

Саратовский государственный университет им. Н.Г.Чернышевского

В.В.Астахов, Т.Е.Вадивасова, А.В.Хохлов

РАДИОФИЗИКА

Задачи и упражнения

*Учебное пособие
для студентов физического факультета
и факультета нелинейных процессов*

ИЗДАТЕЛЬСТВО САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

2008

УДК 621.37:532.59:537.86:538.56
ББК 32.84
А91

Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Хохлов А.В.
А91 Радиоп физика. Задачи и упражнения: Учеб. пособие для студен-
тов физ. фак. и фак. нелинейных процессов. – Саратов: Изд-во
Сарат. ун-та, 2008.– 188 с.: ил.
ISBN 978-5-292-03781-1

Учебное пособие содержит задачи по курсам "Основы радиоэлектроники", "Теория колебаний" и "Статистическая радиоп физика", читаемым студентам, обучающимся по специальности 013800 "Радиоп физика и электроника", и состоит из трех частей. В каждую часть включены теоретические сведения, необходимые для решения задач, задачи и упражнения, примеры решения некоторых задач, ответы к большинству задач и общий список литературы. Содержание пособия соответствует программам курсов. Задачи апробированы на семинарских занятиях со студентами физического факультета и факультета нелинейных процессов.

Для студентов, аспирантов, научных работников и инженеров.

Рекомендуют к печати:

Кафедра радиоп физики и нелинейной динамики физического факультета
Саратовского государственного университета
Доктор физико-математических наук, профессор *В.Б.Байбурин*
(Саратовский государственный технический университет)

УДК 621.37:532.59:537.86:538.56
ББК 32.84

ISBN 978-5-292-03781-1

© Астахов В.В., Вадивасова Т.Е.,
Хохлов А.В., 2008
© Саратовский государственный
университет, 2008

Предисловие

Данное учебное пособие предназначено для проведения семинарских занятий по трем общим курсам, читаемым для студентов физического факультета и факультета нелинейных процессов, обучающихся по специальности "Радиофизика и электроника": "Основы радиоэлектроники", "Теория колебаний" и "Статистическая радиофизика" и состоит из трех частей. В первой части рассматриваются только детерминированные сигналы и их преобразование в детерминированных системах. В третьей части пособия "Статистическая радиофизика" – основы теории случайных сигналов и их преобразования в радиосистемах.

Каждая из трех частей содержит введение, два-три раздела, соответствующих основным разделам курса, и список литературы. Разделы предваряют краткие теоретические соображения и содержат основные определения и формулы, необходимые для решения задач. Однако студентам следует помнить, что данное краткое изложение теоретических основ не исчерпывает содержания соответствующих разделов курса и не может заменить лекций. Основную часть разделов составляют задачи, методические указания и решения некоторых задач. В конце каждой части приводятся ответы к большинству задач.

Студентам следует стремиться к наиболее полному и ясному освоению физической сущности изучаемых процессов и их теоретическому обоснованию. Основная форма изучения курсов лекций – самостоятельная работа над учебным материалом. Существенную помощь в этой работе может оказать решение задач и изучение литературы, приведенной в конце каждой части.

Задачи, представленные в пособии, в течение ряда лет использовались на семинарских занятиях, проводимых на физическом факультете и факультете нелинейных процессов СГУ.

Авторы выражают свою признательность профессору В.С. Анищенко за полезные советы при обсуждении данного пособия и ряд сделанных замечаний.

Часть 1

ОСНОВЫ РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Введение

Функционирование радиоэлектронных систем сопровождается различными преобразованиями сигналов. При этом сигналы, а также реальные элементы и узлы заменяются *идеализированными моделями*, допускающими точное математическое описание. Изучение математических моделей и физических закономерностей, лежащих в основе различных преобразований, составляет предмет курса "Основы радиоэлектроники". Это первый теоретический курс в цикле радиофизической подготовки студентов. Он формирует основные радиофизические понятия и методы. Для успешного освоения радиофизических курсов студенту необходимо ясное представление о структуре радиосигналов и физических процессах в различных элементах радиосистем. Задачи и упражнения в этой части учебного пособия сгруппированы в три раздела:

- 1.1. Радиотехнические сигналы и их модели.
- 1.2. Линейные радиоэлектронные системы.
- 1.3. Нелинейные радиоэлектронные системы.

В задачах первой части рассматриваются только детерминированные сигналы. В первом разделе вычисляются спектры периодических и модулированных сигналов, импульсов различной формы, а также лапласовские изображения некоторых функций. Во втором разделе анализируются физические процессы при прохождении детерминированных сигналов через линейные цепи, инерциальные, колебательные и распределенные системы. В третьем разделе рассматриваются сигналы в нелинейных системах. Анализируются модели умножителей частоты, модуляторов и амплитудных детекторов. Часть задач посвящена расчету схем на операционных усилителях, анализу автогенераторов и параметрических систем.

1.1 Радиотехнические сигналы и их спектры

1.1.1. Краткие теоретические сведения

Радиотехнические сигналы обычно разделяют на *детерминированные* (от лат. *determino* – определяю) и *случайные*. Детерминированные колебания могут быть периодическими, квазипериодическими, непериодическими (переходными), импульсными или хаотическими.

Периодическими называют колебания, мгновенные значения которых повторяются через интервал T , называемый *периодом*:

$$x(t + T) \equiv x(t), \quad -\infty < t < \infty. \quad (1.1)$$

Простейшим видом периодических сигналов являются гармонические колебания. Более сложные сигналы представляют собой наложение гармонических колебаний различных частот и могут быть периодическими или квазипериодическими:

$$x(t) = f(\omega_1 t, \omega_2 t, \omega_3 t, \dots, \omega_N t). \quad (1.2)$$

У периодических колебаний отношение любых частот гармонических составляющих является *рациональным числом*: $\omega_i/\omega_j = m/n$, где m и n – целые числа, у квазипериодических колебаний отношение хотя бы одной пары частот является *иррациональным числом*.

Электрическим импульсом называется сигнал, существующий в течение конечного (как правило, достаточно короткого) интервала времени τ , называемого *длительностью*, и обладающий нулевой или пренебрежимо малой амплитудой за его пределами. Импульсы могут быть одиночными или образовывать последовательности (периодические или непериодические). В радиоэлектронике различают два основных класса импульсных процессов: видеоимпульсы и радиоимпульсы.

Радиоимпульсами называются высокочастотные или сверхвысокочастотные (СВЧ) колебания, огибающие которых изменяются по закону видеоимпульсов, т.е. для радиоимпульсов $x_{\text{рад}}(t)$ справедлива следующая математическая модель:

$$x_{\text{рад}}(t) = x_{\text{вид}}(t) \cdot \cos \omega_0 t, \quad (1.3)$$

где $x_{\text{вид}}(t)$ – функция, описывающая видеоимпульс; ω_0 – круговая частота несущего высокочастотного колебания.

Спектральное представление сигналов

Представление сложных сигналов совокупностями гармонических колебаний с различными частотами называется *спектральным разложением в базисе гармонических функций* или *разложением в ряд Фурье*, а совокупность гармонических колебаний называется *спектром* сигнала. Ряд Фурье можно представить в вещественной или комплексной форме [1,2]. Комплексный ряд Фурье периодического сигнала имеет вид

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k e^{jk\omega_I t}, \quad \dot{C}_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_I t} dt, \quad (1.4)$$

где k – порядковый номер гармоники.

Примером расчета спектра периодического сигнала может служить спектр последовательности прямоугольных видеоимпульсов.

Пусть периодическая (с периодом T) последовательность импульсов (рис. 1.1) задана аналитическим выражением:

$$x(t) = \begin{cases} E, & nT - \tau/2 < t < nT + \tau/2 \quad (n - \text{целое число}), \\ 0, & nT + \tau/2 < t < (n+1)T - \tau/2, \end{cases} \quad (1.5)$$

где E – амплитуда; τ – длительность импульсов.

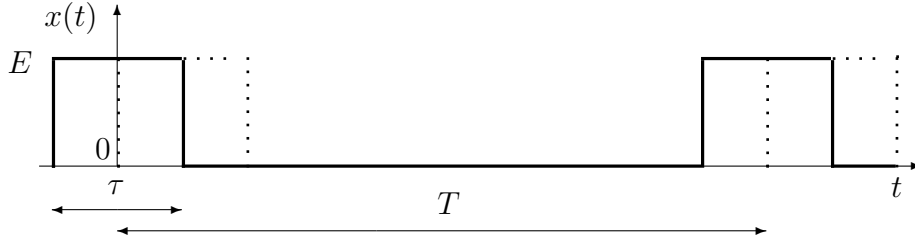


Рис. 1.1. Периодическая последовательность прямоугольных импульсов

Подставляя $x(t)$ в (4), получим:

$$\begin{aligned} C_0 &= E \frac{\tau}{T}, \quad C_k = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E e^{-jk\omega_I t} dt = \frac{E}{T} \cdot \frac{e^{-jk\omega_I t}}{-jk\omega_I} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \\ &= \frac{E}{-jk\omega_I T} (e^{-jk\omega_I \tau/2} - e^{jk\omega_I \tau/2}) = E \frac{\tau}{T} \cdot \frac{\sin k\omega_I \tau/2}{k\omega_I \tau/2}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где $\omega_I = 2\pi/T$ – частота основной (первой) гармоники $x(t)$.

Амплитудный и фазовый спектры рассматриваемой последовательности импульсов, т.е. зависимости амплитуд и фаз $\dot{C}_k$ от частот гармоник, представлены на рис. 1.2, а и б соответственно.

С учетом (1.6) сигнал $x(t)$ можно представить в виде следующего ряда Фурье:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} E \frac{\tau}{T} \cdot \frac{\sin k\omega_1 \tau/2}{k\omega_1 \tau/2} e^{jk\omega_1 t} = E \frac{\tau}{T} + \sum_{k=1}^{\infty} 2E \frac{\tau}{T} \cdot \frac{\sin k\omega_1 \tau/2}{k\omega_1 \tau/2} \cos k\omega_1 t = \\ &= \frac{E}{q} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\pi/q}{k\pi/q} \cos k\omega_1 t \right), \end{aligned} \quad (1.7)$$

где величина $q = T/\tau$ характеризует длительность паузы между импульсами и называется *скважностью последовательности* (спектральные диаграммы рис. 1.2 построены для скважности 5).

Если фронт импульса совпадает с началом отсчета времени (пунктирная кривая на рис. 1.1), то

$$x(t) = \begin{cases} E, & nT < t < nT + \tau \quad (n - \text{целое число}), \\ 0, & nT + \tau < t < (n+1)T, \end{cases} \quad (1.8)$$

$$C_k = \frac{1}{T} \int_0^{\tau} E e^{-jk\omega_I t} dt = \frac{E}{T} \cdot \frac{e^{-jk\omega_I t}}{-jk\omega_I} \Big|_0^{\tau} = \frac{E}{-jk\omega_I T} (e^{-jk\omega_I \tau} - 1) =$$

$$= E \frac{\tau}{T} e^{-jk\omega_I \tau/2} \frac{\sin k\omega_I \tau/2}{k\omega_I \tau/2}, \quad (1.9)$$

т.е. $\varphi_k = -k\omega_I \tau/2$, а $x(t)$ принимает вид

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} E \frac{\tau}{T} \cdot \frac{\sin k\omega_I \tau/2}{k\omega_I \tau/2} e^{jk(\omega_I t - \omega_I \tau/2)} = \\ &= \frac{E}{q} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\pi/q}{k\pi/q} \cos(k\omega_I t - k\omega_I \tau/2) \right). \end{aligned} \quad (1.10)$$

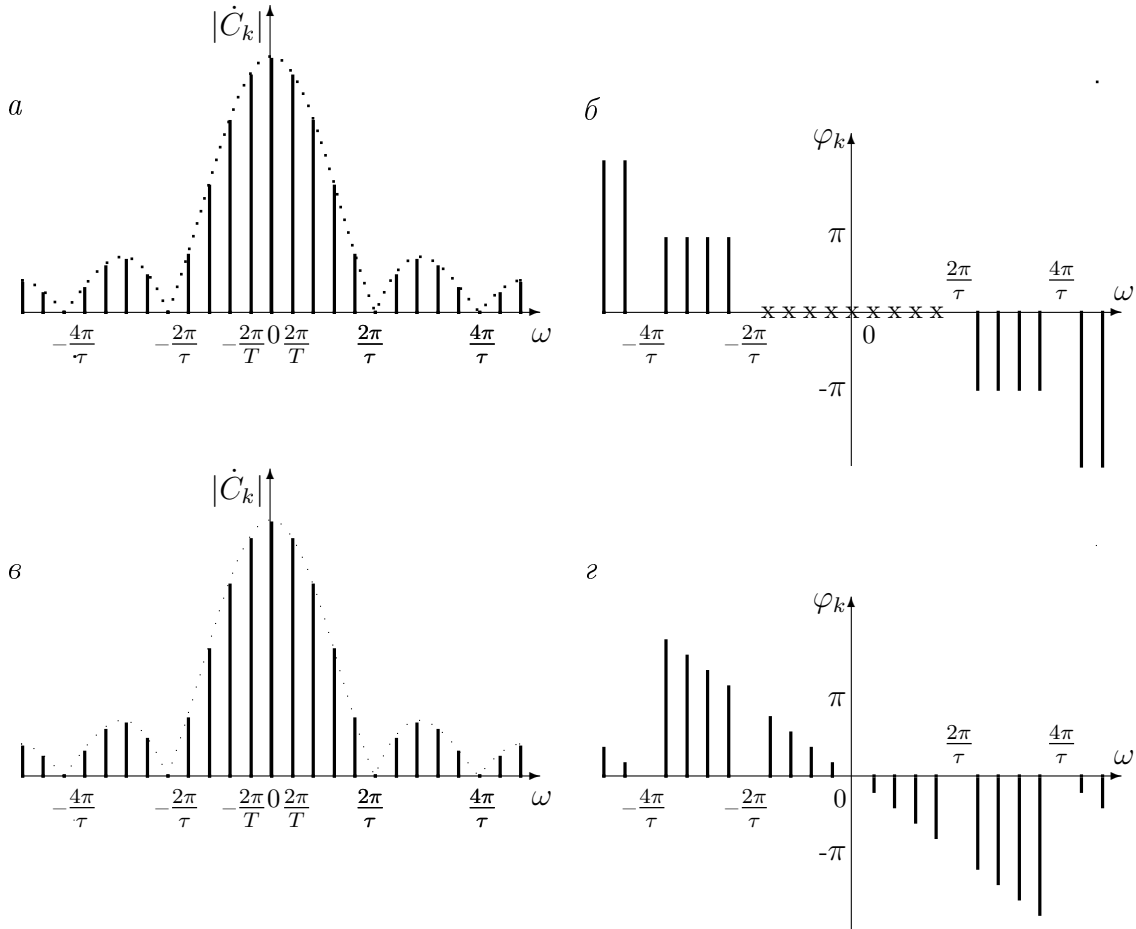


Рис. 1.2. Комплексные амплитудные и фазовые спектры основной (а и б) и задержанной (в и г) последовательностей импульсов

Таким образом, при задержке последовательности импульсов на $\tau/2$ амплитудный спектр не изменяется (рис. 1.2, в), а трансформируется только фазовый спектр (рис. 1.2, г).

Чтобы получить спектр непериодического процесса $x(t)$, достаточно устремить период повторения T к бесконечности. Тогда возникают *прямое и обратное интегральные преобразования Фурье* :

$$\dot{X}(\omega) = \mathbf{F}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt, \quad x(t) = \mathbf{F}^{-1}[\dot{X}(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{X}(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (1.11)$$

Пара преобразований Фурье становится полностью симметричной, если перейти от круговой частоты ω к частоте $f = \omega/2\pi$. Тогда

$$\dot{X}(f) = \mathbf{F}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt, \quad x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{X}(f) e^{j2\pi ft} df. \quad (1.12)$$

Для решения задач особенно важны две теоремы о спектрах [3–5].

1. При запаздывании сигнала во времени на $\pm t_0$ модуль ее спектральной характеристики не изменяется, а фазовый сдвиг всех гармоник увеличивается на величину $\mp \omega t_0$. Иллюстрацией этой теоремы могут служить формулы (1.6) и (1.9).

2. При умножении сигнала на $x(t)$, обладающего спектральной плотностью $\dot{X}(\omega)$, на $e^{\mp j\omega_0 t}$ происходит сдвиг спектра по частоте на величину ω_0 . Полученный результат представляет частный случай теоремы о свертке [3].

Разложения сигналов в ряды и интегралы Фурье требуют абсолютной интегрируемости последних. Если это условие не выполняется, приходится использовать обобщенные функции Дирака [3] или преобразование Лапласа, в котором вместо ω фигурирует комплексная частота $s = \sigma + j\omega$.

Пара преобразований Лапласа, связывающих лапласовское изображение $F(s)$ и функцию $f(t)$,

$$\mathbf{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt, \quad f(t) = \mathbf{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds, \quad (1.13)$$

аналогична паре преобразований Фурье. Если в преобразованиях Фурье интегрирование ведется по оси $j\omega$, то в преобразованиях Лапласа – на комплексной плоскости вдоль прямой, параллельной мнимой оси $j\omega$. $\mathbf{L}$ -изображения широко распространенных функций имеют простой вид, а восстановление оригиналов по изображениям в виде дробно-рациональных функций осуществляется с помощью соотношений Хевисайда [3].

Модулированные сигналы

- Физический процесс изменения во времени одного или нескольких параметров несущего колебания в соответствии с передаваемым сообщением называется *модуляцией*.

Гармоническое несущее колебание

$$x_{\text{нес}}(t) = A_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (1.14)$$

имеет три параметра: *амплитуду* A_m , *круговую частоту* ω_0 и *начальную фазу* φ_0 . Управляя одним из них, можно получить *три вида модуляции*: *амплитудную*, *частотную* или *фазовую* (в дальнейшем используются сокращенные обозначения АМ, ЧМ и ФМ).

Если при неизменных ω_0 и φ_0 амплитуда колебания (1.14) изменяется по закону

$$A(t) = A_m + \Delta A s(t), \quad (1.15)$$

где $s(t)$ – передаваемое сообщение, то колебание называется *амплитудно-модулированным*.

Когда модулирующий сигнал $s(t)$ является гармоническим (однотональным) колебанием:

$$s(t) = A_s \cos(\Omega t + \Phi_0),$$

частота которого Ω удовлетворяет условию $\Omega \ll \omega_0$, то АМ-колебание называется *однотональным*, а его мгновенное значение описывается соотношением

$$x_{\text{АМ}}(t) = A_m (1 + m \cos(\Omega t + \Phi_0)) \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (1.16)$$

где $m = A_s/A_m = (A_{\max} - A_{\min})/(A_{\max} + A_{\min})$. Тогда

$$x_{\text{АМ}}(t) = A_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{mA_m}{2} \cos[(\omega_0 - \Omega)t + \varphi_0 - \Phi_0] + \frac{mA_m}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega)t + \varphi_0 + \Phi_0], \quad (1.17)$$

т.е. однотональное АМ-колебание состоит из трех гармонических колебаний с близкими частотами и в общем случае является квазипериодическим. Ширина его спектра равна удвоенной частоте модуляции.

Когда модулирующий сигнал $s(t)$ является полигармоническим (многотональным) колебанием:

$$s(t) = \sum_{i=1}^N A_i \cos(\Omega_i t + \Phi_i),$$

а в спектре $s(t)$ последовательность частот Ω_i упорядочена так, что $\Omega_1 < \Omega_2 < \dots < \Omega_N$ (рис. 1.3, а), то мгновенное значение многотонального АМ-колебания описывается соотношением

$$x_{\text{АМ}}(t) = A_m \left(1 + \sum_{i=1}^N m_i \cos(\Omega_i t + \Phi_i) \right) \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (1.18)$$

где $m_i = A_i/A_m$ – парциальные (частные) коэффициенты модуляции,

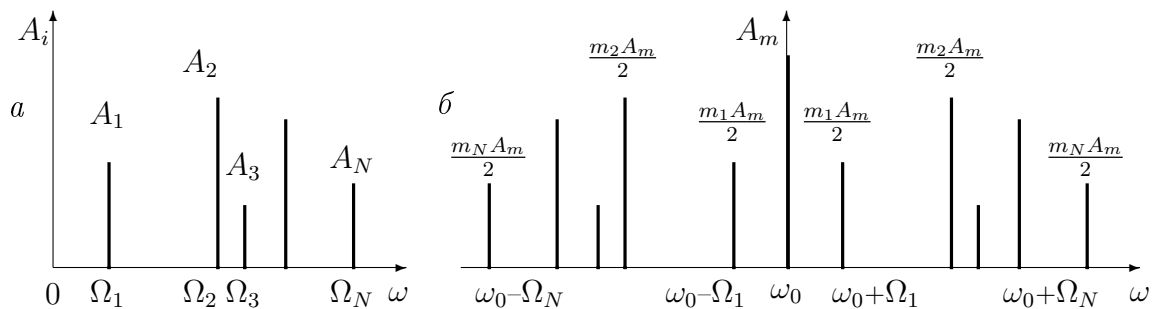


Рис. 1.3. Спектры полигармонического модулирующего сигнала (а) и многотонального АМ-сигнала (б)

а спектральный состав сигнала нетрудно получить из формулы

$$x_{\text{АМ}}(t) = A_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \sum_{i=1}^N \frac{m_i A_m}{2} \cos[(\omega_0 - \Omega_i)t + \varphi_0 - \Phi_i] + \sum_{i=1}^N \frac{m_i A_m}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega_i)t + \varphi_0 + \Phi_i]. \quad (1.19)$$

Спектр многотонального АМ-сигнала представлен на рис. 1.3, б и содержит две группы колебаний с верхними от $(\omega_0 + \Omega_1)$ до $(\omega_0 + \Omega_N)$ и нижними от $(\omega_0 - \Omega_N)$ до $(\omega_0 - \Omega_1)$ боковыми частотами. При этом структуры спектров верхней боковой полосы частот и модулирующего сигнала идентичны, а спектральные компоненты нижней боковой полосы частот получаются при зеркальном отражении верхней боковой полосы относительно несущей. Полный спектр содержит $2N + 1$ составляющих, а его ширина определяется величиной максимальной частоты в спектре модулирующего сигнала и равна $2\Omega_N$.

Частным случаем многотонального АМ-сигнала является высокочастотное колебание, промодулированное по амплитуде последовательно прямоугольными импульсами (рис. 1.4).

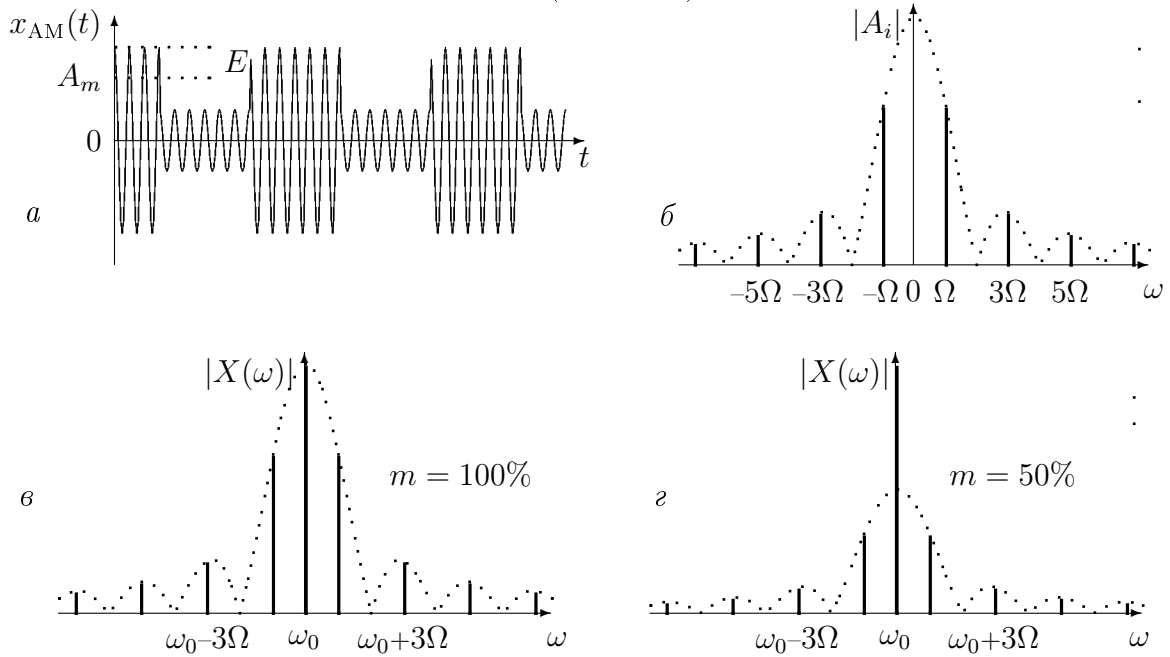


Рис. 1.4. Многотональный АМ-сигнал с прямоугольной огибающей: а – временная реализация сигнала; б – спектр огибающей; в – спектр АМ-сигнала при $m = 100\%$; г – спектр АМ-сигнала при $m = 50\%$

Пусть скважность последовательности $q = 2$ и модулирующее напряжение превращается в прямоугольное напряжение $s(t)$, симметричное относительно оси времени, а амплитуда импульсов – в размах (удвоенную амплитуду) напряжения. Учитывая, что $C_0 = 0$ в силу симметричности $s(t)$ относительно оси времени (рис. 1.4, а), а комплексные амплитуды всех четных гармоник ряда при $q = 2$ обращаются в нуль (рис. 1.4, б), представим мгновенное значение АМ-колебания в виде

$$\begin{aligned} x_{\text{AM}}(t) &= \left(A_m + 2E \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin(2i+1)\pi/2}{(2i+1)\pi/2} \cos(2i+1)\Omega t \right) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \\ &= A_m \left(1 + 2m \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin(2i+1)\pi/2}{(2i+1)\pi/2} \cos(2i+1)\Omega t \right) \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (1.20) \end{aligned}$$

где $m = E/A_m$ – коэффициент модуляции; Ω – частота основной гармоники $s(t)$, а спектральное разложение $x_{\text{AM}}(t)$ – в виде

$$x_{\text{AM}}(t) = A_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) +$$

$$\begin{aligned}
& +mA_m \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin(2i+1)\pi/2}{(2i+1)\pi/2} \cos[(\omega_0 - (2i+1)\Omega)t + \varphi_0] + \\
& +mA_m \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin(2i+1)\pi/2}{(2i+1)\pi/2} \cos[(\omega_0 + (2i+1)\Omega)t + \varphi_0].
\end{aligned} \quad (1.21)$$

Амплитудные спектры процесса, построенные по формуле (1.21) для $m = 100\%$ и $m = 50\%$, представлены на рис. 1.4, в и г соответственно. При $m = 100\%$ сигнал $x_{\text{АМ}}(t)$ представляет последовательность прямоугольных радиоимпульсов. При 50%-ной модуляции структура боковых полос сохраняется, но амплитуды боковых составляющих уменьшаются вдвое (рис. 1.4, г), что вполне согласуется с уменьшением коэффициента модуляции.

Если при неизменных A_m и φ_0 частота колебания удовлетворяет соотношению

$$\omega(t) = \omega_0 + \Delta\omega s(t), \quad (1.22)$$

то колебание называется *частотно-модулированным*. Когда $s(t)$ – гармонический сигнал с частотой Ω , то $\beta = \Delta\omega/\Omega$ называется *индексом частотной модуляции однотонального ЧМ-сигнала*. Наконец, когда при постоянных A_m и ω_0 текущая фаза колебания изменяется по закону

$$\Psi(t) = \Psi + \Delta\Psi s(t) = \omega_0 t + \varphi_0 + \Delta\Psi s(t), \quad (1.23)$$

то получаем *фазомодулированное* колебание.

Частотная и фазовая модуляции сопровождаются изменением одного и того же параметра – фазы (или угла) Ψ несущего колебания и поэтому часто рассматриваются в рамках единой *угловой модуляции*.

Спектр однотонального модулированного по углу сигнала с произвольным индексом модуляции имеет вид

$$x_{\text{УМ}}(t) = A_m \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta) \cos[(\omega_0 + k\Omega)t + \varphi_0], \quad (1.24)$$

где $J_k(\beta)$ – функция Бесселя k -го порядка.

1.1.2. Задачи

Задача 1.1.1

Представить пилообразное напряжение с амплитудой A (рис. 1.5) функцией $x(t)$, рассчитать его комплексный спектр и представить $x(t)$ в виде разложений в комплексный и вещественный ряды Фурье.

Задача 1.1.2

Представить периодический сигнал высотой A (рис. 1.6) функцией $x(t)$, рассчитать его комплексный спектр и представить $x(t)$ в виде разложений в комплексный и вещественный ряды Фурье.

Задача 1.1.3

Рассчитать комплексный спектр периодической последовательности треугольных импульсов высотой A и продолжительностью, равной периоду повторения (рис. 1.7). Представить $x(t)$ в виде разложений в комплексный и вещественный ряды Фурье.

Задача 1.1.4

Рассчитать комплексный спектр периодической последовательности треугольных импульсов, если высота импульсов равна A , период повторения T , а длительность импульсов τ (рис. 1.8). Представить $x(t)$ в виде разложений в комплексный и вещественный ряды Фурье.

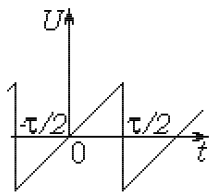


Рис. 1.5

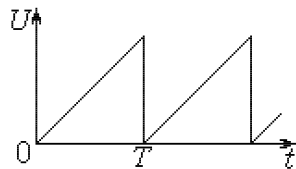


Рис. 1.6

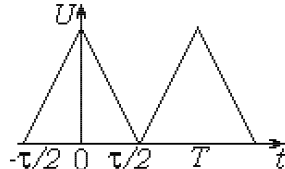


Рис. 1.7

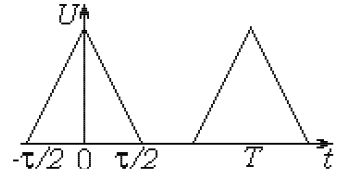


Рис. 1.8

Задача 1.1.5

Рассчитать комплексный спектр последовательности косинусоидальных импульсов $x(t) = \cos \pi t / \tau$ с продолжительностью τ и периодом повторения T (рис. 1.9). Представить $x(t)$ в виде разложений в комплексный и вещественный ряды Фурье.

Методическое указание: представить косинусоидальный импульс в виде суммы экспонент.

Задача 1.1.6

Вычислить спектральную плотность косинусоидального импульса $x(t) = \cos \pi t / \tau$ (рис. 1.9) и построить огибающую спектра, если длительность импульса $\tau = 5$ мкс.

Задача 1.1.7

Вычислить спектральные плотности прямоугольных импульсов с амплитудой $U = 2$ В и длительностью $\tau = 5$ мкс: 1) расположенного симметрично относительно начала отсчета времени, 2) расположенного так, что передний фронт совпадает с началом отсчета времени.

Задача 1.1.8

Используя теорему запаздывания, вывести формулу для расчета спектральной плотности пачки из N одинаковых равноотстоящих прямоугольных импульсов единичной амплитуды (рис. 1.10) и рассчитать частоты, на которых спектральная плотность группы импульсов в N раз превышает плотность одиночного импульса.

Задача 1.1.9

Рассчитать спектральную плотность пачки из 2-х одинаковых прямоугольных импульсов (рис. 1.10) при длительности импульсов 1 мс и интервале между передними фронтами импульсов 10 мс.

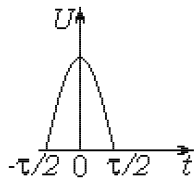


Рис. 1.9

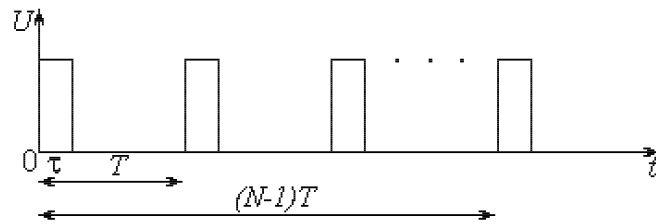


Рис. 1.10

Задача 1.1.10

Рассчитать спектральную плотность пачки из 4-х одинаковых прямоугольных импульсов (рис. 1.10) при длительности импульсов 1 мс и интервале между передними фронтами соседних импульсов 10 мс.

Задача 1.1.11

Вывести формулы для спектральной плотности $\dot{S}(j\omega)$ и энергетического спектра $S_W(\omega)$ экспоненциального импульса $x(t) = Ee^{-\alpha t}$. Представить выражения для модуля и фазы $\dot{S}(j\omega)$.

Задача 1.1.12

Рассчитать и построить комплексный спектр последовательности импульсов (рис. 1.11).

Задача 1.1.13

Построить один под другим в одинаковом масштабе частот (откладывать частоту f в МГц) 6 спектров прямоугольных видеоимпульсов: спектральные плотности одиночных импульсов длительностью 1 и 2 мкс, комплексные спектры последовательностей импульсов с длительностью 1 и 2 мкс и скважностью 2 и 5.

Задача 1.1.14

Вывести формулы для изображений функций $f_1(t) = e^{-\alpha t} \cdot \sigma(t)$, $f_2(t) = e^{\pm j\omega t} \cdot \sigma(t)$ и $f_3(t) = \cos \omega t \cdot \sigma(t)$, где $\sigma(t)$ – функция включения Хевисайда ($\sigma(t) = 0$ при $t < 0$, $\sigma(t) = 1$ при $t \geq 0$).

Задача 1.1.15

Вывести формулы для изображений функций $f_1(t) = \text{ch } \alpha t \cdot \sigma(t)$, $f_2(t) = [1 - e^{-\alpha t}] \cdot \sigma(t)$.

Задача 1.1.16

С использованием функций Хевисайда построить изображение сигнала, представленного на рис. 1.12.



Рис. 1.11

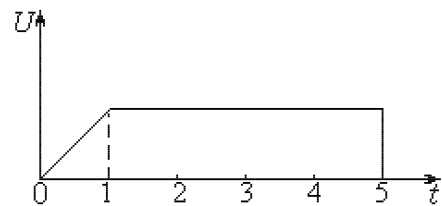


Рис. 1.12

Задача 1.1.17

Представить прямоугольный импульс единичной амплитуды и длительности τ в виде суперпозиции функций Хевисайда и построить лапласовское изображение импульса.

Задача 1.1.18

Спектр сигнала содержит пять гармоник, амплитуды частоты и фазы которых соответственно равны 1) 3 В, 98 кГц, 0.6 рад, 2) 4 В, 99 кГц, 0.4 рад, 3) 20 В, 100 кГц, 1.2 рад, 4) 4 В, 101 кГц, 2 рад, 5) 3 В, 102 кГц, 1.8 рад. Записать аналитическое выражение сигнала, определить его тип и параметры, изобразить спектр.

Задача 1.1.19

Спектр сигнала содержит шесть гармоник, амплитуды и частоты которых соответственно равны 1) 2.5 В, 88 кГц, 2) 10 В, 100 кГц, 3) 2.5 В, 112 кГц, 4) 4 В, 188 кГц, 5) 16 В, 200 кГц, 6) 4 В, 212 кГц. Записать аналитическое выражение сигнала, определить его тип и параметры, изобразить спектр.

Задача 1.1.20

Однотональный ЧМ-сигнал имеет амплитуду 10 В, частоту несущего колебания 200 МГц, частоту модулирующего колебания 20 кГц. Индекс частотной модуляции однотонального ЧМ-колебания равен 10. Записать аналитическое выражение для ЧМ-сигнала и определить пределы, в которых изменяется частота.

Задача 1.1.21

Спектр сигнала содержит пять гармоник, амплитуды, частоты и фазы которых соответственно равны 1) 40 В, 92 кГц, 1.47 рад, 2) 20 В, 95 кГц, 1.57 рад, 3) 100 В, 100 кГц, 1.57 рад, 4) 20 В, 105 кГц, 1.57 рад, 5) 40 В, 108 кГц, 1.67 рад. Записать аналитическое выражение сигнала, определить его тип и параметры, изобразить спектр.

Задача 1.1.22

Для удовлетворительного воспроизведения сигналов радиовещательных станций с амплитудной модуляцией необходимо передавать колебания звуковых частот от 60 Гц до 12 кГц. Сколько вещательных радиостанций можно разместить в диапазоне средних волн от 520 кГц до 1.6 МГц?

