

Синхронизация

Часть 2.

***Синхронизация хаотических
автоколебаний.***



Явление синхронизации наблюдается не только в автоколебательных системах с регулярной динамикой, но и в системах, находящихся в режиме динамического хаоса

С накоплением знаний о хаотической динамике нелинейных систем возникла потребность обобщить теорию синхронизации автоколебаний (АК) на этот случай.

Что считать синхронизацией хаоса?

- **Синхронизация в смысле захвата мгновенных фаз и характерных частот (частотно--фазовая синхронизация);**
- **синхронизация как полная идентичность колебаний взаимодействующих систем (полная синхронизация).**

Классический подход к проблеме синхронизации хаотических автоколебаний. Частотно – фазовая синхронизация

Классические представления о синхронизации можно легко обобщить на АК системы в режиме **спирального (фазово --когерентного) хаоса**.

Что такое спиральный хаос?

- 1. Траектории вращаются вокруг состояния равновесия почти регулярно, т.е. время возврата к секущей плоскости слабо флуктуирует относительно среднего значения T_c .**
- 2. Можно ввести мгновенную фазу хаотических колебаний одним из следующих способов:**
 - используя преобразование Гильберта**

$$\Phi(t) = \arctg\left(\frac{x_h(t)}{x(t)}\right) \pm \pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1)$$

- как угол вращения траектории в некоторой проекции аттрактора**

$$\Phi(t) = \arctg\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right) \pm \pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2)$$

- используя последовательность моментов времени t_k , соответствующих пересечению траекторией некоторой секущей плоскости в одном направлении

$$\Phi(t) = 2\pi \left(\frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k} \right) + 2\pi k. \quad (3)$$

3. В спектре мощности имеется узкая спектральная линия, соответствующая главному спектральному максимуму. Ее ширина определяется коэффициентом эффективной диффузии мгновенной фазы $\Phi(t)$ и составляет величину порядка $10^{-5} - 10^{-4}$ безразмерных единиц. Частота максимума ω_0 (базовая частота хаотических автоколебаний) должна совпадать со **средней частотой** ω_{cp} :

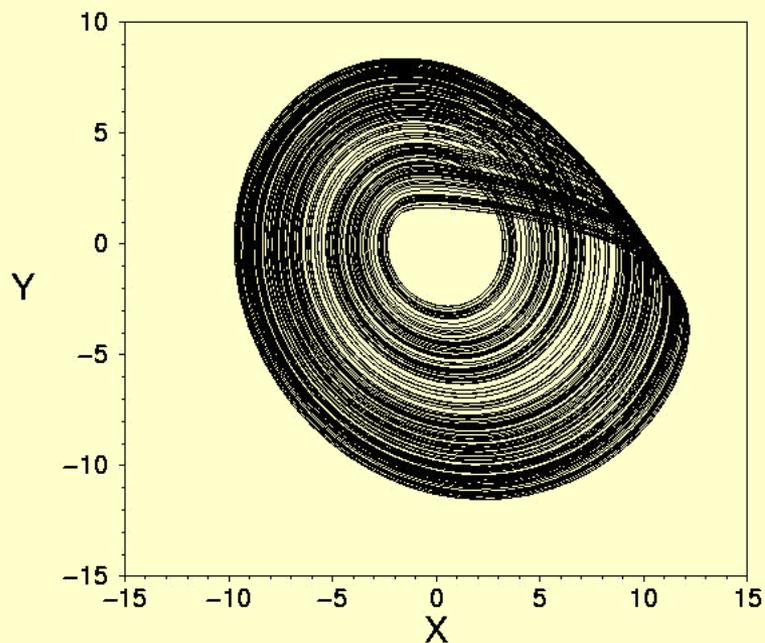
$$\omega_{cp} = \left\langle \frac{d\Phi(t)}{dt} \right\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\Phi(t_0 + T) - \Phi(t_0)}{T}. \quad (4)$$

Спиральный аттрактор в осцилляторе Рёсслера

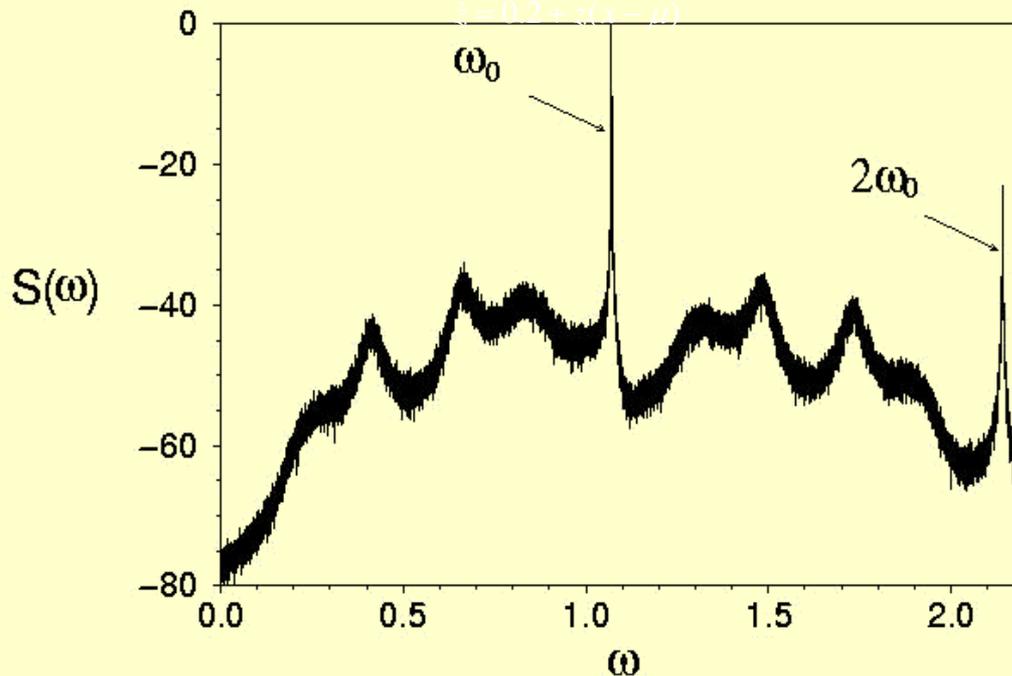
$$\dot{x} = z - y - x, \quad \dot{y} = x + \alpha y, \quad \dot{z} = \beta + z(x - \mu), \quad (5)$$

где $\alpha = \beta = 0.2$, $\mu = 6.5$.

