

В.В. Астахов, С.А. Коблянский, А.В. Шабунин

# Осциллятор Дуффинга

2007

УДК 53.182(076.5)

**Астахов В.В., Коблянский С.А., Шабунин А.В.** Осциллятор Дуффинга: Учебное пособие для студентов вузов. 2007.

Учебное пособие составлено в соответствии с программой по курсу основы теории колебаний для физического факультета университета. Предназначено для теоретического и экспериментального ознакомления с простейшими нелинейными явлениями - ангармоничностью, неизохронностью, мультистабильностью, нелинейным резонансом, а также для обучения студентов методам анализа нелинейных систем. Основные эффекты изучаются на одной из базовых моделей нелинейной динамики - осцилляторе Дуффинга. Учебное пособие содержит краткие теоретические сведения, контрольные вопросы и лабораторные задания, выполняемые на специально разработанном комплексе программ, использующих среду "Labview". Приведен список рекомендуемой литературы.

Предназначено для студентов вузов.

Рекомендовано к изданию кафедрой радиофизики и нелинейной динамики СГУ.

# Оглавление

1. Введение
2. Примеры колебательных систем, представляющих собой осциллятор Дуффинга
3. Состояния равновесия их устойчивость
4. Исследование консервативного автономного осциллятора Дуффинга
5. Явления неизохронности и ангармоничности в осцилляторе Дуффинга
6. Явление нелинейного резонанса в осцилляторе Дуффинга
7. Литература

# 1 Введение

Теорию колебаний начинают изучать, как правило, с изучения линейного осциллятора, уравнение которого:

$$x'' + 2\alpha x' + \omega_0^2 x = F(t) \quad (1.1)$$

- представляет собой линейное дифференциальное уравнение второго порядка. Здесь переменная  $x$  характеризует состояние осциллятора в каждый момент времени (обычно это - ток, напряжение, заряд и т.п.),  $\alpha$  - коэффициент диссипации,  $\omega_0$  - собственная частота,  $F(t)$  - внешнее воздействие. Линейный осциллятор - простейшая колебательная система (базовая модель), позволяющая исследовать такое фундаментальное явление, как резонанс, то есть эффект резкого увеличения амплитуды колебаний при совпадении частоты воздействия с собственной частотой системы. Однако, линейный характер этой модели в ряде случаев оказывается сдерживающим фактором: он не позволяет рассматривать такие наблюдающиеся в природе и технике явления, как неизохронность и ангармоничность колебаний. Для их анализа требуется усложнение уравнения осциллятора (1.1) за счет учета нелинейных свойств реальных колебательных систем. Сделать это можно, например, учтя зависимость коэффициента диссипации  $\alpha$  или собственной частоты  $\omega_0$  от интенсивности (амплитуды) колебаний в осцилляторе. В первом случае нелинейность носит “диссипативный”, а во втором - “реактивный” характер. Обычно в реальных системах присутствуют обе нелинейности, однако, для проведения анализа бывает удобно рассматривать влияние этих факторов по отдельности. Например, если мы учтем зависимость диссипации от мощности колебаний (то есть от квадрата динамической переменной):  $\alpha(x) = -(\varepsilon - x^2)$ , то получим хорошо известное в радиофизике уравнение генератора Ван-дер-Поля:

$$x'' - (2\varepsilon - x^2)x' + \omega_0^2 x = F(t) \quad (1.2)$$

. Если учесть зависимость собственной частоты от мощности:  $\omega_0^2(x) = \omega_0^2(1 + \xi x^2)$  то получим другую базовую модель нелинейного осциллятора - осциллятор Дуффинга:

$$x'' + \alpha x' + \omega_0^2(1 + x^2)x = F(t) \quad (1.3)$$

На примере этой модели удобно изучать такие эффекты нелинейных колебательных систем, как неизохронность, ангармоничности и мультистабильность. Таким образом, осциллятор Дуффинга - простейшая модель осциллятора с реактивной нелинейностью.

## 2 Примеры колебательных систем, представляющих собой осциллятор Дуффинга

Осциллятор Дуффинга или осциллятор с кубической нелинейностью является одной из наиболее распространенных моделей теории колебаний. Уравнение осциллятора имеет вид:

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta x + \gamma x^3 = 0. \quad (2.1)$$

Его можно получить, рассматривая, к примеру, колебания математического маятника при небольших углах отклонения (рис. 2.1а), колебания грузика на пружине с нелинейной возвращающей силой, расположенного на плоской горизонтальной поверхности (рис. 2.1б). Данное уравнение также можно получить при описании движения частицы в потенциале из двух ям (рис. 2.1с). Рассмотрим перечисленные примеры более подробно.

### 2.1 Математический маятник при небольших углах отклонения

Математический маятник представляет собой грузик малого размера массой  $m$ , подвешенный на длинной тонкой нити  $l$  (рис. 2.1а). Предполагается, что масса маятника сосредоточена в грузике и нить является нерастяжимой. Запишем уравнение движения без учета трения

$$m\ddot{\alpha} = -P_1,$$

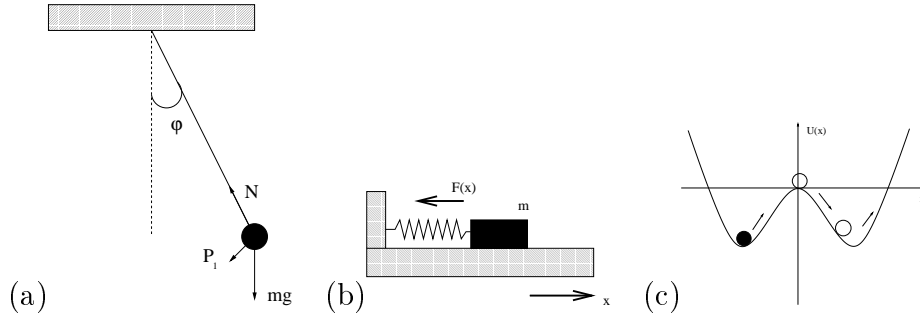


Рис. 2.1: Примеры колебательных систем, приводящих к уравнению Дуффинга: (а) - математический маятник при небольших углах отклонения, (b) - груз на пружине с нелинейной жесткостью, (с) - движение частицы в потенциале из двух ям.

где  $a$  - ускорение движения,  $P_1$  - восстанавливающая сила. Как видно из рисунка,  $P_1 = mg \sin(\varphi)$ . Линейная и угловая скорости связаны соотношением  $v = l \frac{d\varphi}{dt}$ . В результате получаем

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0.$$

Функцию  $\sin \varphi$  можно разложить в ряд Тейлора в окрестности точки равновесия  $\varphi = 0$ :  $\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{6} + \frac{\varphi^5}{120} \mp \dots$ . При малых углах отклонения от состояния равновесия (случай слабой нелинейности) в разложении можно ограничиться первыми двумя слагаемыми. В этом случае уравнение примет вид:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l} \left( \varphi - \frac{1}{6} \varphi^3 \right) = 0.$$

С учетом силы сопротивления среды, которую будем полагать пропорциональной скорости ( $F_d = \delta v$ ), получим уравнение

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \delta l \frac{d\varphi}{dt} + \frac{g}{l} \varphi - \frac{g}{6l} \varphi^3$$

Вводя обозначения  $\varphi = x$ ,  $\delta l = \alpha$ ,  $(g/l) = \beta$  и  $(-g/6l) = \gamma$ , приходим к уравнению (2.1).

## 2.2 Груз на пружине с нелинейной жесткостью

В колебательной системе, изображенной на рис.2.1b, на грузик массой  $m$  действует возвращающая сила  $F$ , которая зависит от жесткости пружины  $k$  и смещения  $x$  от состояния равновесия, и сила трения  $F_d$ . Будем полагать, что силу упругости пружины можно задать в виде

$$F = k_0x + k_1x^3,$$

а сила трения пропорциональна скорости

$$F_d = \delta \frac{dx}{dt}.$$

Тогда получим уравнение движения

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \delta \frac{dx}{dt} + k_0x + k_1x^3 = 0$$

или

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \beta x + \gamma x^3 = 0,$$

где  $\alpha = (\delta/m)$ ,  $\beta = (k_0/m)$  и  $\gamma = (k_1/m)$ .

## 2.3 Частица в потенциальном поле

Рассмотрим движение частицы массой  $m$  в потенциале из двух ям (см. рис.2.1с), который определяется функцией

$$u(x) = \frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{4}bx^4,$$

где  $a < 0$  и  $b > 0$ . При отклонении частицы от состояния равновесия, на нее действует возвращающая сила  $F = -\frac{\partial V(x)}{\partial x}$ . В отсутствие других сил, уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{x} + \frac{\partial V(x)}{\partial x} = 0$$



или

$$m\ddot{x} + ax + bx^3 = 0.$$

С учетом силы трения  $F_d = \delta\dot{x}$  получим уравнение (2.1)

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta x + \gamma x^3 = 0,$$

где  $\alpha = (\delta/m)$ ,  $\beta = (a/m)$ ,  $\gamma = (b/m)$ .

Рассмотренные примеры представляют собой простейшие колебательные системы. Осциллятор Дуффинга является хорошей моделью и для более сложных систем. Например, уравнение неавтономного осциллятора описывает вынужденные колебания изогнутого стержня в одномодовом приближении [(20)]. Осциллятор Дуффинга при внешнем гармоническом воздействии широко используется при изучении свойств хаотических колебаний и является одной из базовых моделей теории детерминированного хаоса.

### 3 Состояния равновесия и их устойчивость

Начнем исследования осциллятора Дуффинга с изучения состояний равновесия - их поиска и анализа на устойчивость в зависимости от параметров системы. Введем замену переменных  $\dot{x} = y$  и перепишем уравнения осциллятора (2.1) в виде:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\alpha y - \beta x - \gamma x^3.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Эта система двух дифференциальных уравнений первого порядка эквивалентна уравнению (2.1). Здесь  $x(t)$  и  $y(t)$  - динамические переменные, которые однозначно и полностью задают состояние осциллятора в момент времени  $t$ . Следовательно, размерность фазового пространства осциллятора Дуффинга составляет  $N = 2$ , а само фазовое пространство представляет собой плоскость.

На фазовой плоскости  $(x, y)$  имеются точки равновесия (называемые также особыми или неподвижными точками), которые определяются условием

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 0, \\ \dot{y} &= 0,\end{aligned}$$

и, следовательно, являются решением системы алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}y &= 0, \\ \alpha y + \beta x + \gamma x^3 &= 0.\end{aligned}\tag{3.2}$$

Из анализа (3.2) видно, что в зависимости от значений параметров  $\alpha, \beta$

и  $\gamma$  на фазовой плоскости существует либо одна точка равновесия

$$P_0 : \{x = 0, y = 0\},$$

либо три точки равновесия

$$\begin{aligned} P_0 & : \{x = 0, y = 0\}, \\ P_1 & : \left\{x = \sqrt{-\frac{\beta}{\gamma}}, y = 0\right\}, \\ P_2 & : \left\{x = -\sqrt{-\frac{\beta}{\gamma}}, y = 0\right\}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Очевидно, что одна особая точка  $P_0$  существует, если значения параметров  $\beta$  и  $\gamma$  одного знака, а три - если значения параметров  $\beta$  и  $\gamma$  разных знаков. Все три точки лежат в фазовом пространстве на оси  $OX$ . Точки  $P_1$  и  $P_2$  располагаются симметрично друг другу относительно оси  $OY$ . При конечном, фиксированном значении  $\beta$  и при стремлении значений параметра  $\gamma$  к нулю (при переходе от нелинейного осциллятора к линейному), точки равновесия  $P_1$  и  $P_2$  разбегаются друг от друга по оси  $OX$  к  $+\infty$  и к  $-\infty$ .