Задача 1.1.23

Треугольное напряжение с амплитудой 3 В и частотой повторения импульсов 1 кГц промодулировано по амплитуде синусоидальным напряжением с амплитудой 2 В и частотой 300 Гц. Рассчитать коэффициент модуляции M и амплитуды гармоник вещественного спектра АМ-колебания в диапазоне до 10 кГц. Изобразите временную развертку и вещественный спектр сигнала.

Задача 1.1.24

Треугольное напряжение с амплитудой 4 В и частотой повторения им-

пульсов 1 кГц промодулирован по амплитуде прямоугольным напряжением с амплитудой 1 В и частотой 100 Гц. Рассчитать коэффициент модуляции M и амплитуды гармоник вещественного спектра АМ-колебания в диапазоне до 12 кГц. Изобразите временную развертку и вещественный спектр сигнала.

Задача 1.1.25

Прямоугольное напряжение с амплитудой 3 В и частотой повторения импульсов 1 кГц промодулирован по амплитуде синусоидальным напряжением с амплитудой 1 В и частотой 300 Гц. Рассчитать коэффициент модуляции M и амплитуды гармоник вещественного спектра АМ-колебания в диапазоне до 10 кГц. Изобразите временную развертку и вещественный спектр сигнала.

Задача 1.1.26

Прямоугольное напряжение с амплитудой 4 В и частотой повторения импульсов 1 кГц промодулирован по амплитуде прямоугольным напряжением с амплитудой 2 В и частотой 100 Гц. Рассчитать коэффициент модуляции M и амплитуды гармоник вещественного спектра АМ-колебания в диапазоне до 12 кГц. Изобразите временную развертку и вещественный спектр сигнала.

Задача 1.1.27

Мгновенная частота УМ-колебания описывается соотношением $f(t) = 10^8 \cdot (1 + 10^{-4} \sin(2\pi \cdot 2500t))$. Определить девиацию фазы $\Delta\Psi$, индекс частотной модуляции β однотонового сигнала и записать аналитическое выражение для сигнала.

Задача 1.1.28

Определить девиацию фазы $\Delta\Psi$ и записать однотоновый УМ-сигнал с несущей частотой 159 МГц, частотой модуляции 3.18 кГц и девиацией частоты 0.16 МГц.

Задача 1.1.29

Записать закон изменения мгновенной частоты $\omega(t)$ и определить максимальное и минимальное значения несущей частоты однотонового УМ-сигнала с несущей частотой 159 МГц, частотой модуляции 3.18 кГц и девиацией частоты 0.16 МГц.

Задача 1.1.30

В спектре однотонового ЧМ-сигнала (несущая частота 0.3 МГц, частота модулирующего колебания 10 кГц) отсутствуют гармоники с частотами 290 и 310 кГц. Используя приложение (стр. 18), определить девиацию частоты и рассчитать частоты и относительные амплитуды гармоник сигнала.

1.1.3. Примеры решения задач

Задача 1.1.1

Представим пилообразное напряжение (см. рис. 1.1) на протяжении периода $-T/2 \leq t \leq T/2$ функцией $x(t) = 2Ut/T$. Тогда

$$\dot{C}_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} 2U \frac{t}{T} e^{-j2\pi kt/T} dt.$$

Интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} \dot{C}_k &= 2 \frac{U}{T^2} \left(t \frac{e^{-j2\pi kt/T}}{-j2\pi k/T} \Big|_{-T/2}^{T/2} - \int_{-T/2}^{T/2} \frac{e^{-j2\pi kt/T}}{-j2\pi k/T} dt \right) = \\ &= 2 \frac{U}{-j2\pi kT} \left(\frac{T}{2} e^{-jk\pi} + \frac{T}{2} e^{jk\pi} - \frac{e^{-jk\pi} - e^{jk\pi}}{-j2\pi k/T} \right) = \\ &= 2 \frac{U}{-j2\pi kT} \left(T \cos k\pi - \frac{\sin k\pi}{k\pi/T} \right) = -\frac{2U}{-jk\pi} \cos k\pi. \end{aligned}$$

Представление $x(t)$ в виде разложения в комплексный принимает вид

$$x(t) = -\frac{U}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\cos k\pi}{jk} e^{j2\pi kt/T}.$$

Поскольку среднее значение $x(t) = 0$, представляя суммы экспонент с номерами k и $-k$ в виде синусоид, можно получить ряд Фурье в вещественной форме

$$x(t) = -\frac{2U}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\pi}{k} \sin k \frac{2\pi}{T} t.$$

Задача 1.1.8

Спектральная плотность первого импульса $\dot{S}_1(\omega) = \frac{\sin \omega\tau/2}{\omega\tau/2} e^{-j\omega\tau/2}$, где τ – длительность импульса. Для второго импульса, запаздывающего на время T , спектральная плотность имеет вид $\dot{S}_2(\omega) = \dot{S}_1(\omega) e^{-j\omega T}$. Тогда для группы из N импульсов имеем

$$\dot{S}(\omega) = \dot{S}_1(\omega) \left(1 + e^{-j\omega T} + e^{-j2\omega T} + \dots + e^{-j(N-1)\omega T} \right).$$

Выражение в скобках представляет геометрическую прогрессию. Ее сумма равна $(1 - r^n)/(1 - r)$. Тогда

$$\dot{S}(\omega) = \dot{S}_1(\omega) \frac{e^{-jN\omega T/2} \sin N\omega T/2}{e^{-j\omega T/2} \sin \omega T/2} = \dot{S}_1(\omega) e^{-j(N-1)\omega T/2} \frac{\sin N\omega T/2}{\sin \omega T/2}.$$

На частотах $\omega_k = 2\pi k/T$ каждая экспонента обращается в единицу и спектральная плотность пачки импульсов превышает в N раз спектральную плотность одиночного импульса

$$\dot{S}(2\pi k/T) = N\dot{S}_1(2\pi k/T).$$

Задача 1.1.14

Согласно прямому преобразованию Лапласа

$$F_1(s) = \mathbf{L}[e^{-\alpha t} \cdot \sigma(t)] = \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+s)t} dt = \frac{1}{s + \alpha},$$

$$F_2(s) = \mathbf{L}[e^{\pm j\omega t} \cdot \sigma(t)] = \int_0^{\infty} e^{(\pm j\omega - s)t} dt = \frac{1}{s \mp j\omega},$$

$$F_3(s) = \mathbf{L}[\cos \omega t \cdot \sigma(t)] = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) e^{-st} dt = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s - j\omega} + \frac{1}{s + j\omega} \right) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}.$$

Задача 1.1.24

Согласно прямому преобразованию Фурье несущее колебание – треугольное напряжение (частота f) в соответствии с решением задачи 1.1.3 описывается соотношением

$$x(t) = \frac{2U}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(2n-1)\pi/2}{(2n-1)^2} \cos 2\pi(2n-1)ft,$$

а модулирующее прямоугольное напряжение (частота F) имеет вид

$$x_1(t) = \frac{2E}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin^2(2m-1)\pi/2}{2m-1} \sin 2\pi(2m-1)Ft.$$

Коэффициент амплитудной модуляции $M = E/U$, а амплитудно-модулированный сигнал принимает вид

$$x_{\text{AM}}(t) = \left(1 + M \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin^2(2m-1)\pi/2}{2m-1} \sin 2\pi(2m-1)Ft \right) \times \\ \times \frac{2U}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(2n-1)\pi/2}{(2n-1)^2} \cos 2\pi(2n-1)ft.$$

Спектр содержит все составляющие несущего колебания и колебания с комбинационными частотами $(2n-1)f \pm (2m-1)F$.

Приложение 1

Значения функций Бесселя $J_0(\beta) - J_7(\beta)$

β	$J_0(\beta)$	$J_1(\beta)$	$J_2(\beta)$	$J_3(\beta)$	$J_4(\beta)$	$J_5(\beta)$	$J_6(\beta)$	$J_7(\beta)$
0	1	0	0	0	0	0	0	0
0.1	0.997	0.050	0.001	0	0	0	0	0
0.2	0.990	0.099	0.005	0	0	0	0	0
0.3	0.977	0.148	0.011	0.0006	0	0	0	0
0.4	0.960	0.196	0.020	0.0013	0	0	0	0
0.6	0.912	0.287	0.044	0.0044	0.0003	0	0	0
0.8	0.846	0.369	0.076	0.0102	0.001	0	0	0
1	0.765	0.440	0.115	0.0196	0.0025	0.0002	0	0
1.2	0.671	0.498	0.159	0.0329	0.0050	0.0006	0	0
1.4	0.567	0.542	0.207	0.0505	0.0091	0.0012	0	0
1.6	0.455	0.570	0.257	0.0725	0.015	0.0024	0	0
1.8	0.340	0.581	0.306	0.0988	0.0232	0.0043	0	0
2	0.224	0.577	0.353	0.1289	0.0339	0.0070	0.0012	0.0002
2.2	0.110	0.556	0.395	0.1623	0.0476	0.0109	0.0021	0.0003
2.4	0.002	0.520	0.431	0.1981	0.0643	0.0162	0.0034	0.0006
2.6	-0.097	0.471	0.459	0.2353	0.0840	0.0232	0.0035	0.0010
2.8	-0.185	0.410	0.478	0.2727	0.1067	0.0321	0.0079	0.0016
3	-0.260	0.339	0.486	0.3091	0.1320	0.0430	0.0114	0.0025
3.2	-0.320	0.261	0.483	0.3430	0.1597	0.0562	0.0160	0.0038
3.4	-0.364	0.179	0.470	0.3734	0.1892	0.0718	0.0219	0.0056
3.6	-0.392	0.095	0.445	0.3988	0.2198	0.0897	0.0293	0.0080
3.8	-0.402	0.013	0.409	0.4180	0.2507	0.1098	0.0383	0.0112
4	-0.397	-0.066	0.364	0.4302	0.2811	0.1321	0.0491	0.0152
4.2	-0.376	-0.139	0.310	0.4344	0.3100	0.1561	0.0617	0.0202
4.4	-0.342	-0.203	0.250	0.4301	0.3364	0.1816	0.0763	0.0264
4.6	-0.296	-0.257	0.185	0.4171	0.3594	0.2080	0.0927	0.0340
4.8	-0.240	-0.298	0.115	0.3952	0.3780	0.2347	0.1110	0.0429
5	-0.177	-0.328	0.0466	0.3648	0.3912	0.2611	0.1310	0.0534
5.1	-0.143	-0.335	0.0203	0.3455	0.3948	0.2728	0.1417	0.0594
5.2	-0.11	-0.343	-0.022	0.3265	0.3985	0.2865	0.1525	0.0654
5.4	-0.041	-0.345	-0.087	0.2811	0.3991	0.3101	0.1751	0.0791
5.5	-0.007	-0.34	-0.115	0.255	0.3957	0.3205	0.1867	0.0862
5.6	0.027	-0.334	-0.146	0.2298	0.3926	0.3310	0.1986	0.0945

1.2 Линейные радиоэлектронные системы

1.2.1. Краткие теоретические сведения

Отклик $g(t)$ линейной системы на элементарное воздействие в виде функции Хевисайда $\sigma(t)$ будем называть *переходной характеристикой*, а отклик $h(t)$ на элементарное воздействие в виде дельта-функции Дирака $\delta(t)$ – *импульсной характеристикой* системы [3, 4].

Импульсная $h(t)$ и переходная $g(t)$ характеристики линейной системы связаны соотношениями

$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt}, \quad g(t) = \int_{-\infty}^t h(t) dt. \quad (1.25)$$

т.е. импульсная характеристика является производной от переходной, а переходная – интегралом от импульсной.

При гармоническом воздействии с частотой ω в качестве характеристик линейных систем рассматривают отношения комплексных амплитуд отклика и воздействия – *комплексные функции передачи* или их лапласовские изображения – *системные функции систем*. Комплексная функция передачи $\dot{H}(j\omega)$ представляет прямое преобразование Фурье, а системная функция – прямое преобразование Лапласа импульсной характеристики линейной цепи. Справедливы и обратные преобразования Фурье, т.е.

$$\dot{H}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt, \quad h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{H}(j\omega)e^{j\omega t} d\omega. \quad (1.26)$$

$$H(s) = \int_0^{\infty} h(t)e^{-st} dt, \quad h(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} H(s)e^{st} ds. \quad (1.27)$$

LCR-колебательные контуры

Цепь, состоящая из соединения элементов L , C , R , называется *колебательным контуром*. В зависимости от способа включения источника внешнего воздействия (в разрыв цепи из последовательно соединенных L , C , R либо параллельно соединению последних) различают последовательный (рис. 1.13, а) и параллельный (рис. 1.13, в) колебательные контуры [1–4].

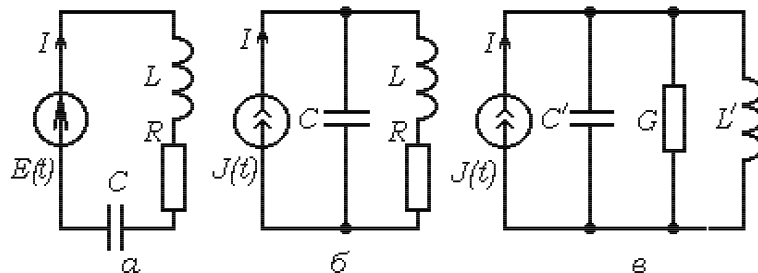


Рис. 1.13. Колебательные контуры: а – последовательный; б – параллельный; в – параллельный, дуальный к (а)

Входные сопротивления контуров на частоте ω можно представить в виде суммы действительной (резистивной) и мнимой (реактивной) составляющих. Тогда для последовательного контура

$$\dot{Z}_{\text{вх}} = R_{\text{вх}} + jX_{\text{вх}} = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = R(1 + jQ\nu) = R(1 + j\xi),$$

для параллельного контура

$$\dot{Z}_{\text{вх}} = R_{\text{вх}} + jX_{\text{вх}} = \frac{L/C}{R + j(\omega L - 1/\omega C)} = \frac{\rho^2/R}{1 + j\xi} = \frac{\rho^2/R}{1 + \xi^2} - j\xi \frac{\rho^2/R}{1 + \xi^2},$$

где $\xi = Q\nu$; $\nu = \omega/\omega_0 - \omega_0/\omega$ – обобщенная и относительная расстройки контура; $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$; $Q = \rho/R$ – добротность; $\rho = \sqrt{L/C}$ – характеристическое сопротивление контура.

Для анализа резонансных явлений и расчета полос пропускания наиболее удобны нормированные (приведенные) резонансные кривые (рис. 1.14). Они описываются соотношением

$$\frac{|\dot{x}_m|}{|\dot{x}_{\text{мрез}}|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}},$$

где $\dot{x}_m$ – комплексная амплитуда одной из переменных: напряжения или тока. Рассматривая уравнение нормированной резонансной кривой для расстроек (ν), при которых $|\dot{x}_m|/|\dot{x}_{\text{мрез}}| = 1/\sqrt{2} \cong 0.707$, т.е. мощность ослабляется точно в два раза, получим

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \xi^2 = Q^2\nu^2 = 1, \quad \nu = \pm \frac{1}{Q}, \quad Q = \frac{\omega_0}{2\Delta\omega}.$$

Величина $2\Delta\omega$ представляет ширину резонансной кривой на уровне половинной мощности.

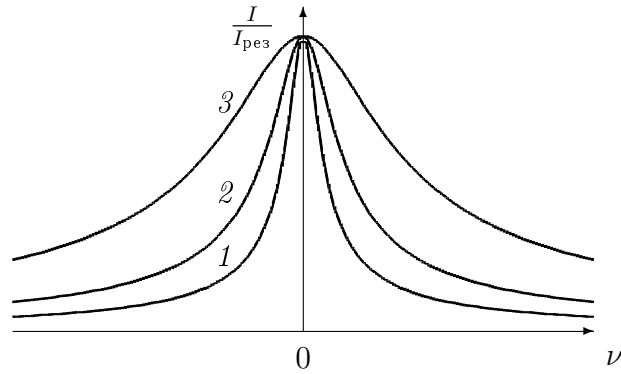


Рис. 1.14. Нормированные резонансные кривые LCR -контура: 1 – $Q=10$; 2 – $Q=5$; 3 – $Q=2$

Двухконтурные системы можно составить из последовательных или параллельных контуров (рис. 1.15). Наиболее широко распространены системы последовательных контуров с индуктивной (рис. 1.15, а) или емкостной (рис. 1.15, б) связью и параллельных контуров с емкостной связью (рис. 1.15, в). Частоты нормальных колебаний в связанной системе контуров рассчитываются по формулам [1–3]:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 \pm \sqrt{(\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2)^2 - 4(1 - k^2)\omega_{01}^2\omega_{02}^2}}{2(1 - k^2)} =$$

$$= \frac{\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 \pm \sqrt{(\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2)^2 + 4k^2\omega_{01}^2\omega_{02}^2}}{2(1 - k^2)}, \quad (1.28)$$

где $k = \sqrt{k_1 k_2}$ – коэффициент связи контуров.

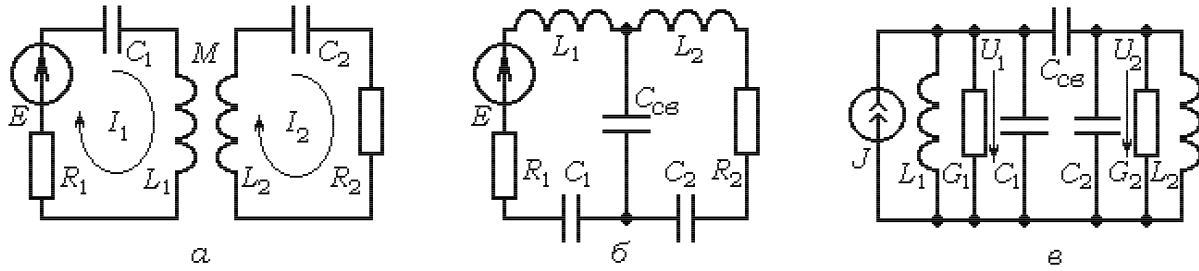


Рис. 1.15. Двухконтурные связанные системы с индуктивной (а) и емкостной (б, в) связью

Вынужденные колебания в двухконтурных связанных системах исследуются *методом замещения связанных контуров эквивалентными одноконтурными контурами*. Комплексное сопротивление эквивалентного контура имеет вид [3]:

$$\dot{Z}_{\text{вх}} = R_1 \left[1 + \frac{A^2}{1 + \xi_2^2} + j \left(\xi_1 - \frac{A^2}{1 + \xi_2^2} \xi_2 \right) \right], \quad (1.29)$$

где $\xi_1 = \nu_1 \rho_1 / R_1 = \nu_1 Q_1$ и $\xi_2 = \nu_2 \rho_2 / R_2 = \nu_2 Q_2$ – обобщенные расстройки контуров; Q_1 и Q_2 – их добротности; $A = X_{\text{св}} / \sqrt{R_1 R_2}$ – фактор связи контуров. Резонанс в связанных контурах может быть частичным, сложным или полным ($A < 1$, $A > 1$, $A = 1$) [3].

Частотные фильтры

LC -фильтры образуют дуальные реактивные двухполюсники $\dot{Z}$ и $\dot{Y}$ ($\dot{Z} = jX$, $\dot{Y} = jB$). Тогда в полосе пропускания идеального фильтра ($\alpha_n = 0$) имеем [3]

$$\alpha = 0, \quad \cos \beta = 1 - \frac{XB}{2}, \quad \text{или} \quad \beta = \arccos \left(1 - \frac{XB}{2} \right), \quad (1.30)$$

а в полосе задерживания

$$\beta = \pm \pi, \quad \text{ch} \alpha = \frac{XB}{2} - 1, \quad \text{или} \quad \alpha = \text{Arch} \left(\frac{XB}{2} - 1 \right), \quad (1.31)$$

где $\text{Arch}(z)$ – обратная $z = \text{ch} \alpha$ гиперболическая функция.

Так как $|\cos \beta| \leq 1$, то $1 + \dot{Z}\dot{Y}/2$ может изменяться от -1 до 1 , а условие прозрачности принимает вид

$$-1 \leq \frac{\dot{Z}\dot{Y}}{4} \leq 0. \quad (1.32)$$

Итак, в полосе прозрачности фильтра сопротивления продольных элементов $\dot{Z}$ должны быть меньше, чем учетверенные сопротивления поперечных элементов

$$|\dot{Z}| \leq |4/\dot{Y}|. \quad (1.33)$$

Характеристические сопротивления согласованных симметричных Т- или П-образных звеньев удовлетворяют соотношениям [3]

$$\dot{Z}_0^T = \sqrt{\frac{\dot{Z}}{\dot{Y}}} \sqrt{1 + \frac{\dot{Z}\dot{Y}}{4}}, \quad \dot{Z}_0^П = \sqrt{\frac{\dot{Z}}{\dot{Y}}} / \sqrt{1 + \frac{\dot{Z}\dot{Y}}{4}} \quad (1.34)$$

и являются функциями частоты сигналов. В полосе прозрачности фильтров характеристические сопротивления имеют резистивный характер, за границами полосы пропускания – реактивный.

Для полосовых фильтров $\dot{Z}\dot{Y}=0$ на частоте $\omega=\omega_0=1/\sqrt{L_1C_1}=1/\sqrt{L_2C_2}$. Тогда равенство $\dot{Z}(\omega)=-4/\dot{Y}(\omega)$ должно выполняться на границах полосы пропускания. Отсюда при $q=L_2/L_1=C_1/C_2$ имеем

$$\omega_{cp1} = \omega_0(\sqrt{q+1} - \sqrt{q}), \quad \omega_{cp2} = \omega_0(\sqrt{q+1} + \sqrt{q}). \quad (1.35)$$

Полная полоса пропускания полосового LC -фильтра удовлетворяет равенству

$$\omega_{cp2} - \omega_{cp1} = 2\sqrt{q}\omega_0,$$

а характеристические сопротивления Т- и П-звеньев имеют вид

$$\dot{Z}_0^T(\omega) = \sqrt{L_1/C_2} \sqrt{1 - \nu^2/4q}, \quad \dot{Z}_0^П(\omega) = \sqrt{L_1/C_2} / \sqrt{1 - \nu^2/4q}, \quad (1.36)$$

где $\nu = \omega/\omega_0 - \omega_0/\omega$ – относительная расстройка.

Согласование LC -фильтров в большей части полосы пропускания возможно при введении последовательно- и параллельно-производных m -звеньев (рис. 1.16). Для поперечной ветви последовательно-производного m -звена (рис. 1.16, а) имеем

$$\frac{2}{\dot{Y}_m} = \frac{2}{m\dot{Y}} + \frac{\dot{Z}(1-m^2)}{2m}, \quad (1.37)$$

а для продольной ветви параллельно-производного m -звена (рис. 1.16, б) получим

$$\frac{2}{\dot{Z}_m} = \frac{2}{m\dot{Z}} + \frac{\dot{Y}(1-m^2)}{2m}. \quad (1.38)$$



Рис. 1.16. Последовательно-производное (а) и параллельно-производное (б) звенья m -типа

Формулы (1.37) и (1.38) имеют одинаковую структуру, и воздействие производных звеньев тоже одинаково [3, 4].

Распределенные системы

Распределенные системы, протяженность которых значительно превышает длину волны и поперечные размеры системы, описываются "телеграфными уравнениями длинной линии" [1–4]. Решением последних является суперпозиция бегущих навстречу друг другу волн:

$$\begin{aligned}\dot{U}(x) &= \frac{1}{2}(\dot{U}_H + R_0 \dot{I}_H) e^{\dot{\gamma}x} + \frac{1}{2}(\dot{U}_H - R_0 \dot{I}_H) e^{-\dot{\gamma}x}, \\ \dot{I}(x) &= \frac{1}{2}(\dot{I}_H + \frac{\dot{U}_H}{R_0}) e^{\dot{\gamma}x} + \frac{1}{2}(\dot{I}_H - \frac{\dot{U}_H}{R_0}) e^{-\dot{\gamma}x},\end{aligned}\quad (1.39)$$

где $\dot{\gamma}$ – постоянная распространения; R_0 – характеристическое сопротивление линии без потерь.

Отношение комплексных амплитуд напряжений отраженной и падающей волн называется *комплексным коэффициентом отражения по напряжению* $\dot{\Gamma}_U$:

$$\dot{\Gamma}_U = \frac{\dot{U}_{\text{отпр}}}{\dot{U}_{\text{пад}}} = \frac{\dot{U}_H - \dot{I}_H R_0}{\dot{U}_H + \dot{I}_H R_0} = \frac{\dot{Z}_H - R_0}{\dot{Z}_H + R_0} = |\dot{\Gamma}| e^{j\varphi_{\Gamma}},$$

а отношение модулей максимальной и минимальной амплитуд в линии, т.е. отношение суммы модулей падающей и отраженной волн к разности модулей, называется коэффициентом стоячей волны напряжения (КСВН)

$$s = \frac{|U_{\text{макс}}|}{|U_{\text{мин}}|} = \frac{|\dot{U}_{\text{пад}}| + |\dot{U}_{\text{отпр}}|}{|\dot{U}_{\text{пад}}| - |\dot{U}_{\text{отпр}}|} = \frac{1 + |\dot{\Gamma}_U|}{1 - |\dot{\Gamma}_U|}.\quad (1.40)$$

Для линии без потерь ($\dot{\gamma} = j\beta$, $\text{sh} j\beta x = j \sin \beta x$, $\text{ch} j\beta x = \cos \beta x$)

$$\begin{aligned}\dot{U}(x) &= \dot{U}_H \cos \beta x + j \dot{I}_H R_0 \sin \beta x, \\ \dot{I}(x) &= \dot{I}_H \cos \beta x + j \frac{\dot{U}_H}{R_0} \sin \beta x,\end{aligned}\quad (1.41)$$

$$\dot{Z}_{\text{вх}}(x) = R_0 \frac{\dot{Z}_H + j R_0 \text{tg} \beta x}{R_0 + j \dot{Z}_H \text{tg} \beta x}.\quad (1.42)$$

Согласованием линии передачи называется установление режима бегущих волн в результате преобразования комплексного сопротивления нагрузки в активное характеристическое сопротивление. Узкополосное согласование наиболее просто выполнить с помощью четвертьволнового трансформатора (рис. 1.17, а, б) или параллельного реактивного шлейфа (рис. 1.17, в). Характеристическое сопротивление $\lambda/4$ -трансформатора для резистивного сопротивления нагрузки (рис. 1.17, а) или резистивного входного сопротивления вблизи нагрузки (рис. 1.17, б) имеет вид

$$R_{\text{тр}} = \sqrt{R_0 R_H}, \quad \text{или} \quad R_{\text{тр}} = \sqrt{R_0 R_{\text{вх}}}.$$

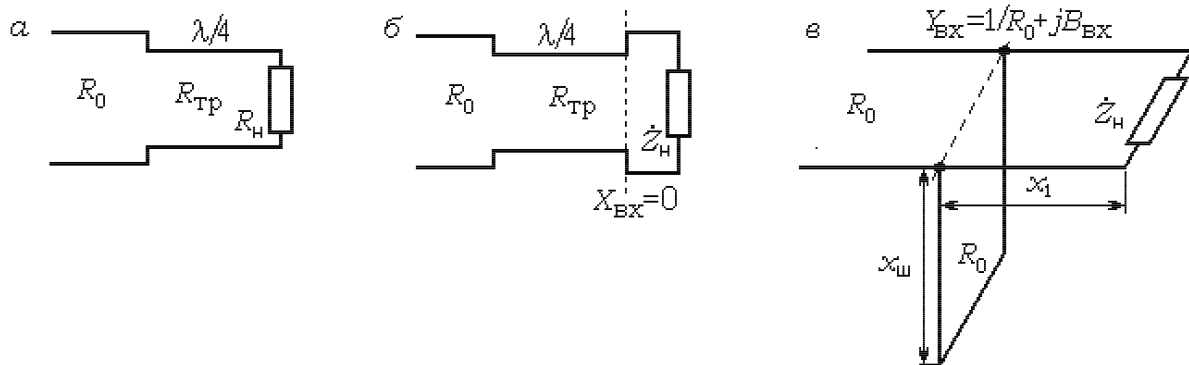


Рис. 1.17. Согласование резистивной (а) и комплексной (б) нагрузок с помощью $\lambda/4$ -трансформатора и реактивного шлейфа (в) связью

Условие согласования комплексной нагрузки с активным характеристическим сопротивлением линии с помощью параллельного реактивного шлейфа удовлетворяет соотношению

$$Y_{\text{вх}} + jB_{\text{ш}} = G_0, \quad \text{или} \quad \frac{1}{R_{\text{вх}} + jX_{\text{вх}}} + \frac{1}{jX_{\text{ш}}} = \frac{1}{R_0}, \quad (1.43)$$

где $R_{\text{вх}} + jX_{\text{вх}} = \dot{Z}_{\text{вх}}$ – входное сопротивление линии, а $jX_{\text{ш}} = jR_0 \operatorname{tg} \beta \ell_{\text{ш}}$ – входное сопротивление короткозамкнутого шлейфа длиной $\ell_{\text{ш}}$.

1.2.2. Задачи

Задача 1.2.1

Дано дифференциальное уравнение цепи

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C} \int I dt = E e^{-\alpha t}.$$

Составить операторное уравнение цепи при нулевых начальных условиях: при $t = 0$ $U_C = 0, I = 0$.

Задача 1.2.2

Составить операторное уравнение цепи при нулевых начальных условиях по дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 U}{dt^2} + 2\alpha \frac{dU}{dt} + \omega_0^2 U = E.$$

Задача 1.2.3

Составить операторное уравнение цепи при нулевых начальных условиях по дифференциальному уравнению

$$\frac{d^3 U}{dt^3} + \frac{R}{L} \frac{d^2 U}{dt^2} + \frac{1}{LC} \frac{dU}{dt} + \frac{S}{LC^2} U = 0.$$

Задача 1.2.4

Составить математическую модель в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для схемы, представленной на рис. 1.18. Определить условия равновесия в цепи.

Задача 1.2.5

Для цепи, изображенной на рис. 1.19, вывести выражения комплексного коэффициента передачи четырехполюсника $\dot{K}(j\omega)$, его АЧХ и ФЧХ.

Задача 1.2.6

Для цепи, изображенной на рис. 1.19, записать системную функцию цепи $K(s)$ и вывести формулы для расчета ее импульсной $h(t)$ и переходной $g(t)$ характеристик.

Задача 1.2.7

Для цепи, изображенной на рис. 1.19, вывести формулы для расчета коэффициентов матрицы $\mathbf{A}$ и определить комплексные значения параметров на частоте 1590 кГц, если $L = 10$ мГ, $R_1 = 100$ Ом, $R_2 = 200$ Ом.

Задача 1.2.8

Для цепи, изображенной на рис. 1.20, вывести выражения комплексного коэффициента передачи четырехполюсника $\dot{K}(j\omega)$, его АЧХ и ФЧХ.

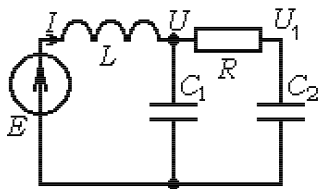


Рис. 1.18

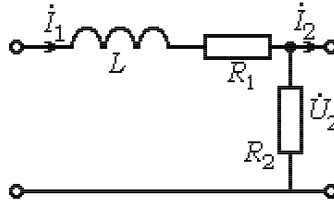


Рис. 1.19

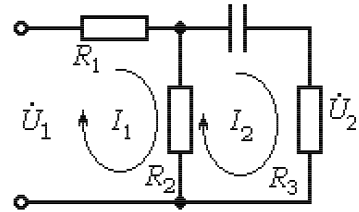


Рис. 1.20

Задача 1.2.9

Для цепи, изображенной на рис. 1.20, записать системную функцию цепи $K(s)$ и вывести формулы для расчета ее импульсной $h(t)$ и переходной $g(t)$ характеристик.

Задача 1.2.10

Для цепи, изображенной на рис. 1.20, вывести формулы для расчета коэффициентов матрицы $\mathbf{A}$ и определить комплексные значения параметров на частоте 1590 кГц, если $C = 500$ нФ, $R_1 = 200$ Ом, $R_2 = R_3 = 100$ Ом.

Задача 1.2.11

Для линейного пассивного симметричного четырехполюсника известны входные сопротивления в режиме короткого замыкания $Z_{кз}$ и холостого хода $Z_{хх}$. Вывести выражения для элементов $\mathbf{A}$ -матрицы.

Задача 1.2.12

На входе линейной RC -цепи, состоящей из последовательно соединенных сопротивления R и емкости C , действует прямоугольный импульс с амплитудой $E = 2$ В и длительностью $t_{и} = 20$ мкс. Получить операторным методом выражения для откликов на сопротивлении R и емкости C . Рассчитать и построить графики $U_R(t)$ и $U_C(t)$ для $R = 1$ кОм, $C = 4$ нФ и $R = 10$ кОм, $C = 5$ нФ.

Задача 1.2.13

На входе линейной RL -цепи, состоящей из последовательно соединенных сопротивления R и индуктивности L , действует прямоугольный импульс с амплитудой $E = 3$ В и длительностью $t_{и} = 10$ мкс. Получить операторным методом выражения для откликов на сопротивлении R и индуктивности LC . Рассчитать и построить графики $U_R(t)$ и $U_L(t)$ для $R = 10$ кОм, $L = 10$ мГ и $R = 1$ кОм, $L = 50$ мГ.

Задача 1.2.14

Колебательный контур составлен из индуктивности $L = 75$ мкГ, емко-

сти $C = 1200$ пФ и сопротивления R . При какой величине сопротивления разряд конденсатора будет апериодическим?

Задача 1.2.15

Определить емкость C конденсатора, который нужно подключить к индуктивности $L = 250$ мкГ, чтобы настроить полученный контур в резонанс на длину волны $\lambda = 900$ м.

Задача 1.2.16

Колебательный контур, настроенный на длину волны $\lambda = 500$ м, содержит индуктивность $L = 150$ мкГ и сопротивление $R = 5$ Ом. Определить полосу пропускания контура $2\Delta f$ на уровне половинной мощности.

Задача 1.2.17

Из одинаковых элементов $L = 64$ мкГ, $C = 400$ пФ и $R = 20$ Ом собраны параллельный и последовательный колебательные контуры. Во сколько раз отличаются их сопротивления на резонансной частоте?

Задача 1.2.18

Сопротивление параллельного колебательного контура на некоторой резонансной частоте $R_{\text{экв.рез}} = 100$ кОм. Определить резистивную $R_{\text{экв}}$ и реактивную $X_{\text{экв}}$ составляющие эквивалентного сопротивления при безразмерных относительных расстройках $\nu_1 = 1/Q$ и $\nu_2 = 2/Q$.

Задача 1.2.19

Найти среднюю мощность P , выделяемую в параллельном контуре на резонансной частоте, если его резонансное сопротивление $R_{\text{экв.рез}} = 40$ кОм, добротность $Q = 30$, а амплитуда тока в контуре $I_m = 0.6$ А.

Задача 1.2.20

Колебательный контур с добротностью $Q = 100$ и характеристическим сопротивлением $\rho = 400$ Ом имеет полосу пропускания на уровне половинной мощности $2\Delta f = 70$ кГц. Определить параметры индуктивности L , емкости C и резистора R .

Задача 1.2.21

К последовательному колебательному контуру с добротностью $Q = 10$, настроенному в резонанс с источником ЭДС, подключен параллельно конденсатору дополнительный резистор, сопротивление которого $R_{\text{доп}}$ значительно превышает модуль реактивного сопротивления емкости. Как изменится добротность контура, если $R_{\text{доп}} = 25R$.

Задача 1.2.22

Последовательный колебательный контур обладает следующими параметрами $L = 5$ мГ, $C = 20$ нФ, $R = 5$ Ом. Рассчитать параметры параллельного контура, дуального рассмотренному.

Задача 1.2.23

В параллельном колебательном контуре емкость изменили так, что ре-

зонансное сопротивление увеличилось в 2 раза. Во сколько раз при этом изменится полоса пропускания на уровне половинной мощности?

Задача 1.2.24

Два параллельных контура настроены на частоту генератора и включены последовательно. Найти отношение мощностей P_1/P_2 , если характеристические и резистивные сопротивления контуров соответственно равны: $\rho_1 = 200 \text{ Ом}$, $\rho_2 = 300 \text{ Ом}$, $R_1 = 4 \text{ Ом}$, $R_2 = 10 \text{ Ом}$.