Проекция аттрактора



Спектр мощности



Частотно – фазовая синхронизация хаоса означает:

1. Кратность базовых частот взаимодействующих систем

$$n\omega_{01} = m\omega_{02};$$

2. Ограниченность разности мгновенных фаз и кратность средних частот

$$|n\Phi_1(t) - m\Phi_2(t)| < \text{Const}.$$

$$n\omega_{\text{cp1}} = m\omega_{\text{cp2}};$$

3. Кратность средних периодов возврата к секущей плоскости

$$nT_1 = mT_2,$$

где n и m -- целые числа.

Возможны два механизма синхронизации:

1. Захват частот и фаз;
 2. Подавление автоколебаний одной из взаимодействующих систем.
- В случае частотно—фазовой синхронизации взаимодействующие системы могут быть различными, но их базовые частоты должны быть близки к равенству или кратному соотношению.

Численное исследование частотно – фазовой синхронизации хаоса в системе Рёсслера с гармоническим внешним воздействием

Модель:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= z - \Omega y - x + C \sin \omega_{ex} t, \\ \dot{y} &= \Omega x + \alpha y, \\ \dot{z} &= \beta + z(x - \mu),\end{aligned}\tag{6}$$

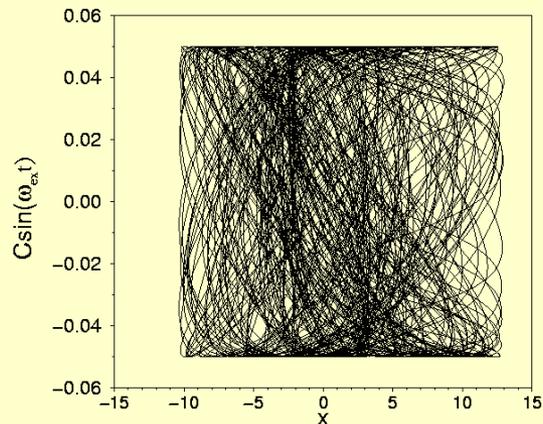
$\alpha = \beta = 0.2$, параметр μ управляет режимом автоколебаний, параметр Ω управляет базовой частотой автоколебаний, C – амплитуда внешнего воздействия, ω_{ex} – частота воздействия.

Рассмотрим синхронизацию хаоса на основном тоне: значение частоты воздействия ω_{ex} близко к Ω . Можно ввести параметр частотной расстройки $\Delta = \omega_{ex} - \Omega$, значения которого полагаются малыми. Положим $\Omega = 1$ и $\mu = 6.5$ и будем менять ω_{ex} и C .

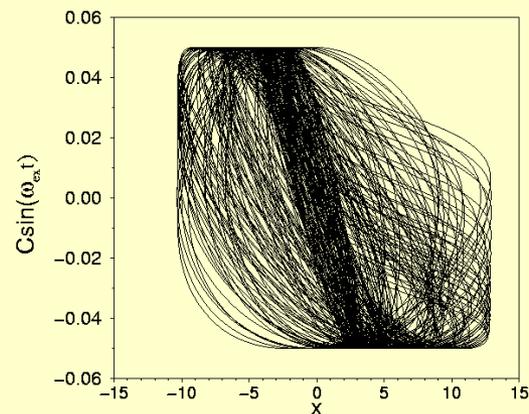
Диагностика синхронизации хаоса по фазовому портрету