Исследуем устойчивость состояний равновесия в зависимости от параметров осциллятора Дуффинга. Характер устойчивости определяется поведением исследуемой динамической системы, линеаризованной в малой окрестности неподвижной точки. Вид решений линеаризованной системы определяют корни характеристического уравнения:

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x} - \lambda & \frac{\partial f_1(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x} & \frac{\partial f_2(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y} - \lambda \end{bmatrix} = 0. \quad (3.4)$$

Здесь введены следующие обозначения:  $f_1(x, y) = y$ ,  $f_2(x, y) = -\alpha y - \beta x - \gamma x^3$ ,  $\bar{x}, \bar{y}$  обозначают координаты неподвижных точек,  $\frac{\partial f_{1,2}(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f_{1,2}(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y}$  обозначают соответствующую частную производную, вычисленную в неподвижной точке с координатами  $x = \bar{x}$ ,  $y = \bar{y}$ .

Характеристическое уравнение (3.4) можно переписать в виде

$$\lambda^2 - S\lambda + J = 0, \quad (3.5)$$

где

$$S = \frac{\partial f_1(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x} + \frac{\partial f_2(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y},$$

$$J = \frac{\partial f_1(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x} \frac{\partial f_2(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y} - \frac{\partial f_1(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y} \frac{\partial f_2(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x}.$$

Корни характеристического уравнения имеют следующий вид:

$$\lambda_{1,2} = \frac{S}{2} \pm \sqrt{\frac{S^2}{4} - J}.$$

Запишем  $S$  и  $J$  в более конкретной форме через параметры осциллятора Дуффинга

$$S = \frac{\partial f_1(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x} + \frac{\partial f_2(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y}$$

$$= 0 - \alpha$$

$$= -\alpha,$$

$$J = \frac{\partial f_1(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x} \frac{\partial f_2(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y} - \frac{\partial f_1(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y} \frac{\partial f_2(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x}$$

$$= 0(-\alpha) - 1(-\beta - 3\gamma\bar{x}^2)$$

$$= \beta + 3\gamma\bar{x}^2.$$

Тогда

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \beta - 3\gamma\bar{x}^2}. \quad (3.6)$$

Запишем собственные значения  $\lambda_{1,2}$  для каждой из трех точек равновесия.

Для точки  $P_0$  (координата  $x = \bar{x} = 0$ ) получаются собственные значения

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \beta}. \quad (3.7)$$

Для точки  $P_1$  (координата  $x = \bar{x} = \sqrt{-\frac{\beta}{\gamma}}$ ) получается

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + 2\beta}. \quad (3.8)$$

Для точки  $P_2$  (координата  $x = \bar{x} = -\sqrt{-\frac{\beta}{\gamma}}$ ) получаются точно такие же собственные значения (3.8), как и для точки  $P_1$ .

Проанализируем характер особых точек в зависимости от параметров  $\alpha, \beta, \gamma$ . Рассмотрим два случая:  $\gamma < 0$  и  $\gamma > 0$ .

**Случай 1:  $\gamma < 0$ .**

В этом случае, если  $\beta < 0$ , то в фазовом пространстве существует только одна точка равновесия  $P_0$  с координатами  $\bar{x} = 0$  и  $\bar{y} = 0$ . Ее собственные значения  $\lambda_{1,2}$  определяются выражением (3.7). Видно, что вне зависимости от параметра  $\alpha$  (и при положительных, и при отрицательных значениях, и в случае консервативного осциллятора, когда параметр диссипации  $\alpha = 0$ ) собственные значения  $\lambda_{1,2}$  являются действительными и разных знаков, то есть неподвижная точка  $P_0$  является седлом.

Если же  $\beta > 0$ , то в фазовом пространстве существует три точки равновесия  $P_0, P_1, P_2$ , координаты которых заданы выражением (3.4).

Неподвижная точка  $P_0$  в начале координат характеризуется собственными значениями, заданными выражением (3.7). Если  $-2\sqrt{\beta} < \alpha < 2\sqrt{\beta}$ , то собственные значения  $\lambda_{1,2}$  являются комплексно-сопряженными. Они имеют положительную действительную часть при  $-2\sqrt{\beta} < \alpha < 0$ , и отрицательную действительную часть при  $0 < \alpha < 2\sqrt{\beta}$ . То есть неподвижная точка в начале координат представляет собой неустойчивый и устойчивый фокус, соответственно. При  $\alpha > 2\sqrt{\beta}$  собственные значения являются действительными и отрицательными, то есть неподвижная точка  $P_0$  становится устойчивым узлом. При  $\alpha < -2\sqrt{\beta}$  собственные значения являются действительными и положительными, то есть неподвижная точка  $P_0$  превращается в неустойчивый узел.

Неподвижные точки  $P_{1,2}$  симметричны друг другу и ведут себя одинаковым образом. Их собственные значения  $\lambda_{1,2}$  заданы выражением (3.8), из которого видно, что при любых  $\alpha$  собственные значения остаются действительными и разных знаков. Таким образом, неподвижные точки  $P_{1,2}$

являются седлами.

**Случай 2:**  $\gamma > 0$ .

В этом случае в фазовом пространстве существует одна точка равновесия в начале координат, если  $\beta > 0$ . Она является неустойчивым узлом при  $\alpha < -2\sqrt{\beta}$ . Если  $-2\sqrt{\beta} < \alpha < 0$ , то особая точка  $P_0$  представляет собой неустойчивый фокус. Она превращается в устойчивый фокус при положительных значениях параметра диссипации  $0 < \alpha < 2\sqrt{\beta}$ . При больших значениях параметра диссипации ( $\alpha > 2\sqrt{\beta}$ ) особая точка  $P_0$  является устойчивым узлом.

Если  $\beta < 0$ , то в фазовом пространстве существует три точки равновесия  $P_0, P_1, P_2$ . Особая точка  $P_0$  при любых значениях параметра диссипации  $\alpha$  остается седлом. Неподвижные точки  $P_1$  и  $P_2$  являются неустойчивыми узлами при  $\alpha < -2\sqrt{2\beta}$ . При  $-2\sqrt{2\beta} < \alpha < 0$  они превращаются в неустойчивые фокусы. Затем становятся устойчивыми фокусами при  $0 < \alpha < 2\sqrt{2\beta}$ , и далее - устойчивыми узлами, когда  $\alpha > 2\sqrt{2\beta}$ .



### 3.1 Лабораторная работа N 1. Исследование состояний равновесия осциллятора Дуффинга

**Цель работы:** найти состояния равновесия осциллятора Дуффинга, определить их тип в зависимости от управляющих параметров, исследовать структуру фазового пространства в окрестности состояний равновесия

**Методы исследования:** теоретический анализ, численный эксперимент и построение фазовых портретов.

#### 3.1.1 Экспериментальная установка

Лабораторная установка представляет собой программу, разработанную в среде LabView. Программа позволяет численно интегрировать уравнение осциллятора Дуффинга, изменяя параметры и наблюдая результат в виде фазового портрета и временной реализации. Рабочее окно программы представлено на Рис. 3.1.

Кнопками "" и "" в верхней части рабочего окна производится со-

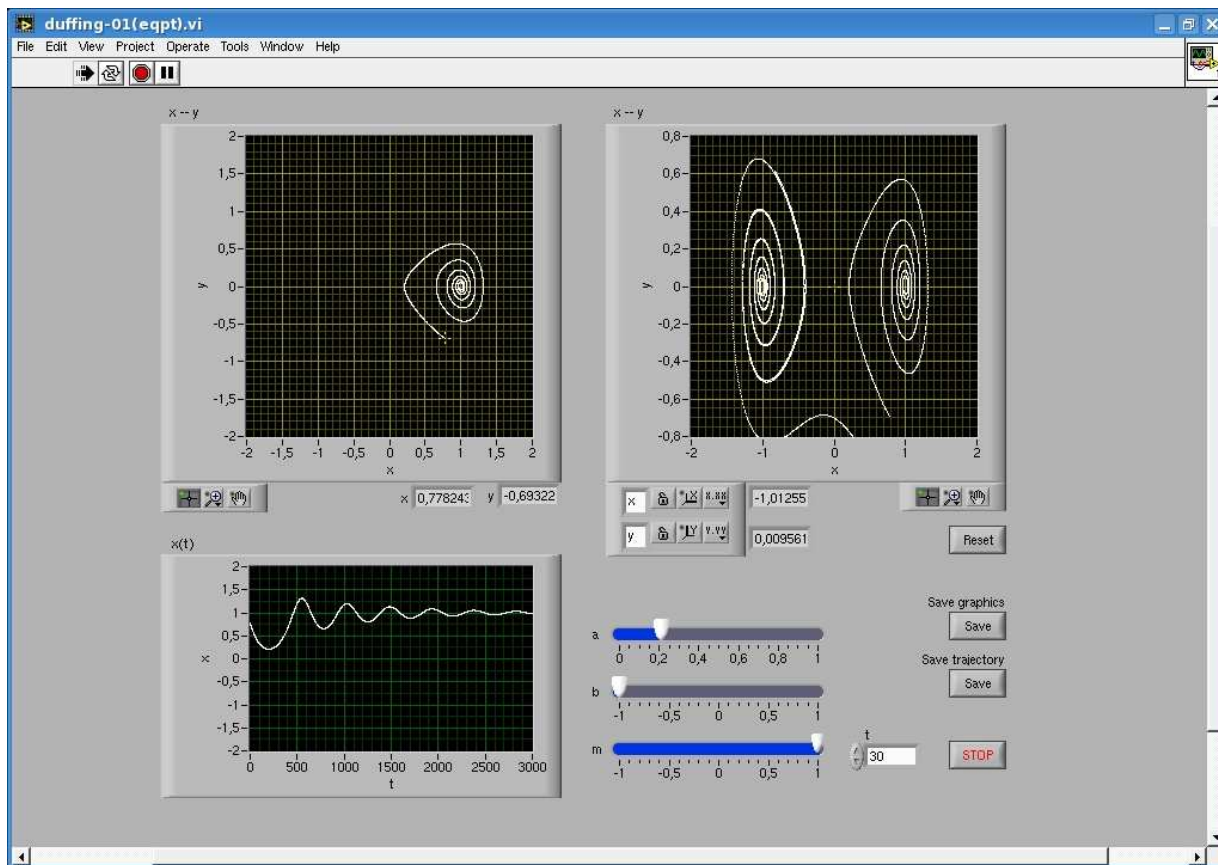






Рис. 3.1: Программа для исследования состояний равновесия автономного осциллятора Дуффинга.

ответственно запуск и остановка интегрирования. Остановить программу можно также кнопкой Stop. На двух графиках  $x$ - $y$  отображается фазовый портрет осциллятора, слева график имеет фиксированные пределы и обновляется при запуске с новыми начальными условиями. График  $x$ - $y$  справа очищается от траекторий вручную при помощи кнопки Reset. Его масштаб и границы могут подбираться автоматически, чтобы все точки отображаемых траекторий попадали в видимую область. Для этого кнопки  должны быть нажаты для обеих осей (значок закрытого замка). С помощью инструментов "" "" и "" можно вручную установить пределы показаний. На нижнем графике отображается временная реализация колебаний. Начальные условия интегрирования выбираются путем перемещения курсоров на графиках  $x$ - $y$ . Координаты курсоров, соответствующие начальным условиям осциллятора, отображаются в окнах  $x$  и  $y$  под графиками  $x$ - $y$ . Параметры осциллятора задаются регуляторами с соответствующими подписями. Время интегрирования вводится в окне  $t$ . Кнопка Save trajectory служит для сохранения последней реализации в файл. Кнопкой Save graphics можно сохранять изображения на правом графике  $x$ - $y$  в графические файлы JPEG.