Задача 1.2.25

На последовательный колебательный контур действуют одновременно сигнал с резонансной частотой $u(t) = 1 \cdot \cos 10^6 t$ (мВ) и помеха $u_{\text{пом}} = 10 \cdot \cos 5 \cdot 10^5 t$ (мВ). Рассчитать параметры L , C и R , если известно, что на емкости C напряжение сигнала в 10 раз превышает напряжение помехи, а амплитуда составляющей тока с частотой сигнала равна 100 мА.

Задача 1.2.26

Колебательный контур содержит емкость $C = 1000 \text{ пФ}$, настроен на резонансную частоту $f_{\text{рез}} = 200 \text{ кГц}$ и имеет полосу пропускания $2\Delta f = 10 \text{ кГц}$. Рассчитайте добротность Q и величину резистивного сопротивления R .

Задача 1.2.27

Колебательный контур, настроенный на частоту $f_{\text{рез}} = 600 \text{ кГц}$, пропускает на уровне половинной мощности однтональное АМ-колебание. Частота несущей $f_0 = 600 \text{ кГц}$, частота сообщения $F = 12 \text{ кГц}$, коэффициент модуляции входного сигнала $m = 100\%$. Рассчитать добротность контура Q и определить коэффициент модуляции выходного напряжения.

Задача 1.2.28

Источник напряжения $u(t) = 0.2 \cos 10^7 t$ с внутренним сопротивлением $R_i = 14 \text{ Ом}$ подключен к последовательному колебательному контуру, настроенному в резонанс с источником сигнала. Индуктивность контура $L = 100 \text{ мкГ}$, сопротивление $R = 6 \text{ Ом}$. Определить характеристическое сопротивление контура ρ , добротность ситемы Q и амплитуду U_m напряжения на емкости.

Задача 1.2.29

На частоте f емкостное сопротивление колебательного контура $X_C = 250 \text{ Ом}$, индуктивное сопротивление $X_L = 160 \text{ Ом}$, резистивное сопротивление контура $R = 4 \text{ Ом}$. Определить добротность контура.

Задача 1.2.30

Колебательный контур с параметрами $C_1 = 900 \text{ пФ}$, $R_1 = 2 \text{ Ом}$, настроенный на частоту $f_1 = 300 \text{ кГц}$, индуктивно связан (коэффициент связи $M = 30\%$) со вторичным контуром с параметрами $C_1 = 750 \text{ пФ}$, $R_2 = 10 \text{ Ом}$, настроенным на частоту $f_2 = 350 \text{ кГц}$. Рассчитать индуктивности L_1 , L_2 и определить резистивную $R_{\text{экв}}$ и реактивную

$X_{\text{экв}}$ составляющие входного сопротивления эквивалентного контура для радиосигнала с длиной волны $\lambda = 940$ м.

Задача 1.2.31

Найти нормальные частоты f_1 и f_2 системы из двух одинаковых индуктивно связанных контуров, настроенных на частоту $f_0 = 2$ МГц. Коэффициент связи $k = 22\%$.

Задача 1.2.32

Найти нормальные частоты системы из двух индуктивно связанных контуров, настроенных на частоты $f_{01} = 2$ МГц и $f_{02} = 2.5$ МГц. Коэффициент связи $k = 30\%$.

Задача 1.2.33

Индуктивно связанные контуры подключены к источнику сигнала с частотой $f = 400$ кГц, амплитудой $U_{1m} = 0.1$ В и настроены методом полного резонанса. Определить амплитуду тока во вторичном контуре I_{2m} при коэффициенте взаимной индукции $M = 20$ мкГ.

Задача 1.2.34

Заданы следующие параметры индуктивно связанных контуров: $L_1 = 2$ мкГ, $C_1 = 35$ нФ, $R_1 = 18$ Ом, $L_2 = 1.75$ мкГ, $C_2 = 40$ нФ, $R_2 = 22$ Ом, $M = 5$ мкГ. Определите вид резонанса. При каком значении R_1 можно получить полный резонанс?

Задача 1.2.35

Индуктивно связанные контуры обладают следующими параметрами: $L_1 = 20$ мкГ, $L_2 = 25$ мкГ, $M = 5$ мкГ, $C_1 = 4.5$ нФ, $C_2 = 4$ нФ, $R_1 = 30$ Ом, $R_2 = 20$ Ом. Найти величины резистивной $R_{\text{экв}}$ и реактивной $X_{\text{экв}}$ составляющих сопротивления эквивалентного контура на частоте $f = 700$ кГц.

Задача 1.2.36

Система контуров с емкостной связью, представленная на рис 1.15, в, обладает следующими параметрами: $L_1 = L_2 = 6$ мГ, $C_1 = 6$ нФ, $C_2 = 7$ нФ, $C_{\text{св}} = 2$ нФ. Определить собственные частоты f_{01} и f_{02} парциальных контуров.

Задача 1.2.37

Рассчитать характеристические сопротивления и добротности парциальных контуров, рассмотренных в задаче 1.2.35.

Задача 1.2.38

Параллельный контур, содержащий катушку индуктивности ($L_1 = 21$ мГ, $R_1 = 100$ Ом) и конденсатор $C_1 = 240$ пФ связан конденсатором $C_{\text{св}} = 6$ пФ с другим параллельным контуром, содержащим катушку индуктивности ($L_2 = 21$ мГ, $R_2 = 75$ Ом) и конденсатор $C_1 = 240$ пФ. Изобразить принципиальную схему связанной системы, преобразовать последовательные соединения L_1 , R_1 и L_2 , R_2 в параллельные соединения индуктивностей

и соответствующих проводимостей. Рассчитать эквивалентные проводимости G_1 , G_2 , характеристические проводимости g_1 , g_2 , собственные частоты f_{01} , f_{02} и добротности Q_1 , Q_2 парциальных контуров. Определить коэффициент связи k .

Задача 1.2.39

Индуктивно связанные контуры имеют параметры: $L_1 = 2$ мкГ, $C_1 = 35$ нФ, $L_2 = 1.75$ мкГ, $C_2 = 40$ нФ, $M = 0.5$ мкГ. Рассчитать коэффициент связи контуров и нормальные частоты системы f_1 , f_2 .

Задача 1.2.40

Для рассмотренных в задаче 1.2.36 связанных контуров рассчитать характеристические сопротивления ρ_1 , ρ_2 и добротности Q_1 , Q_2 парциальных контуров при $R_1 = 22$ Ом, $R_2 = 23$ Ом.

Задача 1.2.41

Найти резонансную частоту $f_{\text{рез}}$ системы из двух индуктивно связанных контуров. Первичный контур настроен на частоту $f_{01} = 100$ кГц и является колебательным, вторичный контур – апериодический ($\omega L_2 \gg R_2$), коэффициент связи $k = 60\%$,

Задача 1.2.42

Генератор переменного напряжения с внутренним сопротивлением $R_i = 200$ Ом нужно согласовать с нагрузкой $R_n = 20$ кОм. Для согласования использована система индуктивно связанных контуров: колебательного, настроенного в резонанс с частотой генератора, и апериодического ($\omega L_2 \gg R_2 = R_n$). Определить коэффициент взаимной индукции M при условии, что $L_2 = 800$ мкГ.

Задача 1.2.43

По резонансной кривой системы из двух одинаковых контуров при полном резонансе на частоте $f = 600$ кГц получена полоса пропускания на уровне половинной мощности $2\Delta f = 12$ кГц. Определить добротности Q колебательных контуров.

Задача 1.2.44

Два колебательных контура настроены в резонанс при критической связи. Сопротивление первичного контура $R_1 = 25$ Ом, а выходная мощность $P_2 = 1$ Вт. Определите амплитуду тока I_{1m} в первичном контуре.

Задача 1.2.45

Антенна радиоприемника нагружена на небольшую индуктивность, связанную взаимной индукцией $M = 20$ мкГ со входным контуром, настроенным на частоту $f = 16$ МГц и обладающим параметрами $C = 20$ пФ, $R = 8$ Ом. Определить амплитуду напряжения U_{Cm} , возникающего на конденсаторе, если амплитуда тока в антенне $I_m = 50$ мкА.

Задача 1.2.46

Система параллельных контуров с емкостной связью (рис. 1.15, в) обла-

дает следующими параметрами: $L_1 = L_2 = 4$ мкГ, $C_1 = C_2 = 390$ пФ, $C_{св} = 10$ пФ, $G_1 = G_2 = 12.5$ мСм. К первичному контуру подключен источник тока с амплитудой $I_{1m} = 10$ мА, настроенный в резонанс с контурами. Определить вносимые в первичный контур проводимости и амплитуду напряжения на первичном контуре.

Задача 1.2.47

Определить тип фильтра и параметры его Т-звена, если на частоте $\omega = 10^4$ рад/с его сопротивление 10^4 Ом, а на частоте $2\omega - \dot{Z}_0^T = j10^4$ Ом.

Задача 1.2.48

Рассчитать параметры Т-звена фильтра нижних частот, имеющего полосу пропускания от 0 до 10 кГц и характеристическое сопротивление 1 кОм.

Задача 1.2.49

Фильтр нижних частот (Т-образный) содержит две индуктивности $L = 397.5$ мГ и емкость $C = 3.18$ мкФ. Рассчитать частоту среза ФНЧ, его характеристическое сопротивление и сопротивление на частоте $f = 1500$ Гц.

Задача 1.2.50

Определить тип фильтра, рассчитать его частоту среза и параметры, если на частоте $\omega = 10^3$ рад/с сопротивление Т-звена $\dot{Z}_0^T = 10^3$ Ом, а на частоте $\omega/4$ $\dot{Z}_0^T = -j10^4$.

Задача 1.2.51

Рассчитать параметры фильтра верхних частот, имеющего полосу пропускания от 100 кГц и нагруженного в полосе прозрачности на сопротивление 1 кОм.

Задача 1.2.52

Продольные ветви Т-образного полосового фильтра содержат катушку индуктивности $L_1 = 80$ мкГ и конденсатор $C_1 = 1$ мкФ каждая, а поперечную ветвь составляет параллельное включение катушки индуктивности $L_2 = 160$ мкГ и конденсатора $C_2 = 0.5$ мкФ. Рассчитать среднюю частоту f_0 полосы пропускания, границы полосы пропускания f_1 , f_2 и характеристическое сопротивление фильтра Z_0^T на частоте f_0 .

Задача 1.2.53

Рассчитать среднюю частоту f_0 и параметры Т-образного звена полосового фильтра по заданным границам полосы пропускания $f_1 = 290$ Гц, $f_2 = 1090$ Гц и характеристическому сопротивлению Т-звена фильтра 800 Ом.

Задача 1.2.54

Рассчитать параметры Г-образного m -звена ($m = 0.6$) для фильтра нижних частот, рассмотренного в задаче 1.2.48.

Задача 1.2.55

Рассчитать параметры Γ -образного m -звена ($m = 0.6$) для фильтра верхних частот, рассмотренного в задаче 1.2.51.

Задача 1.2.56

Вывести приближенные формулы и рассчитать на частоте $f = 800$ кГц постоянную затухания ($\alpha = \operatorname{Re}\gamma$) и фазовую постоянную ($\beta = \operatorname{Im}\gamma$) коаксиальной линии с характеристическим сопротивлением $R_0 = 50$ Ом, погонным сопротивлением $R_{\text{пог}} = 50$ мОм/м, погонной проводимостью $G_{\text{пог}} = 2 \cdot 10^{-5}$ См/м и погонной емкостью $C_{\text{пог}} = 4$ пФ/м при условиях $\omega L \gg R$, $\omega C \gg G$.

Задача 1.2.57

Для рассмотренных в предыдущей задаче параметров линии рассчитать ее КПД, подводимую мощность $P_{\text{вх}}$, потери мощности $P_{\text{пот}}$, а также амплитуды напряжения и тока в начале U_{1m} , I_{1m} и в конце U_{2m} , I_{2m} линии длиной $\ell = 200$ м, если линия согласована с нагрузкой и на нагрузку поступает мощность $P_{\text{вых}} = 2$ кВт.

Задача 1.2.58

К разомкнутой линии без потерь длиной $\ell = 500$ м с погонными параметрами $L_1 = 0.19$ мкГ/м, $C_1 = 72$ пФ/м приложено гармоническое напряжение с частотой $f = 15.9$ кГц и амплитудой $U_{1m} = 10$ В. Определить характеристическое сопротивление R_0 , фазовую скорость v_f , постоянную распространения β и амплитуду напряжения U_{2m} на конце линии.

Задача 1.2.59

В замкнутой на конце линии без потерь длиной $\ell = 500$ м с погонными параметрами $L_1 = 0.19$ мкГ/м, $C_1 = 72$ пФ/м приложено гармоническое напряжение с частотой $f = 15.9$ кГц и амплитудой $U_{1m} = 10$ В. Определить амплитуды токов I_{1m} , I_{2m} в начале и конце линии.

Задача 1.2.60

Вывести приближенные формулы для входного напряжения, входного тока и входной мощности несогласованной ($R_0/R_n = m$) коаксиальной линии длиной ℓ с малыми потерями ($\alpha\ell \ll 1$) и рассчитать КПД линии с потерями для рассмотренного выше случая при $m = 2$.

Задача 1.2.61

В коаксиальной линии без потерь длиной $\ell = 20$ м распространяется волна с частотой $f = 1.59$ МГц. Скорость волны $v = 2 \cdot 10^8$ м/с. Определить величину и характер входного сопротивления коротко замкнутой линии с характеристическим сопротивлением $R_0 = 75$ Ом.

Задача 1.2.62

Определить погонные параметры коаксиального кабеля без потерь с характеристическим сопротивлением $R_0 = 75$ Ом, если известно, что электромагнитные волны распространяются в нем со скоростью $v = 10^8$ м/с.

Задача 1.2.63

Определить характеристическое сопротивление R_0 и длину ℓ коаксиального кабеля, если на частоте $f = 100$ МГц при коротком замыкании на конце он имеет входное сопротивление $\dot{Z}_{\text{вх}} = j231$ Ом, а входное сопротивление разомкнутого отрезка составляет $\dot{Z}_{\text{вх}} = -j24.4$ Ом.

Задача 1.2.64

Каковы минимальные длины короткозамкнутых отрезков коаксиальной линии с характеристическим сопротивлением $R_0 = 50$ Ом эквивалентных на частоте $f = 10$ ГГц емкости $C = 1$ пФ и индуктивности $L = 0.02$ мкГ?

Задача 1.2.65

На конце линии с характеристическим сопротивлением $R_0 = 600$ Ом включена индуктивность $L = 2$ мкГ. Определить на каком расстоянии от конца линии при длине волны колебаний $\lambda = 3$ м будет располагаться ближайший к нагрузке узел напряжения.

Задача 1.2.66

На конце коаксиальной линии с характеристическим сопротивлением $R_0 = 80$ Ом включена индуктивность. При длине волны $\lambda = 40$ см ближайший к индуктивности узел напряжения находится на расстоянии $\ell = 15$ см. Определить величину индуктивности L .

Задача 1.2.67

Источник синусоидального напряжения с длиной волны $\lambda = 3$ м подключен к разомкнутой линии длиной $\ell = 4$ м и создает на конце напряжение с амплитудой $U_{2m} = 80$ В. Рассчитать входные напряжение U_{1m} , ток I_{1m} и сопротивление $\dot{Z}_{\text{вх}}$, если характеристическое сопротивление линии $R_0 = 200$ Ом.

Задача 1.2.68

Коаксиальная линия длиной $\ell = 21.25$ см, закороченная на конце, подключена к генератору гармонического напряжения с амплитудой $U_{1m} = 2$ В. Длина волны в линии 10 см. Внутреннее сопротивление генератора равно характеристическому сопротивлению линии $R_0 = 75$ Ом. Рассчитать амплитуды напряжения U_m и тока I_m в пучностях стоячих волн.

Задача 1.2.69

К четвертьволновому отрезку коаксиальной линии без потерь с погонными параметрами $L = 4$ мкГ/м, $C = 11.1$ пФ/м и длиной $\ell = 1.5$ м подключено сопротивление нагрузки $\dot{Z}_н = -j1000$ Ом. Определить величину и характер входного сопротивления.

Задача 1.2.70

Сопротивление нагрузки $\dot{Z}_н = 100 + j100$ Ом подключено к выходу коаксиальной линии длиной $\lambda/8$ с характеристическим сопротивлением 100 Ом. Найти величину входного сопротивления.

Задача 1.2.71

Коаксиальная линия с характеристическим сопротивлением $R_0 = 100$ Ом нагружена на резистивное сопротивление $R_n = 300$ Ом. Определить коэффициент отражения Γ_U , КСВН s и амплитуды напряжения U_m в узлах и пучностях волны, если амплитуда падающей волны $U_{1m} = 100$ В.

Задача 1.2.72

Коаксиальная линия с характеристическим сопротивлением $R_0 = 100$ Ом нагружена на неизвестное активное сопротивление R_n . Амплитуда напряжения в пучностях поля $U_{max} = 500$ В, а в узлах - $U_{min} = 300$ В. Определить значения R_n , при которых на конце линии располагается узел и пучность поля.

Задача 1.2.73

Три одинаковых активных сопротивления $R = 200$ Ом соединены отрезками длинных линий произвольной длины, обеспечивающими режим бегущих волн на всех участках. Определить характеристические сопротивления отрезков.

Задача 1.2.74

Отрезок линии длиной $\lambda/2$ с характеристическим сопротивлением $R_{01} = 100$ Ом подключен к параллельному соединению резистора $R_1 = 200$ Ом и отрезка линии длиной $3\lambda/4$ с характеристическим сопротивлением $R_{02} = 200$ Ом, нагруженным на резистор $R_2 = 100$ Ом. Изобразить структурную схему системы, рассчитать ее входное сопротивление $Z_{вх}$, коэффициенты отражения Γ и КСВН в отрезках линии.

Задача 1.2.75

Коаксиальная линия состоит из двух отрезков. Первый, считая от конца, разомкнут, имеет длину ℓ_1 , обладает характеристическим сопротивлением R_{01} и служит нагрузкой для второго, имеющего длину ℓ_2 и обладающего характеристическим сопротивлением R_{02} . Показать, что входное сопротивление линии удовлетворяет формуле Г.А.Угера $Z_{вх} = \frac{Z_{вх1}Z_{вх2} + R_{02}^2}{Z_{вх1} + Z_{вх2}}$. Рассчитать входное сопротивление составной линии по основной формуле и по формуле Г.А.Угера при $\ell_1 = 7.5$ см, $R_{01} = 200$ Ом, $\ell_2 = 21.25$ см, $R_{02} = 100$ Ом. Длина радиоволн 10 см.

Задача 1.2.76

Источник ЭДС с длиной волны 1 м и амплитудой $U_{1m} = 100$ В включен на входе замкнутой на конце линии длиной $\ell = 1.5$ м с характеристическим сопротивлением $R_0 = 200$ Ом. Посередине линии между ее проводниками включен конденсатор емкостью $C = 2$ пФ. Определить амплитуды тока I_{1m} в начале линии, напряжения U_{Cm} на конденсаторе и тока I_{Cm} , протекающего через конденсатор.

Задача 1.2.77

Два коаксиальных кабеля с характеристическими сопротивлениями

$R_{01} = 500 \text{ Ом}$ и $R_{02} = 200 \text{ Ом}$ согласованы на длине 1 м с помощью отрезка вспомогательного кабеля (трансформатора). Определить его длину ℓ и характеристическое сопротивление $R_0^{\text{тр}}$.

Задача 1.2.78

Комплексная нагрузка $\dot{Z}_н = 35 + j105 \text{ Ом}$ подключена к коаксиальной линии с характеристическим сопротивлением $R_0 = 70 \text{ Ом}$, работающей на длине волны $\lambda = 60 \text{ см}$. Определить место включения и характеристическое сопротивление четвертьволнового трансформатора, согласующего линию с нагрузкой.

Задача 1.2.79

Коаксиальная линия длиной $\ell_1 = 20 \text{ см}$ с характеристическим сопротивлением $R_{01} = 70 \text{ Ом}$ соединена с нагрузкой в виде параллельно соединенных двух отрезков линий (рис. 1.21): 1) длиной $\ell_2 = 55 \text{ см}$ с характеристическим сопротивлением $R_{02} = 100 \text{ Ом}$ и нагрузкой $R_{н2} = 50 \text{ Ом}$, 2) длиной $\ell_3 = 30 \text{ см}$ с характеристическим сопротивлением $R_{03} = 120 \text{ Ом}$ и нагрузкой $R_{н3} = 70 \text{ Ом}$. Рассчитать входное сопротивление и КСВН во всех отрезках линии при длине волны 40 см .

Задача 1.2.80

Генератор обеспечивает режим бегущих волн при длине волны 7.5 м на сопротивлении нагрузки $R_н = 50 \text{ Ом}$. Для согласования линии с комплексной нагрузкой $\dot{Z}_н = 100 - j50 \text{ Ом}$ использован короткозамкнутый шлейф. Рассчитать место включения ℓ_1 и длину шлейфа ℓ_2 .

Задача 1.2.81

Согласование линии с нагрузкой в предыдущей задаче осуществить с помощью четвертьволнового трансформатора. Определить место включения (расстояние от нагрузки ℓ) и характеристическое сопротивление $R_0^{\text{тр}}$ трансформатора.

Задача 1.2.82

Источник постоянного напряжения с ЭДС $E = 100\sigma(t) \text{ В}$ и внутренним сопротивлением $R_i = 50 \text{ Ом}$ соединен с нагрузкой $R_н = 30 \text{ Ом}$ отрезком коаксиальной линии с характеристическим сопротивлением $R_0 = 50 \text{ Ом}$. Время распространения волны вдоль линии $t_0 = 0.2 \text{ с}$. Записать выражения для напряжения $U_1(t)$ и тока $I_1(t)$ на входе линии при $0 \leq t \leq 2t_0$.

Задача 1.2.83

Источник постоянного напряжения с ЭДС $E = 110 \text{ В}$ и внутренним сопротивлением $R_i = 50 \text{ Ом}$ подключен к цепи (рис. 1.21), состоящей из трех отрезков линий без потерь, нагруженных на резистивные приемники R_2 и R_3 : $R_{01} = 50 \text{ Ом}$, $R_2 = R_{02} = 2R_{01}$, $R_3 = R_{03} = 3R_{01}$. Записать выражения для напряжений и токов на входах линий при $t = 2\ell_1/v_1$, где v_1 – фазовая скорость волны.

Задача 1.2.84

Линия без потерь ($R_0 = 120 \text{ Ом}$, $\ell = 400 \text{ м}$, $v_\phi = 2 \cdot 10^8 \text{ м/с}$) согласована

с источником постоянного напряжения (ЭДС $E = 100\sigma(t)$ В, внутреннее сопротивление $R_i = 120$ Ом) и нагрузкой $R_n = 120$ Ом. К середине линии (рис. 1.22) присоединена индуктивность $L = 30$ мкГ. Записать выражения для напряжений в точке $x_1 = 0.25\ell$ и на нагрузке ($x = \ell$).

Задача 1.2.85

Используя характеристическое сопротивление линии $\dot{Z}_0$ и постоянную распространения γ , представить **A**-матрицей четырехполюсника отрезок длиной линии с потерями длиной ℓ .

Задача 1.2.86

Используя представление отрезка длиной линии **A**-матрицей четырехполюсника, построить матричную модель соединения длинных линий без потерь, изображенного на рис. 1.23.

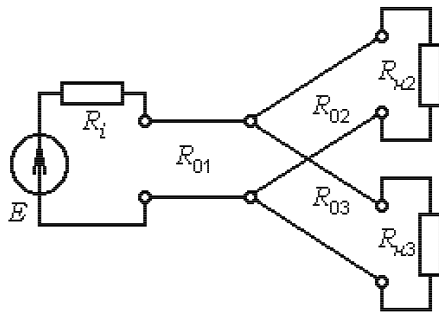


Рис. 1.21

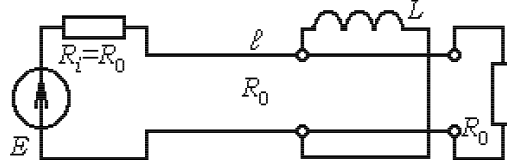


Рис. 1.22

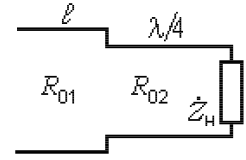


Рис. 1.23

1.2.3. Примеры решения задач

Задача 1.2.4

$$L \frac{dI}{dt} = E - U, \quad C_1 \frac{dU}{dt} = I - (U - U_1)/R, \quad C_2 \frac{dU_1}{dt} = (U - U_1)/R.$$

Отсюда

$$\frac{dI}{dt} = \frac{E - U}{L}, \quad \frac{dU}{dt} = \frac{I}{C_1} + \frac{U_1 - U}{RC_1}, \quad \frac{dU_1}{dt} = \frac{U - U_1}{RC_2}.$$

Цепь будет находиться в равновесии при $I = 0$, $U_1 = U_2 = E$.

Задача 1.2.5

Обозначим продольное сопротивление четырехполюсника $\dot{Z}_1 = R_1 + j\omega L$, а поперечное сопротивление $\dot{Z}_2 = R_2$. Комплексный коэффициент передачи четырехполюсника

$$\dot{K}(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + j\omega L}.$$

Отсюда для АЧХ $K(\omega) = |\dot{K}(\omega)|$ и ФЧХ $\varphi(\omega) = \arctg \frac{\text{Im} \dot{K}(j\omega)}{\text{Re} \dot{K}(j\omega)}$ имеем

$$|K(\omega)| = \frac{R_2}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + \omega^2 L^2}}, \quad \varphi(\omega) = \frac{\operatorname{Im} \dot{K}}{\operatorname{Re} \dot{K}} = -\arctg \frac{\omega L}{R_1 + R_2}.$$

Задача 1.2.6

Операторный коэффициент передачи четырехполюсника (системную функцию) $K(s)$ четырехполюсника получим, замещая $j\omega$ комплексной частотой s $K(s) = R_2/(R_1 + R_2 + sL)$.

Переходную характеристику четырехполюсника получим в два этапа. Сначала построим ее лапласовское изображение. Для этого умножим изображение $1/s$ функции Хевисайда $\sigma(t)$ на системную функцию четырехполюсника $K(s)$ и получим $g(s)$ – лапласовское изображение отклика четырехполюсника на воздействие $\sigma(t)$ $g(s) = \frac{R_2}{s(R_1 + R_2 + sL)}$.

Второй этап заключается в определении оригинала, т.е. функции $g(t)$ по формуле Хевисайда. Многочлен в знаменателе $s(s + (R_1 + R_2)/L)$ имеет два корня $s_1 = 0$, $s_2 = -(R_1 + R_2)/L$. Поэтому

$$g(t) = \frac{R_2}{L} \left(\frac{1}{(R_1 + R_2)/L} - \frac{e^{-(R_1 + R_2)/L}}{(R_1 + R_2)/L} \right) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \left(1 - e^{-(R_1 + R_2)/L} \right).$$

Поскольку импульсная характеристика линейной цепи $h(t)$ связана с системной функцией $K(s)$ преобразованием Лапласа, по теореме Хевисайда получим

$$h(t) = \frac{R_2}{L} \left(\frac{1}{(R_1 + R_2)/L} e^{-(R_1 + R_2)/L} \right) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} e^{-(R_1 + R_2)/L}.$$

Задача 1.2.8

Составим уравнения Кирхгофа:

$$\dot{I}_1(R_2 + R_1) - \dot{I}_2 R_2 = \dot{U}_1, \quad \dot{I}_2(R_2 + R_3 + \frac{1}{j\omega C}) - \dot{I}_1 R_2 = 0.$$

Подставляя $\dot{I}_1$ из первого уравнения во второе, получим

$$\dot{I}_2(R_1 + R_2)(R_2 + R_3 + \frac{1}{j\omega C}) - \dot{I}_2 R_2^2 - \dot{U}_1 R_2 = 0.$$

Учитывая, что $\dot{U}_2 = \dot{I}_2 R_3$, получим комплексный коэффициент передачи цепи

$$\dot{K}(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3 + \frac{R_1 + R_2}{j\omega C}}.$$

Отсюда для АЧХ $K(\omega) = |\dot{K}(\omega)|$ и ФЧХ $\varphi(\omega) = \arctg \frac{\operatorname{Im} \dot{K}(j\omega)}{\operatorname{Re} \dot{K}(j\omega)}$ имеем

$$K(\omega) = \frac{\omega R_3 C}{\sqrt{(1 + \frac{R_1}{R_2})^2 + (1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{R_3})^2 (\omega R_3 C)^2}},$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{1}{\omega C(R_3 + R_1 R_2 / (R_1 + R_2))}.$$

Задача 1.2.16

Длине волны λ соответствует резонансная частота

$$f_{\text{рез}} = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ м/с}}{500 \text{ м}} = 6 \cdot 10^5 \text{ Гц}, \quad \omega_{\text{рез}} = 2\pi f_{\text{рез}} = 37.7 \cdot 10^5 \text{ рад/с}.$$

Характеристическое сопротивление контура $\rho = \omega_{\text{рез}} L = 565 \text{ Ом}$, добротность контура $Q = \rho / R = f_{\text{рез}} / 2\Delta f$. Отсюда

$$2\Delta f = f_{\text{рез}} R / \rho = 5.31 \text{ кГц}.$$

Задача 1.2.19

Средняя активная мощность выделяется в контуре на активном сопротивлении. Резонансное сопротивление параллельного контура описывается формулой $Z_{\text{рез}} = \rho^2 / R = Q^2 R$. Отсюда

$$R = Z_{\text{рез}} / Q^2 = 40000 \text{ Ом} / 900 = 44.4 \text{ Ом},$$

а средняя мощность $P = I_m^2 R / 2 = 0.36 \cdot 44.4 / 2 = 8 \text{ Вт}$.

Задача 1.2.41

Условием резонанса в системе связанных контуров является равенство нулю реактивной составляющей входного сопротивления эквивалентного контура

$$X_{\text{вх}} = \omega_{\text{рез}} L_1 - \frac{1}{\omega_{\text{рез}} C_1} - \frac{\omega_{\text{рез}}^2 M^2}{R_2^2 + \omega_{\text{рез}}^2 L_2^2} \omega_{\text{рез}} L_2 = 0.$$

Поскольку $R_2 \ll \omega_{\text{рез}} L_2$, имеем

$$X_{\text{вх}} \cong \omega_{\text{рез}} L_1 - \frac{1}{\omega_{\text{рез}} C_1} - \frac{\omega_{\text{рез}}^2 M^2}{\omega_{\text{рез}} L_2} = 0, \quad \text{или} \quad 1 - \frac{\omega_{01}^2}{\omega_{\text{рез}}^2} - \frac{M^2}{L_1 L_2} = 0.$$

Отсюда

$$\frac{\omega_{01}^2}{\omega_{\text{рез}}^2} = \frac{f_{01}^2}{f_{\text{рез}}^2} = 1 - k^2, \quad \text{или} \quad f_{\text{рез}} = \frac{f_{01}}{\sqrt{1 - k^2}} = 125 \text{ кГц}.$$

Задача 1.2.78

Четвертьволновые трансформаторы согласуют только резистивные сопротивления с резистивными. Поэтому трансформатор следует включать в сечении, где $X_{\text{вх}} = 0$. На расстоянии ℓ от нагрузки имеем

$$\dot{Z}_{\text{вх}} = R_0 \frac{\dot{Z}_{\text{н}} + j R_0 \operatorname{tg} \beta \ell}{R_0 + j \dot{Z}_{\text{н}} \operatorname{tg} \beta \ell} = \frac{R_0 (r_{\text{н}} + j x_{\text{н}} + j R_0 \operatorname{tg} \beta \ell) (R_0 - x_{\text{н}} \operatorname{tg} \beta \ell - j r_{\text{н}} \operatorname{tg} \beta \ell)}{(R_0 - x_{\text{н}} \operatorname{tg} \beta \ell + j r_{\text{н}} \operatorname{tg} \beta \ell) (R_0 - x_{\text{н}} \operatorname{tg} \beta \ell - j r_{\text{н}} \operatorname{tg} \beta \ell)} =$$

$$= \frac{R_0^2 r_{\text{н}}(1 + \operatorname{tg}^2 \beta \ell)}{(R_0 - x_{\text{н}} \operatorname{tg} \beta \ell)^2 + (r_{\text{н}} \operatorname{tg} \beta \ell)^2} + j R_0 \frac{[x_{\text{н}} R_0(1 + \operatorname{tg}^2 \beta \ell) + (R_0^2 - r_{\text{н}}^2 - x_{\text{н}}^2) \operatorname{tg} \beta \ell]}{(R_0 - x_{\text{н}} \operatorname{tg} \beta \ell)^2 + (r_{\text{н}} \operatorname{tg} \beta \ell)^2}.$$

Реактивная часть входного сопротивления обращается в нуль, когда

$$R_0 x_{\text{н}} \operatorname{tg}^2 \beta \ell + (x_{\text{н}}^2 + r_{\text{н}}^2 - R_0^2) \operatorname{tg} \beta \ell - x_{\text{н}} R_0 = 0.$$

Отсюда $\operatorname{tg} \beta \ell = -1/2 \pm \sqrt{5}/2$. Для $\beta \ell = 2\pi \ell / 0.6 = 10.47 \ell$ получаем $\ell_1 = 0.088 \lambda = 5.28$ см, $\ell_2 = 0.338 \lambda = 20.28$ см. В этих сечениях резистивная часть входного сопротивления соответственно равна 79.61 и 10.9 Ом, а характеристические сопротивления четвертьволновых трансформаторов $R_0^{\text{тп}} = \sqrt{R_{\text{вх}} R_0}$ соответственно равны 74.65 и 27.6 Ом.

1.3 Нелинейные радиоэлектронные системы

1.3.1. Краткие теоретические сведения

Процесс приближенного аналитического представления графически или таблично заданных характеристик называется *аппроксимацией*. Аппроксимация степенным многочленом основана на разложении вольт-амперной характеристики нелинейного элемента (ВАХ НЭ) в окрестности рабочей точки U_0 в ряд Тейлора:

$$I(U) = a_0 + a_1(U - U_0) + a_2(U - U_0)^2 + \dots = a_0 + \sum_{k=0}^n a_k(U - U_0)^k, \quad (1.44)$$

где $a_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k I}{dU^k} \big|_{U=U_0}$.