Проекция на плоскость x -- воздействие

$C=0.05, \Delta=0.06$

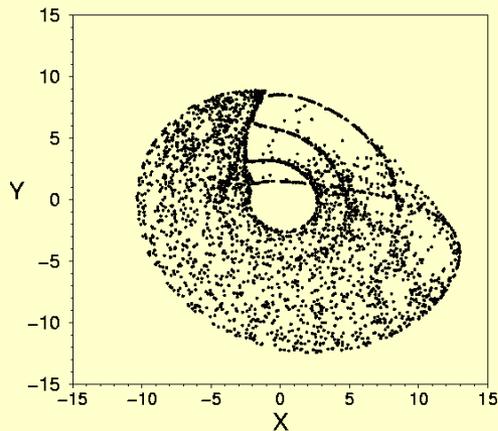


$C=0.05, \Delta=0.065$

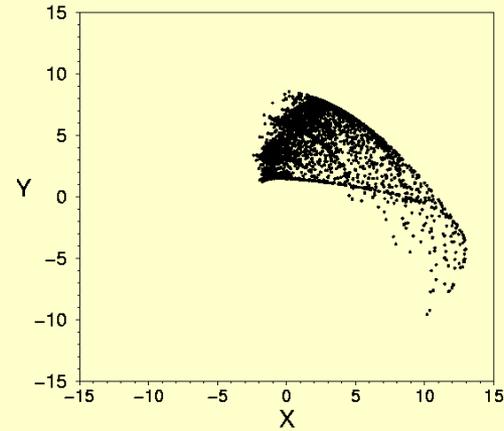


x - y проекция стробоскопических сечений

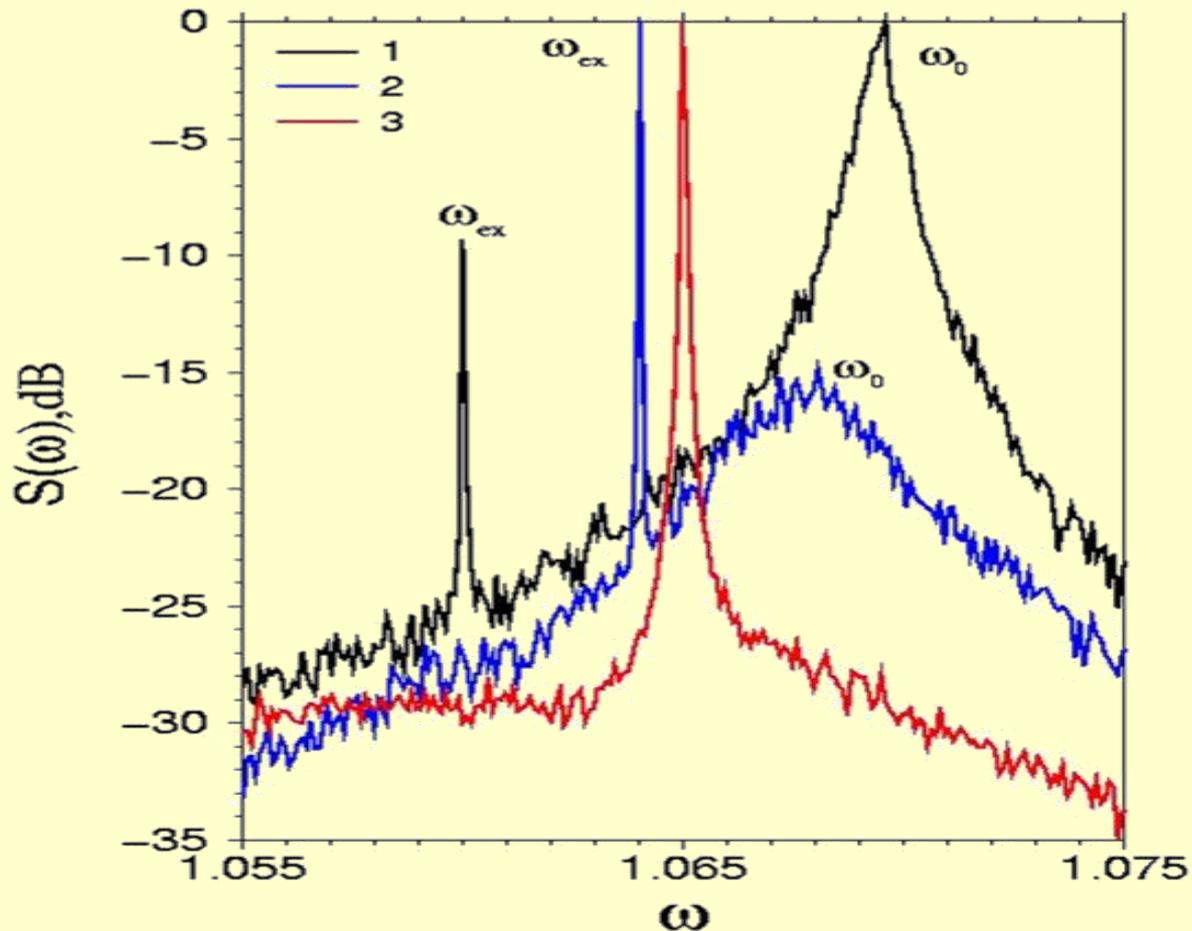
$C=0.05, \Delta=0.06$



$C=0.05, \Delta=0.065$

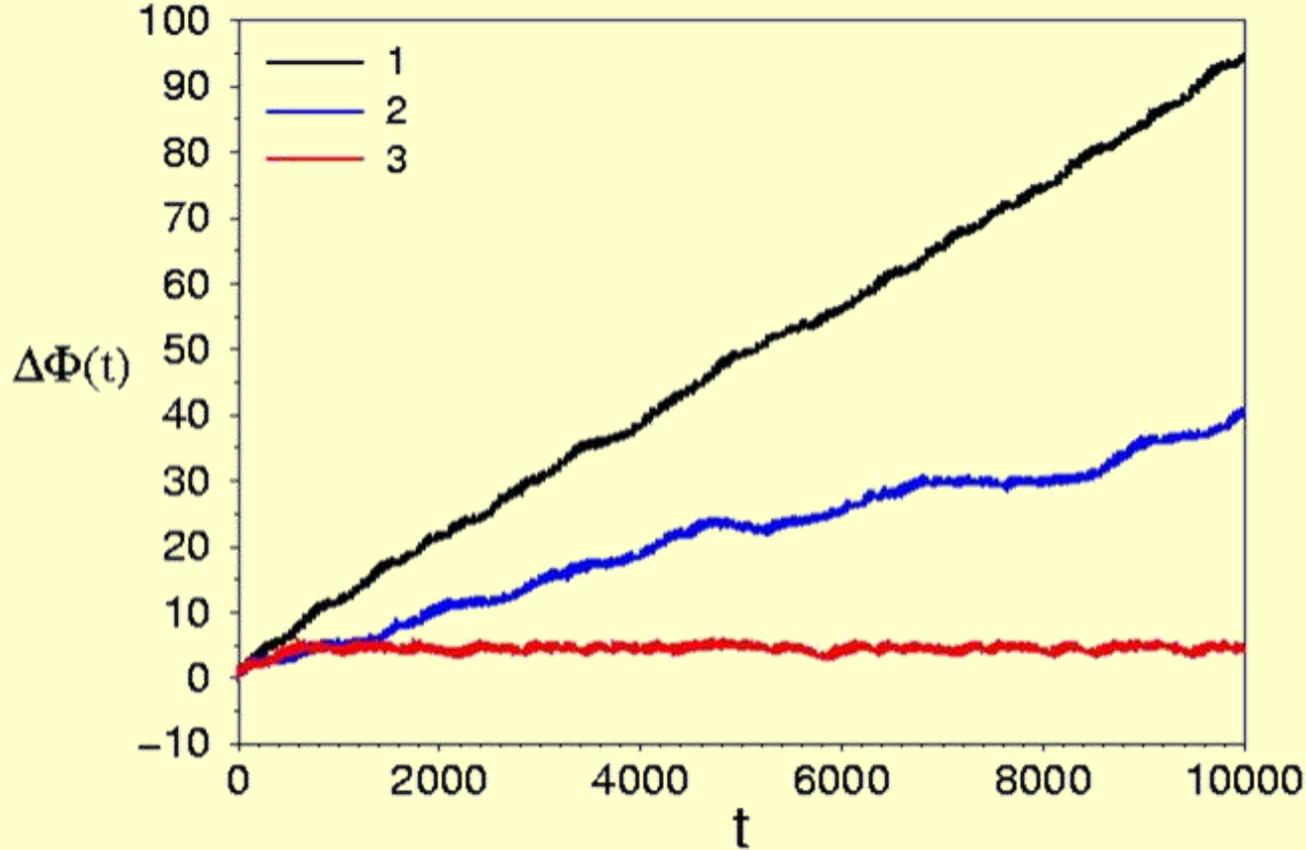


Диагностика синхронизации хаоса по спектру



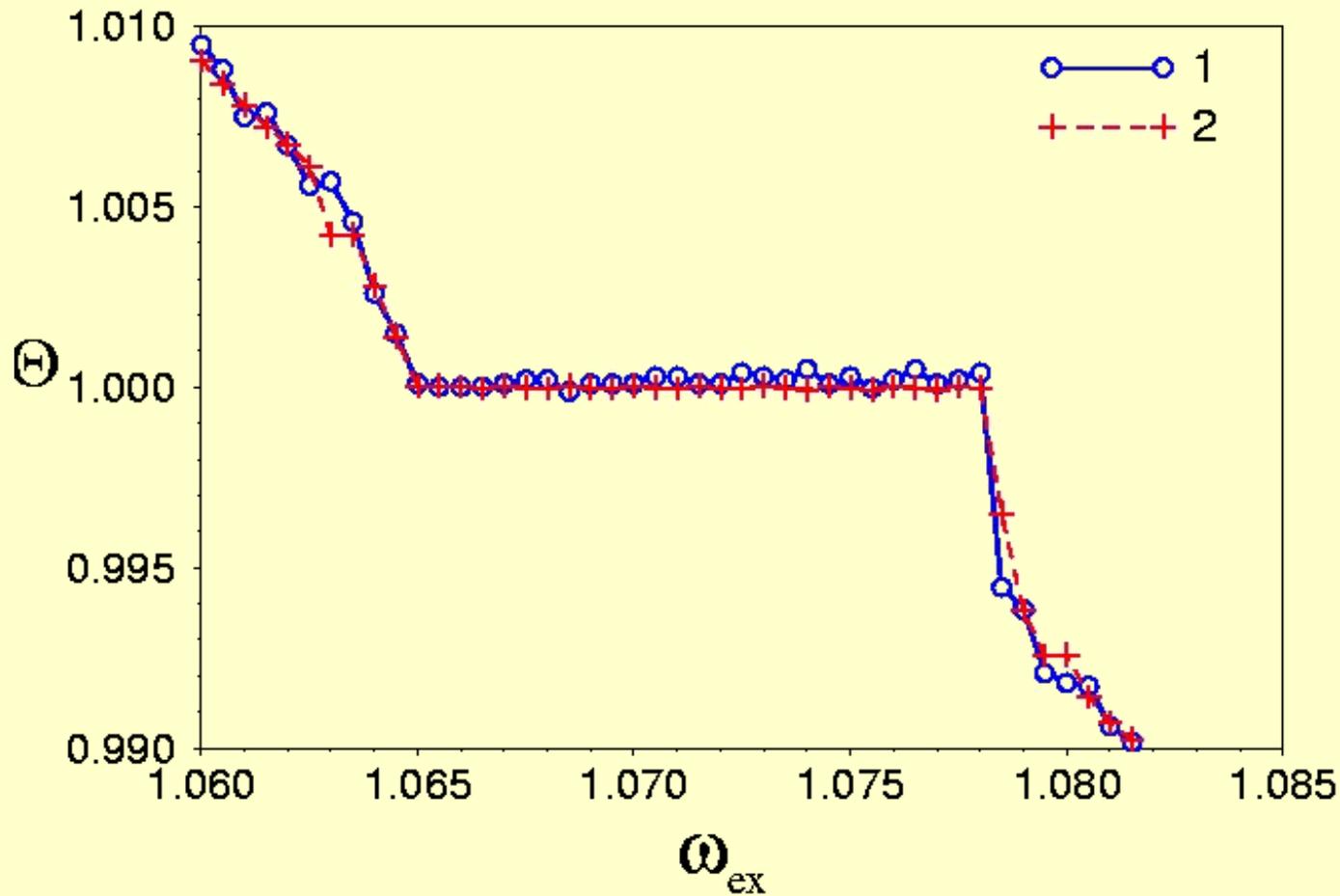
Захват базовой частоты автоколебаний в системе (6) при $C=0.05$. Спектры соответствуют различным значениям расстройки: $\Delta = 0.06$ (кривая 1), $\Delta = 0.064$ (кривая 2), $\Delta = 0.065$ (кривая 3). ω_{ex} – частота воздействия, ω_0 --- базовая частота автоколебаний.

Диагностика синхронизации хаоса по захвату мгновенной фазы



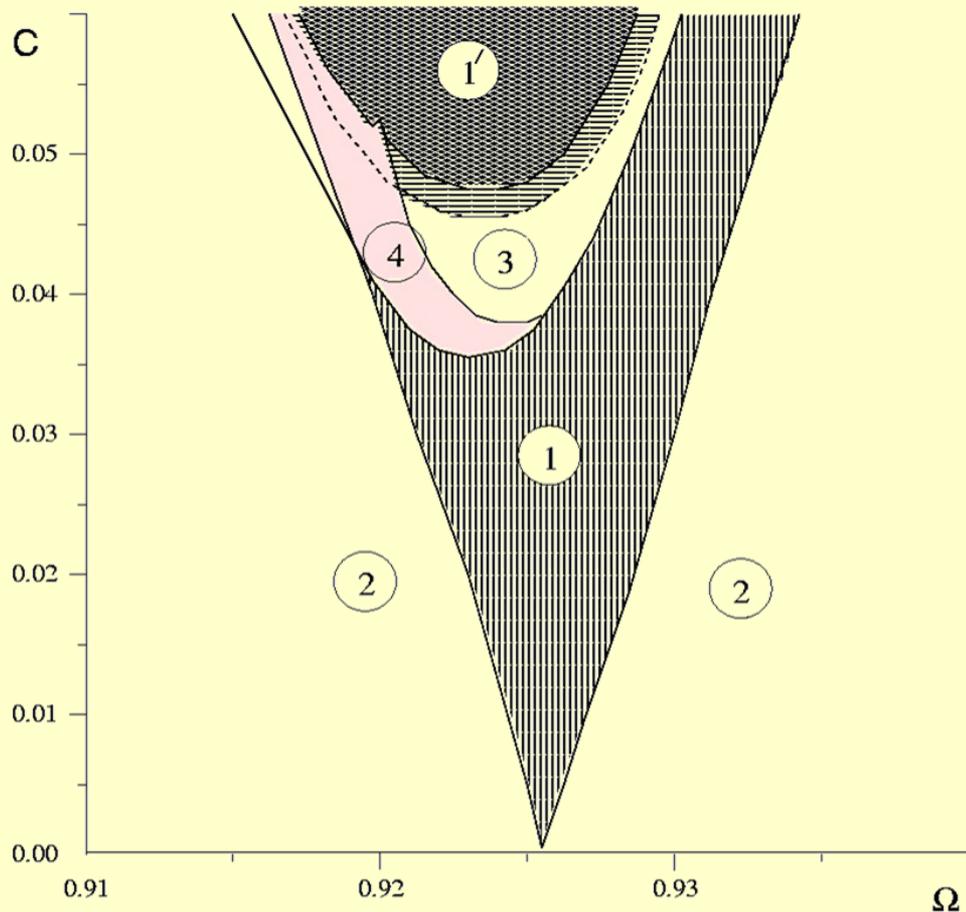
Зависимость разности фаз $\Delta\Phi(t) = \Phi(t) - \omega_{ex}t$ от времени в системе (6) при $C=0.05$ и различных значениях расстройки: $\Delta = 0.06$ (кривая 1), $\Delta = 0.064$ (кривая 2), $\Delta = 0.065$ (кривая 3). Мгновенная фаза определялась для колебаний $x(t)$ по формуле (1).