## Задания

1. Найти аналитически все состояния равновесия системы (2.1), провести их анализ (тип состояния равновесия и устойчивость в зависимости от значений параметров  $\beta$ ,  $\mu$ ). Использовать фиксированное положительное значение коэффициента диссипации  $\alpha$  (задается преподавателем).
2. На плоскость параметров  $\beta$  -  $\mu$  нанести линии, разграничивающие области с разным типом поведения, для каждого из найденных состояний равновесия.
3. Используя программу численного интегрирования дифференциальных уравнений, построить типичные картины фазовых траекторий в окрестностях состояний равновесия. Значения параметров  $\beta$  и  $\mu$  должны быть взяты из соответствующих областей (см. п. 2). Для



этого проинтегрировать систему уравнений в прямом времени из нескольких начальных условий в окрестности каждого из выбранного состояния равновесия. Построить численно притягивающие и отталкивающие многообразия седловых точек. Для построения отталкивающих многообразий выбрать несколько начальных условий в окрестности седловой точки и проинтегрировать систему уравнений в прямом времени. Для построения притягивающих многообразий выбрать несколько начальных условий в окрестности седловой точки и проинтегрировать систему уравнений в обратном времени.

4. Для указанных преподавателем значений параметров построить общую картину расположения фазовых траекторий, задавая начальные значения в разных областях фазового пространства.
5. Выполнить пункты 2 и 4 для консервативного осциллятора Дуффинга (при  $\alpha = 0$ ). Произвести сравнительный анализ поведения консервативного и диссипативного осцилляторов.

## 4 Исследование консервативного автономного осциллятора Дуффинга

В обобщенном виде уравнение нелинейного, консервативного, автономного осциллятора можно записать следующим образом

$$\ddot{x} + f(x) = 0, \quad (4.1)$$

где  $f(x)$  - возвращающая сила, действующая на систему при отклонении от состояния равновесия. Это же уравнение можно переписать в виде:

$$\ddot{x} + \frac{dU(x)}{dx} = 0 \quad (4.2)$$

здесь  $U(x)$  - потенциальная энергия системы. Потенциальная энергия и возвращающая сила связаны соотношением

$$U(x) = \int f(x) dx.$$

Уравнение нелинейного осциллятора можно проинтегрировать. Введем переменную  $\dot{x} = v$ , и перепишем уравнение осциллятора

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{dU(x)}{dx} &= 0, \\ v \frac{dv}{dx} + \frac{dU(x)}{dx} &= 0. \end{aligned}$$

В результате интегрирования получаем

$$\frac{v^2}{2} + U(x) = E.$$

Это соотношение отражает закон сохранения энергии в консервативном нелинейном осцилляторе. Здесь  $E$  - полная энергия,  $U(x)$  - потенциальная энергия нелинейного осциллятора.

Выражая  $v$  от  $x$ , запишем уравнение траектории на фазовой плоскости

$$v = \sqrt{2[E - U(x)]}. \quad (4.3)$$

Зная вид потенциальной функции, можно построить фазовый портрет нелинейного осциллятора.

Проведем построение фазовых портретов для консервативного, автономного осциллятора Дуффинга

$$\ddot{x} + \beta x + \gamma x^3 = 0 \quad (4.4)$$

в случаях

- а)  $\beta > 0, \gamma > 0$ ,
- б)  $\beta < 0, \gamma > 0$ ,
- в)  $\beta > 0, \gamma < 0$ .

Уравнение осциллятора можно записать как

$$\ddot{x} + \frac{dU(x)}{dx} = 0,$$

тогда

$$U(x) = \int (\alpha x + \beta x^3) dx,$$

Таким образом получаем в явном виде потенциальную функцию

$$U(x) = \frac{1}{2}\beta x^2 + \frac{1}{4}\gamma x^4 + C. \quad (4.5)$$

По виду потенциальной функции можно легко построить характерный вид фазовых портретов. Максимумы и минимумы графиков потенциальной функции соответствуют точкам равновесия, причем минимумы соответствуют состояниям равновесия типа центр, а максимумы - седловым состояниям равновесия. Седла и их сепаратрисы разделяют в фазовом пространстве области с различным поведением. Убедиться в этом, а так же проделать построение фазовых портретов по виду потенциальной функ-

ции можно и более строгим образом. Используя выражение (4.3), запишем уравнение фазовых траекторий для консервативного осциллятора Дуффинга

$$v = \sqrt{2E - 2C - \beta x^2 - \frac{1}{2}\gamma x^4}. \quad (4.6)$$

Задавая конкретные значения параметров колебательной системы ( $\beta$ ,  $\gamma$ ) и ее начальные условия в виде полной запасенной энергии ( $E$  и  $C$ ), можно на фазовой плоскости строить семейства траекторий для всех трех перечисленных выше случаев - (а), (б) и (в).

## 4.1 Лабораторная работа N 2. Исследование устройства фазового пространства консервативного осциллятора Дуффинга

**Цель работы:** построить вид потенциальной функции консервативного осциллятора Дуффинга, определить как изменения потенциальной функции влияют на структуру фазового пространства

**Методы исследования:** теоретический анализ, численный эксперимент и построение фазовых портретов.

### 4.1.1 Экспериментальная установка

Лабораторная установка представляет собой программу, разработанную в среде LabView. Программа позволяет наблюдать вид потенциальной функции и фазовый портрет осциллятора Дуффинга для задаваемых параметров системы. Рабочее окно программы представлено на Рис. 4.1.

Кнопками  и  в верхней части рабочего окна производится соответственно запуск и остановка интегрирования. Остановить программу можно также кнопкой Stop.

На графике  $x-U(x)$  изображается потенциальная функция при заданных параметрах осциллятора Дуффинга, на графике  $x-u$  отображается фазовый портрет осциллятора. График  $x-u$  автоматически очищается от траекторий каждые 3000 шагов интегрирования. Также это можно сделать

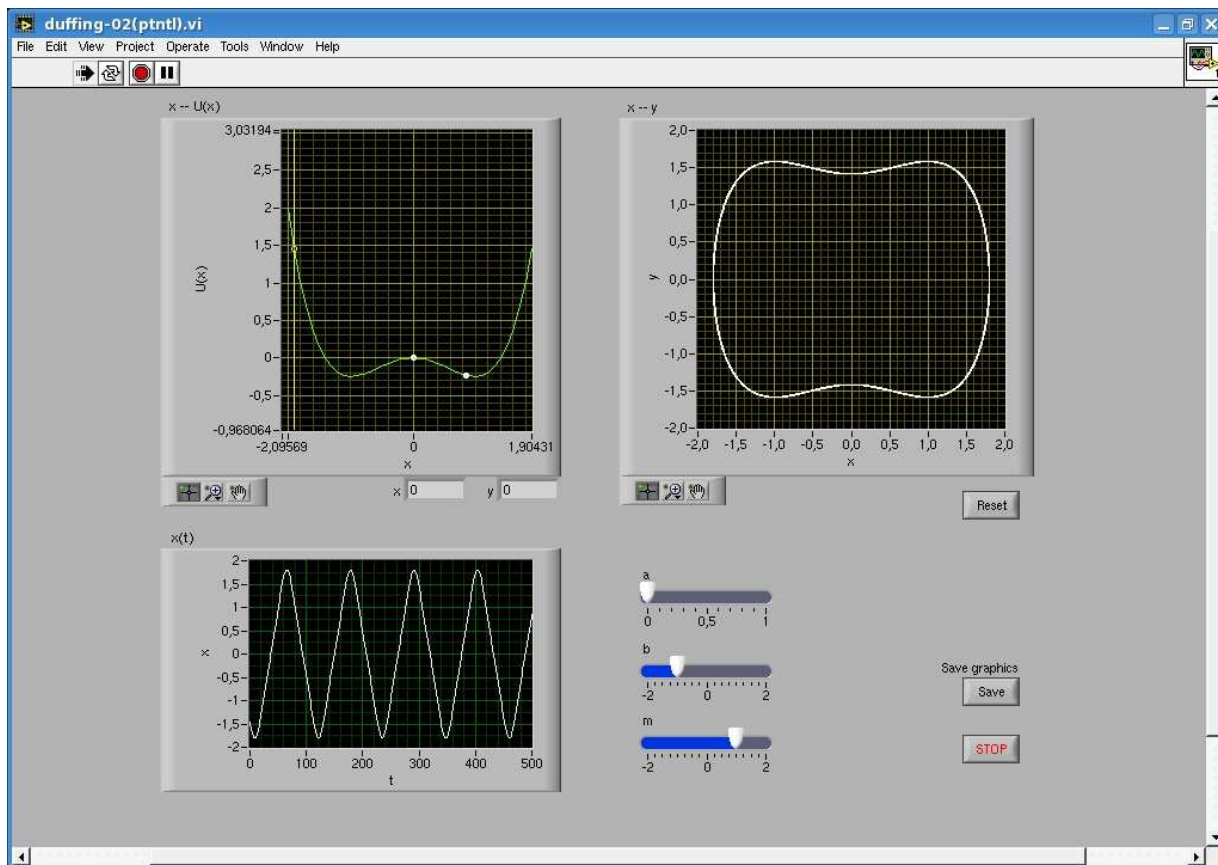





Рис. 4.1: Программа для построения потенциальной функции и фазовых портретов осциллятора Дуффинга.

вручную при помощи кнопки Reset. С помощью инструментов " " " и " " устанавливаются пределы показаний этих графиков. На графике "t-x(t)" отображается временная реализация колебаний. Начальные условия интегрирования выбираются путем перемещения курсора на графике "x-U(x)". Координаты курсора отображаются в окнах "x" и "y" под этим графиком. Параметры осциллятора задаются регуляторами с соответствующими подписями. Время интегрирования вводится в окне "t". Кнопкой "Save graphics" можно сохранять изображения на правом графике "x-y" в графические файлы JPEG. При сохранении изображений необходимо последовательно указать путь и названия файлов соответственно для графика потенциальной функции и фазового портрета (по умолчанию pot.jpg и x-y.jpg).

## Задания и упражнения

1. Методами численного интегрирования построить фазовые портреты консервативного осциллятора Дуффинга (4.4) для трех случаев: (а) -  $\beta > 0, \gamma > 0$ , (б) -  $\beta < 0, \gamma > 0$ , (в) -  $\beta > 0, \gamma < 0$ . (Конкретные численные значения параметров следует получить у преподавателя).
2. Построить для заданных численных значений параметров (все три случая) графики потенциальной функции  $U(x)$ .
3. Построить для трех случаев фазовые портреты консервативного осциллятора Дуффинга, используя уравнение фазовых траекторий (4.6).
4. Проанализировать и сопоставить полученные результаты. (Сопоставить фазовые портреты, построенные разными методами для одинаковых значений параметров. Сопоставить типы фазовых портретов с графиками потенциальной функции.)

## 5 Явления неизохронности и ангармоничности в осцилляторе Дуффинга

Одними из простейших, типичных нелинейных явлений, наблюдаемых в системах самой различной природы, являются неизохронность, ангармоничность и мультистабильность.

Под неизохронностью понимают зависимость частоты (периода) собственных колебаний от их амплитуды (интенсивности). Это явление демонстрирует, например, скачущий мячик: в зависимости от того, с какой высоты сбрасывается мячик, период его подскоков будет разным. Оно же наблюдается при движении планет вокруг Солнца, что отражается в законе Кеплера.

Явление ангармоничности проявляется в изменении формы колебаний с ростом их амплитуды: для малой амплитуды колебания остаются почти гармоническими, для большей - их форма искажается. При искажении формы колебаний в спектре происходит генерации новых гармоник на частотах, кратных собственной частоте колебательной системы. Явление ангармоничности легко обнаружить, наблюдая за колебаниями физического маятника. При малых отклонениях от состояния равновесия маятник близок к гармоническому осциллятору и его колебания близки к синусоидальным. С увеличением амплитуды нелинейность ведет к искажению формы колебаний: временная реализация начинает больше и больше отличаться от синусоиды. Явление ангармоничности и состоит в уходе временной реализации от гармонической формы с ростом интенсивности колебаний. В спектральном представлении это соответствует появлению дополнительных гармоник и увеличению их интенсивности.