Если на входе резистивного НЭ действуют напряжение смещения U_0 и гармонический сигнал $U(t) = U_m \cos \omega t$, т.е. $U = U_0 + U_m \cos \omega t$ (рис. 1.24), то ток НЭ становится полигармоническим:

$$I = a_0 + a_1 U_m \cos \omega t + a_2 U_m^2 \cos^2 \omega t + a_3 U_m^3 \cos^3 \omega t + \dots \quad (1.45)$$

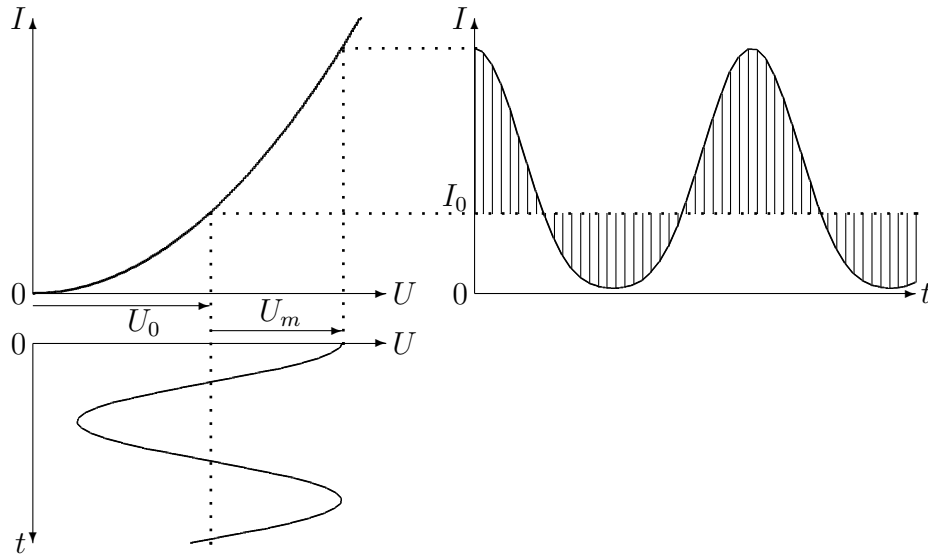


Рис. 1.24. Графическое построение тока в цепи НЭ со степенной аппроксимацией ВАХ

$$\begin{aligned} I &= a_0 + \frac{1}{2}a_2 U_m^2 + \frac{3}{8}a_4 U_m^4 + \dots + \left(a_1 U_m + \frac{3}{4}a_3 U_m^3 + \frac{5}{8}a_5 U_m^5 + \dots \right) \cos \omega t + \\ &+ \left(\frac{a_2}{2} U_m^2 + \frac{a_4}{2} U_m^4 + \dots \right) \cos 2\omega t + \left(\frac{a_2}{4} U_m^3 + \frac{5}{16}a_5 U_m^5 + \dots \right) \cos 3\omega t + \dots = \\ &= I_0 + I_1 \cos \omega t + I_2 \cos 2\omega t + I_3 \cos 3\omega t + \dots \end{aligned}$$

Кусочно-линейная аппроксимация состоит в замене реальной характеристики приближенной, состоящей из отрезков прямых линий с различными наклонами:

$$I(U) = \begin{cases} 0 & \text{при } U < U_{\text{отс}}, \\ S(U - U_{\text{отс}}) & \text{при } U > U_{\text{отс}} \end{cases} \quad (1.46)$$

где S – крутизна характеристики; $U_{\text{отс}}$ – напряжение ее излома. Смещение U_0 на рис. 1.25 выбрано так, чтобы выходной ток протекал только в течение части периода (удвоенный угол отсечки 2ϑ):

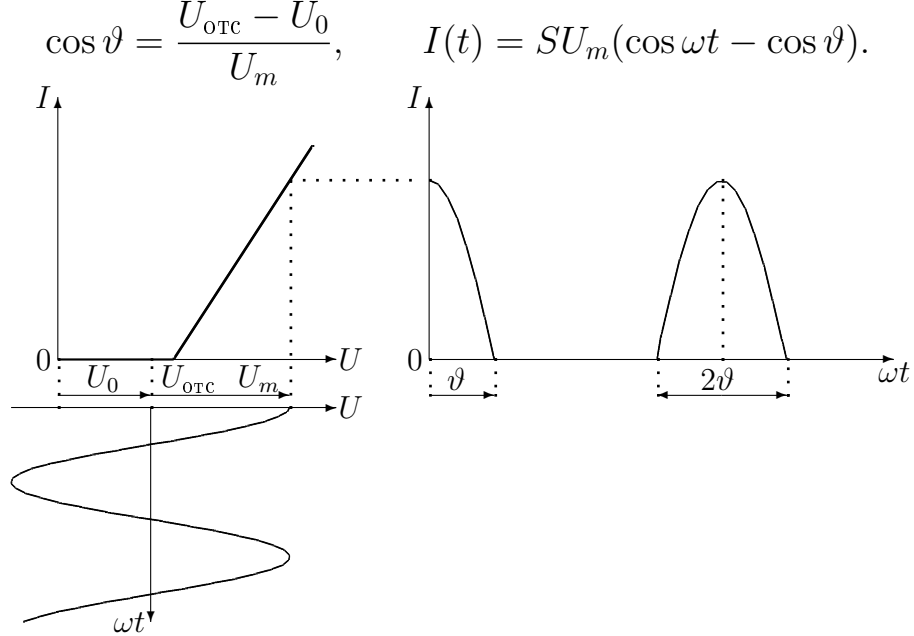


Рис. 1.25. Графическое построение тока в цепи НЭ с кусочно-линейной аппроксимацией ВАХ

Тогда $I(t)$ имеет вид импульсов тока (рис. 1.25) и является четной функцией

$$I(t) = I_0 + I_1 \cos \omega t + I_2 \cos 2\omega t + I_3 \cos 3\omega t + \dots, \quad (1.47)$$

а коэффициенты ряда Фурье имеют вид

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{SU_m}{\pi} \int_0^{\vartheta} (\cos \omega t - \cos \vartheta) d\omega t = \frac{SU_m}{\pi} (\sin \vartheta - \vartheta \cos \vartheta) = SU_m \gamma_0(\vartheta), \\ I_1 &= \frac{2SU_m}{\pi} \int_0^{\vartheta} (\cos \omega t - \cos \vartheta) \cos \omega t d\omega t = \frac{SU_m}{\pi} (\vartheta - \sin \vartheta \cos \vartheta) = SU_m \gamma_1(\vartheta), \\ I_n &= \frac{2SU_m}{\pi} \int_0^{\vartheta} (\cos \omega t - \cos \vartheta) \cos n\omega t d\omega t = \\ &= \frac{2SU_m}{\pi} \cdot \frac{\sin n\vartheta \cos \vartheta - n \sin \vartheta \cos n\vartheta}{n(n^2 - 1)} = SU_m \gamma_n(\vartheta), \quad n = 2, 3, 4, \dots, \end{aligned} \quad (1.48)$$

где $\gamma_i(\vartheta)$ – функции Берга. Если наибольшее значение тока поддерживается постоянным, вместо функций Берга удобнее использовать нормированные коэффициенты Берга $\alpha_n(\vartheta)$ [6], достигающие наибольшего значения при $\vartheta = 120^\circ/n$. Основные применения кусочно-линейной аппроксимации ВАХ НЭ и нелинейных преобразований гармонических сигналов – выпрямление тока и умножение частоты сигналов.

При бигармоническом и полигармоническом воздействиях на НЭ возникают колебания с кратными и комбинационными частотами $\omega_{\text{комб}}$. В общем случае ВАХ НЭ аппроксимируется многочленом N -й степени, а входной сигнал содержит n гармонических сигналов с различными частотами. Тогда

$$\omega_{\text{комб}} = |m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + \dots + m_n\omega_n|, \quad (1.49)$$

где m_i могут принимать значения от ± 1 до $\pm(N-1)$. Возникающее в НЭ взаимодействие гармонических составляющих воздействия может быть использовано для выполнения таких операций, как амплитудная модуляция, перенос спектра по шкале частот, детектирование.

Нелинейные преобразования сигналов возможны в электрических цепях, содержащих резистивные параметрические элементы (ПЭ), проводимости которых G изменяются во времени по периодическому закону:

$$G(t) = \frac{g_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} g_k \cos(k\omega_y t + \varphi_k),$$

где g_k – коэффициенты передаточной функции ПЭ; ω_y – частота управляющего сигнала. Если на вход цепи поступает напряжение $U(t) = U_m \cos \omega t$, ток в цепи ПЭ имеет вид

$$\begin{aligned} I(t) = G(t)U(t) &= \frac{g_0 U_m}{2} \cos \omega t + \sum_{k=1}^{\infty} g_k U_m \cos(k\omega_y t + \varphi_k) \cos \omega t = \\ &= \frac{U_m}{2} g_0 \cos \omega t + \\ &+ \frac{U_m}{2} \left[\sum_{k=1}^{\infty} g_k (\cos[(\omega - k\omega_y)t - \varphi_k] + \cos[(\omega + k\omega_y)t + \varphi_k]) \right] = \\ &= \frac{U_m}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k \cos[(\omega - k\omega_y)t - \varphi_k]. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Параметрический резонанс

Реактивные параметрические элементы обычно используются в составе колебательных контуров. Если управляющее напряжение изменяется медленно по сравнению с собственной частотой контура, возникает явление частотной модуляции. Когда же частота управляющего сигнала близка к собственной частоте контура или кратна ей, возникает параметрический резонанс.

Пусть емкость конденсатора C периодически изменяется во времени и в те моменты, когда заряд конденсатора и напряжение U_C достигают амплитудных значений, уменьшается скачком на величину ΔC за малое по сравнению с периодом собственных колебаний время (рис. 1.26), а в те моменты времени, когда $U_C = 0$, скачком возвращается в первоначальное состояние. Тогда в колебательный контур поступает дополнительная энергия $\Delta W = -\frac{\Delta C}{C}W$ и вносится эквивалентное отрицательное сопротивление $R_{\text{вн}}$, а колебания нарастают. Отношение $m = \Delta C/C$ принято называть *глубиной модуляции* емкости. Глубина модуляции m может

быть настолько большой, что $R_{\text{вн}}$ полностью компенсирует сопротивление потерь в контуре, и колебания неограниченно нарастают.

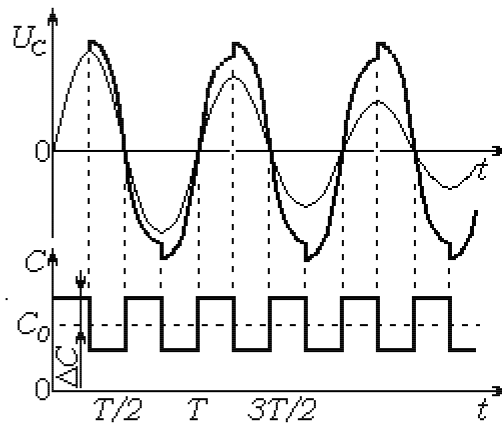


Рис. 1.26. Изменение напряжения на емкости в параметрическом контуре

Возникновение нарастающих колебаний при периодическом изменении величины энергоемкого параметра с частотой, кратной собственной частоте контура, называется *параметрическим возбуждением* колебаний или *параметрическим резонансом*, а соответствующая глубина модуляции емкости – критической $m_{\text{кр}}$. Когда $m < m_{\text{кр}}$ потери в контуре компенсируются частично и эквивалентная добротность контура возрастает.

Величины $m_{\text{кр}}$, а значит, и вносимого сопротивления $R_{\text{вн}}$, зависят от временного закона изменения емкости. При ступенчатом изменении $C(t)$ получим [2,7,8] следующие выражения: $m_{\text{кр}} = \pi/2Q$, $R_{\text{вн}} = 2m\rho/\pi$, где $\rho = 1/\omega_0 C$ – характеристическое сопротивление контура. При синусоидальном изменении $C(t)$ получаем $m_{\text{кр}} = 2/Q \cos \varphi$, $R_{\text{вн}} = m\rho \cos \varphi/2$, где φ – угол сдвига фаз между управляющим напряжением и напряжением в контуре. Рассмотренные процессы используются в параметрических усилителях (ПУ) радиосигналов. Коэффициент усиления ПУ по мощности K_P описывается [8] формулой $K_P = 1/(1 - m/m_{\text{кр}})^2$.

Усиление сигналов

Для усиления радиосигналов в настоящее время в основном используются операционные усилители (ОУ) с отрицательной обратной связью (ООС). Стандартный ОУ имеет два входа: инвертирующий и неинвертирующий. Входной сигнал может быть подан на оба одновременно (дифференциальное включение) или только на один из них. ООС подается только на инвертирующий вход, и возможны две схемы недифференциального включения ОУ: инвертирующее (рис. 1.27, а) и неинвертирующее (рис. 1.27, б) включение ОУ. Стандартные ОУ обладают двумя важными свойствами: 1) входные токи ОУ ничтожно малы и обычно не учитываются, 2) нормальному режиму функционирования ОУ соответствует нулевая разность потенциалов между его входами. При этом для коэффициентов усиления можно получить

$$\dot{K}_\beta = \frac{\dot{U}_{\text{вых}}}{\dot{U}_{\text{вх}}} = -\frac{\dot{Z}_\beta}{\dot{Z}_1}, \quad \dot{K}_\beta = \frac{\dot{U}_{\text{вых}}}{\dot{U}_{\text{вх}}} = 1 + \frac{\dot{Z}_\beta}{\dot{Z}_1}. \quad (1.51)$$

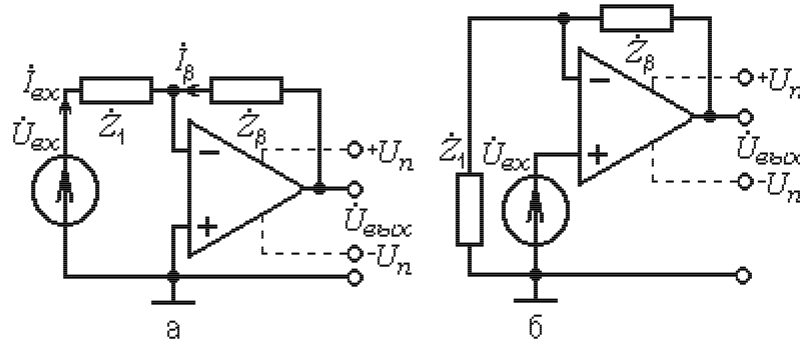


Рис. 1.27. Инвертирующее и неинвертирующее включение ОУ

На основе ОУ в радиоэлектронике созданы активные RC -фильтры, прецизионные измерительные усилители (рис. 1.28), гираторы (рис. 1.29, а), позволяющие создавать электронные аналоги индуктивностей и колебательные контуры звуковых частот (рис. 1.29, б) в микроскопическом исполнении, разнообразные дифференцирующие, интегрирующие и суммирующие устройства [8–10].

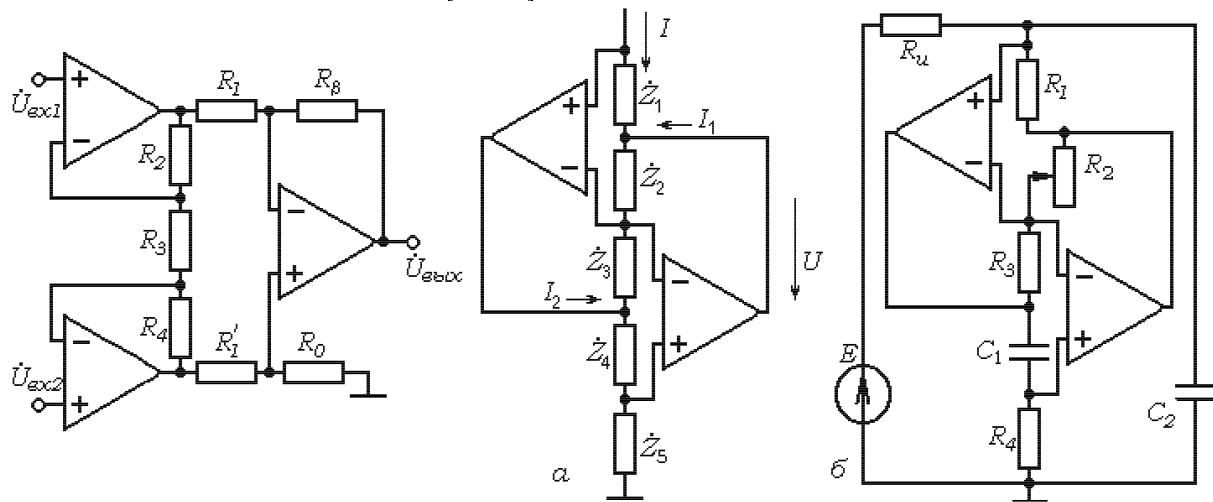


Рис. 1.28. Измерительный усилитель

Рис. 1.29. Гиратор (а) и гираторный колебательный контур (б)

Прецизионный измерительный усилитель (рис. 1.28) состоит из трех ОУ. Входной каскад представляет два неинвертирующих ОУ, связанных общей цепью ООС, а выходной каскад содержит ОУ в дифференциальном включении и с однофазным выходом. Результирующий коэффициент усиления измерительного усилителя имеет вид

$$K = \frac{U_{\text{вых}}}{U_{\text{вх1}} - U_{\text{вх2}}} \frac{R_\beta}{R_1} = \left(1 + \frac{R_2}{R_3} + \frac{R_4}{R_3}\right) \frac{R_\beta}{R_1}. \quad (1.52)$$

Для гиратора (рис. 1.29, а)

$$\dot{Z}_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{\dot{Z}_1 \dot{Z}_3 \dot{Z}_5}{\dot{Z}_2 \dot{Z}_4}. \quad (1.53)$$

Это равенство нетрудно получить, рассматривая все токи, протекающие через $\dot{Z}_1 - \dot{Z}_5$, и считать ОУ идеальными. Если $\dot{Z}_2$ или $\dot{Z}_4$ имеет емкостный характер (например, $\dot{Z}_2 = 1/j\omega C$), а остальные $\dot{Z}_i = R$ — одинаковые резисторы, то $\dot{Z}_{\text{вх}} = j\omega CR^2 = j\omega L$, $L = CR^2$. При $C = 10$ нФ и $R = 10$ кОм $L = 1$ Гн. Подобная индуктивность, выполненная в виде катушки, имела бы весьма внушительные размеры.

Гираторы позволяют создавать резонансные колебательные контуры без катушек индуктивности (см. рис. 1.29, б).

Автоколебательные системы

Физические процессы в LC -автогенераторе (рис. 1.30) описываются нелинейным дифференциальным уравнением 2-го порядка:

$$\frac{d^2U}{dt^2} + \left(\frac{R}{L} - \frac{M}{LC} \frac{dI_{CT}}{dU}(U) \right) \frac{dU}{dt} + \frac{1}{LC}U = 0. \quad (1.54)$$

Реальную ВАХ полевого транзистора (ПТ) целесообразно представить математической моделью в виде степенного многочлена:

$$I_{CT} = a_0 + a_1(U - U_{cm}) + a_2(U - U_{cm})^2 + a_3(U - U_{cm})^3 + \\ + a_4(U - U_{cm})^4 + a_5(U - U_{cm})^5 + \dots \quad (1.55)$$

Вид характеристики (1.55) зависит от особенностей нелинейного элемента и полностью определяется величинами коэффициентов a_i . Теоретический анализ обычно проводится для многочленов третьей и пятой степени.

Если считать ВАХ симметричной относительно ее середины, то уравнение (1.55) упрощается: в нем остаются только слагаемые, содержащие нечетные степени напряжения:

$$I_{CT} = a_0 + a_1(U - U_{cm}) + a_3(U - U_{cm})^3 + a_5(U - U_{cm})^5. \quad (1.56)$$

Тогда в рабочей точке ($U_{cm}=0$) имеем

$$\frac{dI_{CT}}{dU} = a_1 + 3a_3U^2 + 5a_5U^4 = S_0 + S_1U^2 + S_2U^4. \quad (1.57)$$

При этом дифференциальное уравнение автогенератора принимает вид

$$\frac{d^2U}{dt^2} - \left(\frac{M}{LC}(S_0 + S_1U^2 - S_2U^4) - \frac{R}{L} \right) \frac{dU}{dt} + \frac{1}{LC}U = 0. \quad (1.58)$$

Квазигармонические автоколебания могут возникнуть также в усилителе, охваченном частотно-избирательной RC -цепью положительной обратной связи, например, цепью Вина (рис. 1.31, а). Цепь Вина и цепь обратной связи ОУ образуют мост Вина (рис. 1.31, б). Пренебрегая входным током усилителя и представляя передаточную характеристику многочленом третьей степени $U_{вых}/U = KU - K'U^3$, получим следующее дифференциальное уравнение RC -автогенератора [7–10]:

$$\frac{d^2U}{dt^2} + \frac{1}{R_1C_2} \left(1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1} - K + 3K'U^2 \right) \frac{dU}{dt} + \frac{1}{R_1C_1R_2C_2}U = 0. \quad (1.59)$$

При $R_1 = R_2 = R$ и $C_1 = C_2 = C$ это уравнение принимает более простой вид:

$$\frac{d^2U}{dt^2} + \frac{1}{RC} (3 - K + 3K'U^2) \frac{dU}{dt} + \frac{1}{(RC)^2}U = 0. \quad (1.60)$$

Отсюда частота автоколебаний RC -генератора $\omega_0 = 1/RC$.

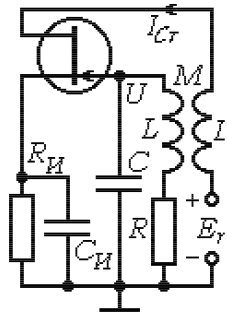


Рис. 1.30. LC -генератор

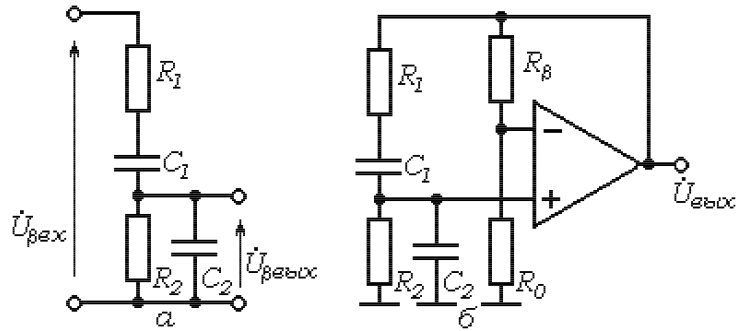


Рис. 1.31. Цепь Вина (а) и RC -генератор с мостом Вина (б)

1.3.2. Задачи

Задача 1.3.1

Может ли резистивный двухполюсник, описываемый выражением $U = I - 0.2I^2 + 0.5I^3$, генерировать энергию?

Задача 1.3.2

На цепь, состоящую из последовательного соединения конденсатора с емкостью C и нелинейного резистора с характеристикой $I = f(U)$, воздействует идеализированный источник напряжения с ЭДС $E(t)$. Получить дифференциальные уравнения цепи относительно напряжения U на нелинейном элементе и напряжения U_C на конденсаторе.

Задача 1.3.3

На вход двухполупериодного выпрямителя с характеристикой $I = 2|U|$ подается гармоническое напряжение $U(t) = U_0 \cos \omega t$. Найти постоянную составляющую I_0 выпрямленного тока и амплитуду I_2 его второй гармоники.

Задача 1.3.4

К последовательному соединению постоянного резистора $R = 5$ Ом и нелинейного резистора $R_n = 3 + 0.5U$ Ом, подключен источник переменного напряжения $U(t) = 2 \cos \omega t$. Определить ток в цепи.

Задача 1.3.5

Нелинейный резистивный четырехполюсник (рис. 1.32) описывается уравнениями: $U_1 = 2I_1 + I_1I_2 + I_1^2 + I_2^2$, $U_2 = -I_1 + I_2 + 2I_1^2 + 2I_2^2$. Полагая, что $I_1(t) = 2 + I_{1\sim}(t)$, $I_2(t) = 1 + I_{2\sim}(t)$, где $I_{1\sim}(t)$ и $I_{2\sim}(t)$ – переменные токи с малыми амплитудами, составить линеаризованные уравнения четырехполюсника по переменному току. Будет ли полученный четырехполюсник обратимым?

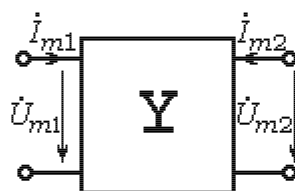


Рис. 1.32

Задача 1.3.6

Кусочно-линейная аппроксимация ВАХ резистивного нелинейного элемента имеет вид $I(U) = \begin{cases} 0, & U < U_{\text{отс}}, \\ S(U - U_{\text{отс}}), & U \geq U_{\text{отс}}. \end{cases}$ Записать выражение для импульсов тока при $S = 3 \text{ мА/В}$, $U_{\text{отс}} = 3 \text{ В}$, $U_{\text{вх}}(t) = 2 + 5 \cos \omega t$ и вычислить величину угла отсечки тока ϑ .

Задача 1.3.7

К параллельному соединению постоянного резистора и нелинейной емкости подключается напряжение $U(t) = 2 + 3 \sin \omega t$, и в цепи устанавливается значение тока $I(t) = 0.1 + 0.1 \sin \omega t - 21 \sin 3\omega t$. Определить сопротивление резистора R и выражения для токов резистора I_R и емкости I_C .

Задача 1.3.8

Рассчитать амплитуды гармоник с частотами $\omega \div 4\omega$, возникающих при гармоническом воздействии $U = U_m \cos \omega t = 6 \cos \omega t$ в цепи НЭ, представленного полиномом $I(U) = 5 + U + 0.3U^2 + 0.1U^3$.

Задача 1.3.9

Емкость $C = 20 \text{ мкФ}$, заряженная до напряжения $U = 10 \text{ В}$, разряжается через цепь, состоящую из последовательного соединения индуктивности $L = 1 \text{ мГ}$ и нелинейного резистора с характеристикой $U = 2I + I^3$. Определить максимальную величину тока I_{max} через резистор, если начальный ток индуктивности равен нулю $I_L(0) = 0$.

Задача 1.3.10

Характеристика нелинейного элемента $I(U)$ аппроксимирована кусочно-линейной моделью (напряжение излома $U_{\text{отс}} = 3.5 \text{ В}$, крутизна характеристики $S = 1 \text{ А/В}$). Записать выражение для импульсов тока при воздействии в виде: $U(t) = 3 + 2 \cos \omega t + 6 \cos 2\omega t$ и рассчитать амплитуду импульсов тока при $\omega t = 2k\pi$ и $\omega t = (2k - 1)\pi$.

Задача 1.3.11

Стоково-затворная характеристика полевого транзистора описывается выражением $I_{\text{СТ}} = S(U_{\text{отс}} - U_{\text{зи}})^2$. Аппроксимировать характеристику ПТ степенным многочленом и рассчитать коэффициенты многочлена при $S = 10 \text{ мА/В}^2$, $U_{\text{отс}} = -6 \text{ В}$.

Задача 1.3.12

Умножитель частоты гармонического сигнала в 4 раза собран на нелинейном элементе, характеристика которого $I(U)$ аппроксимирована кусочно-линейной моделью (напряжение излома $U_{\text{отс}} = 5 \text{ В}$, крутизна характеристики $S = 3 \text{ А/В}$). Подобрать амплитуду переменного напряжения U_m и напряжение смещения рабочей точки U_0 такими, чтобы максимальной оказалась четвертая гармоника и ее амплитуда составила 20 мА .

Задача 1.3.13

Для получения однотонового АМ-сигнала используется НЭ с харак-

теристикой $I(U) = 0.5U + 0.1U^2$. На вход цепи воздействует переменное напряжение $U(t) = 3 \cos \omega_0 t + 4 \cos \Omega t$ ($\Omega \ll \omega_0$). Рассчитать мощности входных сигналов, а также мощности всех гармоник тока НЭ, развиваемые на постоянном резисторе $R = 1$ Ом. Сопоставить мощности колебаний с комбинационными и удвоенными частотами.

Задача 1.3.14

Для получения однотонового АМ-сигнала используется НЭ с характеристикой $I(U) = 0.5U + 0.1U^2 + 0.01U^3$. На вход цепи воздействует переменное напряжение $U(t) = 3 \cos \omega_0 t + 4 \cos \Omega t$ ($\Omega \ll \omega_0$). Определить амплитуды всех гармоник тока НЭ, рассчитать коэффициент амплитудной модуляции m и коэффициент нелинейных искажений $k_{нл}$ в виде отношения амплитуд гармоник с частотами $\omega_0 \pm 2\Omega$ и $\omega_0 \pm \Omega$. Показать, что при модулирующем сигнале, содержащем только два гармонических колебания с частотами Ω и 2Ω , выделить АМ-сигнал невозможно.

Задача 1.3.15

Для получения однотонового АМ-сигнала на вход полевого транзистора со стоково-затворной характеристикой $I_{СТ} = S(U_{отс} - U_{ЗИ})^2$ включены два последовательно соединенных генератора гармонических сигналов $U_1(t) = U_{1m} \cos 2\pi f_1 t$ и $U_2(t) = U_{2m} \cos 2\pi f_2 t$, а в цепь стока ПТ включен полосовой фильтр. Определить коэффициент амплитудной модуляции получаемого колебания, если $U_{1m} = 2$ В, $f_1 = 159.15$ кГц, $U_{2m} = 0.9$ В, $f_2 = 1.5915$ кГц, $S = 20$ мА/В, $U_{отс} = -6$ В, в цепи затвора ПТ создано автоматическое смещение $U_0 = -3$ В, полоса пропускания фильтра 7 кГц. Как изменится коэффициент модуляции, если полосовой фильтр заменить одиночным контуром с добротностью $Q = 50$, настроенным на несущую частоту АМ-колебания?

Методическое указание: представить характеристику ПТ степенным многочленом, а в качестве $U_{вх}$ использовать $U(t) + U_0$.

Задача 1.3.16

Объясните, как получить однотоновое АМ-колебание, используя нелинейный элемент с кусочно-линейной характеристикой и сумму двух гармонических колебаний с частотами ω_0 и Ω , ($\Omega \ll \omega_0$). Изобразите диаграммы токов и напряжений.

Задача 1.3.17

На вход квадратичного детектора с характеристикой $I = \alpha U + \beta U^2$ поступает однотоновое АМ-колебание $U(t) = U_m(1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_0 t$. Определить амплитуды гармоник выходного сигнала с частотами 2Ω и Ω и рассчитать коэффициент частотных искажений как отношение амплитуд гармоник с частотами 2Ω и Ω .

Методическое указание: представить АМ-колебание суммой трех гармонических составляющих.

Задача 1.3.18

Объяснить, не производя математических выкладок, почему детектирование АМ-колебаний с подавленной несущей не создает, а детектирова-

ние АМ-колебания с одной боковой полосой создает колебания звуковых частот.

Задача 1.3.19

Объяснить, не производя математических выкладок, почему при квадратичном детектировании АМ-колебаний с одной боковой полосой нелинейные искажения отсутствуют.

Задача 1.3.20

Проводимость $G(t)$ резистивного параметрического элемента представлена вещественным рядом Фурье и при периодическом управлении с частотой $f_{\text{упр}} = 16$ кГц описывается следующими коэффициентами ряда: $g_0 = 5$ мСм, $g_1 = 20$ мСм, $g_2 = 1$ мСм, $g_3 = 0.3$ мСм. Определить частоты и амплитуды гармоник тока $I(t)$ параметрического элемента при гармоническом воздействии $U(t) = U_m \cos 2\pi f_0 t$ ($U_m = 4$ В, $f_0 = 2$ кГц). Будет ли функция $I(t)$ периодической?

Задача 1.3.21

Бигармонический сигнал $U(t) = U_{m1} \cos 2\pi f_1 t + U_{m2} \cos 2\pi f_2 t$ с параметрами $U_{m1} = 2$ В, $f_1 = 1$ кГц, $U_{m2} = 7$ В, $f_2 = 3$ кГц воздействует на рассмотренный в задаче 1.3.20 резистивный параметрический элемент. Определить частоты и амплитуды гармоник тока $I(t)$ параметрического элемента.

Задача 1.3.22

Рассмотренный в задаче 1.3.20 резистивный параметрический элемент используется в качестве синхронного детектора АМ-сигналов $U(t) = U_m(1 + mF(t)) \cos 2\pi f_0 t$, где $U_m = 2$ В, $f_0 = 200$ кГц, m и $F(t)$ произвольны. Какую частоту может иметь источник управляющего сигнала и какова амплитуда выпрямленного напряжения звуковых частот $U_{\text{н}\sim}$ на сопротивлении нагрузки $R_{\text{н}} = 10$ Ом?

Задача 1.3.23

Выбрать схемы включения ОУ и рассчитать сопротивления резисторов R_β , обеспечивающие усиление сигнала по амплитуде в 120 и -120 раз при условии, что $R_1 = 10$ кОм.

Задача 1.3.24

В схеме измерительного усилителя (см. рис. 1.28) заданы сопротивления $R_1 = R'_1 = R_\beta = R_0 = 100$ кОм, $R_2 = R_4 = 40$ кОм. Определить значение R_3 , позволяющее реализовать коэффициент усиления 40.

Задача 1.3.25

Рассчитать эквивалентную индуктивность гиратора (см. рис. 1.29, а) при следующих параметрах схемы: $\dot{Z}_1 = \dot{Z}_2 = \dot{Z}_3 = \dot{Z}_5 = R = 20$ кОм, $C_1 = C_2 = 100$ пФ и определить резонансную частоту $f_{\text{рез}}$ параллельного колебательного контура (рис. 1.29, б). Как будет изменяться резонансная частота контура при изменении R_2 от 10 до 20 кОм?

Задача 1.3.26

В автогенераторе (см. рис. 1.30) колебательный контур, настроенный на частоту $f_{\text{рез}} = 159.15$ кГц, содержит индуктивность $L = 10$ мкГ и обладает сопротивлением потерь $R = 8$ Ом. Дифференциальная крутизна характеристики транзистора $S_{\text{диф}} = 2$ мА/В. При какой величине коэффициента взаимной индукции M возникает самовозбуждение автогенератора?

Задача 1.3.27

Средняя крутизна транзистора в автогенераторе с трансформаторной связью (см. рис. 1.30) $S_0 = 10$ мА/В. Колебательный контур автогенератора обладает следующими параметрами: резонансная частота $f_0 = 1.59$ МГц, $L = 10$ мкГ, $Q = 50$. Определить величину взаимной индукции $M_{\text{кр}}$, при которой в данной системе возникнут автоколебания. Как изменится эквивалентная добротность и показатель затухания контура α при $M = M_{\text{кр}}/2$?

Задача 1.3.28

Средняя крутизна транзистора в автогенераторе с трансформаторной связью (см. рис. 1.30) описывается выражением $S(U) = S_0 + S_1 U^2$, где $S_0 = 10$ мА/В, $S_1 = -3$ мА/В³. Колебательный контур обладает следующими параметрами: резонансная частота $f_0 = 1.59$ МГц, $L = 10$ мкГ, $Q = 50$. Определить режим колебаний в системе, условия возникновения стационарных автоколебаний и их амплитуду $U_{\text{ст}}$ при двух произвольно выбранных значениях коэффициента взаимной индукции M .

Задача 1.3.29

В радиоэлектронной системе, рассмотренной в задаче 1.3.28, средняя крутизна транзистора описывается выражением $S(U) = S_0 + S_1 U^2 + S_2 U^4$, где $S_0 = 0.4$ мА/В, $S_1 = 1$ мА/В³, $S_2 = -0.1$ мА/В⁵. Колебательный контур генератора обладает следующими параметрами: резонансная частота $f_0 = 1.59$ МГц, $L = 10$ мкГ, $Q = 50$, $M = 1$ мкГ. Определить режим колебаний в системе (мягкий или жесткий), условия возникновения стационарных автоколебаний и их амплитуду $U_{\text{ст}}$.

Задача 1.3.30

Современные RC -генераторы звуковых колебаний синусоидальной формы используют в качестве частотно-избирательной последовательно-параллельную цепь Вина (см. рис. 1.31, а). Показать, что коэффициент передачи цепи Вина описывается уравнением, аналогичным уравнению резонансной кривой колебательного контура:

$$I_m = I_{\text{max}} / \sqrt{1 + (\omega L / R - 1 / \omega C R)^2}.$$

Задача 1.3.31

Рассчитать RC -генератор квазигармонических колебаний на частоту $f_0 = 15.9$ кГц, считая емкости в цепи Вина одинаковыми $C_1 = C_2 = 1$ нФ.

Задача 1.3.32

На управляемую емкость $C(t) = 20 + 8 \cos(10^2 t + \pi/4) + 4 \cos 5 \cdot 10^2 t$ (мкФ)

воздействует переменное напряжение $U(t) = 3 \sin 5 \cdot 10^3 t$ (В). Получить аналитическое выражение для тока $I(t)$, протекающего через емкость.

Задача 1.3.33

Параметрический колебательный контур обладает следующими параметрами: $L = 100$ мкГ, $R = 20$ Ом. Емкость контура изменяется во времени по закону $C(t) = 100 + 2 \cos 2 \cdot 10^7 t$ (пФ). Определить величину отрицательного сопротивления $R_{\text{вн}}$, вносимого из-за параметрического изменения емкости, и добротность контура Q .

Задача 1.3.34

Параметрический колебательный контур обладает следующими параметрами: $L = 200$ мкГ, средняя емкость $C_0 = 200$ пФ, $R = 20$ Ом. Емкость контура изменяется скачкообразно относительно C_0 . Определить частоту f_y и пределы изменения емкости ΔC , глубину модуляции m , при которых эквивалентная добротность возрастет до 250.

Задача 1.3.35

Емкость $C(t) = 200 + 4 \cos 10^6 t$ (пФ), управляемая переменным напряжением, включена в последовательный колебательный контур. При каких значениях индуктивности L и добротности Q в контуре произойдет параметрическое возбуждение колебаний? Является ли данное решение единственным?

Задача 1.3.36

Одноконтурный параметрический усилитель предназначен для усиления колебаний с частотой $f_0 = 15.9$ МГц. Усилитель содержит катушку с индуктивностью $L = 0.5$ мкГ и параметрический конденсатор $C(t) = C_0 + \Delta C \cdot F(t)$. Определить частоту изменения емкости параметрического конденсатора f_y и пределы изменения емкости ΔC , обеспечивающие усиление сигнала по мощности в 100 раз (20 дБ).

1.3.3. Примеры решения задач

Задача 1.3.5

Подставим в уравнения четырехполюсника $I_1(t)$ и $I_2(t)$ и сохраняя только линейные переменные слагаемые, получим

$$U_{1\sim} = 2I_{1\sim} + I_{1\sim} + 2I_{2\sim} + 4I_{1\sim} + 2I_{2\sim} = 7I_{1\sim} + 4I_{2\sim},$$

$$U_{2\sim} = -I_{1\sim} + I_{2\sim} + 8I_{1\sim} + 4I_{2\sim} = 7I_{1\sim} + 5I_{2\sim}.$$

Матрица сопротивлений несимметрична, следовательно, четырехполюсник необратимый.