Диагностика области синхронизации в системе (6)



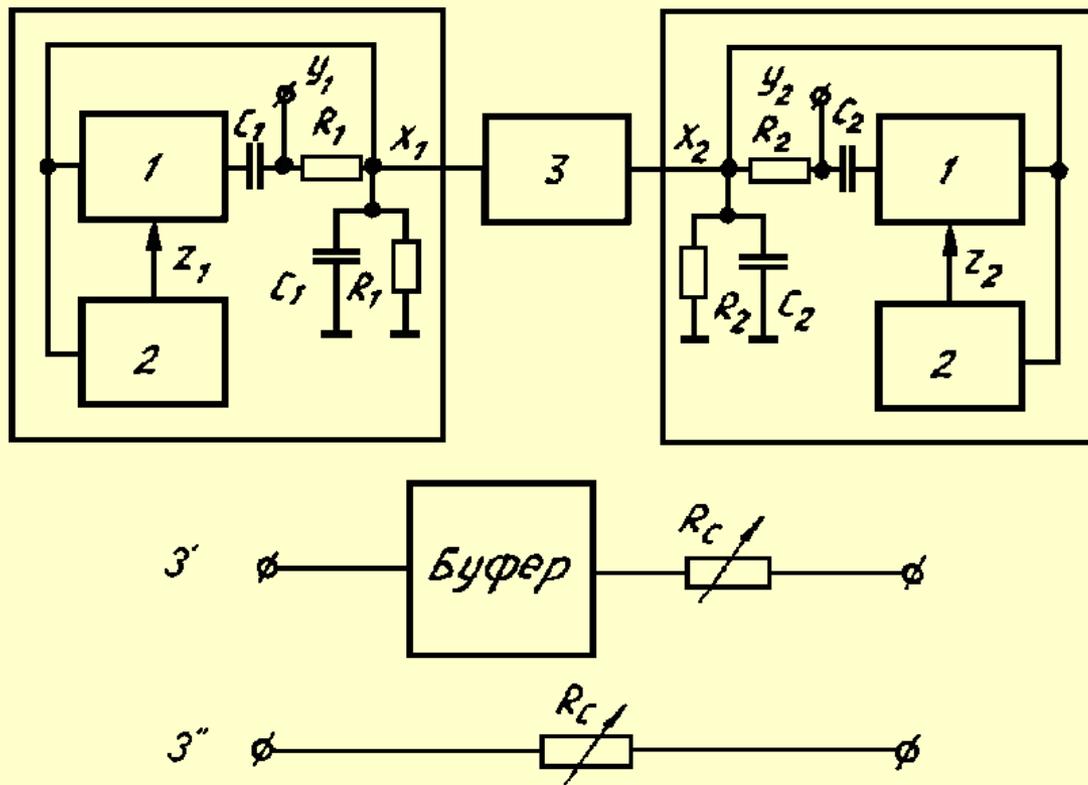
Зависимость числа вращения Θ от частоты воздействия в системе (6) при $C=0.05$. Кривая 1 соответствует определению числа вращения как $\Theta = \omega_{cp} : \omega_{ex}$, где средняя частота вычисляется для колебаний $x(t)$ по формуле (4), а мгновенная фаза -- по формуле (1). Кривая 2 соответствует числу вращения $\Theta = \omega_0 : \omega_{ex}$, где ω_0 -- базовая частота автоколебаний.

Основная область синхронизации системы (6) на плоскости параметров Ω , C при $\mu = 4$, $\omega_{ex} = 1$



На диаграмме отмечены области следующих режимов: 1 и 1' – синхронные хаотические колебания, 2 – несинхронный хаос; 3 – окно устойчивости периодических режимов в области синхронного хаоса (это – предельный цикл с периодом $T = 5 \cdot 2\pi / \omega_{ex}$ и циклы, возникающие из него в результате бифуркаций удвоения периода); 4 – область бистабильности периодических режимов и синхронного хаоса.

Экспериментальное исследование частотно – фазовой синхронизации хаоса в системе связанных генераторов Анищенко -- Астахова

