную информацию об изменениях режимов динамики при переходе к хаосу позволяет получить расчет спектра мощности одномерной реализации (например,  $x(t)$ ). Как известно, если анализируется периодический сигнал, то его можно разложить в ряд Фурье (сходящийся при некоторых условиях). Детерминированный непериодический сигнал  $x(t)$ , удовлетворяющий условию абсолютной интегрируемости

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt < \infty, \quad (14)$$

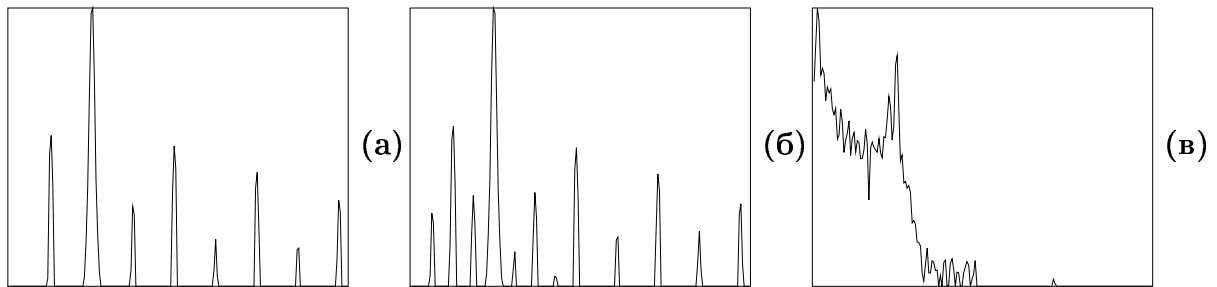
может быть представлен интегралом Фурье:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_x(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (15)$$

$$F_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (16)$$

где  $F_x(\omega)$  называют спектральной плотностью амплитуды или спектром процесса  $x(t)$ . В радиофизике обычно анализируют не  $F_x(\omega)$ , а спектральную плотность или спектр мощности  $S_x(\omega)$ . Подобно  $F_x(\omega)$ , спектр мощности  $S_x(\omega)$  характеризует гармонический состав исследуемого процесса, но не амплитудный спектр, а энергетический. Поэтому определение частотного состава сигнала  $x(t)$  через спектральную плотность мощности является более физическим (поскольку измерительные аналоговые приборы работают на основе определения величины энергии процесса, а не амплитуды).

Спектр периодических колебаний (периода  $T_0$  - рис.5б) содержит основную или базовую частоту  $\omega_0 = 2\pi/T_0$  и ее гармоники  $k\omega_0$ . Бифуркация удвоения периода сопровождается появлением субгармоник половинной частоты  $n\omega_0/2$  (рис.9а); их амплитуды растут при удалении от точки бифуркации и достигают насыщений к моменту следующей бифуркации удвоения. Учетверение периода сопровождается появлением спектральных компонент  $n\omega_0/4$  (рис.9б), и аналогичная картина повторяется при последующих бифуркациях. Хаотический аттрактор, возникающий на базе каскада удвоений, наследует характерные черты механизма перехода к хаосу.



**Рис.9.** Спектры мощности периодических колебаний: периода  $2T_0$  (а) и периода  $4T_0$  (б) и спектр мощности хаотических колебаний (аттрактор "double scroll") - (в).

Наряду со спектральным анализом особенности режима динамики могут исследоваться с помощью автокорреляционной функции (АКФ)  $\psi_x$ , характеризующей статистическую взаимосвязь (степень линейной зависимости) значений процесса  $x(t)$  в различные моменты времени. Для стационарных процессов с нулевым средним значением АКФ представляет собой усредненное по времени произведение:

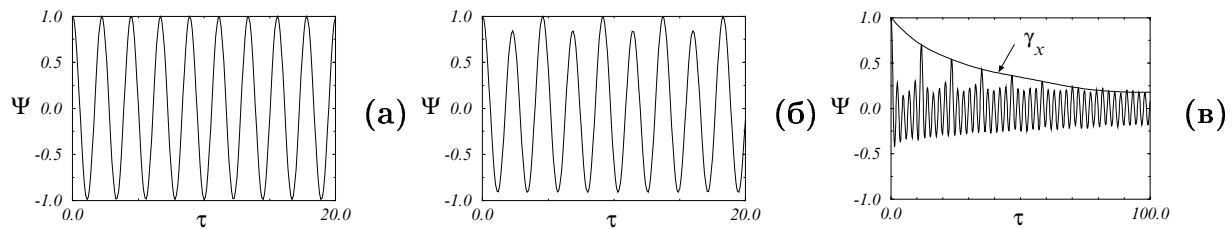
$$\psi_x(\tau) = \langle x(t)x(t + \tau) \rangle \quad (17)$$

Для периодических процессов с периодом  $T_0$ :  $\psi_x(0) = \psi_x(\tau = T_0) = \psi_x(\tau = nT_0)$ , т.е. АКФ будет также периодической функцией (рис.10а).