Задача 1.3.12

Чтобы амплитуда четвертой гармоники тока оказалась наибольшей, угол

отсечки тока должен составлять $\vartheta = 120^\circ/n = 30^\circ$. При этом

$$I_{m4} = \frac{2SU_m \sin n\vartheta \cos \vartheta - n \cos n\vartheta \sin \vartheta}{\pi n(n^2 - 1)} = 1.91U_m \frac{-(0.866)^2 + 4 \cdot 0.5^2}{4 \cdot 15} =$$

$= 0.00796U_m$. Отсюда $U_m = I_{m4}/0.00796 = 20 \cdot 10^{-3}/0.00786 = 2.5$ В. Теперь можно определить напряжение смещения U_0 . Поскольку $\cos \vartheta = (U_{\text{отс}} - U_0)/U_m = 0.5$, имеем $U_0 = U_{\text{отс}} - 0.5U_m = 3.75$ В.

Задача 1.3.28

Средняя крутизна характеристики транзистора описывается многочленом второй степени. Поэтому режим в данной системе может быть либо регенеративным, когда M меньше некоторого критического значения $M_{\text{кр}}$, либо автоколебательным с мягким возбуждением при $M > M_{\text{кр}}$.

Начнем с определения резистивного сопротивления контура:

$R = \omega_0 L/Q = 10^7 10^{-5}/50 = 2$ Ома. Критическое значение самоиндукции определим из условия $R/L - MS_0/LC = R/L - MS_0\omega_0^2 = 0$. Отсюда $M_{\text{кр}} = R/(LS_0\omega_0^2) = 1/QS_0\omega_0 = 10^{-7}/0.5 = 0.2$ мкГ.

Выберем $M_1 = 1$ мкГ и $M_2 = 2$ мкГ. Условие поддержания стационарных колебаний получим из уравнения (1.54) в виде

$$R/L - M\omega_0^2(S_0 + S_1 U^2) = 0, \quad \text{или} \quad U^2 = -\frac{R/L - M\omega_0^2 S_0}{QM\omega_0^2 S_1} = -\frac{1}{QM\omega_0 S_1} \frac{S_0}{S_1}.$$

При $M_1 = 1$ мкГ получим $U_1 = 1.63$ В, при $M_2 = 2$ мкГ $U_2 = 1.73$ В.

Задача 1.3.35

Управляемая емкость изменяется с частотой $\omega_y = 10^6$ рад/с. Коэффициент модуляции емкости $m = 4/200 = 0.02$, а добротность контура при синусоидальном управлении $Q = 2/m_{\text{кр}} = 100$. Параметрический контур можно настроить на любую частоту, так как период управления должен быть кратным полупериоду колебаний в контуре. Когда $\omega_y = 2\omega_0$ ($f_0 = 79$ кГц) индуктивность контура $L = 20$ мГ, а сопротивление потерь $R = 100$ Ом. При другой частоте контура будет другое сопротивление потерь.

1.4 Ответы к задачам

Раздел 1.1

$$1.1.1 \quad x(t) = 2At/T \text{ при } -T/2 \leq t \leq T/2, \quad \dot{C}_k = -\frac{2A}{-jk\pi} \cos k\pi, \\ x(t) = -\frac{A}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\cos k\pi}{jk} e^{j2\pi kt/T} = -\frac{2A}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\pi}{k} \sin k \frac{2\pi}{T} t.$$

$$1.1.2 \quad x(t) = 2At/T \text{ при } 0 \leq t \leq T, \quad \dot{C}_k = -\frac{A}{-jk\pi}, \\ x(t) = -\frac{A}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{j2\pi kt/T}}{jk} = A - \frac{2A}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi kt/T}{k}.$$

$$1.1.3 \quad x(t) = A(1 - 2|t|/T) \text{ при } -T/2 \leq t \leq T/2, \\ C_0 = \frac{A}{2}, \quad C_k = \frac{A}{\pi^2 k^2} (1 - \cos \pi k) = \frac{2A}{\pi^2 k^2} \sin^2 \pi k/2, \\ x(t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \pi k/2}{k^2} e^{j2\pi kt/T} = \frac{A}{2} + \frac{4A}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \pi k/2}{k^2} \cos \frac{2\pi}{T} kt.$$

$$1.1.4 \quad x(t) = A(1 - 2|t|/\tau) \text{ при } -\tau/2 \leq t \leq \tau/2, \\ C_0 = \frac{U}{2} \frac{\tau}{T}, \quad C_k = \frac{U}{\pi^2 k^2} (1 - \cos \pi k \frac{\tau}{T}) = \frac{2U}{\pi^2 k^2} \sin^2 \pi k \frac{\tau}{2T}, \\ x(t) = \frac{U\tau}{2T} + \frac{2U}{\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \pi k \tau/2T}{k^2 \tau/T} e^{j2\pi kt/T} = \frac{U\tau}{2T} + \frac{4U}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \pi k \tau/2T}{k^2 \tau/T} \cos \frac{2\pi}{T} kt.$$

$$1.1.5 \quad C_0 = \frac{2\tau}{\pi T}, \quad C_k = \frac{2\tau}{\pi T} \frac{\cos \pi k \tau}{1 - 4k^2 \tau^2/T^2}, \\ x(t) = \frac{2\tau}{\pi T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\cos \pi k \tau}{1 - 4k^2 \tau^2/T^2} e^{j2\pi kt/T} = \frac{2\tau}{\pi T} + \frac{4\tau}{\pi T} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \pi k \tau}{1 - 4k^2 \tau^2/T^2} \cos \frac{2\pi}{T} kt.$$

$$1.1.6 \quad \dot{S}(\omega) = 2\pi\tau \frac{\cos \omega\tau/2}{\pi^2 - \omega^2 \tau^2}.$$

$$1.1.7 \quad \dot{S}_1(\omega) = U\tau \frac{\sin \omega\tau/2}{\omega\tau/2} = 10^{-5} \frac{\sin 5\pi f}{5\pi f}, \quad \text{где } f \text{ в МГц}, \\ \dot{S}_2(\omega) = U\tau \frac{\sin \omega\tau/2}{\omega\tau/2} e^{-j\omega\tau/2} = 10^{-5} \frac{\sin 5\pi f}{5\pi f} e^{-5\pi f}.$$

$$1.1.8 \quad \dot{S}(\omega) = \dot{S}_1(\omega) (1 + e^{-j\omega T} + e^{-j2\omega T} + \dots + e^{-j(N-1)\omega T}) = \\ = \dot{S}_1(\omega) e^{-j(N-1)\omega T/2} \frac{\sin N\omega T/2}{\sin \omega T/2}.$$

$$1.1.9 \quad \dot{S}(\omega) = \dot{S}_1(\omega) (1 + e^{-j\omega T}) = 2\dot{S}_1(\omega) e^{-j\omega T/2} \cos \frac{\omega T}{2}.$$

$$1.1.10 \quad \dot{S}(\omega) = \dot{S}_1(\omega) (1 + e^{-j\omega T} + e^{-j2\omega T} + e^{-j3\omega T}) = 4\dot{S}_1(\omega) e^{-j3\omega T/2} \cos \omega T \cos \frac{\omega T}{2}.$$

$$1.1.11 \quad \dot{S}(j\omega) = \frac{E}{\alpha + j\omega}, \quad |\dot{S}(\omega)| = \frac{E}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}, \quad \phi = -\arctg \frac{\omega}{\alpha}, \quad \dot{S}(j\omega) = \frac{E}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} e^{-j\arctg \frac{\omega}{\alpha}}, \\ S^2(\omega) = \frac{E^2}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

$$1.1.12 \quad C_0 = \frac{3E\tau}{2T}, \quad C_k = \frac{2E}{k\pi} \cos \frac{\pi k \tau}{4T} \sin \frac{3\pi k \tau}{4T}.$$

$$1.1.14 \quad F_1(s) = \frac{1}{s + \alpha}, \quad F_2(s) = \frac{1}{s \mp j\omega}, \quad F_3(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}.$$

$$1.1.15 \quad F_1(s) = \frac{s}{s^2 - \alpha^2} \quad \operatorname{Re}|s| > \alpha, \quad F_2(s) = \frac{\alpha}{s(s + \alpha)}.$$

$$1.1.16 \quad F(s) = t[\sigma(t) - \sigma(t - 1)] + \sigma(t - 1) - \sigma(t - 5).$$

$$1.1.17 \quad f(t) = \sigma(t) - \sigma(t - \tau), \quad F(s) = \frac{1}{s}(1 - e^{-s\tau}).$$

1.1.18 АМ-колебание с бигармоническим модулирующим сигналом $x(t) = 20[1 + 0.4\cos(2\pi 10^3 t + 0.8) + 0.3\cos(4\pi 10^3 t + 0.6)] \cos(2\pi 10^5 t + 1.2)$. Несущее колебание имеет частоту 100 кГц, модулирующий сигнал содержит гармоники с частотами 1 и 2 кГц.

1.1.19 АМ-колебание $x(t) = (1 + 0.5\cos 24\pi 10^3 t)(10\cos 2\pi 10^5 t + 16\cos 4\pi 10^5 t)$ в виде бигармонического сигнала с частотами 100 и 200 кГц, промодулированного гармоническим колебанием с частотой 12 кГц.

$$1.1.20 \quad x(t) = 10\cos(4\pi 10^8 t + 10\cos 4\pi 10^4 t), \quad f_{\min} = 99.8 \text{ МГц}, \\ f_{\max} = 100.2 \text{ МГц}.$$

1.1.21 АМ-колебание с бигармоническим модулирующим сигналом $x(t) = 100[1 + 0.4\cos \pi 10^4 t + 0.8\cos(16\pi 10^3 t + 0.2)] \cos(2\pi 10^5 t + 1.57)$. Несущее колебание имеет частоту 100 кГц, модулирующий сигнал содержит гармоники с частотами 5 и 8 кГц.

1.1.22 Всего 45 радиостанций.

$$1.1.23 \quad x_{\text{AM}}(t) = \frac{2U}{\pi^2}(1 + M \sin 2\pi Ft) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(2n-1)\pi/2}{(2n-1)^2} \cos 2\pi(2n-1)ft.$$

$$1.1.24 \quad x_{\text{AM}}(t) = \frac{2U}{\pi^2} \left(1 + M \frac{2}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(2m-1)\pi/2}{2m-1} \sin 2\pi(2m-1)Ft \right) \times \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(2n-1)\pi/2}{(2n-1)^2} \cos 2\pi(2n-1)ft.$$

$$1.1.25 \quad x_{\text{AM}}(t) = \frac{2U}{\pi}(1 + M \sin 2\pi Ft) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(2m-1)\pi/2}{2m-1} \sin 2\pi(2m-1)ft.$$

$$1.1.26 \quad x_{\text{AM}}(t) = \frac{2U}{\pi} \left(1 + M \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(2m-1)\pi/2}{2m-1} \sin 2\pi(2m-1)Ft \right) \times \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\pi/2}{(2n-1)^2} \cos 2\pi(2n-1)ft.$$

$$1.1.27 \quad \Delta\Psi = 5\pi \cdot 10^7 \text{ рад}, \quad \beta = 4.$$

$$1.1.28 \quad \Delta\Psi = 510 \cdot 10^6 \text{ рад}, \quad x_{\text{УМ}}(t) = A \cos 10^7(100t + 51 \cos 2 \cdot 10^4 t).$$

$$1.1.29 \quad \omega(t) = 10^9 + 51 \cdot 10^7 \cos 2 \cdot 10^4 t \text{ рад/с}, \quad \omega_{\max} = 1.51 \cdot 10^9, \quad \omega_{\min} = 0.49 \cdot 10^9 \text{ рад/с}.$$

$$1.1.30 \quad \Delta\omega = 38 \text{ кГц}.$$

Раздел 1.2

$$1.2.1 \quad (Ls + R + \frac{1}{Cs})I(s) = \frac{E}{s^2 + \alpha^2}.$$

$$1.2.2 \quad (s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2)U(s) = E\sigma(t).$$

$$1.2.3 \left(s^3 + \frac{R}{L}s^2 + \frac{1}{LC}s + \frac{S}{LC^2}\right)U(s) = 0.$$

$$1.2.4 \text{ Цепь находится в равновесии при } I=0, U_1=U_2=E.$$

$$1.2.5 \dot{K}(j\omega) = \frac{R_2}{R_1+R_2+j\omega L}, \quad K(\omega) = \frac{R_2}{\sqrt{(R_1+R_2)^2+\omega^2 L^2}}, \quad \varphi(\omega) = -\arctg \frac{\omega L}{R_1+R_2}.$$

$$1.2.6 K(s) = \frac{R_2}{R_1+R_2+sL}, \quad h(t) = \frac{R_2}{R_1+R_2} e^{-(R_1+R_2)/L}, \quad g(t) = \frac{R_2}{R_1+R_2} (1 - e^{-(R_1+R_2)/L}).$$

$$1.2.7 \mathbf{A} = \begin{bmatrix} (\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2)/\dot{Z}_2 & \dot{Z}_1 \\ 1/\dot{Z}_2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1.5 + j0.5 & 100 + j100 \\ 0.005 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$1.2.8 \dot{K}(j\omega) = \frac{R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3 + \frac{R_1+R_2}{j\omega C}}, \quad K(\omega) = \frac{\omega R_3 C}{\sqrt{(1+\frac{R_1}{R_2})^2 + (1+\frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{R_3})^2 (\omega R_3 C)^2}},$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{1}{\omega C (R_3 + R_1 R_2 / (R_1 + R_2))}.$$

$$1.2.9 K(s) = \frac{R_3 C s}{(1 + \frac{R_1}{R_2} + R_3 C s)(1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{R_3})}, \quad h(t) = (1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{R_3}) e^{-t/[CR_3 + CR_1 R_2 / (R_1 + R_2)]},$$

$$g(t) = \frac{R_3 C}{1 + R_1 / R_2} e^{-t/[CR_3 + CR_1 R_2 / (R_1 + R_2)]}.$$

$$1.2.10 \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{R_1}{R_2} & R_1 + \frac{R_1+R_2}{j\omega C R_2} \\ \frac{1}{R_2} & 1 + \frac{1}{j\omega C R_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 200 - j600 \\ 0.01 & 1 - j2 \end{bmatrix}.$$

$$1.2.11 A_{11} = A_{22} = \sqrt{Z_{xx}/(Z_{xx} - Z_{k3})}, \quad A_{12} = Z_{k3} \sqrt{Z_{xx}/(Z_{xx} - Z_{k3})},$$

$$A_{21} = \sqrt{Z_{xx}/(Z_{xx} - Z_{k3})}/Z_{xx}.$$

$$1.2.12 U_R(t) = E [e^{-t/RC} \sigma(t) - e^{-(t-t_n)/RC} \sigma(t - t_n)],$$

$$U_C(t) = E [(1 - e^{-t/RC}) \sigma(t) - (1 - e^{-(t-t_n)/RC}) \sigma(t - t_n)].$$

$$1.2.13 U_L(t) = E [e^{-tR/L} \sigma(t) - e^{-(t-t_n)R/L} \sigma(t - t_n)],$$

$$U_R(t) = E [(1 - e^{-tR/L}) \sigma(t) - (1 - e^{-(t-t_n)R/L}) \sigma(t - t_n)].$$

$$1.2.14 R > 2\sqrt{L/C} = 500 \text{ Ом}.$$

$$1.2.15 C = 0.912 \text{ нФ}.$$

$$1.2.16 2\Delta f = 5.31 \text{ кГц}.$$

$$1.2.17 B \text{ 400 раз}.$$

$$1.2.18 \text{ При } \nu = 1/Q \quad R_{\text{эКВ}} = 50 \text{ кОм}, \quad X_{\text{эКВ}} = -50 \text{ кОм},$$

$$\text{при } \nu = 2/Q \quad R_{\text{эКВ}} = 20 \text{ кОм}, \quad X_{\text{эКВ}} = -40 \text{ кОм}.$$

$$1.2.19 \text{ Средняя мощность } P = 8 \text{ Вт}.$$

$$1.2.20 L = 9.1 \text{ мкГ}, \quad C = 56.8 \text{ пФ}, \quad R = 4 \text{ Ом}.$$

$$1.2.21 \text{ Добротность уменьшится в 5 раз}.$$

1.2.22 $L = 5 \text{ мГ}, C = 20 \text{ нФ}, G = 20 \text{ мкСм}.$

1.2.23 Полоса пропускания не изменится.

1.2.24 Отношение мощностей $P_1/P_2 = 10/9.$

1.2.25 $L = 13.3 \text{ мГ}, C = 75 \text{ пФ}, R = 10 \text{ Ом}.$

1.2.26 $Q = 20, R = 39.8 \text{ Ом}.$

1.2.27 $Q = 25, m_{\text{вых}} = 70\%.$

1.2.28 $\rho = 1 \text{ кОм}, Q = 166, u_C = 10 \text{ В}.$

1.2.29 $Q = 50.$

1.2.30 $L_1 = 313 \text{ мкГ}, L_2 = 276 \text{ мкГ}, R_{\text{экв}} = 25.38 \text{ Ом}, X_{\text{экв}} = -197.7 \text{ Ом}.$

1.2.31 $f_1 = 2.265 \text{ МГц}, f_2 = 1.81 \text{ МГц}.$

1.2.32 $f_1 = 1.39 \text{ МГц}, f_2 = 0.945 \text{ МГц}.$

1.2.33 $I_{2m} = 2.5 \text{ А}.$

1.2.34 Индивидуальный резонанс. Полный резонанс при $R_1 = 16.2 \text{ Ом}.$

1.2.35 $R_{\text{экв}} = 33 \text{ Ом}, X_{\text{экв}} = 29.52 \text{ Ом}.$

1.2.36 $f_{01} = 23 \text{ кГц}, f_{02} = 21.7 \text{ кГц}.$

1.2.37 $\rho_1 = 66.7 \text{ Ом}, Q_1 = 2.2, \rho_2 = 79 \text{ Ом}, Q_2 = 3.95.$

1.2.38 $G_1 = 1.14 \text{ мкСм}, G_2 = 0.86 \text{ мкСм}, g_1 = g_2 = 10.7 \text{ мСм},$
 $f_{01} = f_{02} = 70 \text{ кГц}, Q_1 = 85, Q_2 = 113.3, k = 2.5\%.$

1.2.39 $k = 0.267, f_1 = 3.375 \text{ МГц}, f_2 = 4.44 \text{ МГц}.$

1.2.40 $\rho_1 = 866 \text{ Ом}, Q_1 = 39.36, \rho_2 = 816 \text{ Ом}, Q_2 = 35.48.$

1.2.41 $f_{\text{рез}} = 125 \text{ кГц}.$

1.2.42 $M = 80 \text{ мкГ}.$

1.2.43 $Q = 70.7.$

1.2.44 $I_{1m} = 0.283 \text{ А}.$

1.2.45 $U_{Cm} = 100 \text{ мВ}.$

1.2.46 $G_{\text{вн}} = 5 \text{ мкСм}$, $B_{\text{вн}} = 0.1 \text{ мкСм}$, $U_{1m} = 0.8 \text{ В}$.

1.2.47 Фильтр нижних частот $L = 1.634 \text{ Г}$, $C = 9.804 \text{ нФ}$.

1.2.48 $L = 31.8 \text{ мГ}$, $C = 31.8 \text{ нФ}$.

1.2.49 $f_{\text{ср}} = 500 \text{ Гц}$, $K = 1.26 \text{ кОм}$ $\dot{Z}^T = j3.56 \text{ кОм}$.

1.2.50 Фильтр верхних частот $f_{\text{ср}} = 148.5 \text{ Гц}$, $L = 1.489 \text{ Г}$, $C = 193 \text{ нФ}$.

1.2.51 $L = 795.8 \text{ мкГ}$, $C = 795.8 \text{ пФ}$.

1.2.52 $f_0 = 562.7 \text{ Гц}$, $f_1 = 233.1 \text{ Гц}$, $f_2 = 1358.5 \text{ Гц}$, $Z_0^T = 565.7 \text{ Ом}$.

1.2.53 $f_0 = 562.23 \text{ Гц}$, $L_1 = 318 \text{ мГ}$, $C_1 = 0.253 \text{ мкФ}$, $L_2 = 161 \text{ мГ}$, $C_2 = 0.5 \text{ мкФ}$.

1.2.54 $L_{\text{прод}} = 9.54 \text{ мГ}$, $L_{\text{попер}} = 16.96 \text{ мГ}$, $C_{\text{попер}} = 9.54 \text{ нФ}$.

1.2.55 $C_{\text{прод}} = 2652.7 \text{ нФ}$, $L_{\text{попер}} = 2652.7 \text{ мкГ}$, $C_{\text{попер}} = 1493.06 \text{ нФ}$.

1.2.56 $\alpha = R/2\sqrt{LC} + G\sqrt{LC}/2 = 0.5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^{-1}$, $\beta = \omega\sqrt{LC} = 0.1 \text{ рад/м}$.

1.2.57 КПД = 92%, $P_{\text{вх}} = 2.17 \text{ кВт}$, $P_{\text{пот}} = 170 \text{ Вт}$, $U_{1m} = 466 \text{ В}$, $I_{1m} = 9.3 \text{ А}$, $U_{2m} = 447 \text{ В}$, $I_{2m} = 8.95 \text{ А}$.

1.2.58 $R_0 = 51 \text{ Ом}$, $v_{\text{ф}} = 2.7 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ $\beta = 3.7 \cdot 10^{-4} \text{ м}^{-1}$, $U_{2m} = 10.17 \text{ В}$.

1.2.59 $I_{2m} = 1.087 \text{ А}$, $I_{1m} = 1.07 \text{ А}$.

1.2.60 КПД = 50%.

1.2.61 Индуктивное сопротивление 116.8 Ом.

1.2.62 $L = 0.75 \text{ мкГ/м}$, $C = 133.3 \text{ пФ/м}$.

1.2.63 $R_0 = 75.07 \text{ Ом}$, $\ell = 0.6 + 1.5n \text{ м}$.

1.2.64 $\ell_L = 7.2 \text{ мм}$, $\ell_C = 1.35 \text{ см}$.

1.2.65 $\ell = 0.972 \text{ м}$.

1.2.66 $L = 17 \text{ нГ}$.

1.2.67 $U_{1m} = 40 \text{ В}$, $I_{1m} = 0.346 \text{ А}$, $\dot{Z}_{\text{вх}} = j115.5 \text{ Ом}$.

1.2.68 $U_m = 1.4 \text{ В}$, $I_m = 18.8 \text{ мА}$.

1.2.69 $\dot{Z}_{\text{вх}} = j360 \text{ Ом}$.

$$1.2.70 \quad \dot{Z}_{\text{BX}} = 200 - j100 \text{ Ом}.$$

$$1.2.71 \quad \Gamma_U = 0.5, \quad s = 3, \quad U_{\min} = 50 \text{ В}, \quad U_{\max} = 150 \text{ В}.$$

$$1.2.72 \quad \text{Пучность на конце при } R_{\text{н}} = 166 \text{ Ом, узел - при } R_{\text{н}} = 60 \text{ Ом}.$$

$$1.2.73 \quad R_{03} = 200 \text{ Ом}, \quad R_{02} = 100 \text{ Ом}, \quad R_{01} = 66.7 \text{ Ом}.$$

$$1.2.74 \quad \Gamma_{U1} = 0.14, \quad s_1 = 1.33, \quad \Gamma_{U2} = -0.33, \quad s_2 = 2, \quad R_{\text{BX}} = 133 \text{ Ом}.$$

$$1.2.75 \quad \dot{Z}_{\text{BX}} = j100 \text{ Ом}.$$

$$1.2.76 \quad I_{1m} = 0.663 \text{ А}, \quad U_{Cm} = 175.86 \text{ В}, \quad I_{Cm} = 0.377 \text{ А}.$$

$$1.2.77 \quad \ell = \lambda/4 = 25 \text{ см}, \quad R_0^{\text{TP}} = 316 \text{ Ом}.$$

$$1.2.78 \quad \ell_1 = 5.28 \text{ см}, \quad R_{01}^{\text{TP}} = 74.65 \text{ Ом}, \quad \ell_2 = 20.28 \text{ см}, \quad R_{02}^{\text{TP}} = 27.6 \text{ Ом}.$$

$$1.2.79 \quad \dot{Z}_{\text{BX}2} = 80 - j60 \text{ Ом}, \quad s_2 = 5, \quad \dot{Z}_{\text{BX}3} = 205.7 \text{ Ом}, \quad s_3 = 1.7, \\ \dot{Z}_{\text{BX}1} = 63.9 - j29.8 \text{ Ом}, \quad s_1 = 1.56.$$

$$1.2.80 \quad \ell_1 = 93,75 \text{ см}, \quad \ell_2 = 13.2 \text{ см}.$$

$$1.2.81 \quad \ell = 1.598 \text{ м}, \quad R_0^{\text{TP}} = 30.9 \text{ Ом}.$$

$$1.2.82 \quad U(t) = 50\sigma(t) - 12.5\sigma(t - 2t_0), \quad I(t) = 0.5\sigma(t) + 0.125\sigma(t - 2t_0).$$

$$1.2.83 \quad U(t) = 55\sigma(t) + 5\sigma(t - \ell_1/v_1), \quad I(t) = 1.1\sigma(t) - 0.1\sigma(t - \ell_1/v_1), \\ U_2 = U_3 = 60 \text{ В}, \quad I_1 = 1 \text{ А}, \quad I_2 = 0.6 \text{ А}, \quad I_3 = 0.4 \text{ А}.$$

$$1.2.84 \quad U(t, \ell/4) = 50\sigma(t - 0.25t_0) - 50[1 - e^{-2 \cdot 10^6(t - 0.75t_0)}]\sigma(t - 0.75t_0), \\ U(t, \ell) = 50\sigma(t - t_0) - 50[1 - e^{-2 \cdot 10^6(t - t_0)}]\sigma(t - t_0) = 50e^{-2 \cdot 10^6(t - t_0)}\sigma(t - t_0).$$

$$1.2.85 \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \text{ch} \gamma \ell & \dot{Z}_0 \text{sh} \gamma \ell \\ \frac{1}{\dot{Z}_0} \text{sh} \gamma \ell & \text{ch} \gamma \ell \end{bmatrix}.$$

$$1.2.86 \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{R_{01}}{R_{02}} \sin \beta \ell & j R_{02} \cos \beta \ell \\ j \frac{1}{R_{02}} \cos \beta \ell & \frac{R_{02}}{R_{01}} \sin \beta \ell \end{bmatrix}.$$

Раздел 1.3

$$1.3.1 \quad \text{Не может генерировать, так как мощность положительна.}$$

$$1.3.2 \quad \frac{dU}{dt} = \frac{dE}{dt} - \frac{1}{C}f(U), \quad \frac{dU_C}{dt} = \frac{1}{C}f(E - U_C).$$

$$1.3.3 \quad I_0 = 2U_0/\pi, \quad I_2 = 4U_0/3/\pi.$$

1.3.4 $I(t) = 2 \cos \omega t / (8 + \cos \omega t)$.

1.3.5 $U_{1\sim} = 7I_{1\sim} + 4I_{2\sim}$, $U_{2\sim} = 7I_{1\sim} + 5I_{2\sim}$. Четырехполюсник необратимый.

1.3.6 $I(t) = 15(\cos \omega t - \cos 1.37)$ мА при $2\pi n - 1.37 \leq \omega t \leq 2\pi n + 1.37$, $\vartheta = 1.37$ рад.

1.3.7 $R = 20 \text{ Ом}$, $I_R = 0.1 + 0.15 \sin \omega t \text{ А}$, $I_C = -0.05 \sin \omega t - 21 \sin 3\omega t \text{ А}$.

1.3.8 $I_0 = 10.4 \text{ А}$, $I_1 = 22.2 \text{ А}$, $I_2 = 5.4 \text{ А}$, $I_3 = 5.4 \text{ А}$, $I_4 = 0$.

1.3.9 $I_{max} = 1.414 \text{ А}$.

1.3.10 $I(\omega t) = 2(\cos \omega t - \cos 1.318) + 6(\cos 2\omega t - \cos 1.487) \text{ В}$, $I(2k\pi) = 7 \text{ В}$, $I((2k-1)\pi) = 3 \text{ В}$.

1.3.11 $I_{CT}(U_{3И}) = 0.36 + 0.12U_{3И} + 0.01U_{3И}^2$, $a_0 = 0.36 \text{ А}$, $a_1 = 0.12 \text{ А/В}$, $a_2 = 10 \text{ мА/В}^2$.

1.3.12 $U_m = 2.5 \text{ В}$, $U_0 = 3.75 \text{ В}$.

1.3.13 $P_{\text{вх}} = 4.5 \text{ Вт}$, $P_{2\text{вх}} = 8 \text{ Вт}$, $P_{\text{вых}}(\omega_0) = 2.25 \text{ Вт}$, $P_{\text{вых}}(\Omega) = 4 \text{ Вт}$, $P_{\text{вых}}(2\omega_0) = 0.101 \text{ Вт}$, $P_{\text{вых}}(2\Omega) = 0.32 \text{ Вт}$, $P_{\text{вых}}(\omega_0 \pm \Omega) = 0.72 \text{ Вт}$.

1.3.14 $I(t) = 1.25 + 3.02 \cos \Omega t + 0.8 \cos 2\Omega t + 0.16 \cos 3\Omega t + 0.36 \cos(\omega_0 - 2\Omega)t +$
 $+ 1.2 \cos(\omega_0 - \Omega)t + 2.42 \cos \omega_0 t + 1.2 \cos(\omega_0 + \Omega)t + 0.36 \cos(\omega_0 + 2\Omega)t +$
 $+ 0.27 \cos(2\omega_0 - \Omega)t + 0.45 \cos 2\omega_0 t + 0.27 \cos(2\omega_0 + \Omega)t + 0.0675 \cos 3\omega_0 t$.
 $m = 99\%$, $k_{\text{нл}} = 30\%$

1.3.15 $m = 0.33$, $m_1 = m / \sqrt{1 + Q^2 4\Omega^2 / \omega_0^2} = 0.236$.

1.3.16 Периодически изменяется угол отсечки напряжения.

1.3.17 $I_1 = \beta m U_m^2 \cos \Omega t$, $I_2 = \frac{\beta m^2}{4} U_m^2 \cos 2\Omega t$, $k_{\text{нл}} = m/4$.

1.3.18 Комбинационные частоты от АМ-колебаний с подавленной несущей содержат только удвоенные частоты звуковых колебаний.

1.3.19 Колебания с удвоенными частотами звуковых колебаний возникают при смещении гармоник верхней и нижней боковых полос.

1.3.20 Частоты гармоник: 2, 14, 18, 30, 34, 46 и 50 кГц. Амплитуды гармоник соответственно: 10, 40, 40, 2, 2, 0.6, 0.6 мА.

1.3.21 Частоты гармоник: 1, 3, 13, 15, 17, 19, 29, 31, 33, 35, 45, 47, 49 и 51 кГц. Амплитуды гармоник соответственно: 5, 17.5, 70, 20, 20, 70, 3.5, 1.0, 1.0, 3.5, 1.05, 0.3, 0.3, 1.05 мА.

1.3.22 Частота управляющего сигнала $f_{\text{упр}} = f_0/n$, ($n=1, 2, 3$).

При $f_{\text{упр}} = f_0$, $U_{\text{н}} = 0.2(1 + mF(t))$ В.

1.3.23 Усиление 120 достигается при неинвертирующем включении ОУ и $R_\beta = 1190$ кОм, а усиление -120 – при инвертирующем включении ОУ и $R_\beta = 1200$ кОм.

1.3.24 $R_3 = 20.5$ кОм.

1.3.25 $L = 40$ мкГ, $f_{\text{рез}} = 250$ кГц. Резонансная частота будет изменяться от 125 до 250 кГц.

1.3.26 $M = 400$ мкГ.

1.3.27 $M_{\text{кр}} = 0.2$ мкГ. При $M = M_{\text{кр}}/2$ добротность возрастает, а α уменьшается вдвое.

1.3.28 $M_{\text{кр}} = 0.2$ мкГ. При $M_1 = 1$ мкГ $U_1 = 1.63$ В, при $M_2 = 2$ мкГ $U_2 = 1.73$ В.

1.3.29 Жесткий режим колебаний. $U_1 = 1.41$ В – неустойчива, $U_2 = 2.83$ В – устойчива.

1.3.30 $|U_2/U_1| = 1/\sqrt{3^2 + (\omega CR - 1/\omega CR)^2}$.

1.3.31 $R_1 = R_2 = 10$ кОм, $R_0 = 10$ кОм, $R_\beta = 30$ кОм.

1.3.32 $3 \cos 5 \cdot 10^3 t + 0.588 \cos(49 \cdot 10^2 t - \pi/4) + 0.612 \cos(51 \cdot 10^2 t + \pi/4) + 0.27 \cos 45 \cdot 10^2 t + 0.33 \cos 55 \cdot 10^2 t$ мА.

1.3.33 $R_{\text{вн}} = 10$ Ом, $Q = 100$.

1.3.34 $f_y = 1.592$ МГц, $m = 0.025$, $\Delta C = 5$ пФ.

1.3.35 $m_{\text{кр}} = 0.02$. $Q = 100$. При $f_y = 79$ кГц, $L = 20$ мГ; при $f_y = 52$ кГц $L = 45$ мГ.

1.3.36 $f_y = 31.8$ МГц, $m_{\text{кр}} = 0.05$, $m = 0.045$, $\Delta C = 9$ пФ.

Список литературы

1. *Калинин В.И., Герштейн Г.М.* Введение в радиофизику: Учеб.пособие/ Под ред. В.И.Калинина. М.: Гостехиздат, 1957.
2. Основы радиофизики/ Г.В.Белокопытов, К.С.Ржевкин, А.А.Белов и др./Под ред. Ф.С.Логгинова М.: УРСС, 1966.
3. *Хохлов А.В.* Теоретические основы радиоэлектроники. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005.
4. *Нефедов В.И.* Основы радиоэлектроники. М.: Высш.шк., 2000.
5. *Баскаков С.И.* Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник. М.: Высш.шк., 2000.
6. *Хохлов А.В.* Нелинейные и параметрические радиотехнические цепи и системы с полупроводниковыми приборами: Учеб.пособие. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1994.
7. *Андреев В.С.* Теория нелинейных электрических цепей. М.: Связь, 1972.
8. *Хохлов А.В.* Полупроводниковые усилители и автогенераторы. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1997.
9. *Фолькенберри Л.* Применение операционных усилителей и линейных ИС/ Пер. с англ.;Под ред. М.В.Гальперина. М.: Мир, 1985.
10. *Хоровиц П., Хилл У.* Искусство схемотехники: В 2 т. М.: Мир, 1983.
11. Теоретические основы электротехники: В 3 т.: Учебник для вузов. 4-е изд./ К.С.Демирчян, Л.Р.Нейман, Н.В.Коровкин, В.Л.Чечерин. СПб.: Питер, 2003.
12. *Сиберт У.М.* Цепи, сигналы, системы: В 2 ч./Пер. с англ. М.: Мир, 1988.

Часть 2

ОСНОВЫ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ

Введение

Курс “Основы теории колебаний” читается студентам дневного отделения на физическом факультете и факультете нелинейных процессов, обучающимся по специальности 013800 “Радиофизика и электроника”. Целью курса является обучение студентов методам анализа нелинейных систем различной природы, описанию простейших базовых моделей теории нелинейных колебаний и основных нелинейных явлений, знакомство с основными идеями и понятиями нелинейной динамики, на которых базируется ряд спецкурсов указанной специальности.

В данной части учебного пособия задачи и упражнения сгруппированы в четыре раздела:

- 2.1. Состояния равновесия, устойчивость и бифуркации.
- 2.2. Динамика систем с дискретным временем.
- 2.3. Нелинейный осциллятор. Нелинейный резонанс.
- 2.4. Автоколебания. Синхронизация автоколебаний.

Каждый раздел начинается с краткого описания рассматриваемых явлений, базовых моделей и методов исследования. В конце этой части представлен список литературы [1–18], которая в той или иной мере была использована при составлении заданий и кратком изложении теории.