Явление мультистабильности, также как неизохронности и ангармоничности, может наблюдаться только в нелинейных системах. Заклю-

ется оно в том, что в зависимости от выбора начальных условий при постоянных значениях управляющих параметров динамическая система может демонстрировать различные режимы. Это соответствует тому, что в ее фазовом пространстве при фиксированных значениях параметров могут сосуществовать несколько аттракторов. Система, в фазовом пространстве которой сосуществует несколько устойчивых состояний, называется мультистабильной. В простейшем случае, когда сосуществует только два устойчивых состояния, система называется бистабильной. *Множество значений начальных условий, при которых в системе наблюдается один и тот же аттрактор, называется бассейном притяжения этого аттрактора.*

## 5.1 Исследование неизохронности в осцилляторе Дуффинга

Рассмотрим случай консервативного осциллятора с кубической нелинейностью

$$\ddot{x} + \beta x + \gamma x^3 = 0. \quad (5.1)$$

В осцилляторе Дуффинга в данном случае параметр диссипации  $\alpha = 0$ , параметр  $\beta$  характеризует собственную частоту колебаний, и параметр  $\gamma$  является параметром нелинейности.

Выявить аналитическими методами зависимость частоты колебаний от амплитуды можно только для слабо нелинейного осциллятора, когда параметр  $\gamma$  является малой величиной, то есть  $|\gamma| \ll 1$ . Для слабо нелинейных или, так называемых, квазигармонических систем, существуют методы, с помощью которых можно получить приближенные решения системы. Одним из таких методов является метод медленно меняющихся комплексных амплитуд (или медленно меняющихся коэффициентов, или метод Ван дер Поля). Данный метод был предложен Ван дер Полем и аналогичен одному из методов Лагранжа. Для определения приближенного решения, истинное решение представляется в виде функции, выражающей гармонические колебания

$$x = a \cos(\omega t + \phi)$$



с медленно меняющимися амплитудой  $a$  и фазой  $\phi$ . Эти величины определяются из дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= \epsilon A(a), \\ \frac{d\phi}{dt} &= \epsilon B(a),\end{aligned}$$

где  $A(a)$  и  $B(a)$  - некоторые функции амплитуды.

Для консервативного и слабо нелинейного ( $|\gamma| \ll 1$ ) осциллятора Дуффинга (5.1) Будем искать решение в виде

$$x = \text{Re}[a(t) \exp(i\sqrt{\beta}t)],$$

где  $a(t)$  - комплексная амплитуда. Переобозначив собственную частоту  $\sqrt{\beta}$  через  $\omega_0$  ( $\beta = \omega_0^2$ ), и учитывая, что действительная часть комплексной величины связана с самой величиной соотношением

$$\text{Re}[C] = \frac{C + C^*}{2}$$

( $C^*$  - величина комплексно сопряженная величине  $C$ ), перепишем решение в следующем виде

$$\begin{aligned}x &= \text{Re}[a(t) \exp(i\omega_0 t)] \\ &= \frac{a \exp[i\omega_0 t] + a^* \exp[-i\omega_0 t]}{2}.\end{aligned}\tag{5.2}$$

Поскольку мы ввели новую неизвестную функцию  $a(t)$ , то можем ввести произвольное условие. Потребуем, чтобы функция  $a(t)$  удовлетворяла условию

$$\dot{a} \exp[i\omega_0 t] + \dot{a}^* \exp[-i\omega_0 t] = 0.\tag{5.3}$$

Подставим решение (5.2) в уравнение консервативного осциллятора Дуффинга (5.1) с учетом дополнительного условия (5.3). Вычислим первую и

вторую производную  $\dot{x}(t)$  и  $\ddot{x}(t)$ :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{1}{2}[\dot{a} \exp(i\omega_0 t) + \dot{a}^* \exp(-i\omega_0 t) + i\omega_0 a \exp(i\omega_0 t) - i\omega_0 a^* \exp(-i\omega_0 t)] \\ &= \frac{1}{2}[i\omega_0 a \exp(i\omega_0 t) - i\omega_0 a^* \exp(-i\omega_0 t)]\end{aligned}\quad (5.4)$$

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{1}{2}[i\omega_0 \dot{a} \exp(i\omega_0 t) - i\omega_0 \dot{a}^* \exp(-i\omega_0 t) - \omega_0^2 a \exp(i\omega_0 t) - \omega_0^2 a^* \exp(-i\omega_0 t)] \\ &= i\omega_0 \dot{a} \exp(i\omega_0 t) - \frac{\omega_0^2}{2}[a \exp(i\omega_0 t) + a^* \exp(-i\omega_0 t)].\end{aligned}\quad (5.5)$$

После подстановки  $x(t)$ ,  $\dot{x}(t)$  и  $\ddot{x}(t)$  в уравнение (5.1), получаем

$$\begin{aligned}i\omega_0 \dot{a} \exp(i\omega_0 t) + \frac{\gamma}{8}[a \exp(i\omega_0 t) + a^* \exp(-i\omega_0 t)]^3 &= 0, \\ i\omega_0 \dot{a} + \frac{\gamma}{8}[a^3 \exp(2i\omega_0 t) + 3|a|^2 a + 3|a|^2 a^* \exp(-2i\omega_0 t) + (a^*)^3 \exp(-4i\omega_0 t)] &= 0.\end{aligned}$$

Усредним все члены полученного уравнения за период. При этом будем учитывать, что амплитуда  $a(t)$  и ее производные являются медленно меняющимися величинами, то есть за период они практически не меняются, и в данном приближенном решении при усреднении за период считаем их постоянными:

$$\begin{aligned}\langle i\omega_0 \dot{a} \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T i\omega_0 \dot{a} dt \\ &= i\omega_0 \dot{a}, \\ \langle a^3 \exp(2i\omega_0 t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T a^3 \exp(2i\omega_0 t) dt \\ &= \frac{a^3}{2i\omega_0 T} [\exp(2i\omega_0 T) - \exp(2i\omega_0 0)] \\ &= \frac{a^3}{2i\omega_0 T} [\exp(i4\pi) - 1] \\ &= \frac{a^3}{2i\omega_0 T} [\cos 4\pi + i \sin 4\pi - 1] \\ &= 0.\end{aligned}$$

Здесь угловые скобки  $\langle \dots \rangle$  означают усреднение за период. Хорошо

видно, что после усреднения за период получается следующее уравнение для медленно меняющейся комплексной амплитуды:

$$\dot{a} = i \frac{3\gamma}{8\omega_0} |a|^2 a. \quad (5.6)$$

Комплексную амплитуду  $a(t)$  можно представить в виде

$$a(t) = \rho(t) \exp(i\phi(t)), \quad (5.7)$$

где  $\rho(t), \phi(t)$  - действительные величины, которые представляют собой амплитуду и фазу колебаний, соответственно. Подставляя (5.7) в уравнение (5.6) и выделяя отдельно действительную и мнимую часть уравнения, получим следующую систему уравнений для амплитуды и фазы

$$\dot{\rho}(t) = 0, \quad (5.8)$$

$$\dot{\phi}(t) = \frac{3\gamma}{8\omega_0} \rho^2(t). \quad (5.9)$$

Интегрируя эти уравнения, получаем решения для амплитуды и фазы

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \rho_0, \\ \phi(t) &= \frac{3\gamma}{8\omega_0} \rho_0^2 t. \end{aligned}$$

Теперь можем записать решение  $x(t)$  уравнения консервативного, слабо нелинейного осциллятора Дуффинга:

$$\begin{aligned} x(t) &= \operatorname{Re}[a(t) \exp(i\omega_0 t)] \\ &= \operatorname{Re}[\rho(t) \exp(i\phi(t)) \exp(i\omega_0 t)] \\ &= \operatorname{Re}[\rho_0 \exp(i \frac{3\gamma}{8\omega_0} \rho_0^2 t) \exp(i\omega_0 t)] \\ &= \rho_0 \cos(\omega_0 + \frac{3\gamma}{8\omega_0} \rho_0^2 t). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Видно, что частота колебаний осциллятора Дуффинга зависит от его амплитуды. При увеличении амплитуды колебаний частота или нарастает, или убывает, что зависит от знака параметра нелинейности  $\gamma$ .

## 5.2 Исследование ангармоничности

Методом медленно меняющихся комплексных амплитуд было получено приближенное решение для автономного, консервативного осциллятора Дуффинга, которое описывает эффект неизохронности и в тоже время никак не отражает эффект ангармоничности, присущий для всех нелинейных систем. Проведем приближенное решение уравнения консервативного осциллятора Дуффинга другим аналитическим методом - методом Пуанкаре. Данный метод позволяет получить приближенное решение, которое описывает и эффект неизохронности, и эффект ангармоничности в осцилляторе Дуффинга.

Будем полагать, что в осцилляторе Дуффинга собственная частота равна единице ( $\beta = \omega_0^2 = 1$ )

$$\ddot{x} + x + \gamma x^3 = 0.$$

Перепишем уравнение осциллятора в новой переменной по времени  $\tau = \omega t$  :

$$\omega^2 \frac{d^2 x}{d\tau^2} + x + \gamma x^3 = 0. \quad (5.11)$$

Решение будем искать в виде ряда по степеням малого параметра  $\gamma$  как для переменной  $x$ , так и для частоты  $\omega$ :

$$x = x_0 + \gamma x_1 + \gamma^2 x_2 + \dots, \quad (5.12)$$

$$\omega = 1 + \gamma \omega_1 + \gamma^2 \omega_2 + \dots \quad (5.13)$$

При  $\gamma \rightarrow 0$  частота  $\omega$  стремится к частоте собственных (или линейных) колебаний  $\omega_0 = \sqrt{\beta} = 1$ .

В выражениях (5.12)-(5.13) ограничимся слагаемыми до второго порядка малости, и подставим их в уравнение (5.11)

$$\begin{aligned} (1 + \gamma \omega_1)^2 (\ddot{x}_0 + \gamma \ddot{x}_1) + x_0 + \gamma x_1 + \gamma (x_0 + \gamma x_1)^3 &= 0, \\ \ddot{x}_0 + 2\gamma \omega_1 \ddot{x}_0 + \gamma \ddot{x}_1 + 2\gamma^2 \omega_1^2 \ddot{x}_1 + \gamma^3 \omega_1^2 \ddot{x}_1 + x_0 + \gamma x_1 + \gamma x_0^3 + \dots &= \text{Б.14} \end{aligned}$$

Разложим уравнение (5.14) по степеням параметра  $\gamma$ . Приравняем слага-

емые одинакового порядка малости

$$\gamma^0 : \quad \ddot{x}_0 + x_0 = 0, \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} \gamma^1 : \quad 2\omega_1 \ddot{x}_0 + \ddot{x}_1 + x_1 + x_0^3 &= 0, \\ \ddot{x}_1 + x_1 &= -2\omega_1 \ddot{x}_0 - x_0^3. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Решением уравнения (5.15) является

$$\begin{aligned} x_0 &= a \cos(\tau + \phi) \\ &= a \cos(\omega t + \phi). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Подставим (5.17) в уравнение (5.16):

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + x_1 &= 2\omega_1 a \cos(\tau + \phi) - a^3 \cos^3(\tau + \phi), \\ \ddot{x}_1 + x_1 &= 2\omega_1 a \cos(\tau + \phi) - a^3 \left[ \frac{3}{4} \cos(\tau + \phi) + \frac{1}{4} \cos 3(\tau + \phi) \right]. \end{aligned} \quad (5.18)$$

К секулярному росту  $x_1(\tau)$  приводят слагаемые пропорциональные  $\cos(\tau + \phi)$  (при резонансном гармоническом воздействии на гармонический осциллятор происходит раскачка колебаний до бесконечности, при  $\tau \rightarrow \infty$  величина  $x_1(\tau) \rightarrow \infty$ ). Чтобы устранить такое резонансное воздействие, подберем соответствующим образом малую добавку к частоте

$$\begin{aligned} 2\omega_1 a - \frac{3a^3}{4} &= 0, \\ \omega_1 &= \frac{3a^2}{8}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Тогда уравнение для первого приближения (5.18) примет вид

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -\frac{a^3}{4} \cos 3(\tau + \phi). \quad (5.20)$$

Решением уравнения (5.20) является

$$x_1 = C \cos 3(\tau + \phi).$$

Чтобы определить константу  $C$ , подставим это в уравнение (5.20)

$$\begin{aligned} -9C \cos 3(\tau + \phi) + C \cos 3(\tau + \phi) &= -\frac{a^3}{4} \cos 3(\tau + \phi), \\ C &= \frac{a^3}{32} \end{aligned}$$

Выражение для  $x_1$  примет вид

$$x_1 = \frac{a^3}{32} \cos 3(\tau + \phi).$$

В результате получаем следующее приближенное решение с точностью до второго порядка малости  $\gamma^2$

$$x \simeq a \cos(\omega t + \phi) + \gamma \frac{a^3}{32} \cos 3(\omega t + \phi), \quad (5.21)$$

$$\omega \simeq 1 + \gamma \frac{3a^2}{8}. \quad (5.22)$$

Полученный данным методом результат показывает, что кубическая нелинейность приводит к ангармоничности и неизохронности колебаний в консервативном осцилляторе. Помимо основной частоты появилась третья гармоника. Частота колебаний зависит от их амплитуды, причем, если  $\gamma > 0$ , то частота  $\omega$  растет при увеличении амплитуды колебаний; если  $\gamma < 0$ , то частота уменьшается.