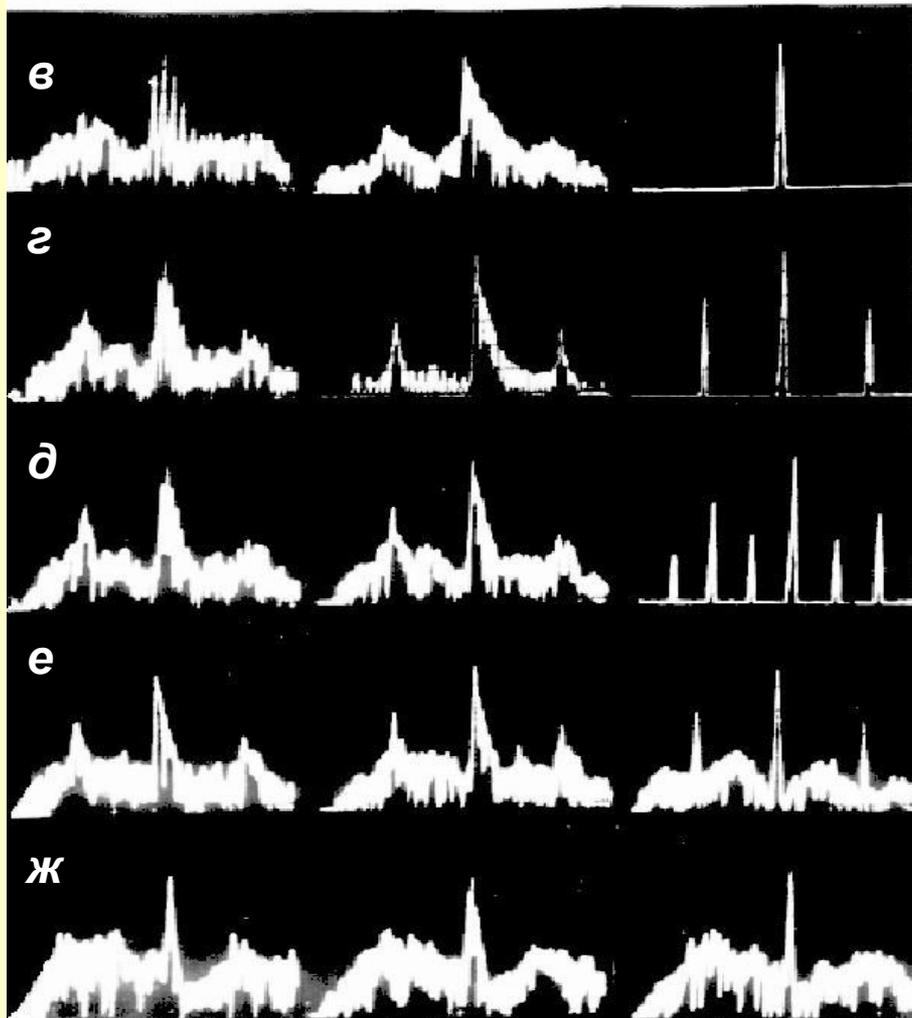
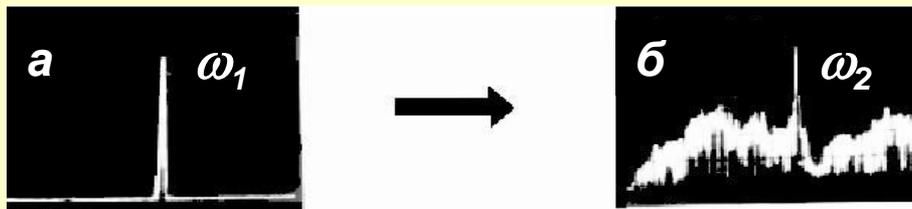


Блок – схема системы двух связанных генераторов Анищенко – Астахова: 1 – линейные усилители с управляемыми коэффициентами усиления, 2 – инерционные нелинейные преобразователи, 3 – блок связи (3' – однонаправленная связь, 3'' – взаимная связь).

Математическая модель экспериментальной системы

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= (m_1 - z_1)x_1 + y_1 + \gamma_1(x_2 - x_1 + y_1 - y_2 / p), \\ \dot{y}_1 &= -x_1, \\ \dot{z}_1 &= g_1(f(x_1) - z_1), \\ \dot{x}_2 / p &= (m_2 - z_2)x_2 + y_2 + \gamma_2(Bx_1 - x_2 + y_2 - Bpy_1), \\ \dot{y}_2 / p &= -x_2, \\ \dot{z}_2 / p &= g_2(f(x_2) - z_2), \\ \text{где } f(x) &= \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}\end{aligned}\tag{6}$$

где m_{12} и g_{12} – параметры, управляющие динамическим режимом парциального генератора; $p = C_1/C_2$ – расстройка резонансных частот мостов Вина, определяющая частотную расстройку парциальных систем; γ_{12} – параметры связи; B – коэффициент передачи буфера. Выбор $\gamma_1 = 0$, $B = 3$ соответствует однонаправленному воздействию первого генератора на второй, а при $\gamma_1 = \gamma_2$, $B = 1$ имеет место взаимная симметричная связь.



Спектры колебаний $x_2(t)$ в случае вынужденной синхронизации через захват базовой частоты хаотических колебаний

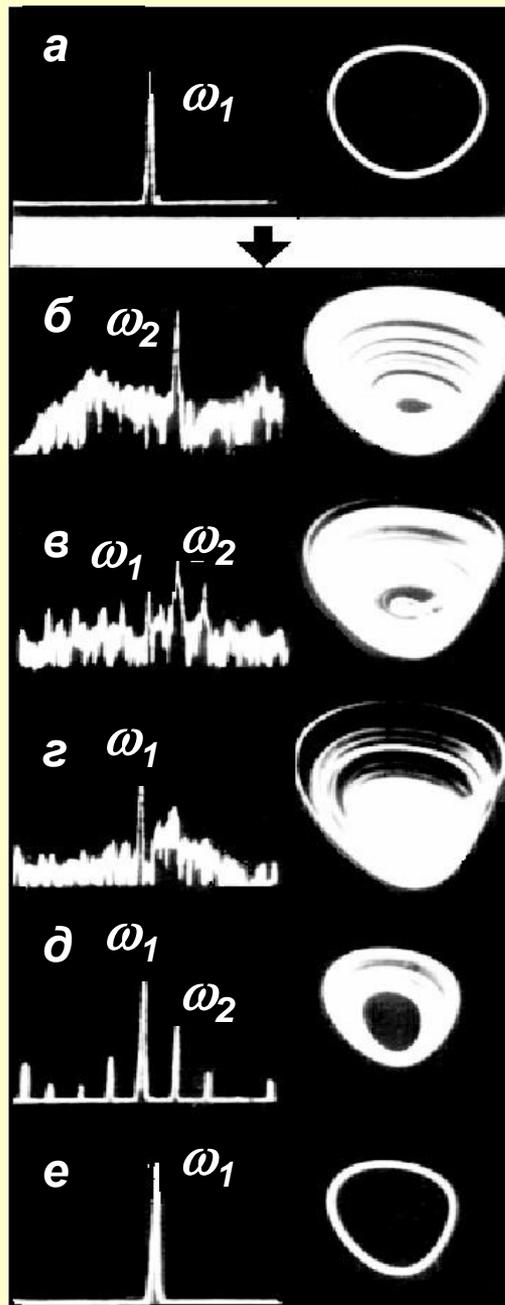
Первый генератор находится в периодическом режиме, а второй – в режиме спирального хаоса.