2.1 Состояния равновесия, устойчивость и бифуркации

2.1.1. Краткие теоретические сведения

Исследование поведения динамической системы можно свести к изучению поведения траекторий в фазовом пространстве. При фиксированных значениях управляющих параметров все возможные движения системы отображаются на фазовом портрете. *Фазовым портретом динамической системы называется структура разбиения фазового пространства на фазовые траектории.* Под структурой разбиения фазового пространства на траектории понимается геометрическая картина взаимного расположения траекторий в фазовом пространстве. Все возможные траектории разделяют на обыкновенные и особые. При построении фазового портрета основной задачей является поиск и исследование особых фазовых траекторий. К простейшим особым траекториям относятся:

1. *Особые точки, или точки равновесия*, которым соответствует состояние покоя динамической системы (значения динамических переменных остаются постоянными во времени).
2. *Изолированные замкнутые траектории, или предельные циклы*, которым соответствуют периодические колебания.
3. *Сепаратрисные кривые и поверхности (или устойчивые и неустойчивые многообразия седловых точек равновесия и предельных циклов)*, которые являются границами бассейнов притяжения устойчивых особых траекторий, например, устойчивых точек равновесия или устойчивых предельных циклов.

В данном разделе будут рассмотрены простейшие особые фазовые траектории, а именно, точки равновесия или состояния равновесия динамических систем, заданных обыкновенными дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= f_i(x_1, \dots, x_N), \\ i &= 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Состоянием равновесия динамической системы называется точка в фазовом пространстве, в которой вектор скорости равен нулю:

$$\left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \dots, \frac{dx_N}{dt} \right) = 0.$$

Из определения видно, что в состоянии равновесия отсутствует всякое движение. Для того чтобы найти координаты состояния равновесия, необходимо приравнять нулю правые части дифференциальных уравнений, описывающих динамическую систему.

Состояния равновесия могут быть устойчивыми и неустойчивыми. Если при малом отклонении начальных условий от состояния равновесия система возвращается к состоянию равновесия, то состояние устойчиво. Если при малом отклонении система уходит от состояния равновесия, то оно является неустойчивым. Метод определения устойчивости состояния равновесия основан на исследовании поведения линеаризованной системы в окрестности точки равновесия.

Проведем анализ состояний равновесия для простейших динамических систем с размерностью фазового пространства $N = 2$:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y).\end{aligned}\quad (2.1)$$

Предположим, что точка P с координатами $x = \bar{x}, y = \bar{y}$ является состоянием равновесия. Представим динамические переменные системы в окрестности этой точки в виде $x = \bar{x} + \tilde{x}$ и $y = \bar{y} + \tilde{y}$ (где $\tilde{x}, \tilde{y}$ – малые величины). Перепишем систему (2.1) в новых переменных, используя разложение в ряд Тейлора и ограничиваясь в разложении линейными слагаемыми,

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{x}}{dt} &= f(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x} \tilde{x} + \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y} \tilde{y}, \\ \frac{d\tilde{y}}{dt} &= g(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\partial g(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x} \tilde{x} + \frac{\partial g(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y} \tilde{y}.\end{aligned}$$

Поскольку $f(\bar{x}, \bar{y}) = 0, g(\bar{x}, \bar{y}) = 0$, линеаризованная в окрестности точки равновесия система примет следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{x}}{dt} &= A\tilde{x} + B\tilde{y}, \\ \frac{d\tilde{y}}{dt} &= C\tilde{x} + D\tilde{y},\end{aligned}\quad (2.2)$$

где $A = \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x}, B = \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y}, C = \frac{\partial g(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x}, D = \frac{\partial g(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y}$ – частные производные, вычисленные в точке равновесия.

Получена система двух линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, с помощью которой можно проанализировать характер состояний равновесия. Частное решение системы уравнений (2.2) ищется в виде

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= \gamma_1 \exp(\lambda t), \\ \tilde{y} &= \gamma_2 \exp(\lambda t).\end{aligned}\quad (2.3)$$

Общее решение системы линейных уравнений есть линейная комбинация частных решений. Подставляя (2.3) в (2.2), получим систему линейных уравнений

$$\begin{aligned}(A - \lambda) \gamma_1 + B \gamma_2 &= 0, \\ C \gamma_1 + (D - \lambda) \gamma_2 &= 0.\end{aligned}\quad (2.4)$$

Для того, чтобы система линейных однородных алгебраических уравнений (2.4) относительно неизвестных γ_1 и γ_2 имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы определитель ее был равен нулю

$$\det \begin{bmatrix} A - \lambda & B \\ C & D - \lambda \end{bmatrix} = 0. \quad (2.5)$$

Уравнение (2.5) называется характеристическим уравнением системы (2.2). Перепишем характеристическое уравнение в виде

$$\lambda^2 - S\lambda + J = 0, \quad (2.6)$$

где $S = A + D$, $J = AD - BC$. Корни характеристического уравнения (2.6)

$$\lambda_{1,2} = \frac{S}{2} \pm \sqrt{\frac{S^2}{4} - J} \quad (2.7)$$

определяют решение системы (2.2), следовательно, и поведение фазовых траекторий в окрестности особой точки. Устойчивость состояния равновесия определяет знак действительной части собственного значения ($\operatorname{Re} \lambda$). Если хотя бы у одного корня характеристического уравнения действительная часть положительная ($\operatorname{Re} \lambda_1 > 0$) или ($\operatorname{Re} \lambda_2 > 0$), то состояние равновесия неустойчиво. Состояние равновесия устойчиво только в том случае, когда и $\operatorname{Re} \lambda_1 < 0$, и $\operatorname{Re} \lambda_2 < 0$.

Типы состояния равновесия определяются корнями характеристического уравнения. На фазовой плоскости могут наблюдаться следующие случаи:

1. Если λ_1, λ_2 – комплексные числа с отрицательными вещественными частями, то состояние равновесия является устойчивым фокусом.
2. Если λ_1, λ_2 – комплексные числа с положительными вещественными частями, то состояние равновесия представляет собой неустойчивый фокус.
3. Если λ_1, λ_2 – действительные отрицательные числа, то состояние равновесия – устойчивый узел.
4. Если λ_1, λ_2 – действительные положительные числа, то состояние равновесия – неустойчивый узел.
5. Если λ_1, λ_2 – действительные числа разных знаков, то состояние равновесия является седлом.
6. Если λ_1, λ_2 – чисто мнимые величины, то состояние равновесия является центром.

В динамических системах с размерностью фазового пространства равной трем имеется три корня характеристического уравнения. Состояния равновесия могут иметь более сложный и разнообразный характер. Здесь возможны следующие основные случаи:

1. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – действительные отрицательные (положительные) числа. Состояние равновесия в этом случае называется устойчивым (неустойчивым) узлом.
2. λ_1 – действительное число, λ_2, λ_3 – комплексные числа, причем все корни имеют отрицательные (положительные) действительные части. Состояние равновесия в этом случае называется устойчивым (неустойчивым) фокусом.
3. Один из корней действительный, два других комплексные, причем знаки действительного корня и действительных частей двух других комплексно-сопряженных корней – разные (λ_1 – действительный, λ_2, λ_3 – комплексно-сопряженные, $\lambda_1 < 0$, $\operatorname{Re} \lambda_{2,3} > 0$). Состояние равновесия в этом случае называется седло-фокусом.
4. Все корни действительные и имеют разные знаки. Этот случай соответствует особым точкам, которые называются седло-узел.

Поведение динамической системы при непрерывном изменении ее параметра, проходя через некоторые значения, может претерпевать качественные изменения, что отражается в качественной перестройке фазового портрета. Подобные качественные изменения в поведении системы при непрерывном изменении параметра называют бифуркацией. Значения параметра, при котором происходит бифуркация, называют бифуркационным значением или точкой бифуркации. В динамических системах могут происходить бифуркации состояний равновесия, бифуркации предельных циклов и бифуркации более сложных предельных множеств.

В данном разделе мы рассмотрим наиболее часто встречающиеся бифуркации состояний равновесия. К ним относится седло-узловая бифуркация, транскритическая бифуркация, бифуркация типа вил, бифуркация Андронова – Хопфа.

Седло-узловая бифуркация

Пусть в фазовом пространстве системы имеется устойчивый узел и седло. При движении по управляющему параметру системы к некоторому бифуркационному значению точки равновесия сближаются и при критическом значении происходит бифуркация слияния узла и седла с образованием негрубого состояния равновесия, называемого седло-узелом. При дальнейшем изменении параметра за точку бифуркации положение равновесия исчезает.

Простейшей модельной системой, описывающей слияние и исчезновение устойчивого и неустойчивого состояния равновесия, служит уравнение вида

$$\frac{dx}{dt} = m - x^2, \quad (2.8)$$

где x – динамическая переменная; m – управляющий параметр.

Данное уравнение является одномерным и в его фазовом пространстве, естественно, не может происходить седло-узловая бифуркация. Она

требует как минимум двумерного фазового пространства. Однако закономерности слияния и исчезновения состояний равновесия в фазовом пространстве системы (2.8) качественно повторяют закономерности седло-узловой бифуркации в пространстве большей размерности. Подобные простейшие формы дифференциального уравнения в окрестности особых точек, которые полностью описывают локальные бифуркации и в которых важные для характеристики особой точки величины оказываются выписанными в явном виде (например, собственные значения), *называются нормальными формами*. Нормальной формой седло-узловой бифуркации является уравнение (2.8).

Система (2.8) имеет две точки равновесия с координатами $\bar{x}_1 = \sqrt{m}$ и $\bar{x}_2 = -\sqrt{m}$. Видно, что они определены только при $m > 0$. Их устойчивость определяется собственным значением $\rho = -2\bar{x}_i$ (где $\bar{x}_i$ – координата точки равновесия). Для состояния равновесия с координатой $\bar{x}_1 = \sqrt{m}$ получаем $\rho_1 = -2\sqrt{m}$, для точки $\bar{x}_2 = -\sqrt{m}$ получаем $\rho_2 = 2\sqrt{m}$. Следовательно, $\bar{x}_1$ – устойчивая точка равновесия, а $\bar{x}_2$ – неустойчивая. При $m < 0$ состояния равновесия отсутствуют. В бифуркационной точке $m = 0$ возникает седло-узел. При $m > 0$ существует устойчивая и неустойчивая точки. С ростом надкритичности ($|m - m_{cr}|$) они расходятся.

Транскритическая бифуркация

При транскритической бифуркации происходит обмен устойчивостью между двумя точками равновесия. Нормальная форма для такой бифуркации имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = mx - x^2. \quad (2.9)$$

Система (2.9) имеет две точки равновесия $\bar{x}_1 = 0$ и $\bar{x}_2 = m$. Их устойчивость определяется собственным значением $\rho = m - 2\bar{x}_i$. Для точки равновесия $\bar{x}_1 = 0$ получаем $\rho_1 = m$, для точки $\bar{x}_2 = m$ получаем $\rho_2 = -m$. Видно, что точка $\bar{x}_1 = 0$ является устойчивой при $m < 0$ и неустойчивой – при $m > 0$. Для точки $\bar{x}_2 = m$ все наоборот. При бифуркационном значении параметра $m = 0$ точки равновесия сливаются и обмениваются устойчивостью.

Бифуркация типа вил

Нормальная форма, описывающая бифуркацию типа вил, имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = mx - x^3. \quad (2.10)$$

В этой системе при $m < 0$ имеется одна точка равновесия $\bar{x}_1 = 0$. При $m > 0$ существует три состояния равновесия: $\bar{x}_1 = 0$, $\bar{x}_2 = \sqrt{m}$ и $\bar{x}_3 = -\sqrt{m}$. Устойчивость состояний равновесия характеризуется собственным значением $\rho = m - 3\bar{x}_i^2$. Видно, что для точки $\bar{x}_1 = 0$ собственное значение $\rho = m$, а для $\bar{x}_2 = \sqrt{m}$ и $\bar{x}_3 = -\sqrt{m}$ собственное значение $\rho = -2m$. При переходе управляющего параметра через ноль устойчивое состояние равновесия становится неустойчивым и в его окрестности

рождается пара устойчивых симметричных друг другу состояний равновесия. Следует отметить, что данная бифуркация наблюдается в системах с симметрией. Система (2.10) симметрична по отношению к замене $x \leftrightarrow (-x)$.

Бифуркация Андронова – Хопфа

При бифуркации Андронова – Хопфа происходит рождение предельного цикла. Нормальная форма, описывающая данную бифуркацию, имеет вид

$$\frac{dz}{dt} = (m + i\omega)z - z|z|^2, \quad (2.11)$$

где z – комплексная переменная; $i = \sqrt{-1}$; ω – произвольная константа, которая определяет собственную частоту системы и не играет роли бифуркационного параметра. Нормальная форма (2.11) является комплексным эквивалентом нормальной формы бифуркации вил.

Перепишем (2.11) в вещественных переменных, полагая $z = x + iy$. В результате получим систему двух уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= [m - (x^2 + y^2)]x - \omega y, \\ \frac{dy}{dt} &= [m - (x^2 + y^2)]y + \omega x. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Уравнения для стационарных решений имеют вид

$$\begin{aligned} [m - (x^2 + y^2)]x - \omega y &= 0, \\ [m - (x^2 + y^2)]y + \omega x &= 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Доумножая первое уравнение на x , второе – на y и складывая правые и левые части, получим

$$[m - (x^2 + y^2)](x^2 + y^2) = 0. \quad (2.14)$$

Видно, что существует два решения: одно из них $x = 0, y = 0$ (или $z = 0$) и второе, для которого $x^2 + y^2 = |z|^2 = m$, т.е. при бифуркационном значении $m = 0$ в окрестности состояния равновесия с координатами $x = 0, y = 0$ рождается предельный цикл, радиус которого $|z| = \sqrt{m}$.

2.1.2. Задачи и упражнения

Задача 2.1.1

Исследуйте бифуркации состояния равновесия для системы

$$\dot{x} = m - x^2.$$

Постройте бифуркационную диаграмму на плоскости с координатами x и m .

Задача 2.1.2

Исследуйте бифуркации состояния равновесия для системы

$$\dot{x} = tx - x^2.$$

Постройте бифуркационную диаграмму на плоскости с координатами x и t .

Задача 2.1.3

Исследуйте бифуркации состояния равновесия для системы

$$\dot{x} = tx - x^3.$$

Постройте бифуркационную диаграмму на плоскости с координатами x и t .

Задача 2.1.4

Уравнения, описывающие изменения средних концентраций реагирующих химических веществ, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x[\beta - \beta x - (\alpha + \beta)y], \\ \dot{y} &= y[-\gamma + (\alpha + \gamma)x + \gamma y].\end{aligned}$$

Исследуйте состояния равновесия системы в зависимости от параметров, полагая $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$.

Задача 2.1.5

Уравнения

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (\varepsilon - x^2 - y^2)x + y, \\ \dot{y} &= (\varepsilon - x^2 - y^2)y - x\end{aligned}$$

представляют автоколебательную систему. Проведите анализ устойчивости состояний равновесия.

Задача 2.1.6

В осцилляторе Ван дер Поля

$$\ddot{x} - (\varepsilon - x^2)\dot{x} + x = 0$$

исследуйте устойчивость состояний равновесия в зависимости от параметра ε .

Задача 2.1.7

В осцилляторе Рэля

$$\ddot{x} - (\lambda - \dot{x}^2)\dot{x} + x = 0$$

определите координаты неподвижных точек и исследуйте их устойчивость в зависимости от параметра λ .

Задача 2.1.8

Для диссипативного осциллятора Дуффинга

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \beta x + \gamma x^3 = 0$$

определите координаты неподвижных точек, постройте на плоскости параметров $(\alpha - \beta)$ области существования различных типов состояний равновесия при фиксированном значении параметра нелинейности $\gamma = 1$, опишите характер бифуркаций при переходах между областями.

Задача 2.1.9

Для диссипативного осциллятора Дуффинга

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \beta x + \gamma x^3 = 0$$

определите координаты неподвижных точек, постройте на плоскости параметров $(\alpha - \beta)$ области существования различных типов состояний равновесия при фиксированном значении параметра нелинейности $\gamma = -1$, опишите характер бифуркаций при переходах между областями.

Задача 2.1.10

Для диссипативного осциллятора Дуффинга

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \beta x + \gamma x^3 = 0$$

определите координаты неподвижных точек, постройте на плоскости параметров $(\beta - \gamma)$ области существования различных типов состояний равновесия при фиксированном значении параметра диссипации $\alpha = 0.01$, опишите характер бифуркаций при переходах между областями.

Задача 2.1.11

Для диссипативного осциллятора Тоды

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \exp(x) - 1 = 0$$

определите координаты особых точек и собственные значения. Какие типы неподвижных точек могут наблюдаться в зависимости от параметра диссипации α ?

Задача 2.1.12

Для автоколебательной системы Ван дер Поля – Дуффинга

$$\ddot{x} - (\varepsilon - x^2) \dot{x} + x + \gamma x^3 = 0$$

определите координаты неподвижных точек и собственные значения. Постройте на плоскости управляющих параметров $(\varepsilon - \gamma)$ области существования различных типов состояний равновесия, опишите характер бифуркаций при переходах между областями.

Задача 2.1.13

Для автоколебательной системы Рэля – Тоды

$$\ddot{x} - (\varepsilon - \dot{x}^2) \dot{x} + \exp(x) - 1 = 0$$

определите координаты неподвижных точек и собственные значения. Какие типы неподвижных точек могут наблюдаться в зависимости от управляющего параметра ε ?

Задача 2.1.14

В генераторе с инерционной нелинейностью

$$\begin{aligned}\dot{x} &= mx - xz + y - dx^3, \\ \dot{y} &= -x, \\ \dot{z} &= -gz + g[\exp(x) - 1]\end{aligned}$$

определите неподвижные точки и собственные значения, характеризующие их устойчивость. Исследуйте характер особых точек на плоскости параметров $m-g$ при значении параметра безынерционной нелинейности $d = 0$.

Задача 2.1.15

В генераторе с инерционной нелинейностью

$$\begin{aligned}\dot{x} &= mx - xz + y - dx^3, \\ \dot{y} &= -x, \\ \dot{z} &= -gz + g[\exp(x) - 1]\end{aligned}$$

найдите неподвижные точки и собственные значения, характеризующие их устойчивость. Исследуйте характер состояний равновесия на плоскости параметров $m-d$ при значении параметра инерционности $g = 0.2$.

Задача 2.1.16

В генераторе с кусочно-линейной характеристикой (цепь Чуа)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha[y - x - f(x)], \\ \dot{y} &= x - y + z, \\ \dot{z} &= -\beta y,\end{aligned}$$

$$\text{где } f(x) = \begin{cases} bx + a - b, & x > 1, \\ ax, & |x| \leq 1, \\ bx - a + b, & x < -1, \end{cases}$$

найдите неподвижные точки и запишите характеристические уравнения.

Задача 2.1.17

В системе Ресслера

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x + \alpha y, \\ \dot{z} &= \alpha + z(x - \mu)\end{aligned}$$

найдите неподвижные точки и запишите характеристические уравнения. Что происходит с неподвижными точками при пересечении линии $\mu = 2\alpha$ на плоскости параметров $(\alpha - \mu)$?

Задача 2.1.18

В системе Лоренца

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= \rho x - y - xz, \\ \dot{z} &= -\beta z + xy\end{aligned}$$

найдите неподвижные точки. Запишите собственные значения матрицы линеаризации для особой точки в начале координат $(\sigma, \rho, \beta > 0)$.

2.2 Динамика систем с дискретным временем

2.2.1. Краткие теоретические сведения

Поведение фазовых траекторий динамической системы может быть выяснено путем исследования поведения точек пересечения траекторий с некоторым отрезком в случае двумерного фазового пространства или с секущей поверхностью в случае трехмерного фазового пространства. Последовательность точек пересечения образует некоторое точечное преобразование F , к изучению которого и сводится задача об исследовании поведения фазовых траекторий. Структура разбиения фазового пространства на траектории рассматриваемой динамической системы взаимно однозначно определяется структурой порождаемого ею точечного отображения F . В частности, периодическим решениям дифференциальных уравнений ставятся в соответствие неподвижные точки соответствующего точечного отображения F .

Рассмотрим динамическую систему в виде обыкновенных дифференциальных уравнений с размерностью фазового пространства, равной двум

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y).\end{aligned}$$

Проведем на фазовой плоскости через неособые точки отрезок без контакта AB , т.е. такой отрезок прямой или дуги некоторой гладкой кривой, в каждой точке которого фазовые траектории пересекают его нигде не касаясь. Рассмотрим фазовую траекторию, проходящую в момент времени $t = t_1$ через некоторую точку M отрезка AB . Если при дальнейшем движении изображающей точки вдоль фазовой траектории она будет вновь и вновь пересекать отрезок без контакта AB , то говорят, что точка M имеет последующие. Следовательно, будет существовать функциональная зависимость

$$z_{n+1} = F(z_n), \quad (2.15)$$

где z_n и z_{n+1} – координаты точек пересечения фазовой траектории с отрезком AB в моменты времени t_n и t_{n+1} . Функциональная зависимость (2.15) называется *функцией последования*. Она выражает закон некоторого точечного отображения отрезка AB в себя, устанавливая взаимно однозначное соответствие между точками этого отрезка и их последующими. Тем самым задача изучения структуры разбиения фазовой плоскости на траектории сводится к изучению структуры соответствующего точечного отображения с функцией последования (2.15).

В качестве простого примера рассмотрим линейный осциллятор, для которого несложно аналитически найти функцию последования. Запи-

шем уравнение осциллятора в виде

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -2\gamma y - \omega_0^2 x,\end{aligned}\tag{2.16}$$

где x, y – динамические переменные системы; γ – коэффициент трения; ω_0 – собственная частота осциллятора. На фазовой плоскости динамической системы в качестве секущей выберем ось абсцисс ($y = 0$). Начальное состояние осциллятора зададим в виде точки, лежащей на секущей: $x(0) = x_0$ и $y(0) = 0$. В случае слабого трения, решение системы (2.16) имеет вид

$$\begin{aligned}x(t) &= e^{-\gamma t} \left[x_0 \cos \omega t + \frac{\gamma x_0}{\omega} \sin \omega t \right], \\ y(t) &= -e^{-\gamma t} \left(\omega + \frac{\gamma^2}{\omega} \right) x_0 \sin \omega t,\end{aligned}\tag{2.17}$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$. Условием пересечения с секущей является $y(t) = 0$. Это выполняется (см. (2.17)), когда $\sin \omega t = 0$, т.е. в моменты времени $t_n = \frac{n\pi}{\omega}, n = 0, 1, 2, \dots$. Тогда координаты точек пересечения секущей фазовой траекторией равны

$$x(t_n) = x_n = (-1)^n \left(e^{-\frac{\gamma\pi}{\omega}} \right)^n x_0.\tag{2.18}$$

Запишем координаты для моментов времени t_{n+1}

$$x(t_{n+1}) = x_{n+1} = -e^{-\frac{\gamma\pi}{\omega}} (-1)^n \left(e^{-\frac{\gamma\pi}{\omega}} \right)^n x_0.\tag{2.19}$$

Сравнивая (2.19) и (2.18), получаем функцию последования в виде

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \lambda x_n, \\ \lambda &= -\exp \left(-\frac{\gamma\pi}{\omega} \right).\end{aligned}\tag{2.20}$$

Метод точечных отображений Пуанкаре позволяет перейти от динамической системы с непрерывным временем к динамическим системам с дискретным временем. Размерность динамической системы с дискретным временем определяется размерностью секущей, т.е. на единицу меньше размерности фазового пространства динамической системы с непрерывным временем. Если рассматриваем систему на фазовой плоскости, то соответствующее точечное отображение будет одномерным, если в трехмерном фазовом пространстве, то – двумерным.

Динамические системы с дискретным временем носят не только вспомогательный характер, когда используются в методе точечных отображений при исследовании динамических систем в виде обыкновенных дифференциальных уравнений. Многие из них имеют большое самостоятельное значение и стали базовыми моделями теории нелинейных колебаний, нелинейной динамики, теории динамического хаоса. Наиболее

популярными системами с дискретным временем являются, например, логистическое отображение, отображение Эно, отображение Холмса, кубическое отображение, кусочно-линейное отображение (tent map), отображение окружности. В зависимости от значений управляющих параметров перечисленные отображения могут демонстрировать как регулярное, так и хаотическое поведение. В них наблюдаются типичные бифуркации и типичные пути перехода к хаосу. Поиск простейших периодических орбит, анализ их устойчивости и бифуркаций проиллюстрируем на примере логистического отображения.

Рассмотрим логистическое отображение в виде

$$x_{n+1} = \lambda - x_n^2, \quad (2.21)$$

где x_n – динамическая переменная, $n = 0, 1, 2, \dots$ – дискретное время; λ – управляющий параметр. Найдем неподвижные точки (или орбиты периода-1), которые определяются условием $x_{n+1} = x_n$. В этом случае уравнение (2.21) примет вид

$$x_n = \lambda - x_n^2$$

или

$$x_n^2 + x_n - \lambda = 0.$$

Корни этого квадратного уравнения являются координатами неподвижных точек P_1 и P_2 логистического отображения:

$$\bar{x}_{01} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \lambda}, \quad (2.22)$$

$$\bar{x}_{02} = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \lambda}. \quad (2.23)$$

Поскольку динамическая переменная системы принимает только действительные значения, неподвижные точки логистического отображения существуют при $\lambda \geq -0.25$. С уменьшением λ неподвижные точки сближаются. При $\lambda = -0.25$ они сливаются ($\bar{x}_{01} = \bar{x}_{02} = -0.5$). Ниже этого значения неподвижные точки исчезают.

Исследуем устойчивость неподвижных точек P_1 и P_2 . Для этого исследуем эволюцию малых отклонений от неподвижной точки (или малых возмущений в окрестности неподвижной точки). Представим динамическую переменную в виде

$$x_n = \bar{x}_{0i} + \tilde{x}_n, \quad (2.24)$$

где $\bar{x}_{0i}$ – координата неподвижной точки ($i = 1, 2$); $\tilde{x}_n$ – малое отклонение от точки равновесия в момент времени n . Подставляя (2.24) в логистическое отображение (2.21), получим

$$\bar{x}_{0i} + \tilde{x}_{n+1} = \lambda - \bar{x}_{0i}^2 - 2\bar{x}_{0i}\tilde{x}_n - \tilde{x}_n^2.$$

По определению неподвижной точки

$$\bar{x}_{0i} = \lambda - \bar{x}_{0i}^2.$$

Тогда уравнение эволюции малых возмущений в линейном приближении примет следующий вид:

$$\tilde{x}_{n+1} = -2\bar{x}_{0i}\tilde{x}_n.$$

Очевидно, что неподвижная точка является неустойчивой, если малые возмущения нарастают во времени, т.е.

$$\left| \frac{\tilde{x}_{n+1}}{\tilde{x}_n} \right| > 1.$$

Неподвижная точка является устойчивой, если малые возмущения затухают во времени, т.е.

$$\left| \frac{\tilde{x}_{n+1}}{\tilde{x}_n} \right| < 1.$$

Следовательно, устойчивость i -й неподвижной точки характеризует некоторая величина

$$\mu_i = \frac{\tilde{x}_{n+1}}{\tilde{x}_n} = -2\bar{x}_{0i}. \quad (2.25)$$

Ее называют собственным значением неподвижной точки или мультипликатором орбиты периода-1 (по аналогии с мультипликатором цикла). Неподвижная точка P_i является устойчивой, если $-1 < \mu_i < +1$. Бифуркационными условиями (когда неподвижная точка претерпевает бифуркацию) являются условия $\mu_i = +1$ и $\mu_i = -1$.

Собственное значение μ_1 неподвижной точки P_1 с координатой $\bar{x}_{01}$ имеет следующий вид:

$$\mu_1 = -2\bar{x}_{01} = 1 - 2\sqrt{0.25 + \lambda}. \quad (2.26)$$

Определим область устойчивости по параметру λ точки P_1 :

$$\begin{aligned} -1 < 1 - 2\sqrt{0.25 + \lambda} < +1, \\ -0.25 < \lambda < 0.75. \end{aligned}$$

На границах указанного интервала неподвижная точка P_1 претерпевает бифуркации: при $\lambda = -0.25$ собственное значение $\mu_1 = +1$ и при $\lambda = 0.75$ собственное значение $\mu_1 = -1$.

Теперь определим собственное значение μ_2 неподвижной точки P_2 с координатой $\bar{x}_{02}$:

$$\mu_2 = -2\bar{x}_{02} = 1 + 2\sqrt{0.25 + \lambda}. \quad (2.27)$$

Видно, что точка P_2 при любых значениях параметра λ является неустойчивой.

Таким образом, в исследуемой системе при $-0.25 < \lambda < 0.75$ существует устойчивая неподвижная точка P_1 . С уменьшением значений управляющего параметра устойчивая точка сближается с неустойчивой точкой P_2 . При $\lambda = -0.25$ их собственные значения $\mu_{1,2} = +1$. При переходе через данное значение параметра происходит бифуркация слияния и исчезновения устойчивой и неустойчивой неподвижных точек. С ростом управляющего параметра, при переходе через бифуркационное значение $\lambda = 0.75$ ($\mu_1 = -1$) неподвижная точка P_1 не исчезает. Происходит бифуркация удвоения периода. Точка P_1 становится неустойчивой, и в ее окрестности рождается устойчивая орбита периода-2. Рассмотрим этот бифуркационный переход более детально.

Орбита периода-2 определяется условием $x_{n+2} = x_n$. Представим динамическую переменную в окрестности данной периодической орбиты следующим образом:

$$\begin{aligned} x_n &= \bar{x}_1 + \tilde{x}_n, \\ x_{n+1} &= \bar{x}_2 + \tilde{x}_{n+1}, \\ x_{n+2} &= \bar{x}_1 + \tilde{x}_{n+2}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

где $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ – точки орбиты периода-2; $\tilde{x}_n, \tilde{x}_{n+1}, \tilde{x}_{n+2}$ – малые отклонения изображающей точки от орбиты периода-2 в моменты времени $n, n+1$ и $n+2$ соответственно. С учетом такого представления перепишем логистическое отображение в виде

$$\begin{aligned} \bar{x}_2 + \tilde{x}_{n+1} &= \lambda - (\bar{x}_1 + \tilde{x}_n)^2, \\ \bar{x}_1 + \tilde{x}_{n+2} &= \lambda - (\bar{x}_2 + \tilde{x}_{n+1})^2. \end{aligned}$$

Для точек орбиты периода-2 можно записать

$$\begin{aligned} \bar{x}_2 &= \lambda - \bar{x}_1^2, \\ \bar{x}_1 &= \lambda - \bar{x}_2^2. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Для малых возмущений в линейном приближении получаются уравнения

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{n+1} &= -2\bar{x}_1\tilde{x}_n, \\ \tilde{x}_{n+2} &= -2\bar{x}_2\tilde{x}_{n+1}. \end{aligned}$$

Нас интересует эволюция малых возмущений за период, что легко выразить из представленных уравнений

$$\tilde{x}_{n+2} = 2\bar{x}_2 2\bar{x}_1 \tilde{x}_n.$$

Следовательно, мультипликатор орбиты периода-2 имеет следующий вид:

$$\mu = 4\bar{x}_2\bar{x}_1. \quad (2.30)$$

Чтобы получить в явном виде зависимость мультипликатора от управляющего параметра λ , найдем из системы уравнений (2.29) координаты точек орбиты периода-2. Вычитая из первого уравнения второе, получим

$$\begin{aligned} \bar{x}_2 - \bar{x}_1 &= \bar{x}_2^2 - \bar{x}_1^2, \\ (\bar{x}_2 - \bar{x}_1) &= (\bar{x}_2 - \bar{x}_1)(\bar{x}_2 + \bar{x}_1), \\ \bar{x}_2 + \bar{x}_1 &= 1, \\ \bar{x}_1 &= 1 - \bar{x}_2. \end{aligned}$$

Подставим полученное выражение во второе уравнение системы (2.29)

$$\begin{aligned} 1 - \bar{x}_2 &= \lambda - \bar{x}_2^2, \\ \bar{x}_2^2 - \bar{x}_2 + (1 - \lambda) &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} (\bar{x}_2)_{1,2} &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\lambda - \frac{3}{4}}, \\ (\bar{x}_1)_{1,2} &= 1 - (\bar{x}_2)_{1,2}, \\ (\bar{x}_1)_{1,2} &= \frac{1}{2} \mp \sqrt{\lambda - \frac{3}{4}}. \end{aligned}$$

Получили две пары точек двух орбит периода-2. Однако эти орбиты отличаются друг от друга только временным сдвигом на $n = 1$ и у них $(\bar{x}_2)_1 = (\bar{x}_1)_2$ и $(\bar{x}_2)_2 = (\bar{x}_1)_1$. Если не учитывать начало отсчета времени, то это одна и та же периодическая орбита. В рамках данной задачи мы не будем их различать. Таким образом, в системе может наблюдаться периодическая орбита $2C$ с координатами

$$\begin{aligned} \bar{x}_2 &= \frac{1}{2} + \sqrt{\lambda - \frac{3}{4}}, \\ \bar{x}_1 &= \frac{1}{2} - \sqrt{\lambda - \frac{3}{4}}. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Подставляя (2.31) в (2.30), получим явное выражение мультипликатора через управляющий параметр системы:

$$\mu = 4(1 - \lambda). \tag{2.32}$$

Из анализа выражений для координат точек орбиты периода-2 (2.31) и мультипликатора этой орбиты (2.32) можно сделать следующий вывод. Орбита $2C$ рождается при $\lambda = 0.75$. С ростом параметра ее точки ответвляются от орбиты периода-1 и расходятся друг от друга. Орбита периода-2 рождается устойчивой. Ее мультипликатор по модулю меньше единицы в интервале значений управляющего параметра $0.75 < \lambda < 1.25$. При $\lambda = 1.25$ мультипликатор $\mu = -1$, т.е. орбита $2C$ теряет устойчивость через бифуркацию удвоения периода.

Поиск периодических орбит, анализ их устойчивости и бифуркаций мы рассмотрели на примере логистического отображения. Для одномерного точечного отображения, записанного в общем виде

$$x_{n+1} = f(x_n),$$

координаты точек орбиты периода- k определяются из условия $x_{n+k} = x_n$. Ее устойчивость характеризуется мультипликатором

$$\mu = \frac{\partial f(\bar{x}_1)}{\partial x} \times \frac{\partial f(\bar{x}_2)}{\partial x} \times \dots \times \frac{\partial f(\bar{x}_k)}{\partial x},$$

который представляет собой произведение производных, вычисленных в точках периодической орбиты. Орбита периода- k является устойчивой, если $|\mu| < 1$.

Для двумерных отображений с дискретным временем, заданных в общем виде

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n, y_n), \\ y_{n+1} &= g(x_n, y_n),\end{aligned}$$

неподвижные точки (или орбиты периода-1) определяются из условия $x_{n+1} = x_n$ и $y_{n+1} = y_n$. Характер устойчивости неподвижной точки $P : \{\bar{x}, \bar{y}\}$ определяет поведение фазовых траекторий в малой окрестности точки P . Собственные значения (в данном случае их два), характеризующие устойчивость неподвижной точки, находят как корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x} - \mu & \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y} \\ \frac{\partial g(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x} & \frac{\partial g(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y} - \mu \end{vmatrix} = 0.$$

Неподвижная точка устойчива, если $|\mu_{1,2}| < 1$. Выход мультипликаторов на единичную окружность, построенную на плоскости с координатами $\text{Re}(\mu)$ и $\text{Im}(\mu)$, соответствует бифуркационной ситуации. В типичных случаях, если один из мультипликаторов становится равным единице ($\mu = +1$), то это соответствует седло-узловой бифуркации. Если один из мультипликаторов $\mu = -1$, то происходит бифуркация удвоения периода. Если μ_1 и μ_2 комплексно-сопряженные и по модулю равны единице, то происходит бифуркация рождения инвариантной окружности в окрестности неподвижной точки.

2.2.2. Задачи и упражнения

Задача 2.2.1

Уравнение дискретного логистического отображения обычно записывают в одном из трех видов:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \lambda - x_n^2, \\ y_{n+1} &= 1 - ry_n^2, \\ z_{n+1} &= bz_n(1 - z_n).\end{aligned}$$

Найдите замену переменных и параметров и покажите, что второе и третье уравнения можно преобразовать к первому уравнению.

Задача 2.2.2

Уравнение дискретного логистического отображения имеет вид

$$x_{n+1} = \lambda - x_n^2.$$

Найдите координаты неподвижных точек кратности один (или орбиты периода-1) и области их устойчивости по параметру λ .