Таким образом, мы выявили, что уже при слабой нелинейности колебания не являются чисто синусоидальными, в них присутствуют гармоники. Причем, в приближении до второго порядка малости в осцилляторе с кубической нелинейностью генерируется третья гармоника. Амплитуда гармоники много меньше амплитуды основной составляющей колебаний.






## 5.3 Лабораторная работа N 3. Исследование неизохронности и ангармоничности в консервативном осцилляторе Дуффинга

**Цель работы:** сопоставить результаты теоретического анализа явлений неизохронности и ангармоничности с результатами численного эксперимента

**Методы исследования:** теоретический анализ, численный эксперимент.

### 5.3.1 Экспериментальная установка

Лабораторная установка представляет собой программу, разработанную в среде LabView. Программа позволяет изучить такие свойства нелинейных систем, как неизохронность и ангармоничность, наблюдая за изменениями частоты, амплитуды и спектром колебаний. Рабочее окно программы представлено на Рис. 5.1.

Кнопками  и  в верхней части рабочего окна производится соответственно запуск и остановка интегрирования. Остановить программу можно также кнопкой “Stop”. Графики “x-y” и “t-x(t)” отображают соответственно фазовый портрет и временную реализацию колебаний в осцилляторе Дуффинга. С помощью инструментов ,  и  устанавливаются пределы показаний этих графиков. На графике “Spectrum” отображается спектр колебаний. Начальные условия выбираются путем перемещения курсора на графике “x-y” или устанавливаются численно в окнах “x” и “y”. Параметры осциллятора задаются регуляторами с соответствующими подписями. Время интегрирования вводится в окне “t”. Кнопкой “Save graphics” можно сохранять изображения на правом графике “x-y” в графические файлы JPEG. При сохранении изображений необходимо последовательно указать путь и названия файлов соответственно для фазового портрета, временной реализации и спектра (по умолчанию x-y.jpg, t-x.jpg и spec.jpg). Индикаторы “Amplitude” и “Frequency” показывают текущие безразмерные амплитуду и частоту колебаний. При наблюдении эффекта неизохронности рекомендуется вы-

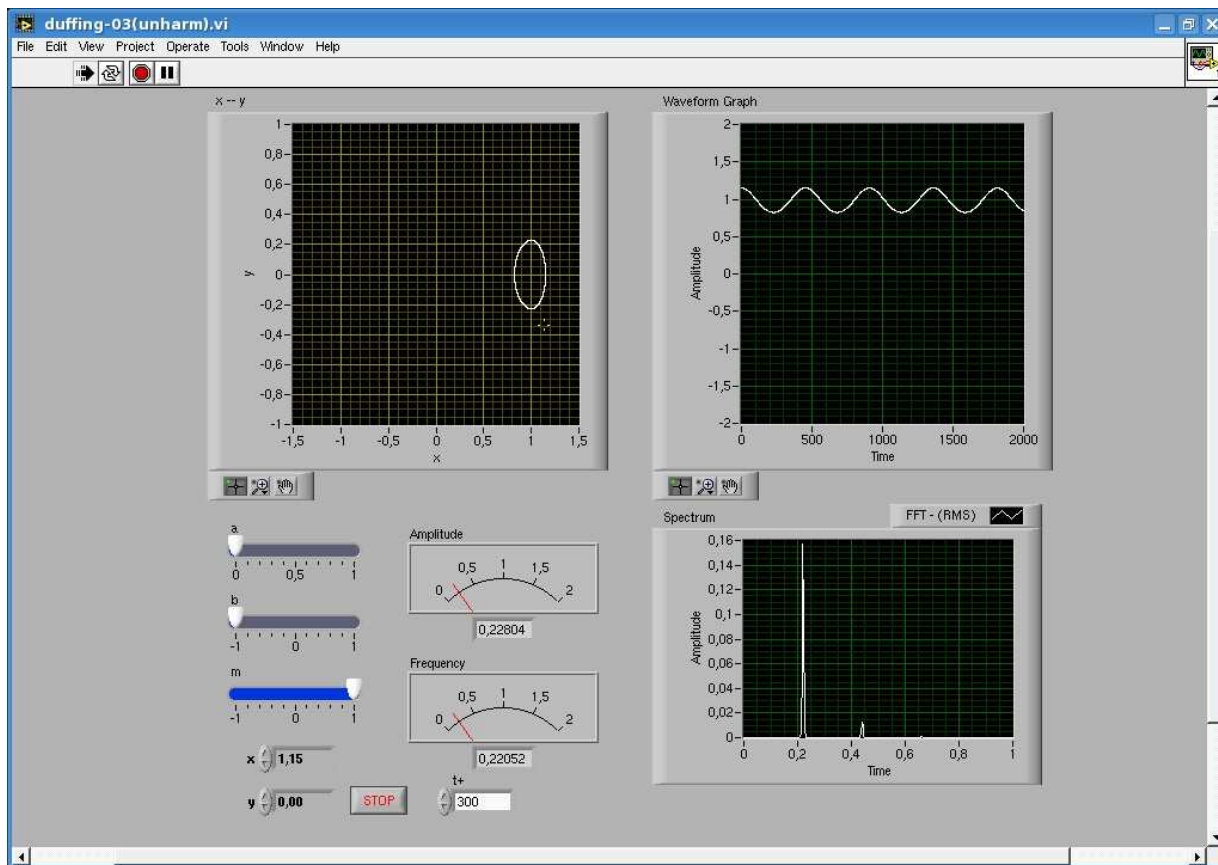


Рис. 5.1: Программа для исследования неизохронности и ангармоничности колебаний в осцилляторе Дуффинга.



бирать малые времена интегрирования ( $t = 20$ ), для более точного расчета БПФ и наблюдения гармоник спектра следует устанавливать большие времена ( $t = 200$ ).

## Задания и упражнения

1. Построить временные реализации  $x(t)$ , используя выражение (5.10), при фиксированном положительном значении  $\gamma$  (конкретные численные значения следует получить у преподавателя) в зависимости от амплитуды  $\rho_0$ . Выявить, как меняется частота колебаний и форма колебаний в зависимости от амплитуды. Построить зависимость частоты колебаний от амплитуды.
2. Построить временные реализации  $x(t)$ , интегрируя численными методами уравнение консервативного осциллятора Дуффинга (5.1) при том же значении  $\gamma$ , в зависимости от начального смещения  $x_0$  (начальная скорость  $\dot{x}_0$  фиксирована и равна нулю). Выявить, как меняется частота колебаний и форма колебаний в зависимости от начальной амплитуды  $x_0$ . Построить зависимость частоты колебаний от амплитуды.
3. Построить временные реализации  $x(t)$ , используя выражение (5.10), при фиксированном значении амплитуды  $\rho_0$  в зависимости от параметра нелинейности  $\gamma$  (конкретные численные значения  $\rho_0$  и интервалы значений  $\gamma$  следует обсудить с преподавателем). Выявить, как меняется частота колебаний и форма колебаний в зависимости от параметра нелинейности. Построить зависимость частоты колебаний от параметра нелинейности  $\gamma$ .
4. Построить временные реализации  $x(t)$ , интегрируя численными методами уравнение консервативного осциллятора Дуффинга (5.1) при фиксированных начальных условиях ( $x_0$  сравнимо с  $\rho_0$  и  $\dot{x}_0 = 0$ ) в зависимости от параметра нелинейности  $\gamma$ . Выявить, как меняется частота колебаний и форма колебаний в зависимости от параметра нелинейности  $\gamma$ . Построить зависимость частоты колебаний от параметра нелинейности.

5. Провести сравнительный анализ результатов, полученных численными методами, с результатами, полученными приближенными аналитическими методами. Оценить интервалы значений параметров, где применимы аналитические результаты.

## 6 Явление нелинейного резонанса в осцилляторе Дуффинга

### 6.1 Качественный анализ задачи о вынужденных колебаниях нелинейного осциллятора. Уравнение резонансных кривых.

При воздействии внешней периодической силы на линейный осциллятор наблюдается, по существу, единственный основной эффект - линейный резонанс. При приближении частоты внешнего гармонического воздействия постоянной амплитуды к собственной частоте линейного осциллятора, амплитуда вынужденных колебаний растет. В осцилляторе без диссипации она стремится к бесконечности, когда частота воздействия совпадает с собственной частотой. В осцилляторе с потерями амплитуда вынужденных колебаний достигает некоторого максимального значения, а затем уменьшается при увеличении расстройки между частотами. Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от расстройки между частотой внешнего воздействия и собственной частотой осциллятора характеризуют резонансные кривые. (Другими словами, резонансная кривая - это график зависимости амплитуды установившихся колебаний от расстройки). Чем меньше потери в осцилляторе, тем острее и выше резонансная кривая. Что изменится, когда осциллятор становится нелинейным? Или, что изменится в случае, когда в осцилляторе частота колебаний зависит от амплитуды?

Пусть на нелинейный осциллятор, совершающий малые колебания с частотой  $\omega_1$ , действует внешнее воздействие той же частоты. Тогда система получает энергию от внешнего источника, и малые вначале колебания нарастают. Однако, поскольку осциллятор неизохронный, большей энергии соответствует уже другая частота. В результате система выходит из резо-

нанса и, начиная с некоторой амплитуды, осциллятор перестает замечать внешнюю силу. Таким образом, выход из резонанса происходит за счет нелинейного сдвига частоты  $\omega = \omega(A)$ .

Чтобы получить уравнение резонансных кривых нелинейного осциллятора, рассмотрим явление резонанса в линейном осцилляторе, затем учтем эффект неизохронности и в уравнение резонансных кривых введем поправку к частоте.

Запишем уравнение линейного осциллятора при внешнем гармоническом воздействии

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = B \cos \omega t, \quad (6.1)$$

где  $B, \omega$  - амплитуда и частота внешнего воздействия,  $\alpha$  - параметр диссипации,  $\omega_0$  - собственная частота линейного осциллятора. Перепишем уравнение (6.1)

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{B}{2} \exp(i\omega t) + k.c. \quad (6.2)$$

(к.с. - комплексно - сопряженная величина) и будем искать решение в виде

$$\begin{aligned} x(t) &= \operatorname{Re}[A \exp(i\omega t)] \\ &= \frac{A}{2} \exp(i\omega t) + k.c. \\ &= \frac{1}{2}[A \exp(i\omega t) + A \exp(-i\omega t)], \end{aligned} \quad (6.3)$$

где  $A$  - постоянная действительная величина, представляющая собой амплитуду вынужденных колебаний.