Аналогичная картина (наличие повторяемости в поведении АКФ) наблюдается при бифуркациях удвоения периода (рис.10б) до перехода к хаосу. В хаотическом режиме огибающая автокорреляционной функции  $\gamma_x(\tau)$  будет спадать до нуля (рис.10в), причем, скорость стремления ее к нулю служит важной количественной характеристикой: чем быстрее спадает  $\gamma_x(\tau)$ , тем более хаотичен режим. Обычно для того, чтобы охарактеризовать скорость спадания огибающей, используют время корреляции  $\tau_k$  - время, за которое  $|\gamma_x(\tau)|$  уменьшится в  $e$  раз:

$$\frac{|\gamma_x(\tau_k)|}{|\gamma_x(0)|} = \frac{1}{e} \quad (18)$$



**Рис.10.** Автокорреляционные функции периодических колебаний: периода  $T_0$  (а) и периода  $2T_0$  (б) и хаотических колебаний (в).

### 5.3. Показатель Ляпунова.

Важной характеристикой степени хаотичности служит старший показатель Ляпунова  $\lambda$ , который представляет собой количественный критерий неустойчивости фазовой траектории, принадлежащий аттрактору. В случае странного аттрактора  $\lambda > 0$ , и малое отклонение от траектории  $D(0)$  со временем (в среднем) увеличивается по экспоненциальному закону вида:

$$D(t) = D(0)e^{\lambda t} \quad (19)$$

Для предельного цикла любого периода  $\lambda = 0$ . Таким образом, появление положительного знака показателя Ляпунова характеризует наличие хаотической динамики. Величина  $\lambda$  может интерпретироваться как характеристика средней скорости "разбегания" траекторий на аттракторе, поскольку малое начальное возмущение  $D(0)$  можно рассматривать как расстояние между соседними фазовыми траекториями.

Анализ неустойчивости в фазовом пространстве усложняется, если в распоряжении экспериментатора есть временная зависимость только одной из координат генератора Чуа  $x(t)$ , а две другие фазовые переменные не фиксируются. В этом случае расчет  $\lambda$  предполагает предварительную процедуру реконструкции аттрактора. Не вдаваясь в детали, отметим, что если рассмотреть множество векторов  $[x(t), x(t + \tau), \dots, x(t + (m - 1)\tau)]$  в качестве координат изображающей точки в пространстве некоторой размерности  $m$  для различных моментов времени  $t$  (в этом и состоит реконструкция), то это множество при определенных условиях будет сохранять

характеристики исходного аттрактора в пространстве  $[x(t), y(t), z(t)]$ . Поэтому анализ неустойчивости может проводиться по временной зависимости одной из координат состояния исследуемой системы. Вычисление скорости экспоненциального "разбегания" изначально расположенных рядом точек в фазовом пространстве, а затем усреднение этой величины вдоль фазовой траектории (т.е. для различных точек) позволяет определить искомое значение  $\lambda$ .

## Экспериментальная часть.

Экспериментальная установка включает генератор хаоса, магазин сопротивлений и компьютер (для обработки результатов). Для начала выполнения работы необходимо запустить программу "praktik.bat". Ряд необходимых комментариев (обозначения функциональных клавиш) приведен в меню. Чтобы выйти в меню из программы, нужно нажать клавишу "m". Задания, приведенные ниже, включают проведение аналитического исследования модели генератора (N. 1 и 2), физический эксперимент (N. 3 и 4) и численный (компьютерный) эксперимент (N. 5).

### Задания:

1. На основе законов Кирхгофа записать уравнения, описывающие динамику цепи Чуа с учетом резистивных потерь катушки индуктивности (схема изображена на рис. 16). Преобразовать уравнения к следующему виду:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\tau} &= \alpha(y - x - f(x)), \\ \frac{dy}{d\tau} &= x - y + z, \\ \frac{dz}{d\tau} &= -\beta y - \gamma z,\end{aligned}\tag{20}$$

по аналогии с системой (5). Определить, чему соответствует параметр  $\gamma$  в системе уравнений (20).

2. Найти координаты состояния равновесия системы (8) для случая полиномиальной аппроксимации (13). Записать характеристическое уравнение для каждого из них. Определить собственные числа состояния равновесия в начале координат при значениях управляющих параметров  $\alpha = 6$ ,  $\beta = 14$ .

3. Провести бифуркационный анализ системы (8) в физическом эксперименте (на лабораторной установке). Для нахождения точек бифуркаций рекомендуется фиксировать емкость ( $C_1$ ) и менять сопротивление. (Чтобы значения бифуркационных параметров были пересчитаны в  $\alpha$  и  $\beta$ , можно зайти в меню и записать соответствующие значения  $C_1$  и  $R$  в файл с помощью клавиши "f". Значения остальных параметров:  $L=18$  мГн,  $C_2=100$  нФ). Найти:

- а) бифуркацию рождения цикла;
- б) бифуркации удвоения периода;
- в) бифуркацию "склеивания" аттракторов спирального типа - образования аттрактора "double scroll";
- г) бифуркацию исчезновения "double scroll".

4. Исследовать сценарий перехода к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода. С этой целью:

а) При указанных преподавателем значениях управляющих параметров проанализировать изменения в спектре мощности, АКФ, а также изменения реализаций и фазовых портретов. Зарисовать характерные зависимости;

б)\* Провести расчеты старшего ляпуновского показателя при изменении управляющих параметров. Определить границу перехода к хаосу. (Учитывая, что для повышения скорости вычислений расчет старшего ляпуновского показателя проводится по относительно коротким участкам временной реализации, переход к хаосу фиксировать при превышении значения  $10^{-2}$ ).

5\*. Построить линии бифуркаций, указанные в задании 3, в численном эксперименте (на компьютере). Параметр  $\alpha$  менять в диапазоне от 5 до 15, параметр  $\beta$  - от 5 до 25.