Задача 2.2.3

Найдите координаты неподвижных точек кратности 1 в двумерном дискретном отображении Эно

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \lambda - x_n^2 + y_n, \\y_{n+1} &= -bx_n, \\b &\in [0, 1].\end{aligned}$$

Запишите условие для бифуркации удвоения периода орбиты периода-1.

Задача 2.2.4

Найдите орбиты периода-1 (неподвижные точки) отображения Эно

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \lambda - x_n^2 + y_n, \\y_{n+1} &= -bx_n, \\b &\in [0, 1].\end{aligned}$$

Определите области устойчивости неподвижных точек и характер границ областей устойчивости. Постройте бифуркационные линии (границы областей устойчивости) на плоскости параметров $(\lambda - b)$.

Задача 2.2.5

Постройте точечное отображение для динамической системы вида

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + x[1 - (x^2 + y^2)], \\ \dot{y} &= x + y[1 - (x^2 + y^2)].\end{aligned}$$

Задача 2.2.6

Найдите неподвижные точки кубического отображения

$$x_{n+1} = (a - 1)x_n - ax_n^3.$$

Определите их области существования и устойчивости по параметру a . Найдите значение точки бифуркации вил. Постройте в ее окрестности бифуркационную диаграмму для орбит периода-1. Найдите значение параметра, при котором происходит бифуркация удвоения периода.

Задача 2.2.7

Найдите орбиты периода-1 отображения Холмса

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= y_n, \\y_{n+1} &= -bx_n + dy_n - y_n^3.\end{aligned}$$

Постройте их области существования и области устойчивости на плоскости параметров $(b - d)$. Определите характер границ (тип бифуркационных линий) этих областей.

Задача 2.2.8

Найдите неподвижные точки кусочно-линейного отображения

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n), \\ f(x) &= \begin{cases} x/a, & 0 \leq x \leq a, \\ (1-x)/(1-a), & a \leq x \leq 1, \end{cases} \end{aligned}$$

и исследуйте их устойчивость.

Задача 2.2.9

Найдите координаты точек орбиты периода-2 логистического отображения

$$x_{n+1} = \lambda - x_n^2.$$

Определите область устойчивости орбиты периода-2 по параметру λ .

Задача 2.2.10

В двух связанных идентичных логистических отображениях

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \lambda - x_n^2 + \varepsilon [x_n^2 - y_n^2], \\ y_{n+1} &= \lambda - y_n^2 + \varepsilon [y_n^2 - x_n^2] \end{aligned}$$

определите симметричные (т.е. расположенные в симметричном подпространстве $x_n = y_n$ полного фазового пространства системы) неподвижные точки. Постройте для них линии бифуркационных значений на плоскости параметров $(\lambda - \varepsilon)$. (Бифуркационный анализ следует провести в области значений параметров $-0.3 < \lambda < 2$ и $0 < \varepsilon < 1$.)

Задача 2.2.11

Перепишите систему двух связанных идентичных логистических отображений

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \lambda - x_n^2 + \varepsilon [x_n^2 - y_n^2], \\ y_{n+1} &= \lambda - y_n^2 + \varepsilon [y_n^2 - x_n^2] \end{aligned}$$

в новых переменных $u = \frac{x+y}{2}$ и $v = \frac{x-y}{2}$. Запишите отображение, описывающее динамику синхронных движений $x_n = y_n$.

Задача 2.2.12

Для синхронных ($x_n = y_n$) орбит периода-1 двух идентичных взаимодействующих систем

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \lambda - x_n^2 + \varepsilon [x_n^2 - y_n^2], \\ y_{n+1} &= \lambda - y_n^2 + \varepsilon [y_n^2 - x_n^2] \end{aligned}$$

получите выражение для тангенциального и трансверсального ляпуновских показателей и уравнение, связывающее эти показатели.

Задача 2.2.13

В двух инерционно связанных идентичных логистических отображениях

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \lambda - x_n^2 + \varepsilon [y_n - x_n], \\y_{n+1} &= \lambda - y_n^2 + \varepsilon [x_n - y_n]\end{aligned}$$

определите симметричные (расположенные в симметричном подпространстве $x_n = y_n$ полного фазового пространства системы) неподвижные точки. Постройте для них линии бифуркационных значений на плоскости параметров $(\lambda - \varepsilon)$.

Задача 2.2.14

Перепишите систему

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \lambda - x_n^2 + \varepsilon [y_n - x_n], \\y_{n+1} &= \lambda - y_n^2 + \varepsilon [x_n - y_n]\end{aligned}$$

в новых переменных $u = \frac{x+y}{2}$ и $v = \frac{x-y}{2}$. Получите отображение, описывающее динамику синхронных движений $x_n = y_n$.

Задача 2.2.15

Для синхронных ($x_n = y_n$) орбит периода-1 двух инерционно связанных логистических отображений

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \lambda - x_n^2 + \varepsilon [y_n - x_n], \\y_{n+1} &= \lambda - y_n^2 + \varepsilon [x_n - y_n]\end{aligned}$$

получите выражения для тангенциального и трансверсального ляпуновских показателей и уравнение, связывающее эти показатели.

Задача 2.2.16

Найдите неподвижные точки двумерного отображения (отображение Катала)

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= p_1 x_n + y_n, \\y_{n+1} &= p_2 + x_n^2.\end{aligned}$$

Постройте их области существования и устойчивости на плоскости параметров $(p_1 - p_2)$.

Задача 2.2.17

Постройте точечное отображение $x_{n+1} = f(x_n)$ для линейного диссипативного осциллятора

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Задача 2.2.18

Постройте точечное отображение $x_{n+1} = f(x_n)$ для генератора Ван дер Поля

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = 0$$

в случае малых положительных значений параметра λ , когда автоколебания являются квазигармоническими.

Задача 2.2.19

Определите бифуркационные значения параметра для орбиты периода-1 логистического отображения вида

$$y_{n+1} = 1 - ry_n^2.$$

Задача 2.2.20

Определите бифуркационные значения параметра для орбиты периода-1 логистического отображения вида

$$z_{n+1} = bz_n(1 - z_n).$$

2.3 Нелинейный осциллятор. Нелинейный резонанс

2.3.1. Краткие теоретические сведения

В обобщенном виде уравнение нелинейного, консервативного, автономного осциллятора можно записать следующим образом:

$$\ddot{x} + \frac{dU(x)}{dx} = 0 \quad (2.33)$$

или

$$\ddot{x} + f(x) = 0,$$

где $U(x)$ – потенциальная энергия системы; $f(x)$ – возвращающая сила, действующая на систему при отклонении от состояния равновесия. Потенциальная энергия и возвращающая сила связаны соотношением

$$U(x) = \int f(x) dx.$$

Уравнение нелинейного осциллятора можно проинтегрировать. Введем переменную $\dot{x} = v$, и перепишем уравнение осциллятора

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{dU(x)}{dx} &= 0, \\ v \frac{dv}{dx} + \frac{dU(x)}{dx} &= 0. \end{aligned}$$

В результате интегрирования получаем

$$\frac{v^2}{2} + U(x) = E.$$

Это соотношение отражает закон сохранения энергии в консервативном нелинейном осцилляторе. Здесь E – полная энергия; $U(x)$ – потенциальная энергия нелинейного осциллятора.

Выражая v от x , запишем уравнение траектории на фазовой плоскости

$$v = \sqrt{2[E - U(x)]}.$$

Зная вид потенциальной функции, можно построить фазовый портрет нелинейного осциллятора.

Рассмотрим в качестве примера консервативный осциллятор Дуффинга

$$\ddot{x} + \beta x + \gamma x^3 = 0.$$

Уравнение осциллятора можно записать как

$$\ddot{x} + \frac{dU(x)}{dx} = 0,$$

тогда

$$U(x) = \int (\beta x + \gamma x^3) dx.$$

Таким образом, получаем в явном виде потенциальную функцию

$$U(x) = \frac{1}{2}\beta x^2 + \frac{1}{4}\gamma x^4 + C.$$

По виду потенциальной функции можно легко построить характерный вид фазовых портретов. Максимумы и минимумы графиков потенциальной функции соответствуют точкам равновесия, причем минимумы соответствуют состояниям равновесия типа центр, а максимумы – седловым состояниям равновесия. Седла и их сепаратрисы разделяют в фазовом пространстве области с различным поведением. Убедиться в этом, а также проделать построение фазовых портретов по виду потенциальной функции можно и более строгим образом. Используя выражение для потенциальной функции, запишем уравнение фазовых траекторий для консервативного осциллятора Дuffинга

$$v = \sqrt{2E - 2C - \beta x^2 - \frac{1}{2}\gamma x^4}.$$

Задавая конкретные значения параметров колебательной системы (β, γ) и ее начальные условия в виде полной запасенной энергии $(E \text{ и } C)$, можно на фазовой плоскости строить семейства траекторий для различных форм потенциальной функции (с одним минимумом, с одним максимумом, потенциал из двух ям и потенциал с двумя горбами).

Для динамических систем с малым параметром нелинейности можно асимптотическими методами найти приближенные решения. Эти методы позволяют описать некоторые нелинейные эффекты, такие, например, как ангармоничность и неизохронность, явление нелинейного резонанса. Здесь мы рассмотрим метод Пуассона, метод Пуанкаре, метод Ван дер Поля и метод гармонического баланса.

Метод Пуассона (разложение в ряд по степеням малого параметра)

Данный метод был предложен Пуассоном при исследовании задачи о колебаниях маятника. Состоит он в следующем. Пусть требуется найти решение нелинейного уравнения, содержащего малый параметр ε , которое мы можем представить в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right).$$

Тогда решение, удовлетворяющее уравнению с точностью до величин порядка малости ε^{n+1} , ищут в виде ряда

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots + \varepsilon^n x_n.$$

Подставляя данный ряд в левую часть уравнения, разлагают результат подстановки по степеням ε , причем отбрасывают члены, содержащие ε в степени выше n -й. После этого приравнивают коэффициенты при одинаковых степенях параметра ε . В результате получается система уравнений

$$\begin{array}{rcl} \frac{d^2 x_0}{dt^2} + \omega^2 x_0 & = & 0, \\ \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \omega^2 x_1 & = & f\left(x_0, \frac{dx_0}{dt}\right), \\ \dots & \dots & \dots \end{array}$$

решая которую находим элементы ряда $x_0, x_1, \dots$, а следовательно, и приближенное решение $x(t)$.

Применим этот метод для нахождения приближенного решения уравнения осциллятора с квадратичной нелинейностью. Запишем уравнение осциллятора в виде

$$\ddot{x} + x + \varepsilon x^2 = 0. \quad (2.34)$$

Рассмотрим случай слабой нелинейности, когда $\varepsilon \ll 1$. Будем искать решение, удовлетворяющее уравнению с точностью до величины порядка малости ε^2 , в виде

$$x = x_0 + \varepsilon x_1. \quad (2.35)$$

Подставим (2.35) в уравнение осциллятора (2.34)

$$\ddot{x}_0 + \varepsilon \ddot{x}_1 + x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon (x_0 + \varepsilon x_1)^2 = 0.$$

Теперь разложим результат подстановки по степеням ε . Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях параметра ε , получим систему уравнений

$$\varepsilon^0 : \quad \ddot{x}_0 + x_0 = 0, \quad (2.36)$$

$$\varepsilon^1 : \quad \ddot{x}_1 + x_1 = -x_0^2. \quad (2.37)$$

Уравнение для нулевого приближения представляет собой уравнение гармонического осциллятора. Первое слагаемое ряда (2.35) легко определяется

$$x_0 = a \cos(t + \phi),$$

где амплитуда a и начальная фаза ϕ представляют собой константы, которые определяются из начальных условий. Второе слагаемое ряда (2.35), являющееся величиной первого порядка малости, определяется из второго уравнения системы, в котором уже используется найденное

нами на предыдущем шаге нулевое приближение. Уравнение для первого приближения принимает вид уравнения линейного, консервативного, неавтономного осциллятора

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -a^2 \cos^2(t + \phi),$$

или

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} \cos 2(t + \phi).$$

Решение неавтономного уравнения представляет собой сумму общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения

$$x_1 = x_1^{(o)} + x_1^{(n)}.$$

Решение однородного уравнения, описывающее собственные колебания осциллятора, имеет следующий вид:

$$x_1^{(o)} = a_1 \cos(t + \phi_1).$$

Здесь амплитуда a_1 и начальная фаза ϕ_1 определяется из начальных условий.

Частное решение неоднородного уравнения $x_1^{(n)}$ представляет собой вынужденные колебания осциллятора. В спектре вынужденных колебаний содержатся те частоты, которые присутствуют в спектре вынуждающей силы. В данном случае это нулевая и вторая гармоники. Частное решение имеет вид

$$x_1^{(n)} = -\frac{a^2}{2} + C \cos 2(t + \phi).$$

Подставим это в неоднородное уравнение и определим константу $C = \frac{a^2}{6}$. Таким образом, частное решение неоднородного уравнения принимает вид

$$x_1^{(n)} = -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{6} \cos 2(t + \phi).$$

Получили первое приближение

$$x_1 = a_1 \cos(t + \phi_1) - \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{6} \cos 2(t + \phi).$$

Решение содержит четыре независимые постоянные — a, ϕ, a_1, ϕ_1 . Для их определения имеются только два начальных условия. Две константы можно выбрать произвольным образом. Можно положить $a_1 = 0$.

Таким образом, получено следующее приближенное решение с точностью до второго порядка малости ε^2 :

$$x \simeq a \cos(t + \phi) + \varepsilon \left[-\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{6} \cos 2(t + \phi) \right].$$

Итак, используя метод Пуассона, установили, что квадратичная нелинейность приводит к ангармоничности. В колебаниях осциллятора помимо основной гармоник появились еще и дополнительные гармоники: нулевая (постоянная составляющая) и вторая гармоника. Эффект неизохронности, присущий для нелинейных систем, с помощью данного метода не выявлен. Рассмотренный способ получения приближенных решений не всегда приводит к качественно правильным результатам. В ряде случаев он не применим. В приближенном решении могут возникать секулярные слагаемые, которые неограниченно нарастают во времени. Это происходит, например, при решении уравнения осциллятора Дуффинга.

Метод Пуанкаре

Для того чтобы избавиться от секулярных слагаемых, необходимо учесть эффект неизохронности в осцилляторе Дуффинга

$$\ddot{x} + x + \varepsilon x^3 = 0.$$

Введем новую переменную $\tau = \omega t$. Тогда

$$\omega^2 \frac{d^2 x}{d\tau^2} + x + \varepsilon x^3 = 0. \quad (2.38)$$

Решение будем искать в виде ряда по степеням малого параметра ε как для переменной x , так и для частоты ω :

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots \quad (2.39)$$

$$\omega = 1 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots \quad (2.40)$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ частота ω стремится к частоте линейных колебаний ω_0 , которая в данной нормировке равна единице.

В выражениях (2.39), (2.40) ограничимся слагаемыми до второго порядка малости, и подставим их в уравнение (2.38)

$$(1 + \varepsilon \omega_1)^2 (\ddot{x}_0 + \varepsilon \ddot{x}_1) + x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon (x_0 + \varepsilon x_1)^3 = 0.$$

Разложим это уравнение по степеням малого параметра ε . Приравняем слагаемые одинакового порядка малости

$$\varepsilon^0 : \ddot{x}_0 + x_0 = 0, \quad (2.41)$$

$$\varepsilon^1 : \ddot{x}_1 + x_1 = -2\omega_1 \ddot{x}_0 - x_0^3. \quad (2.42)$$

Решение уравнения (2.41)

$$x_0 = a \cos(\tau + \phi)$$

подставим в (2.42), тогда

$$\ddot{x}_1 + x_1 = 2\omega_1 a \cos(\tau + \phi) - a^3 \left[\frac{3}{4} \cos(\tau + \phi) + \frac{1}{4} \cos 3(\tau + \phi) \right]. \quad (2.43)$$

К секулярному росту $x_1(\tau)$ приводят члены, пропорциональные $\cos(\tau + \phi)$. Чтобы их устранить, подберем соответствующим образом малую добавку к частоте

$$\begin{aligned} 2\omega_1 a - \frac{3a^3}{4} &= 0, \\ \omega_1 &= \frac{3a^2}{8}. \end{aligned}$$

Тогда уравнение для первого приближения (2.43) примет вид

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -\frac{a^3}{4} \cos 3(\tau + \phi).$$

Решая его, получим

$$x_1 = \frac{a^3}{32} \cos 3(\tau + \phi).$$

В результате получили следующее приближенное с точностью до второго порядка малости решение

$$\begin{aligned} x &\simeq a \cos(\omega t + \phi), \\ \omega &\simeq 1 + \varepsilon \frac{3a^2}{8}. \end{aligned}$$

Полученный результат показывает, что кубическая нелинейность приводит к ангармоничности и неизохронности колебаний в консервативном осцилляторе. В спектре колебаний появилась третья гармоника. Частота колебаний зависит от их амплитуды. Если $\varepsilon > 0$, то частота ω увеличивается с ростом амплитуды колебаний. Если $\varepsilon < 0$, то частота уменьшается.

Метод Ван дер Поля (метод медленно меняющихся комплексных амплитуд)

Рассмотрим метод применительно к осциллятору с кубической нелинейностью

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = 0. \quad (2.44)$$

Полагаем, что параметр нелинейности мал и колебания близки к гармоническим. Будем искать решение в виде

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{Re} [a(t) \exp(i\omega_0 t)] = \\ &= \frac{1}{2} [a \exp(i\omega_0 t) + a^* \exp(-i\omega_0 t)]. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Введем дополнительное условие. Потребуем, чтобы функция $a(t)$ удовлетворяла условию

$$\dot{a} \exp(i\omega_0 t) + \dot{a}^* \exp(-i\omega_0 t) = 0. \quad (2.46)$$

Подставим решение (2.45) в уравнение (2.44) с учетом условия (2.46):

$$i\omega_0 \dot{a} + \frac{\beta}{8} \left[a^3 \exp(2i\omega_0 t) + 3|a|^2 a + 3|a|^2 a^* \exp(-2i\omega_0 t) \right] + \\ + \frac{\beta}{8} \left[(a^*)^3 \exp(-4i\omega_0 t) \right] = 0.$$

Усредним все члены этого уравнения за период. При этом будем учитывать, что амплитуда $a(t)$ и ее производные являются медленно меняющимися величинами, т.е. за период они практически не меняются, остаются постоянными. После усреднения получается

$$\dot{a} = i \frac{3\beta}{8\omega_0} |a|^2 a. \quad (2.47)$$

Комплексную амплитуду можно представить в виде

$$a(t) = \rho(t) \exp(i\phi(t)),$$

где $\rho(t), \phi(t)$ – действительные величины, которые представляют собой амплитуду и фазу колебаний соответственно. Получается следующая система уравнений для амплитуды и фазы:

$$\dot{\rho}(t) = 0, \quad (2.48)$$

$$\dot{\phi}(t) = \frac{3\beta}{8\omega_0} \rho^2(t). \quad (2.49)$$

Интегрируя эти уравнения, получаем решения для амплитуды и фазы

$$\rho(t) = \rho_0, \\ \phi(t) = \frac{3\beta}{8\omega_0} \rho_0^2 t.$$

Теперь можем записать решение

$$x(t) = \operatorname{Re} [a(t) \exp(i\omega_0 t)] = \operatorname{Re} [\rho(t) \exp(i\omega_0 t)] = \\ = \operatorname{Re} \left[\rho_0 \exp \left(i \frac{3\beta}{8\omega_0} \rho_0^2 t \right) \exp(i\omega_0 t) \right] = \rho_0 \cos \left(\omega_0 t + \frac{3\beta \rho_0^2}{8\omega_0} t \right).$$

Видно, что частота колебаний нелинейного осциллятора зависит от его амплитуды, причем здесь получена такая же поправка к частоте, что и предыдущим методом.

Метод гармонического баланса

Этот метод позволяет получить уравнение резонансных кривых для нелинейного осциллятора при внешнем гармоническом воздействии. Покажем это на примере неавтономного осциллятора Дуффинга

$$\ddot{x} + 2\alpha \dot{x} + \omega_0^2 x + \mu x^3 = B \cos(\omega t). \quad (2.50)$$

Здесь α – параметр диссипации; B, ω – амплитуда и частота внешнего гармонического воздействия. В случае слабой нелинейности (квазигармонический осциллятор: $|\mu| \ll 1$) амплитуда основной гармоники вынужденных колебаний много больше амплитуд высших гармоник. Решение можно искать в виде

$$x(t) \simeq a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t). \quad (2.51)$$

Для определения коэффициентов a и b подставим (2.51) в уравнение (2.50) и пренебрежем слагаемыми с кратными частотами. В результате получается

$$\begin{aligned} & -a\omega^2 \cos(\omega t) - b\omega^2 \sin(\omega t) - 2\alpha\omega a \sin(\omega t) + \\ & + 2\alpha\omega b \cos(\omega t) + \omega_0^2 a \cos(\omega t) + \omega_0^2 b \sin(\omega t) + \\ & + \frac{3\mu}{4} (a^3 \cos(\omega t) + b^3 \sin(\omega t) + a^2 b \sin(\omega t) + a b^2 \cos(\omega t)) = B \cos(\omega t). \end{aligned}$$

Сгруппировав коэффициенты перед $\cos(\omega t)$ и $\sin(\omega t)$, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} (\omega_0^2 - \omega^2) a + 2\alpha\omega b + \frac{3\mu}{4} (a^3 + ab^2) &= B, \\ (\omega_0^2 - \omega^2) b - 2\alpha\omega a + \frac{3\mu}{4} (b^3 + a^2 b) &= 0. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Перейдем в (2.52) к полярным координатам $a = \rho \cos \phi$, $b = \rho \sin \phi$, где ρ и ϕ – амплитуда и фаза колебаний соответственно:

$$(\omega_0^2 - \omega^2) \rho \cos \phi + 2\alpha\omega \rho \sin \phi + \frac{3\mu}{4} \rho^3 \cos \phi = B, \quad (2.53)$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2) \rho \sin \phi - 2\alpha\omega \rho \cos \phi + \frac{3\mu}{4} \rho^3 \sin \phi = 0. \quad (2.54)$$

Умножим уравнение (2.53) на $\cos \phi$, а уравнение (2.54) на $\sin \phi$ и сложим

$$(\omega_0^2 - \omega^2) \rho + \frac{3\mu}{4} \rho^3 = B \cos \phi. \quad (2.55)$$

Умножим уравнение (2.53) на $\sin \phi$, а уравнение (2.54) на $\cos \phi$ и вычтем второе выражение из первого

$$2\alpha\omega \rho = B \sin \phi. \quad (2.56)$$

Чтобы избежать зависимости от ϕ , следует возвести в квадрат обе части уравнений (2.55) и (2.56) и сложить. Обозначая через A квадрат амплитуды колебаний ($\rho^2 = A$), получим уравнение резонансных кривых

$$\frac{9}{16} \mu^2 A^3 + \frac{3}{2} \mu (\omega_0^2 - \omega^2) A^2 + \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2 \omega^2 \right] A - B^2 = 0. \quad (2.57)$$

2.3.2. Задачи и упражнения

Задача 2.3.1

Построить фазовый портрет по виду потенциальной функции консервативного осциллятора Дуффинга

$$\ddot{x} + \alpha x + \beta x^3 = 0$$

в случаях: а) $(\alpha > 0, \beta > 0)$, б) $(\alpha < 0, \beta > 0)$, в) $(\alpha > 0, \beta < 0)$.

Задача 2.3.2

Построить фазовый портрет по виду потенциальной функции математического маятника

$$\ddot{x} + \sin x = 0.$$

Задача 2.3.3

Построить фазовый портрет по виду потенциальной функции консервативного осциллятора Тоды

$$\ddot{x} + e^x - 1 = 0.$$

Задача 2.3.4

Получить уравнение фазовой траектории и построить фазовый портрет осциллятора с кусочно-линейной восстанавливающей силой

$$m\ddot{x} + f(x) = 0,$$

$$f(x) = \begin{cases} +h, & x > 0, \\ -h, & x < 0. \end{cases}$$

Задача 2.3.5

Определить период колебаний консервативного осциллятора с кусочно-линейной восстанавливающей силой

$$m\ddot{x} + f(x) = 0,$$

$$f(x) = \begin{cases} +h, & x > 0, \\ -h, & x < 0. \end{cases}$$

Являются ли колебания рассматриваемого осциллятора изохронными?

Задача 2.3.6

Используя метод Пуассона, найти приближенное решение уравнения осциллятора с квадратичной нелинейностью

$$\ddot{x} + x + \beta x^2 = 0$$

с точностью до второго порядка малости.

Задача 2.3.7

Определить потенциальную функцию, уравнение фазовых траекторий и построить фазовый портрет консервативного осциллятора с квадратичной нелинейностью

$$\ddot{x} + x + \beta x^2 = 0$$

для случая положительных значений параметра нелинейности ($\beta > 0$) и случая отрицательных значений параметра нелинейности ($\beta < 0$).

Задача 2.3.8

Используя приближенный аналитический метод Пуанкаре, определите с точностью до второго порядка малости поправку к частоте колебаний (эффект неизохронности) в осцилляторе с кубической нелинейностью

$$\ddot{x} + x + \mu x^3 = 0.$$

Задача 2.3.9

Получить укороченные уравнения для амплитуды и фазы диссипативного автономного осциллятора Дуффинга

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \omega_0^2 x + \gamma x^3 = 0.$$

Задача 2.3.10

Методом Ван дер Поля (медленно меняющихся комплексных амплитуд) найти приближенное решение уравнения консервативного осциллятора Дуффинга

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \gamma x^3 = 0.$$

Задача 2.3.11

Найти поправку к частоте колебаний нелинейного осциллятора

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \gamma x^5 = 0$$

методом медленно меняющихся комплексных амплитуд.

Задача 2.3.12

Методом Ван дер Поля (медленно меняющихся комплексных амплитуд) найти приближенное решение уравнения диссипативного осциллятора Дуффинга

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \omega_0^2 x + \gamma x^3 = 0.$$

Задача 2.3.13

Показать, что прыгающий резиновый мячик (без трения) – неизохронный осциллятор. Определить период колебаний.

Задача 2.3.14

Уравнение нелинейного осциллятора под внешним гармоническим воздействием имеет вид

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x + \mu x^3 = B \cos(pt).$$

Методом гармонического баланса найти уравнение для амплитуды колебаний в осцилляторе.

Задача 2.3.15

Получить укороченные уравнения для амплитуды и фазы осциллятора Дуффинга при внешнем гармоническом воздействии

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \omega_0^2 x + \mu x^3 = B \cos(\omega t).$$

Задача 2.3.16

Используя метод Ван дер Поля (медленно меняющихся комплексных амплитуд), получить для осциллятора Дуффинга при внешнем гармоническом воздействии

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \omega_0^2 x + \mu x^3 = B \cos(\omega t)$$

уравнение резонансных кривых.

2.4 Автоколебания. Синхронизация автоколебаний

2.4.1. Краткие теоретические сведения

В качестве примера автоколебательной системы, динамика которой описывается уравнением Ван дер Поля, рассмотрим ламповый генератор с колебательным контуром и индуктивной обратной связью. Упрощенная схема радиотехнического генератора изображена на рис. 2.1.

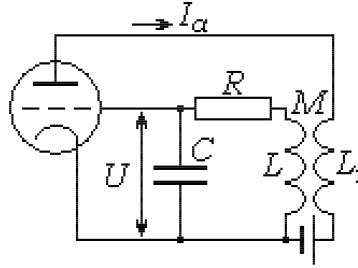


Рис. 2.1. Схема лампового генератора с колебательным контуром в цепи сетки

Используя законы Кирхгофа, можно записать дифференциальные уравнения для колебательного контура относительно напряжения u на конденсаторе C

$$LC \frac{d^2 u}{dt^2} + RC \frac{du}{dt} + u = M \frac{dI_a}{dt}, \quad (2.58)$$

где L, R, C – индуктивность, сопротивление и емкость колебательного контура; M – коэффициент взаимной индукции; I_a – анодный ток лампы. Предположим, что анодный ток зависит лишь от напряжения u на сетке лампы, т.е. $I_a = f(u)$, следовательно,

$$\frac{dI_a}{dt} = \frac{df(u)}{du} \frac{du}{dt}. \quad (2.59)$$

С учетом (2.59) уравнение (2.58) можно записать в виде

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \left[\frac{R}{L} - \frac{M}{LC} \frac{df(u)}{du} \right] \frac{du}{dt} + \frac{1}{LC} u = 0. \quad (2.60)$$

Предположим далее, что анодно-сеточную характеристику лампы можно аппроксимировать полиномом

$$I_a = I_0 + S_0 u - S_2 u^3.$$

При такой аппроксимации уравнение (2.60) примет вид

$$\frac{d^2 u}{dt^2} - \alpha (1 - \beta u^2) \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0, \quad (2.61)$$

где $\alpha = (MS_0 - RC)/LC$, $\beta = 3MS_2/(MS_0 - RC)$, $\omega_0^2 = 1/LC$.

Введем новое время $\tau = \omega_0 t$ и сделаем замену переменных и параметров $\varepsilon = \alpha/\omega_0$ и $x = \sqrt{\beta}u$. В результате получим уравнение

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} - \varepsilon(1 - x^2) \frac{dx}{d\tau} + x = 0. \quad (2.62)$$

Это уравнение называется уравнением Ван дер Поля. Во многих случаях его удобно представить в виде

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} - (\varepsilon - y^2) \frac{dy}{d\tau} + y = 0, \quad (2.63)$$

которое получается из (2.62) при замене $y = \sqrt{\varepsilon}x$.

Исследуем режимы осциллятора Ван дер Поля при малых, близких к нулю значениях управляющего параметра ε , используя приближенные аналитические методы.

Энергетический метод Теодорчика

Запишем уравнение Ван дер Поля в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = \varepsilon(1 - x^2) \frac{dx}{dt}. \quad (2.64)$$

При малых ε система является квазигармонической. Решение будем искать в виде квазигармонических колебаний с медленно меняющейся амплитудой A и постоянной частотой ω , которая может отличаться от собственной частоты $\omega_0 = 1$,

$$x(t) = A(t) \cos(\omega t). \quad (2.65)$$

Для того чтобы определить значение частоты автоколебаний, величину стационарной амплитуды и закон ее установления, представим исходное уравнение в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = (\omega^2 - 1)x + \varepsilon(1 - x^2) \frac{dx}{dt}. \quad (2.66)$$

Правую часть этого уравнения будем рассматривать как сумму сил, действующих на консервативную колебательную систему

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = F, \quad (2.67)$$

где

$$F = (\omega^2 - 1)x + \varepsilon(1 - x^2) \frac{dx}{dt}.$$

С учетом заданного движения (2.65) перепишем выражение для силы

$$F = (\omega^2 - 1)A(t) \cos(\omega t) + \varepsilon(1 - A^2 \cos^2 \omega t) \left[\frac{dA}{dt} \cos(\omega t) - \omega A \sin(\omega t) \right].$$

Поскольку $A(t)$ – медленно меняющаяся амплитуда, то $\frac{dA}{dt}$ – величина первого порядка малости. Слагаемые, которые содержат произведение $\varepsilon \frac{dA}{dt}$, являются величинами более высокого порядка малости, их в преобразованиях учитывать не будем. Тогда выражение для силы примет вид

$$F(t) = (\omega^2 - 1) A \cos(\omega t) - \varepsilon \omega A \sin(\omega t) + \varepsilon \omega A^3 \cos^2(\omega t) \sin(\omega t).$$

Разложим функцию F в ряд Фурье и выделим резонансные члены. Все высшие гармоники в разложении должны слабо влиять на консервативную колебательную систему, поэтому их можно отбросить:

$$F(t) = A_0 + A_1 \sin(\omega t) + B_1 \cos(\omega t),$$

где

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt, \\ A_1 &= \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin(\omega t) dt, \\ B_1 &= \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos(\omega t) dt. \end{aligned}$$

Здесь T – период функции $F(t)$ и $T = 2\pi/\omega$. Вычислим коэффициенты A_0, A_1, B_1 :

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} (\omega^2 A - A) \cos \omega t dt - \\ &\quad - \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \varepsilon \omega A \sin \omega t dt + \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \varepsilon \omega A^3 \cos^2 \omega t \sin \omega t dt = 0. \\ A_1 &= \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin \omega t dt = \frac{\omega}{\pi} (\omega^2 A - A) \int_0^{2\pi/\omega} \cos \omega t \sin \omega t dt - \\ &\quad - \frac{\omega}{\pi} \varepsilon \omega A \int_0^{2\pi/\omega} \sin^2 \omega t dt + \frac{\omega}{\pi} \varepsilon \omega A^3 \int_0^{2\pi/\omega} \cos^2 \omega t \sin^2 \omega t dt = -\varepsilon \omega A + \frac{\varepsilon \omega A^3}{4}. \\ B_1 &= \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos \omega t dt = \frac{\omega}{\pi} (\omega^2 A - A) \int_0^{2\pi/\omega} \cos^2 \omega t dt - \\ &\quad - \frac{\omega}{\pi} \varepsilon \omega A \int_0^{2\pi/\omega} \sin \omega t \cos \omega t dt + \frac{\omega}{\pi} \varepsilon \omega A^3 \int_0^{2\pi/\omega} \cos^3 \omega t \sin \omega t dt = \omega^2 A - A. \end{aligned}$$

Таким образом, выражение для $F(t)$ имеет вид

$$F(t) = \left\{ -\varepsilon \omega A + \frac{\varepsilon \omega A^3}{4} \right\} \sin \omega t + \{ \omega^2 A - A \} \cos \omega t. \quad (2.68)$$

Теперь выражение (2.68) и решение (2.65) подставим в уравнение (2.67). При этом учтем, что вторая производная медленно меняющейся функции $A(t)$ является величиной второго порядка малости, учитывать которую не будем. В результате получим уравнение

$$-2\omega \frac{dA}{dt} \sin \omega t = \left\{ -\varepsilon \omega A + \frac{\varepsilon \omega A^3}{4} \right\} \sin \omega t + \{ \omega^2 A - A \} \cos \omega t. \quad (2.69)$$

Приравнявая в уравнении (2.69) коэффициенты при $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$, находим

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\varepsilon A}{2} - \frac{\varepsilon A^3}{8}. \quad (2.70)$$

$$A(\omega^2 - 1) = 0. \quad (2.71)$$

Выражение (2.71) определяет зависимость частоты автоколебаний от амплитуды, а уравнение (2.70) описывает процесс установления амплитуды.

Стационарные значения амплитуды колебаний определяет уравнение

$$\frac{\varepsilon A}{2} - \frac{\varepsilon A^3}{8} = 0,$$

из которого получаем $A = 0$ и $A = 2$. В случае $A = 0$ автоколебания отсутствуют. Стационарная амплитуда A не зависит от значений параметра ε . Если при $\varepsilon > 0$ возбуждаются автоколебания, то их стационарная амплитуда достигает скачком величины $A = 2$ и более не зависит от ε , она всегда остается постоянной и равной этой величине. Частота стационарных автоколебаний всегда равна 1 и полностью совпадает с собственной частотой генератора Ван дер Поля, что видно из уравнения (2.71).

Рассмотрим переходные процессы в генераторе, анализируя уравнения (2.70) и (2.71). Уравнение (2.70) не зависит от уравнения (2.71) и его можно решать отдельно. Разделим обе части уравнения (2.70) на A^3 и сделаем замену переменных $x = 1/A^2$. В результате получим

$$\frac{dx}{dt} = -\varepsilon \left\{ x - \frac{1}{4} \right\}.$$

Сделаем еще одну замену $X = x - \frac{1}{4}$ и получим уравнение

$$\frac{dX}{dt} = -\varepsilon X,$$

решение которого

$$X = C \exp\{-\varepsilon t\}.$$

Возвращаясь к исходной переменной A получим

$$\frac{1}{A^2} = C \exp\{-\varepsilon t\} + \frac{1}{4}.$$

Будем считать, что в начальный момент времени $t = 0$ амплитуда колебаний $A = A_0$. Учитывая начальные условия, определим постоянную интегрирования

$$C = \frac{1}{A_0^2} - \frac{1}{4}.$$

В результате получим решение для линейного уравнения:

$$\frac{1}{A^2} = \left\{ \frac{1}{A_0^2} - \frac{1}{4} \right\} \exp\{-\varepsilon t\} + \frac{1}{4}$$

или

$$A = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{A_0^2} - \frac{1}{4}\right) \exp(-\varepsilon t)}}. \quad (2.72)$$

Из выражения (2.72) видно, что при $t \rightarrow \infty$ амплитуда колебаний $A(t)$ стремится к стационарной амплитуде $\bar{A} = 2$. Выражение (2.72) можно переписать в виде

$$A(t) = \frac{A_0 \exp\left(\frac{\varepsilon t}{2}\right)}{\sqrt{\left(A_0/\bar{A}\right)^2 \left\{ \exp\left(\frac{\varepsilon t}{2}\right) - 1 \right\} + 1}}. \quad (2.73)$$

С помощью данного метода мы описали переходной процесс установления амплитуды автоколебаний к стационарному значению. Однако метод Теодорчика не позволяет нам определить изменение частоты автоколебаний в зависимости от параметров системы.