Вычислим производные

$$\dot{x} = \frac{1}{2}[i\omega A \exp(i\omega t) - i\omega A \exp(-i\omega t)], \quad (6.4)$$

$$\ddot{x} = \frac{1}{2}[-\omega^2 A \exp(i\omega t) - \omega^2 A \exp(-i\omega t)], \quad (6.5)$$

Подставим (6.3) - (6.5) в уравнение (6.2)

$$\begin{aligned}
-\frac{\omega^2}{2}A[\exp(i\omega t) + \exp(-i\omega t)] &+ \frac{i\omega\alpha}{2}A[\exp(i\omega t) - \exp(-i\omega t)] + \\
&+ \frac{\omega_0^2}{2}A[\exp(i\omega t) + \exp(-i\omega t)] \\
&= \frac{B}{2}[\exp(i\omega t) + \exp(-i\omega t)], \\
A(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\alpha) &= B, \\
|A(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\alpha)| &= |B|, \\
\sqrt{A^2[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\alpha^2]} &= B, \\
|A| &= \frac{B}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\alpha^2}}. \tag{6.6}
\end{aligned}$$

Выражение (6.6) является уравнением резонансных кривых линейного осциллятора. Если диссипация отсутствует ( $\alpha = 0$  - случай консервативного осциллятора), то при стремлении частоты внешнего воздействия к собственной частоте осциллятора ( $\omega \rightarrow \omega_0$ ) и постоянном значении амплитуды внешнего воздействия ( $B = const$ ), амплитуда установившихся, вынужденных колебаний стремится к бесконечности ( $|A| \rightarrow \infty$ ). Отметим, что бесконечный рост амплитуды вынужденных колебаний может происходить и при очень малом, но конечном значении амплитуды внешнего воздействия. В диссипативном осцилляторе амплитуда вынужденных колебаний всегда конечна, и, чем меньше потери  $\alpha$  в осцилляторе, тем острее и выше резонансная кривая.

В уравнении резонансных кривых (6.6) учтем поправку к частоте в виде

$$\omega^2(A) = \omega_0^2 + \frac{3}{4}\gamma A^2. \tag{6.7}$$

Эта зависимость частоты колебаний от амплитуды совпадает с ранее полученными выражениями (5.10) и (5.22), если параметр нелинейности мал

( $|\gamma| \ll 1$ ). В этом случае

$$\begin{aligned}\omega(A) &= \sqrt{\omega_0^2 + \frac{3}{4}\gamma A^2} \\ &\simeq \omega_0 + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\gamma A^2 + \dots \\ &= 1 + \frac{3}{8}\gamma A^2\end{aligned}$$

(если собственная частота нормирована к единице). Уравнение резонансных кривых принимает вид

$$\begin{aligned}|A| &= \frac{B}{\sqrt{(\omega_0^2 + \frac{3}{4}\gamma A^2 - \omega^2)^2 + \alpha^2 \omega^2}}, \\ A^2[(\frac{3}{4}\gamma A^2 - \omega^2 + \omega_0^2)^2 + \alpha^2 \omega^2] &= B^2.\end{aligned}\tag{6.8}$$

При  $\alpha = 0$  получим уравнение резонансной кривой для консервативного нелинейного осциллятора при гармоническом воздействии

$$A(\frac{3}{4}\gamma A^2 - \omega^2 + \omega_0^2) = B.\tag{6.9}$$

При построении резонансных кривых амплитуда внешней силы  $B$  является параметром: каждому фиксированному значению амплитуды внешнего воздействия соответствует своя резонансная кривая. Уравнение резонансных кривых является кубическим уравнением, и следовательно, может иметь либо один действительный корень, либо три действительных корня. Прежде чем описывать явление нелинейного резонанса, проведем вывод уравнения резонансных кривых еще другими методами.

## 6.2 Уравнение резонансных кривых осциллятора Дуффинга, полученное методом гармонического баланса

Рассмотрим вывод уравнения резонансных кривых для осциллятора Дуффинга

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \omega_0^2 x + \mu x^3 = B \cos pt. \quad (6.10)$$

Предположим, что нелинейное слагаемое  $\mu x^3$  мало по сравнению с линейными слагаемыми уравнения (6.10). В этом случае колебания будут близки к гармоническим, амплитуда основной гармоники, то есть гармоники на частоте  $p$ , много больше амплитуд высших гармоник. Следовательно решение уравнения (6.10) можно записать в виде

$$x(t) \simeq a \cos pt + b \sin pt. \quad (6.11)$$

Для определения коэффициентов  $a$  и  $b$  подставим решение (6.11) в уравнение (6.10). Слагаемыми с кратными частотами будем пренебрегать. Данный подход к определению приближенных решений для нелинейных систем называется **методом гармонического баланса**. В результате получается

$$\begin{aligned} & - ap^2 \cos pt - bp^2 \sin pt - 2\alpha pa \sin pt + 2\alpha pb \cos pt + \omega_0^2 a \cos pt \\ & + \omega_0^2 b \sin pt + \frac{3}{4}\mu (a^3 \cos pt + b^3 \sin pt + a^2 b \sin pt + ab^2 \cos pt) = B \cos pt \end{aligned}$$

Сгруппировав коэффициенты перед  $\cos pt$  и  $\sin pt$ , получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} (\omega_0^2 - p^2) a + 2\alpha pb + \frac{3}{4}\mu (a^3 + ab^2) &= B, \\ (\omega_0^2 - p^2) b - 2\alpha pa + \frac{3}{4}\mu (b^3 + a^2 b) &= 0. \end{aligned}$$

Перейдем к полярным координатам

$$\begin{aligned} a &= \rho \cos \phi, \\ b &= \rho \sin \phi, \end{aligned}$$

где  $\rho$  - амплитуда,  $\phi$  - фаза колебаний. В результате получается

$$(\omega_0^2 - p^2) \rho \cos \phi + 2\alpha p \rho \sin \phi + \frac{3}{4} \mu \rho^3 \cos \phi = B, \quad (6.12)$$

$$(\omega_0^2 - p^2) \rho \sin \phi - 2\alpha p \rho \cos \phi + \frac{3}{4} \mu \rho^3 \sin \phi = 0. \quad (6.13)$$

Умножим слагаемые уравнения (6.12) на  $\cos \phi$ , а слагаемые уравнения (6.13) умножим на  $\sin \phi$ , и сложим левые части и правые части уравнений:

$$(\omega_0^2 - p^2) \rho + \frac{3}{4} \mu \rho^3 = B \cos \phi. \quad (6.14)$$

Умножая (6.12) на  $\sin \phi$ , а (6.13) - на  $\cos \phi$  и вычитая второе уравнение из первого, получим

$$2\alpha p \rho = B \sin \phi. \quad (6.15)$$

Чтобы избежать зависимости от  $\phi$ , возведем обе части уравнений (6.14) и (6.15) в квадрат и сложим. При этом обозначим через  $A$  квадрат амплитуды колебаний  $\rho^2 = A$ . В результате получим уравнение для резонансных кривых

$$\frac{9}{16} \mu^2 A^3 + \frac{3}{2} \mu (\omega_0^2 - p^2) A^2 + [(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\alpha^2 p^2] A - B^2 = 0. \quad (6.16)$$

### 6.3 Уравнение резонансных кривых осциллятора Дуффинга, полученное методом медленно меняющихся комплексных амплитуд

Запишем уравнение осциллятора Дуффинга в виде

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \omega_0^2 x + \mu x^3 = B \cos \omega t. \quad (6.17)$$

Здесь, по-прежнему,  $\alpha$  - коэффициент трения,  $\omega_0^2$  - собственная частота колебаний (или частота линейных колебаний),  $\mu$  - параметр нелинейности,  $B, \omega$  - амплитуда и частота внешнего гармонического воздействия.

Будем полагать, что исследуемый осциллятор близок к гармоническому осциллятору, то есть трение небольшое и нелинейность слабая ( $|\alpha| \ll 1, |\mu| \ll 1$ ). Кроме того, будем полагать, что амплитуда внешнего гармо-



нического воздействия небольшая и расстройка между частотой внешнего воздействия и собственной частотой осциллятора мала ( $B \ll 1, |\omega - \omega_0| \ll 1$ ).

В рамках сделанных предположений приближенное решение можно искать в виде гармонической функции, параметры которой медленно меняются во времени,

$$x(t) = \operatorname{Re} [a(t) \exp(i\omega_0 t)],$$

где  $a(t)$  - медленно меняющаяся комплексная амплитуда. Это решение перепишем в виде

$$x(t) = \frac{1}{2} [a \exp(i\omega_0 t) + a^* \exp(-i\omega_0 t)], \quad (6.18)$$

где  $a^*$  - комплексно сопряженная величина, и введем дополнительное условие на комплексную амплитуду

$$\dot{a} \exp(i\omega_0 t) + \dot{a}^* \exp(-i\omega_0 t) = 0. \quad (6.19)$$

С учетом этого дополнительного условия вычислим первую и вторую производную, и подставим решение в исходное уравнение.

Для первой производной получаем

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{1}{2} [\dot{a} \exp(i\omega_0 t) + i\omega_0 a \exp(i\omega_0 t) + \dot{a}^* \exp(-i\omega_0 t) - i\omega_0 a^* \exp(-i\omega_0 t)] \\ &= \frac{1}{2} [i\omega_0 a \exp(i\omega_0 t) - i\omega_0 a^* \exp(-i\omega_0 t)]. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Для второй -

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) &= \frac{1}{2} [i\omega_0 \dot{a} \exp(i\omega_0 t) - \omega_0^2 a \exp(i\omega_0 t) - i\omega_0 \dot{a}^* \exp(-i\omega_0 t) - \omega_0^2 a^* \exp(-i\omega_0 t)] \\ &= i\omega_0 \dot{a} \exp(i\omega_0 t) - \frac{\omega_0^2}{2} [a \exp(i\omega_0 t) + a^* \exp(-i\omega_0 t)]. \end{aligned} \quad (6.21)$$

В результате подстановки (6.21), (6.20) и (6.18) в (6.17) получаем

$$\begin{aligned}
& i\omega_0 \dot{a} \exp(i\omega_0 t) + \frac{i\omega_0 \alpha}{2} [a \exp(i\omega_0 t) - a^* \exp(-i\omega_0 t)] \\
& + \frac{\mu}{8} [a^3 \exp(3i\omega_0 t) + 3a^2 a^* \exp(i\omega_0 t) + 3a a^{*2} \exp(-i\omega_0 t) + a^{*3} \exp(-3i\omega_0 t)] \\
& = B \frac{\exp(i\omega t) + \exp(-i\omega t)}{2} \\
i\omega_0 \dot{a} & + \frac{i\omega_0 \alpha}{2} [a - a^* \exp(-2i\omega_0 t)] \\
& + \frac{\mu}{8} [a^3 \exp(2i\omega_0 t) + 3|a|^2 a + 3|a|^2 a^* \exp(-2i\omega_0 t) + a^{*3} \exp(-4i\omega_0 t)] \\
& = \frac{B}{2} \exp[i(\omega - \omega_0)t] + \frac{B}{2} \exp[-i(\omega + \omega_0)t]
\end{aligned}$$

Усредним за период все члены уравнения. Напомним, что  $a(t)$ ,  $\dot{a}(t)$ ,  $\frac{B}{2} \exp[i(\omega - \omega_0)t]$  являются медленно меняющимися величинами, которые остаются практически постоянными за период, и в нашем приближении их можно выносить за знак интеграла при усреднении. В результате получается

$$i\omega_0 \dot{a} + \frac{i\omega_0 \alpha}{2} a + \frac{3\mu}{8} |a|^2 a = \frac{B}{2} \exp(i\delta t), \quad (6.22)$$

где  $\delta = \omega - \omega_0$  - расстройка между частотой внешнего воздействия и собственной частотой осциллятора.