Расстройка базовых частот $\Delta = \omega_2 - \omega_1$ – мала.

(а) – спектр сигнала воздействия;

(б) – спектр автономных колебаний второго генератора;

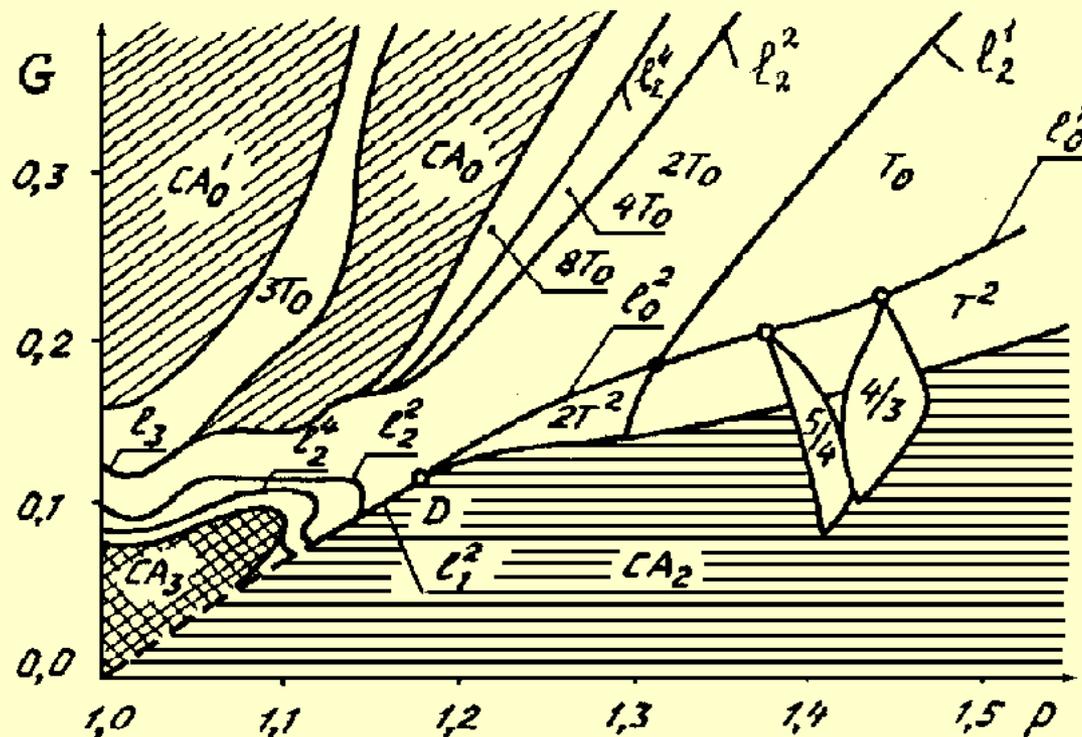
(в – ж) – спектры колебаний второго автогенератора при различной величине частотной расстройки. Параметр связи возрастает слева направо.



Спектры и фазовые портреты колебаний, иллюстрирующие вынужденную синхронизацию через подавление базовой частоты хаотических колебаний

(а) – сигнал воздействия; (б – е) – колебания второго генератора при фиксированной частотной расстройке и различной величине параметра связи. Параметр связи возрастает сверху вниз

Бифуркационная диаграмма двух симметрично – связанных генераторов на плоскости параметров «частотная расстройка – связь»



Обозначения: l_1^2 – линия взаимного захвата базовых частот на границе области синхронизации периодических колебаний удвоенного периода $2T_0$; l_2^k ($k = 1, 2, 4$) – линии удвоения периода циклов kT_0 ; l_0^k ($k = 1, 2$) – линии, соответствующие подавлению одной из базовых частот (более высокой); kT_0 – области периодических колебаний с соответствующим периодом ($k = 2, 3, 4, 8$); T_0 – область периодических колебаний с периодом $T_0 = 2\pi / \omega_0$. Отмечены области синхронизации с соотношением частот $5/4$ и $4/3$. Выделены три области синхронного хаоса (CA_0 , CA_0' , CA_3) и область несинхронного хаоса (CA_2)

Полная синхронизация взаимодействующих хаотических систем

При взаимодействии (в том числе однонаправленном) двух совершенно идентичных хаотических систем можно наблюдать явление **полной синхронизации хаоса**: начиная с некоторого значения параметра связи колебания парциальных систем становятся полностью идентичными.

Рассмотрим систему однотипных взаимодействующих осцилляторов

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \mathbf{F}(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\alpha}_1) + \gamma \mathbf{g}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1), \\ \mathbf{x}_2 &= \mathbf{F}(\mathbf{x}_2, \boldsymbol{\alpha}_2) + \gamma \mathbf{g}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \end{aligned} \quad (7)$$

где α_1 и α_2 – векторные параметры осцилляторов. Если $\alpha_1 = \alpha_2$, то парциальные системы полностью идентичны. Функция $\mathbf{g}(\dots)$ определяет характер связи, причем $\mathbf{g}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) = \mathbf{g}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2) = 0$. В случае полной идентичности парциальных осцилляторов в фазовом пространстве системы (6) существует **инвариантное многообразие U ($\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$)**, называемое **симметричным подпространством**. Фазовые траектории, лежащие в U , соответствуют полностью синхронным колебаниям.