Перепишем уравнение (6.22) для комплексной амплитуды  $a(t)$  в полярных координатах

$$a(t) = \rho(t) \exp[i\phi(t)],$$

(где  $\rho(t)$  и  $\phi(t)$  имеют смысл медленно меняющихся амплитуды и фазы колебаний).

$$\begin{aligned}
i\omega_0 \left[ \dot{\rho} \exp(i\phi) + i\dot{\phi} \rho \exp(i\phi) \right] + \frac{i\omega_0 \alpha}{2} \rho \exp(i\phi) + \frac{3\mu}{8} \rho^3 \exp(i\phi) & = \frac{B}{2} \exp(i\delta t) \\
\dot{\rho} + i\rho\dot{\phi} + \frac{\alpha}{2}\rho - i\frac{3\mu}{8\omega_0}\rho^3 & = -i\frac{B}{2\omega_0} \cos(\delta t - \phi) + \frac{B}{2\omega_0} \sin(\delta t - \phi)
\end{aligned}$$

Введем замену в виде полной фазы  $\psi = \delta t - \phi$ , и перепишем комплексное уравнение в виде системы двух действительных уравнений, приравнявая

отдельно действительные слагаемые и мнимые слагаемые уравнения.

$$\dot{\rho} = -\frac{\alpha}{2}\rho + \frac{B}{2\omega_0} \sin \psi, \quad (6.23)$$

$$\dot{\psi} = \left( \delta - \frac{3\mu}{8\omega_0}\rho^2 \right) + \frac{B}{2\omega_0\rho} \cos \psi. \quad (6.24)$$

Установившимся вынужденным колебаниям соответствуют неподвижные точки полученной системы уравнений (6.23) - (6.24). Обозначим координаты неподвижных точек как  $\rho = \rho_0$  и  $\psi = \psi_0$ , и запишем уравнения для неподвижных точек.

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2}\rho_0 &= \frac{B}{2\omega_0} \sin \psi_0, \\ \left( \delta - \frac{3\mu}{8\omega_0}\rho_0^2 \right) \rho_0 &= -\frac{B}{2\omega_0} \cos \psi_0. \end{aligned}$$

Возведем в квадрат правые и левые части первого и второго уравнений и сложим их правые части и их левые части. В результате получим

$$\begin{aligned} \left( \frac{\alpha}{2}\rho_0 \right)^2 + \rho_0^2 \left( \delta - \frac{3\mu}{8\omega_0}\rho_0^2 \right)^2 &= \frac{B^2}{4\omega_0^2}, \\ \rho_0^2 + \rho_0^2 \left( \frac{2\delta}{\alpha} - \frac{3\mu}{4\alpha\omega_0}\rho_0^2 \right)^2 &= \frac{B^2}{\alpha^2\omega_0^2} \end{aligned} \quad (6.25)$$

Уравнение (6.25) представляет собой уравнение резонансной кривой для осциллятора Дуффинга. Преобразуем его к более простому виду. Умножим обе части уравнения на  $\frac{3\mu}{4\alpha\omega_0}$ :

$$\frac{3\mu}{4\alpha\omega_0}\rho_0^2 + \frac{3\mu}{4\alpha\omega_0}\rho_0^2 \left( \frac{2\delta}{\alpha} - \frac{3\mu}{4\alpha\omega_0}\rho_0^2 \right)^2 = \frac{3\mu}{4\alpha\omega_0} \frac{B^2}{\alpha^2\omega_0^2},$$

и сделаем замену переменных:  $\frac{3\mu}{4\alpha\omega_0}\rho_0^2 = A$  - величина, характеризующая квадрат амплитуды вынужденных установившихся колебаний,  $\frac{2\delta}{\alpha} = \Delta$  характеризует расстройку между частотой внешнего воздействия и собственной частотой осциллятора,  $\frac{3\mu B^2}{4\alpha^3\omega_0^3} = F$  характеризует амплитуду

внешнего воздействия. В результате получим

$$A + A(\Delta - A)^2 = F \quad (6.26)$$

или

$$A = \frac{F}{1 + (\Delta - A)^2}. \quad (6.27)$$

## 6.4 Описание семейства резонансных кривых осциллятора Дуффинга

Полученные разными способами уравнения резонансных кривых представляют собой кубическое алгебраическое уравнение относительно переменной  $A$ . Уравнение резонансных кривых описывает явление нелинейного резонанса в слабо нелинейном осцилляторе Дуффинга при гармоническом воздействии. Уравнение может иметь либо одно, либо три вещественных решения в зависимости от коэффициентов уравнения. Это означает, что в зависимости от параметров осциллятора и внешнего воздействия может существовать либо один колебательный режим, либо сосуществуют три режима. Как будет показано ниже, два из них являются устойчивыми и один - неустойчивый. При построении резонансных кривых амплитуда внешней силы  $B$  (или связанный с ней параметр  $F$ ) является параметром. На рисунке 6.1 построены резонансные кривые нелинейного осциллятора, каждая из которых представляет собой график зависимости квадрата амплитуды установившихся вынужденных колебаний от расстройки между частотой внешнего воздействия и собственной частотой осциллятора, для различных значений параметра  $B$ .

Когда амплитуда внешнего воздействия  $B$  меньше некоторого критического значения  $B_c$ , резонансные кривые однозначны и напоминают резонансные кривые линейного осциллятора с затуханием. Максимум у них смещен в сторону больших частот, если собственная частота осциллятора с ростом амплитуды растет, и - в сторону меньших частот, если собственная частота убывает. Когда амплитуда внешнего воздействия  $B$  становится больше критического значения  $B_c$ , резонансная кривая становится неоднозначной. Появляется интервал значений частот  $(p_1, p_2)$ , где при

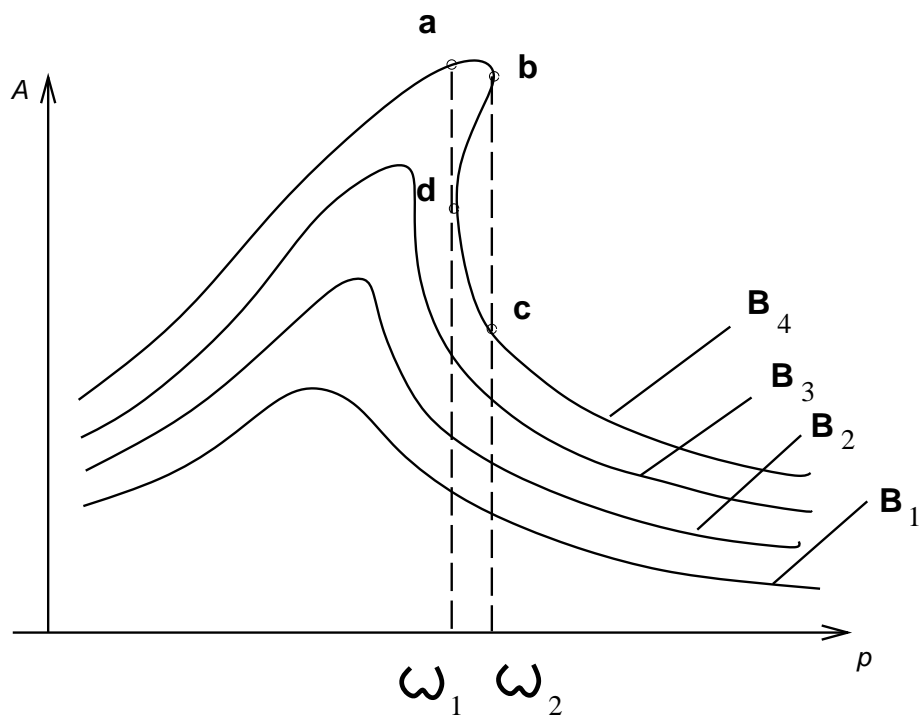


Рис. 6.1: Резонансные кривые нелинейного осциллятора

фиксированных значениях параметров имеется три решения, с тремя разными амплитудами. Из анализа на устойчивость следует, что режимы, соответствующие средней ветви, являются неустойчивыми, а две другие ветви соответствуют устойчивым режимам. При изменении частоты внешнего воздействия, при движении вдоль резонансной кривой слева направо будут происходить следующие процессы. С увеличением частоты вначале происходит плавное увеличение амплитуды вынужденных колебаний. При совпадении частоты внешнего воздействия с собственной частотой осциллятора  $p = \omega_0$ , когда в линейной системе наступает резонанс, здесь амплитуда колебаний еще далеко не достигает своего максимального значения. С увеличением  $p$  она продолжает расти дальше до некоторого максимального значения. При переходе через значение частоты  $p = p_2$ , происходит скачкообразное уменьшение амплитуды вынужденных колебаний. При дальнейшем увеличении частоты продолжается плавное уменьшение амплитуды колебаний. При обратном движении по резонансной кривой скачкообразное увеличение амплитуды колебаний происходит при другом значении частоты:  $p = p_1$ . Наблюдается гистерезис. В области гистерезиса  $(p_1, p_2)$  система является бистабильной: сосуществует два устойчивых состояния.

Опишем явление нелинейного резонанса на языке фазового пространства. Предварительно перепишем уравнение неавтономного осциллятора Дуффинга в виде системы трех дифференциальных автономных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\alpha y - \omega_0^2 x - \mu x^3 + B \cos z, \\ \dot{z} &= p. \end{aligned} \tag{6.28}$$

Эта система показывает, что осциллятор Дуффинга при внешнем гармоническом воздействии имеет трехмерное фазовое пространство с координатами  $x, y, z$  периодическое по координате  $z$  (цилиндрическая поверхность). В зависимости от параметров осциллятора и внешнего воздействия в фазовом пространстве может существовать либо один, либо три предельных цикла, соответствующих установившимся периодическим колебаниям. Зафиксируем амплитуду внешнего воздействия  $B = B_1$ , резо-

нансная кривая для которой показана на рисунке 6.1.

Предположим, что частота воздействия  $p$  меньше  $p_1$ . В этом случае амплитуда колебаний однозначно определяется частотой воздействия. В фазовом пространстве системы имеется один устойчивый предельный цикл (рис.6.2а). С увеличением частоты, при переходе через бифуркационное значение  $p = p_1$ , в фазовом пространстве рождается пара новых циклов: устойчивый цикл-3 и неустойчивый цикл-2 (рис.6.2б). На резонансной кривой точке бифуркации соответствует точка  $d$ . Теперь в осцилляторе возможны два устойчивых колебательных режима. Однако, хотя и произошло качественное изменение фазового портрета, в системе никаких изменений наблюдаться не будет, поскольку устойчивый предельный цикл-1 сохранился, и изображающая точка будет продолжать двигаться на нем. При изменении частоты воздействия от значения  $p_1$  до значения  $p_2$ , радиус устойчивого предельного цикла-3 уменьшается. Радиус неустойчивого цикла-2 увеличивается, и он сближается с устойчивым циклом-1. При переходе параметра через бифуркационное значение  $p = p_2$ , устойчивый цикл-1 и неустойчивый цикл-2 сливаются и исчезают. На резонансной кривой это соответствует точке  $b$ . Теперь в фазовом пространстве системы остается единственный устойчивый цикл (цикл-3). Изображающая точка из области фазового пространства, где до бифуркации располагался устойчивый предельный цикл-1, устремится к устойчивому предельному циклу-3. В осцилляторе будет наблюдаться резкое уменьшение амплитуды вынужденных колебаний до значения, соответствующего радиусу предельного цикла-3. При обратном движении по параметру  $p$  вначале будет наблюдаться плавное увеличение радиуса устойчивого предельного цикла-3. За точкой  $p = p_2$  с циклом-3 никаких бифуркаций не происходит. Он так же будет наблюдаться в эксперименте. Однако структура фазового пространства качественно меняется при переходе через бифуркационное значение  $p = p_2$ . С внешней стороны от цикла-3 появляется пара предельных циклов: устойчивый цикл-1 и неустойчивый цикл-2. Происходит седло-узловая бифуркация рождения пары циклов. Теперь вновь в фазовом пространстве системы имеются два устойчивых цикла и один седловой предельный цикл. Седловой цикл-2 и его устойчивые многообразия разделяют бассейны притяжения устойчивого цикла-1 и устойчиво-