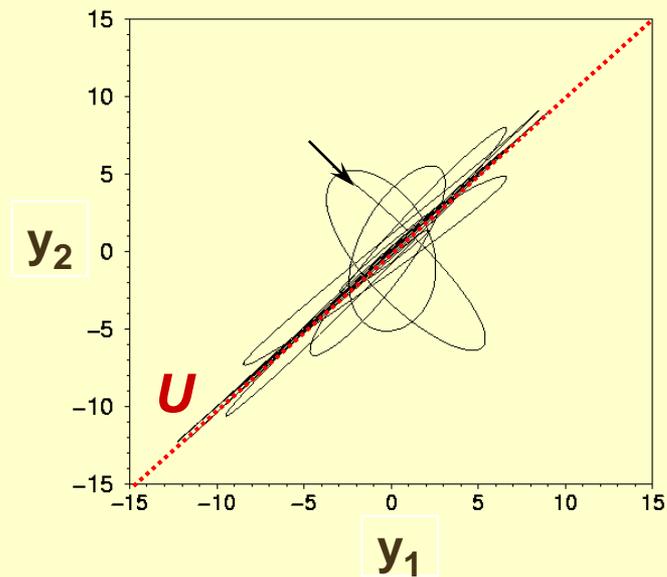
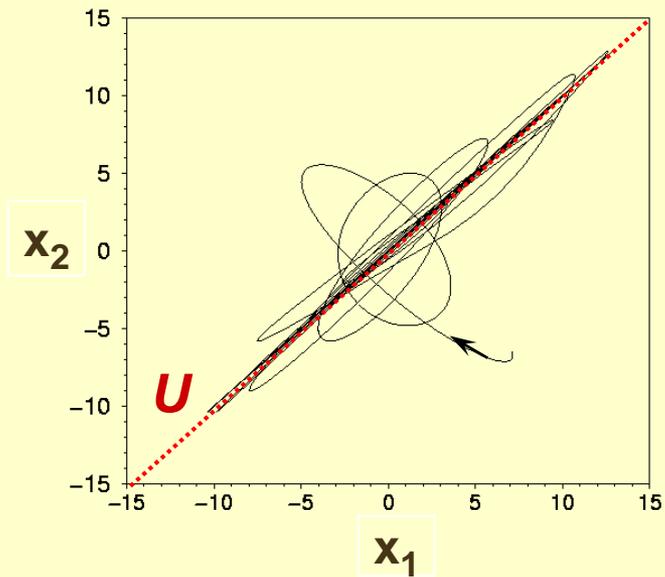
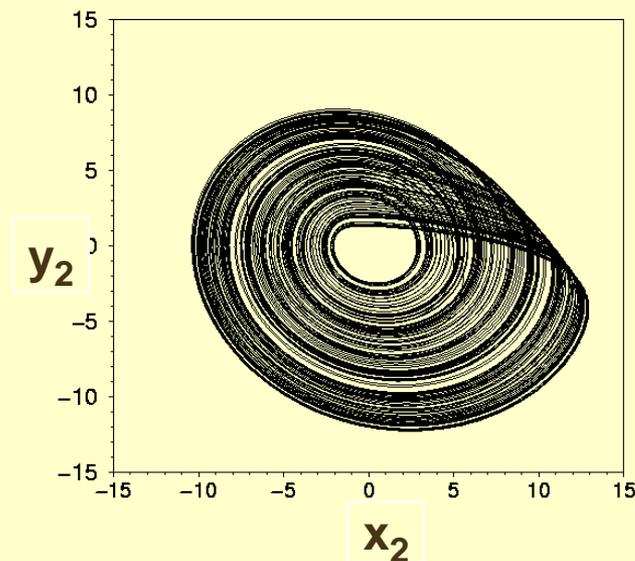
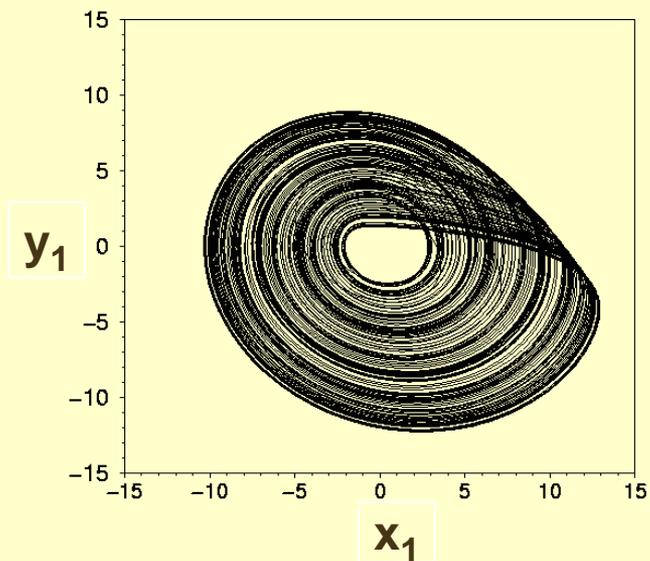
Если предельное множество, принадлежащее U , притягивает фазовые траектории не только из U , но и из некоторой окрестности симметричного подпространства, то наблюдается полная синхронизация колебаний (в том числе хаотических).

Полная синхронизация хаоса в двух связанных осцилляторах Рёсслера

Модель:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= z_1 - y_1 - x_1 + \gamma(x_2 - x_1), & \dot{y}_1 &= x_1 + \alpha y_1, & \dot{z}_1 &= \beta + z_1(x_1 - \mu), \\ \dot{x}_2 &= z_2 - y_2 - x_2 + \gamma(x_1 - x_2), & \dot{y}_2 &= x_2 + \alpha y_2, & \dot{z}_2 &= \beta + z_2(x_2 - \mu).\end{aligned}\tag{8}$$

Проекции аттракторов в системе (8) в режиме полной синхронизации
при $\alpha = \beta = 0.2$, $\mu = 6,5$, $\gamma = 0.02$



Замечания.

- 1.** Полная синхронизация может наблюдаться не только в режиме спирального хаоса, но и в более сложных хаотических режимах (например для аттрактора Лоренца).
- 2.** Полная синхронизация хаоса наблюдается не только для автоколебательных систем, но и для взаимодействующих нелинейных осцилляторов, находящихся под воздействием одной и той же внешней силы (например в системе двух связанных осцилляторов Дуффинга).
- 3.** Полная синхронизация хаоса наблюдается в связанных идентичных отображениях.

Литература

- 1.** А. Пиковский, М. Розенблюм, Ю. Куртс, *Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление* (Техносфера, Москва, 2003).
- 2.** В. С. Анищенко и др., *Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах* (Институт компьютерных исследований, Москва – Ижевск, 2003).
- 3.** В. С. Анищенко, Т. Е. Вадивасова, В. В. Астахов, *Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем* (Изд—во Саратов. Ун—та, Саратов, 1999).
- 4.** В. С. Анищенко, Т. Е. Вадивасова, *Радиотехника и электроника*, Т. 47, № 2, С.133 (2002).
- 5.** В. В. Шалфеев, Г. В. Осипов, А.К. Козлов, А.Р. Волковский, *Успехи современной радиоэлектроники*, Т. 10, № 27 (1997).