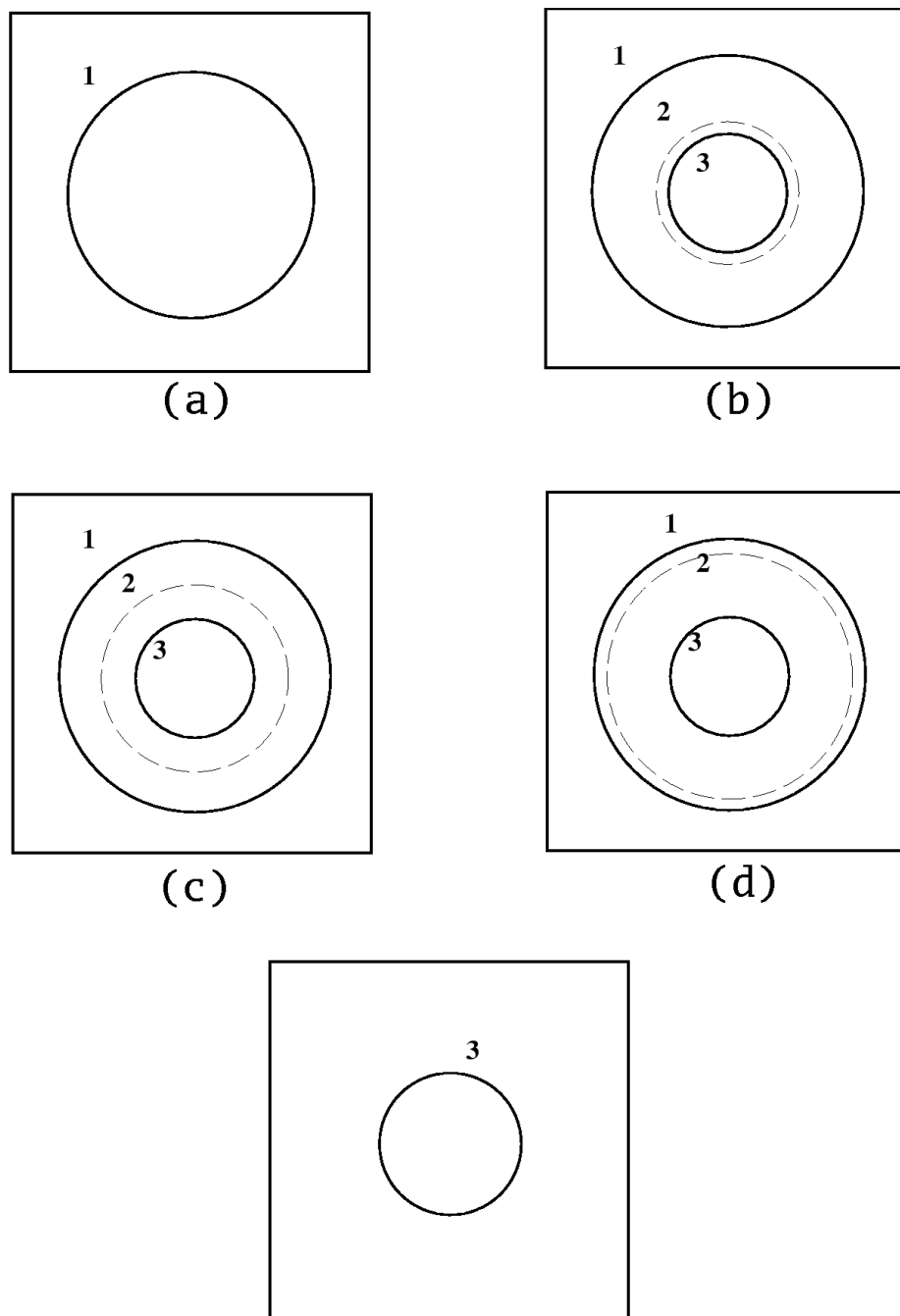


Рис. 6.2: Бифуркации предельных циклов при нелинейном резонансе



го цикла-3. При дальнейшем уменьшении частоты внешнего воздействия от значения  $p = p_2$  до значения  $p = p_1$  радиус неустойчивого цикла-2 уменьшается, а устойчивого цикла-3 увеличивается. При переходе через бифуркационное значение  $p = p_1$  они сливаются и исчезают, происходит седло-узловая бифуркация исчезновения пары циклов. В фазовом пространстве системы остается один устойчивый предельный цикл-1, к которому и притянется изображающая точка. В результате произойдет резкое увеличение амплитуды колебаний. При дальнейшем уменьшении частоты внешнего воздействия будет происходить плавное уменьшение радиуса предельного цикла-1.

## Задания и упражнения

1. Построить семейства резонансных характеристик для различных значений амплитуды внешнего воздействия.
2. Определить примерное значение амплитуды внешнего воздействия, выше которого система становится бистабильной.
3. Построить сосуществующие в области гистерезиса аттракторы системы.
4. Сопоставить результаты теоретических расчетов и компьютерного эксперимента.
5. Провести сравнительный анализ результатов, полученных численными методами, с результатами, полученными приближенными аналитическими методами. Оценить интервалы значений параметров, где применимы аналитические результаты.

## 6.5 Экспериментальная установка

Лабораторная установка представляет собой программу, разработанную в среде LabView. Программа позволяет наблюдать явление нелинейного резонанса и снимать резонансные характеристики системы. Рабочее окно программы представлено на Рис. 6.3.

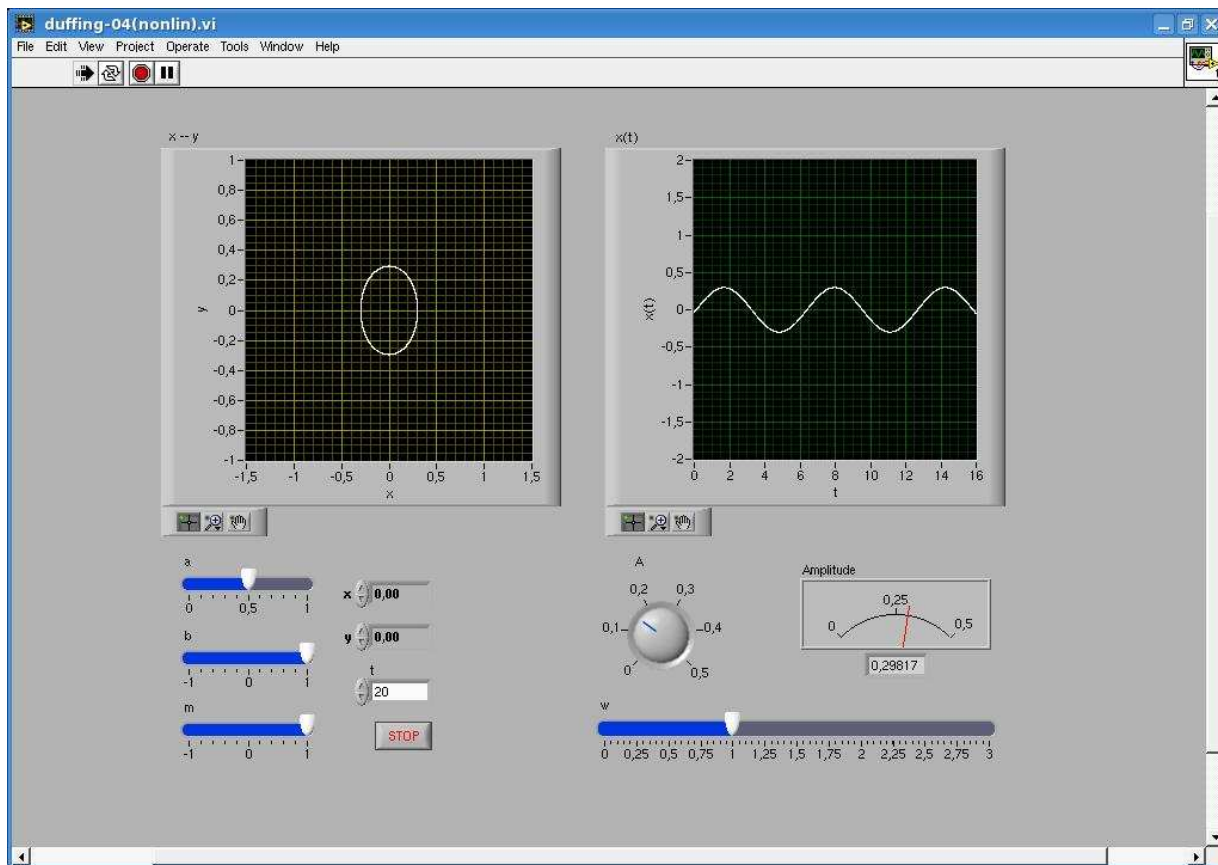







Рис. 6.3: Программа для исследования явления нелинейного резонанса на примере осциллятора Дуффинга.

Кнопками " " и " " в верхней части рабочего окна производится соответственно запуск и остановка интегрирования. Остановить программу можно также кнопкой "Stop". Графики "x-y" и "t-x(t)" отображают соответственно фазовый портрет и временную реализацию вынужденных колебаний в осцилляторе Дуффинга. С помощью инструментов " " " " и " " устанавливаются пределы показаний этих графиков. На графике "Spectrum" отображается спектр колебаний. Начальные условия устанавливаются в окнах "x" и "y". Параметры осциллятора задаются регуляторами с соответствующими подписями. Ручками "A" и "w" задаются соответственно амплитуда и частота внешнего воздействия. Время интегрирования вводится в окне "t". Индикатор "Amplitude" показывает амплитуду колебаний неавтономного осциллятора. Изменяя частоту воздействия при различных амплитудах A и снимая показания индикатора амплитуды колебаний, можно получить семейство резонансных кривых для заданных значений параметров осциллятора Дуффинга.

# Литература

- [1] Л.И. Мандельштам. *Лекции по теории колебаний*. - М., Наука, 1972.
- [2] А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин. *Теория колебаний*. - М., Наука, 1981.
- [3] В.И. Калинин, Г.М. Герштейн. *Введение в радиофизику*. М., Гостехиздат, 1957.
- [4] А.А. Харкевич. *Основы радиотехники*. М., Связьиздат, 1962.
- [5] А.А. Харкевич. *Нелинейные и параметрические явления в радиотехнике*. -М., Гостехиздат, 1956.
- [6] К.Ф. Теодорчик. *Автоколебательные системы*. М.: Гостехиздат, 1952.
- [7] Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*. - М., Физматгиз, 1958.
- [8] Н.Н. Моисеев. *Асимптотические методы нелинейной механики*. М., Наука, 1981.
- [9] П.С. Ланда. *Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы*. М., Наука, 1980.
- [10] М.И. Рабинович, Д.И. Трубецков. *Введение в теорию колебаний и волн*. М., Наука, 1984.
- [11] В.С. Анищенко. *Сложные колебания в простых системах*. М., Наука, 1990.
- [12] Н.В. Бутенин, Ю.И. Неймарк, Н.А. Фурфурев. *Введение в теорию нелинейных колебаний*. М., Наука, 1987.

- [13] И.И. Блехман. *Синхронизация в природе и технике*. М., Наука, 1981.
- [14] А. Пиковский, М. Розенблюм, Ю. Куртс. *Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление*. - М., Техносфера, 2003.
- [15] Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. *Нелинейные колебания: Учеб. пособие для вузов*. - М., Издательство физико-математической литературы, 2002.
- [16] П. Берже, И. Помо, Л. Видаль. *Порядок в хаосе*. М., Мир, 1991.
- [17] Г. Шустер, *Детерминированный хаос*. М., Мир. 1988.
- [18] В.С. Анищенко, Т.Е. Вадивасова, В.В. Астахов, *Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем*. Саратов, Изд-во Саратов. ун-та, 1999.
- [19] Н.В. Карлов, Н.А. Кириченко. *Колебания, волны, структуры*. - М.: Физматлит, 2001.
- [20] Дж. Гукенхеймер, Ф. Холмс. *Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей*. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.