Анализ устойчивости периодических движений на фазовой плоскости

Использование метода медленно меняющихся комплексных амплитуд позволяет свести анализ устойчивости периодических колебаний к анализу устойчивости состояния равновесия в уравнениях для амплитуды и фазы. Однако такой переход не всегда возможен. Существует и другой метод анализа устойчивости периодических движений, основанный на линеаризации уравнения автогенератора в окрестности периодического решения. Применим этот метод к установившимся периодическим колебаниям в осцилляторе Ван дер Поля $\bar{x}(t) = 2\sqrt{\varepsilon} \cos t$. Запишем уравнение Ван дер Поля в виде системы двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y), \\ \dot{y} &= g(x, y), \end{aligned} \quad (2.74)$$

где $f(x, y) = y$ и $g(x, y) = (\varepsilon - x^2)y - x$.

Напомним, что движение $x(t)$, $y(t)$ называется периодическим движением с периодом T , если T ($T > 0$) – наименьшее число, для которого при

всяком t выполняется условие $x(t+T) = x(t)$, $y(t+T) = y(t)$. Для системы (2.74) существуют периодические движения $\bar{x}(t)$, $\bar{y}(t)$ с периодом $T = 2\pi$, которые задаются функциями

$$\begin{aligned}\bar{x}(t) &= 2\sqrt{\varepsilon} \cos t, \\ \bar{y}(t) &= -2\sqrt{\varepsilon} \sin t.\end{aligned}\tag{2.75}$$

Периодическому движению соответствует замкнутая фазовая траектория на фазовой плоскости (x, y) . Однако всякой замкнутой траектории соответствует бесчисленное множество периодических движений, отличающихся друг от друга выбором начала отсчета времени.

Изолированная замкнутая траектория, к которой приближаются соседние траектории в прямом или обратном времени, **называется предельным циклом**. Предельные циклы могут быть асимптотически устойчивыми или асимптотически неустойчивыми.

Асимптотически устойчивым предельным циклом называется предельный цикл, к которому приближаются все соседние траектории при $t \rightarrow +\infty$. Асимптотически неустойчивым предельным циклом называется предельный цикл, от которого удаляются все соседние траектории при $t \rightarrow +\infty$.

Наряду с асимптотической устойчивостью предельного цикла выделяют устойчивость по Ляпунову периодического движения, соответствующего предельному циклу.

Движение $x = \bar{x}(t)$ и $y = \bar{y}(t)$ назовем устойчивым по Ляпунову, если для каждого положительно заданного ε можно подобрать такое положительное δ , что если $|x(t_0) - \bar{x}(t_0)| < \delta$ и $|y(t_0) - \bar{y}(t_0)| < \delta$, то $|x(t) - \bar{x}(t)| < \varepsilon$ и $|y(t) - \bar{y}(t)| < \varepsilon$ для всех значений $t > 0$.

Для того чтобы проанализировать устойчивость предельного цикла, рассмотрим эволюцию малых возмущений относительно предельного цикла. Введем обозначения $\xi = x - \bar{x}$ и $\eta = y - \bar{y}$. Переменные ξ и η характеризуют величину возмущения относительно предельного цикла. Подставляя $x = \bar{x} + \xi$ и $y = \bar{y} + \eta$ в уравнения (2.74), получим

$$\frac{d\xi}{dt} = -\frac{d\bar{x}}{dt} + f(\bar{x} + \xi, \bar{y} + \eta),\tag{2.76}$$

$$\frac{d\eta}{dt} = -\frac{d\bar{y}}{dt} + g(\bar{x} + \xi, \bar{y} + \eta).\tag{2.77}$$

Разложим функции f и g в ряд по степеням ξ и η в окрестности значений $\bar{x}$ и $\bar{y}$

$$f(\bar{x} + \xi, \bar{y} + \eta) = f(\bar{x}, \bar{y}) + \xi \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x} + \eta \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y} + \dots\tag{2.78}$$

$$g(\bar{x} + \xi, \bar{y} + \eta) = g(\bar{x}, \bar{y}) + \xi \frac{\partial g(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x} + \eta \frac{\partial g(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y} + \dots\tag{2.79}$$

Подставим (2.78, 2.79) в систему (2.76, 2.77). При этом учтем, что $\bar{x}$ и $\bar{y}$ удовлетворяют исходным уравнениям, т.е.

$$\frac{d\bar{x}}{dt} - f(\bar{x}, \bar{y}) = 0,$$

$$\frac{d\bar{y}}{dt} - g(\bar{x}, \bar{y}) = 0,$$

и ограничимся только линейными слагаемыми по ξ и η в разложении функций f и g . В результате получим уравнения первого приближения:

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x} \xi + \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y} \eta, \quad (2.80)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial g(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x} \xi + \frac{\partial g(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y} \eta. \quad (2.81)$$

Полученная система (2.80, 2.81) является системой линейных уравнений с периодическими коэффициентами периода T , поскольку коэффициенты при ξ и η есть функции от периодических аргументов $\bar{x}$, $\bar{y}$ периода T .

Из теории линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами известно, что общее решение системы (2.80, 2.81) имеет следующий вид:

$$\xi = C_1 e^{h_1 t} f_{11}(t) + C_2 e^{h_2 t} f_{12}(t), \quad (2.82)$$

$$\eta = C_1 e^{h_1 t} f_{21}(t) + C_2 e^{h_2 t} f_{22}(t), \quad (2.83)$$

где f_{ik} – периодические функции с периодом T ; C_1 и C_2 – постоянные, определяемые начальными условиями для уравнений (2.76, 2.77), т.е. выбором начальных возмущений периодической траектории. Величины h_1 и h_2 называются характеристическими показателями. Они определяют, будут ли решения $\xi(t)$ и $\eta(t)$ нарастающими или затухающими во времени.

Из теории линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами известно, что сумма характеристических показателей $h_1 + h_2$ равна среднему за период от суммы диагональных коэффициентов системы уравнений (2.82, 2.83):

$$h_1 + h_2 = \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x} + \frac{\partial g(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y} \right\} dt.$$

Кроме того, из инвариантности уравнения Ван дер Поля относительно выбора начального момента времени следует, что один из характеристических показателей равен нулю. Для того чтобы убедиться в этом, можно выбрать начальные возмущения вдоль предельного цикла. При этом поскольку возмущенное движение происходит на том же предельном цикле, но с другой начальной фазой, оно не приближается и не отходит от исходного решения, что как раз и соответствует нулевому значению одного из характеристических показателей.

Из уравнений (2.82, 2.83) можно сформулировать условие устойчивости периодических движений: периодическое движение в автономной системе (2.74) устойчиво по Ляпунову, если один характеристический показатель уравнения первого приближения отрицателен; движение неустойчиво, если один характеристический показатель положителен; уравнение первого приближения не решает вопроса об устойчивости, если оба характеристических показателя равны нулю. Таким образом, чтобы предельный цикл был устойчивым, необходимо выполнение следующего неравенства :

$$h_1 + h_2 = \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x} + \frac{\partial g(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y} \right\} dt < 0.$$

Применим данное условие к осциллятору Ван дер Поля. Поскольку $f(x, y) = y$, $g(x, y) = (\varepsilon - x^2)y - x$ и периодические движения задаются функциями $\bar{x}(t) = 2\sqrt{\varepsilon} \cos t$, $\bar{y}(t) = -2\sqrt{\varepsilon} \sin t$, то

$$\frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial g(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y} = \varepsilon - 4\varepsilon \cos^2 t.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{\varepsilon - 4\varepsilon \cos^2 t\} dt = \varepsilon - \frac{2\varepsilon}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \\ &= \varepsilon - \frac{\varepsilon}{\pi} \int_0^{2\pi} \{1 + \cos 2t\} dt = -\varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, при $\varepsilon > 0$ характеристический показатель $h < 0$, т.е. периодические автоколебания в генераторе Ван дер Поля являются устойчивыми.

Синхронизация периодических автоколебаний внешним гармоническим воздействием

При малых значениях амплитуды воздействия и малой нелинейности явление синхронизации допускает приближенное аналитическое описание. Проведем его на примере генератора Ван дер Поля с периодическим внешним воздействием:

$$\ddot{x} - (\varepsilon - x^2)\dot{x} + x = B \sin(\Omega t), \quad (2.84)$$

где B – амплитуда; Ω – частота внешнего воздействия. Собственная частота колебаний равна единице. Полагаем, что частота воздействия близка к частоте автоколебаний: $\Omega \simeq 1$ и $0 < \varepsilon \ll 1$. Методом медленно меняющихся амплитуд ищем решение в виде, близком к гармоническим колебаниям:

$$x(t) = \operatorname{Re}[a(t) \exp(jt)] = \frac{1}{2}[a(t) \exp(jt) + a^*(t) \exp(-jt)],$$

где $a(t)$ – комплексная амплитуда колебаний, медленно зависящая от времени. Тогда

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{2}[\dot{a} \exp(jt) + \dot{a}^* \exp(-jt) + ja \exp(jt) - ja^* \exp(-jt)].$$

Наложим дополнительное условие:

$$\dot{a} \exp(jt) + \dot{a}^* \exp(-jt) = 0.$$

При этом

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{1}{2}j[a \exp(jt) - a^* \exp(-jt)], \\ \ddot{x}(t) &= \dot{a}j \exp(jt) - \frac{1}{2}a \exp(jt) - \frac{1}{2}a^* \exp(-jt).\end{aligned}$$

Подставим полученные выражения для производных $\ddot{x}$ и $\dot{x}$ в уравнение (2.84):

$$\begin{aligned}\dot{a} &= \frac{1}{2}[\varepsilon a - \frac{1}{4}|a|^2 a + (\frac{1}{4}|a|^2 a^* - \varepsilon a^*) \exp(-2jt) - \frac{1}{4}a^3 \exp(2jt) + \\ &+ \frac{1}{4}(a^*)^3 \exp(-4jt)] + \xi \exp(j\Delta t).\end{aligned}\quad (2.85)$$

Усредним за период данное выражение, интегрируя по времени в интервале $[-\pi, \pi]$. При этом будем полагать, что амплитуда a медленно меняется на этом интервале и ее можно вынести за знак интеграла как постоянную величину. В результате получаем уравнение

$$\dot{a} = \frac{\varepsilon}{2}a - \frac{1}{8}|a|^2 a + \xi \exp(j\Delta t), \quad (2.86)$$

где $\xi = B/2$, $\Delta = \Omega - 1$ – расстройка между частотой внешнего воздействия и собственной частотой автоколебаний генератора.

Комплексную амплитуду для укороченного уравнения запишем в полярной форме:

$$a = \rho \exp(j(\varphi + \Delta t)). \quad (2.87)$$

Подставляя его в (2.86) и разделяя действительную и мнимую части, получаем систему уравнений для амплитуды и фазы колебаний

$$\dot{\rho} = \frac{\varepsilon}{2}\rho - \frac{1}{8}\rho^3 + \xi \cos(\varphi), \quad (2.88)$$

$$\dot{\varphi} = -\Delta - \frac{\xi}{\rho} \sin(\varphi). \quad (2.89)$$

Если амплитуда воздействия B , а следовательно, и параметр ξ малы, то в уравнении (2.88) слагаемым $\xi \cos(\varphi)$ можно пренебречь:

$$\dot{\rho} = \frac{\varepsilon}{2}\rho - \frac{1}{8}\rho^3, \quad (2.90)$$

$$\dot{\varphi} = -\Delta - \frac{\xi}{\rho} \sin(\varphi) \quad (2.91)$$

и из условия $\dot{\rho} = 0$ получим значение установившейся амплитуды колебаний равной амплитуде в автономном режиме: $\rho \simeq 2\sqrt{\varepsilon}$. При этом

$$\dot{\varphi} \simeq -\Delta - \frac{\xi}{2\sqrt{\varepsilon}} \sin(\varphi).$$

Случаю синхронизации будет соответствовать постоянная начальная фаза колебаний, т.е. $\dot{\varphi} = 0$, или

$$\Delta = -\frac{\xi}{2\sqrt{\varepsilon}} \sin(\varphi). \quad (2.92)$$

Поскольку $|\sin(\varphi)| \leq 1$, то синхронизация может осуществляться, если

$$|\Delta| \leq \frac{\xi}{2\sqrt{\varepsilon}}.$$

Таким образом, прямые, задаваемые линейными уравнениями,

$$\Delta = \pm \frac{\xi}{2\sqrt{\varepsilon}}, \quad (2.93)$$

определяют границы области синхронизации при малой амплитуде и близкой частоте воздействия.

Пусть значение частоты и амплитуды воздействия выбраны внутри области синхронизации. Для определенности пусть частота внешнего воздействия меньше собственной частоты автономного генератора, т.е. $\Delta < 0$. Уравнение (2.92) имеет два решения:

$$\varphi_1 = \arcsin \frac{-2\sqrt{\varepsilon}\Delta}{\xi} \quad (2.94)$$

и

$$\varphi_2 = \pi - \arcsin \frac{-2\sqrt{\varepsilon}\Delta}{\xi}. \quad (2.95)$$

Таким образом, система уравнений (2.90, 2.91) имеет две неподвижные точки: $(2\sqrt{\varepsilon}, \varphi_1)$ и $(2\sqrt{\varepsilon}, \varphi_2)$. Определим их тип и устойчивость в радиальном (вдоль ρ) и в азимутальном (вдоль φ) направлениях.

- Первое из уравнений (2.90) не содержит зависимости от переменной φ , поэтому устойчивость в радиальном направлении не зависит от значения фазы φ . Найдем значение производной от правой части уравнения (2.90) в точке $2\sqrt{\varepsilon}$. Оно равно $-\varepsilon$. Следовательно, при положительных значениях параметра ε (т.е. при тех значениях, при которых в генераторе Ван дер Поля существуют автоколебания) обе неподвижные точки устойчивы в радиальном направлении.
- Для определения устойчивости в азимутальном направлении найдем значения производной от правой части уравнения (2.91) для значений φ_1 и φ_2 . Для первой точки получаем величину $(-\frac{\xi}{2\sqrt{\varepsilon}} \cos \varphi_1)$, для второй $-(\frac{\xi}{2\sqrt{\varepsilon}} \cos \varphi_2)$. Поскольку $\cos \varphi_1 \geq 0$, а $\cos \varphi_2 \leq 0$, то первая из указанных неподвижных точек устойчива также и в азимутальном направлении, а вторая в этом направлении неустойчива. Первая соответствует устойчивому предельному циклу, колебания на котором наблюдаются в системе, вторая – седловому, неустойчивое многообразие которого образует поверхность двумерного тора.

Проведенный анализ показал, что в случае малой расстройки Δ и малой амплитуды воздействия ξ в системе существует область синхронизации посредством захвата частоты. Амплитуда синхронных колебаний близка к $2\sqrt{\varepsilon}$, частота колебаний равна частоте вынуждающей силы, а начальная фаза определяется выражением (2.94). При большой амплитуде воздействия уже не удастся разделить систему уравнений (2.88, 2.89) и, следовательно, в этом случае необходимо численно находить для данных трансцендентных уравнений значения неподвижных точек и проводить их численный анализ на устойчивость.

2.4.2. Задачи и упражнения

Задача 2.4.1

Покажите, что ламповый генератор, схема которого изображена на рис. 2.2, с анодно-сеточной характеристикой вида

$$I_a = I_0 + S_0 u - S_2 u^3$$

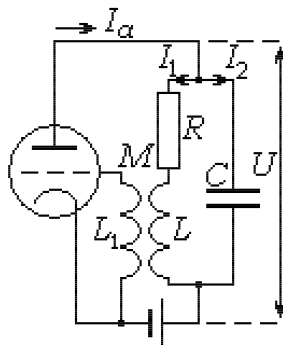


Рис. 2.2

описывается уравнением Рэля

$$\ddot{x} - \varepsilon (1 - \dot{x}^2) \dot{x} + x = 0.$$

Задача 2.4.2

Покажите, что генератор, схема которого изображена на рис. 2.3, с вольт-амперной характеристикой нелинейного элемента

$$I = -\alpha u + \beta u^3$$

описывается уравнением Ван дер Поля

$$\ddot{x} - \varepsilon (1 - x^2) \dot{x} + x = 0.$$

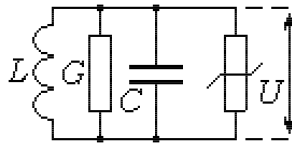


Рис. 2.3

Задача 2.4.3

Покажите, что RC -генератор на рис. 2.4, характеристику усилителя которого можно аппроксимировать функцией

$$U_{out} = kU_{in} - k_1 U_{in}^3$$

(где U_{in} и U_{out} – входное и выходное напряжение на усилителе), описывается уравнением Ван дер Поля

$$\ddot{x} - (\varepsilon - x^2) \dot{x} + x = 0.$$

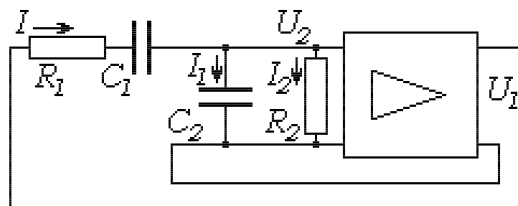


Рис. 2.4

Задача 2.4.4

Найдите замену переменных, с помощью которой уравнение Ван дер Поля

$$\ddot{x} - \varepsilon (1 - x^2) \dot{x} + x = 0$$

можно записать в виде

$$\ddot{y} - (\lambda - y^2) \dot{y} + y = 0.$$

Задача 2.4.5

Показанные на рис. 2.2 – 2.4 схемы генераторов можно описывать и уравнением Ван дер Поля, и уравнением Рэля. Найдите замену переменных, при которой уравнение Рэля

$$\ddot{x} - (\lambda - \dot{x}^2) \dot{x} + x = 0$$

переходит в уравнение Ван дер Поля

$$\ddot{y} - (\varepsilon - y^2) \dot{y} + y = 0.$$

Задача 2.4.6

Уравнение генератора Ван дер Поля имеет вид

$$\ddot{x} - (\varepsilon - x^2) \dot{x} + x = 0.$$

Методом усреднения Ван дер Поля получить укороченные уравнения для амплитуды и фазы. Найти зависимость амплитуды установившихся колебаний от параметра ε .

Задача 2.4.7

Исследуйте устойчивость предельного цикла в генераторе Ван дер Поля

$$\ddot{x} - (\varepsilon - x^2) \dot{x} + x = 0$$

при малых положительных значениях управляющего параметра ε . Получите выражение для ляпуновского характеристического показателя h .

Задача 2.4.8

Система уравнений

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (\varepsilon - x^2 - y^2) x + y, \\ \dot{y} &= (\varepsilon - x^2 - y^2) y - x\end{aligned}$$

описывает автоколебательную систему. Используя полярные координаты, решите систему уравнений и найдите зависимость амплитуды установившихся колебаний от параметра ε .

Задача 2.4.9

Используя укороченные уравнения для амплитуды и фазы

$$\begin{aligned}\dot{a} &= \alpha a - \mu a^3, \\ \dot{\phi} &= \beta - \nu a^2,\end{aligned}$$

опишите суперкритическую (прямую) бифуркацию Андронова – Хопфа. Постройте бифуркационную диаграмму в зависимости от параметра α .

Задача 2.4.10

Используя укороченные уравнения для амплитуды и фазы

$$\begin{aligned}\dot{a} &= \alpha a - \mu a^3, \\ \dot{\phi} &= \beta - \nu a^2,\end{aligned}$$

опишите субкритическую (обратную) бифуркацию Андронова – Хопфа. Постройте бифуркационную диаграмму в зависимости от параметра α .

Задача 2.4.11

Синхронизация периодических автоколебаний в генераторе Ван дер Поля под внешним воздействием описывается уравнением

$$\ddot{x} - (\varepsilon - x^2) \dot{x} + x = B \sin(\Omega t).$$

Используя метод медленно меняющихся комплексных амплитуд, получите укороченные уравнения для амплитуды и фазы. Для случая малой амплитуды внешнего воздействия, учитывая только динамику фазы, определите границу области синхронизации на плоскости параметров $(\Omega - B)$.

Задача 2.4.12

Уравнение генератора с жестким возбуждением имеет вид

$$\ddot{x} - (\lambda - \gamma x^2 - x^4) \dot{x} + x = 0.$$

Используя метод усреднения Ван дер Поля, получите укороченные уравнения для амплитуды и фазы автоколебаний, найдите значения параметров, при которых уравнение генератора имеет: а) одно решение, б) три решения.

Задача 2.4.13

Используя метод медленно меняющихся комплексных амплитуд, получите укороченные уравнения для амплитуды и фазы осциллятора Ван дер Поля – Дуффинга

$$\ddot{x} - (\varepsilon - x^2) \dot{x} + x + \mu x^3 = 0.$$

Определите стационарное значение амплитуды автоколебаний и зависимость частоты автоколебаний от амплитуды.

Задача 2.4.14

Для осциллятора Ван дер Поля – Дуффинга при внешнем гармоническом воздействии

$$\ddot{x} - (\varepsilon - x^2) \dot{x} + x + \mu x^3 = B \sin(\omega t)$$

получите укороченные уравнения для амплитуды и фазы. Постройте область синхронизации на плоскости параметров $(B - \omega)$ для случая малых амплитуд внешнего воздействия, учитывая только динамику фазы.

Задача 2.4.15

Методом усреднения Ван дер Поля найдите приближенное решение уравнения Рэлея

$$\ddot{x} - (\lambda - \dot{x}^2) \dot{x} + x = 0.$$

Определите зависимость стационарного значения амплитуды автоколебаний от параметра λ и зависимость частоты автоколебаний от амплитуды.

Задача 2.4.16

Используя энергетический метод Теодорчика, найдите приближенное решение уравнения

$$\ddot{x} - \varepsilon (1 - \dot{x}^2) \dot{x} + x = 0.$$

Определите стационарное значение амплитуды автоколебаний и зависимость частоты автоколебаний от амплитуды.

Задача 2.4.17

Исследуйте переходные процессы установления квазигармонического режима автоколебаний в генераторе Ван дер Поля, используя укороченные уравнения для амплитуды и фазы

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \alpha a - \mu a^3, \\ \dot{\phi} &= \beta - \nu a^2. \end{aligned}$$

Задача 2.4.18

Используя энергетический метод Теодорчика, найдите приближенное решение уравнения Ван дер Поля – Дуффинга

$$\ddot{x} - \varepsilon (1 - x^2) \dot{x} + x + \mu x^3 = 0.$$

Определите стационарное значение амплитуды автоколебаний и зависимость частоты автоколебаний от амплитуды.

Задача 2.4.19

Получите выражение для ляпуновского характеристического показателя предельного цикла в осцилляторе Рэлея

$$\ddot{x} - (\lambda - \dot{x}^2) \dot{x} + x = 0.$$

При этом используйте приближенное решение для квазигармонического режима. Определите область устойчивости предельного цикла по параметру λ .

Задача 2.4.20

Получите выражения для ляпуновских характеристических показателей предельного цикла в осцилляторе Ван дер Поля – Дуффинга

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2) \dot{x} + x + \mu x^3 = 0.$$

При этом используйте приближенное решение для квазигармонического режима. Определите область устойчивости предельного цикла по параметрам λ и μ .

Задача 2.4.21

Используя укороченные уравнения для амплитуды и фазы, опишите бифуркацию рождения предельного цикла в осцилляторе Рэлея

$$\ddot{x} - (\lambda - \dot{x}^2) \dot{x} + x = 0.$$

Задача 2.4.22

Используя укороченные уравнения для амплитуды и фазы, опишите бифуркацию рождения предельного цикла в осцилляторе Ван дер Поля – Дуффинга

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2) \dot{x} + x + \mu x^3 = 0.$$

Определите область устойчивости предельного цикла по параметрам λ и μ .

2.5 Ответы к задачам

Раздел 2.1

2.1.4 В фазовом пространстве имеются четыре особых точки: $P_0 : (x = 0, y = 0)$ – седло, $P_1 : (x = 0, y = 1)$ – седло, $P_2 : (x = 1, y = 0)$ – седло, $P_3 : \left(x = \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma}, y = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma}\right)$ – центр.

2.1.5 Имеется одна точка равновесия $P : (x = 0, y = 0)$. Если $\varepsilon < 0$, точка P – устойчивый фокус. Если $\varepsilon > 0$, точка P – неустойчивый фокус.

2.1.6 В фазовом пространстве осциллятора Ван дер Поля имеется одна точка равновесия $P : (x = 0, y = 0)$. Если $-2 < \varepsilon < 0$, точка P – устойчивый фокус. Если $0 < \varepsilon < 2$, точка P – неустойчивый фокус. Если $\varepsilon < -2$, точка P – устойчивый узел. Если $\varepsilon > 2$, точка P – неустойчивый узел.

2.1.7 В фазовом пространстве осциллятора Рэля имеется одна точка равновесия $P : (x = 0, y = 0)$. Если $-2 < \lambda < 0$, точка P – устойчивый фокус. Если $0 < \lambda < 2$, точка P – неустойчивый фокус. Если $\lambda < -2$, точка P – устойчивый узел. Если $\lambda > 2$, точка P – неустойчивый узел.

2.1.8 Если $\beta > 0$, на фазовой плоскости осциллятора Дуффинга существует одна особая точка $P_1 : (x_1 = 0, y_1 = 0)$. Если $\beta < 0$, то на фазовой плоскости существует три особые точки $P_1 : (x_1 = 0, y_1 = 0)$, $P_2 : (x_2 = \sqrt{-\beta}, y_2 = 0)$, $P_3 : (x_3 = -\sqrt{-\beta}, y_3 = 0)$. При $\alpha > 0, \beta > \frac{\alpha^2}{4}$ точка P_1 – устойчивый фокус. При $\alpha > 0, 0 < \beta < \frac{\alpha^2}{4}$ точка P_1 – устойчивый узел. При $\alpha < 0, \beta > \frac{\alpha^2}{4}$ точка P_1 – неустойчивый фокус. При $\alpha < 0, 0 < \beta < \frac{\alpha^2}{4}$ точка P_1 – неустойчивый узел. С уменьшением β при пересечении линии $\beta = 0$ неподвижная точка P_1 демонстрирует бифуркацию вил.

2.1.11 Единственное состояние равновесия, расположенное в начале координат $x = 0, y = 0$. Собственные значения $\mu_{1,2} = -\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - 1}$.

2.1.13 $P : (x = 0, y = 0), \mu_{1,2} = \frac{\varepsilon}{2} \pm \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4} - 1}$.

2.1.14 $P : (x = 0, y = 0, z = 0), \mu_1 = -g, \mu_{2,3} = \frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2}{4} - 1}$.

2.1.16 $P_1 : \left(x_1 = \frac{b-a}{b+1}, y_1 = 0, z_1 = -\frac{b-a}{b+1}\right), P_2 : (x_2 = 0, y_2 = 0, z_2 = 0), P_3 : \left(x_3 = -\frac{b-a}{b+1}, y_3 = 0, z_3 = \frac{b-a}{b+1}\right)$.

2.1.17 При $\mu > 2\alpha$ существуют две неподвижные точки

$$P_1 : \left(x_1 = \frac{\mu}{2} + \sqrt{\frac{\mu^2}{4} - \alpha^2}, y_1 = -\frac{\mu}{2\alpha} - \sqrt{\frac{\mu^2}{4\alpha^2} - 1}, z_1 = \frac{\mu}{2\alpha} + \sqrt{\frac{\mu^2}{4\alpha^2} - 1} \right) \text{ и}$$

$$P_2 : \left(x_2 = \frac{\mu}{2} - \sqrt{\frac{\mu^2}{4} - \alpha^2}, y_2 = -\frac{\mu}{2\alpha} + \sqrt{\frac{\mu^2}{4\alpha^2} - 1}, z_2 = \frac{\mu}{2\alpha} - \sqrt{\frac{\mu^2}{4\alpha^2} - 1} \right).$$

При $\mu = 2\alpha$ точки P_1 и P_2 сливаются в одну с координатами $x = \alpha$, $y = -1$, $z = 1$. При $\mu < 2\alpha$ неподвижные точки исчезают.

$$\begin{aligned} 2.1.18 \quad & P_1 : (x_1 = 0, y_1 = 0, z_1 = 0), \\ & P_2 : (x_2 = \sqrt{\beta(\rho - 1)}, y_2 = \sqrt{\beta(\rho - 1)}, z_2 = \rho - 1), \\ & P_3 : (x_3 = -\sqrt{\beta(\rho - 1)}, y_3 = -\sqrt{\beta(\rho - 1)}, z_3 = \rho - 1), \\ & \lambda_1 = -\beta, \\ & \lambda_{2,3} = -\frac{\sigma+1}{2} \pm \sqrt{\frac{(\sigma+1)^2}{4} - \sigma(1 - \rho)}. \end{aligned}$$

Раздел 2.2

2.2.1 Второе и первое уравнения связаны заменой $x_n = ry_n$, $\lambda = r$. Третье уравнение преобразуется к первому при замене $x_n = b(z_n - \frac{1}{2})$, $\lambda = b\frac{b-2}{4}$.

$$\begin{aligned} 2.2.3 \quad & P_1 : \left(x_1 = -\frac{1+b}{2} + \sqrt{\frac{(1+b)^2}{4} + \lambda}, y_1 = b\frac{1+b}{2} - b\sqrt{\frac{(1+b)^2}{4} + \lambda} \right), \\ & P_2 : \left(x_2 = -\frac{1+b}{2} - \sqrt{\frac{(1+b)^2}{4} + \lambda}, y_2 = b\frac{1+b}{2} + b\sqrt{\frac{(1+b)^2}{4} + \lambda} \right), \\ & \mu_1 = -1 \text{ или } \mu_2 = -1, \\ & \text{где } \mu_{1,2} = -x_{1,2} \pm \sqrt{x_{1,2}^2 - b}, \quad x_{1,2} = -\frac{1+b}{2} \pm \sqrt{\frac{(1+b)^2}{4} + \lambda}. \end{aligned}$$

2.2.6 $P_1 : (x_1 = 0)$, $P_{2,3} : (x_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{a-2}{a}})$. P_1 существует при любых a , является устойчивой при $0 < a < 2$, демонстрирует бифуркацию вил при $a = 2$ ($\mu = +1$). $P_{2,3}$ существуют при $a > 2$, являются устойчивыми при $2 < a < 3$, демонстрируют бифуркации удвоения периода при $a = 3$ ($\mu = -1$).

$$2.2.7 \quad P_1 : (x_1 = 0, y_1 = 0), P_{2,3} : (x_{2,3} = \pm\sqrt{d-b-1}, y_{2,3} = \pm\sqrt{d-b-1}).$$

$$2.2.8 \quad P_1 : (x_1 = 0), P_2 : (x_2 = \frac{1}{2-a}).$$

$$2.2.10 \quad \bar{S}_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \lambda}.$$

$$2.2.11 \quad u_{n+1} = \lambda - u_n^2 - v_n^2, \quad v_{n+1} = 2(1 - 2\varepsilon)v_n u_n, \quad u_{n+1} = \lambda - u_n^2.$$

$$2.2.12 \quad \mu_{\perp} = -2\bar{S}_i(1 - 2\varepsilon) - \text{трансверсальный ляпуновский показатель};$$

$\mu_{\parallel} = -2\bar{S}_i$ – тангенциальный ляпуновский показатель;

$$\mu_{\perp} = (1 - 2\varepsilon)\mu_{\parallel}; \quad \bar{S}_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \lambda}.$$

$$\mathbf{2.2.13} \quad \bar{S}_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \lambda}.$$

$$\mathbf{2.2.14} \quad u_{n+1} = \lambda - u_n^2 - v_n^2, \quad v_{n+1} = -2v_n [\varepsilon + u_n], \quad u_{n+1} = \lambda - u_n^2.$$

$\mathbf{2.2.15} \quad \mu_{\perp} = -2\bar{S}_i - 2\varepsilon$ – трансверсальный ляпуновский показатель;

$\mu_{\parallel} = -2\bar{S}_i$ – тангенциальный ляпуновский показатель;

$$\mu_{\perp} = \mu_{\parallel} - 2\varepsilon; \quad \bar{S}_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \lambda}.$$

$$\mathbf{2.2.16} \quad C_{1,2} : \left(x_{1,2} = \frac{1-p_1}{2} \pm \sqrt{\frac{(1-p_1)^2}{4} - p_2}, \quad y_{1,2} = (1-p_1) \left[\frac{1-p_1}{2} \pm \sqrt{\frac{(1-p_1)^2}{4} - p_2} \right] \right).$$

$\mathbf{2.2.19} \quad r_1 = 0.75$ – точка бифуркации удвоения периода;

$r_2 = -0.25$ – точка бифуркации слияния и исчезновения орбит.

$$\mathbf{2.2.20} \quad b_1 = 3 \text{ и } b_2 = 1.$$

Раздел 2.3

$$\mathbf{2.3.6} \quad x(t) \simeq a \cos(t + \phi) + \varepsilon \left[-\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{6} \cos 2(t + \phi) \right].$$

$$\mathbf{2.3.7} \quad U(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}\beta x^3 + C. \quad v = \sqrt{2E - 2C - x^2 - \frac{2}{3}\beta x^3}.$$

$$\mathbf{2.3.8} \quad \omega(a) \simeq 1 + \mu \frac{3a^2}{8}.$$

$$\mathbf{2.3.9} \quad \dot{\rho} = -\frac{\alpha}{2}\rho, \quad \dot{\varphi} = \frac{3\gamma}{8\omega_0}\rho^2.$$

$$\mathbf{2.3.10} \quad x(t) \simeq \rho_0 \cos \left[\left(\omega_0 + \frac{3\gamma}{8\omega_0}\rho_0^2 \right) t \right].$$

$$\mathbf{2.3.11} \quad \omega(\rho_0) = \omega_0 + \frac{5}{16} \frac{\gamma \rho_0^4}{\omega_0}.$$

$$\mathbf{2.3.12} \quad x(t) = \rho_0 \exp\left(-\frac{\alpha}{2}t\right) \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{3\beta\rho_0^2}{8\omega_0} \frac{1 - \exp(-\alpha t)}{\alpha}\right).$$

$$\mathbf{2.3.13} \quad T(A) = 2\sqrt{\frac{2A}{g}}, \quad \omega(A) = \pi\sqrt{\frac{g}{2A}}.$$

$$\mathbf{2.3.15} \quad \dot{\rho} = -\frac{\alpha}{2}\rho + \frac{B}{2\omega_0} \sin \Psi, \quad \dot{\Psi} = \left(\delta - \frac{3\mu}{8\omega_0}\rho^2 \right) + \frac{B}{2\omega_0\rho} \cos \Psi,$$

$$\Psi = \delta t - \varphi, \quad \delta = \omega - \omega_0.$$

Раздел 2.4

$$2.4.4 \quad x = \frac{y}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad \varepsilon = \lambda.$$

$$2.4.5 \quad \dot{x} = \frac{y}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad \lambda = \varepsilon.$$

$$2.4.6 \quad \dot{\rho} = \frac{\varepsilon}{2}\rho - \frac{1}{8}\rho^3, \quad \dot{\varphi} = 0, \quad \rho = 2\sqrt{\varepsilon}.$$

$$2.4.7 \quad h = -\varepsilon.$$

$$2.4.8 \quad x(t) = \rho(t) \cos(t + \varphi_0), \quad y(t) = -\rho(t) \sin(t + \varphi_0),$$

$$\rho(t) = \left[\left(\frac{1}{\rho_0^2} - \frac{1}{\varepsilon} \right) \exp(-2\varepsilon t) + \frac{1}{\varepsilon} \right]^{-\frac{1}{2}}, \text{ при } t \rightarrow \infty \text{ амплитуда } \rho(t) \text{ стремится}$$

к стационарному значению $\bar{\rho} = \sqrt{\varepsilon}$.

$$2.4.13 \quad \bar{\rho} = 2\sqrt{\varepsilon}, \quad \omega(\bar{\rho}) = 1 + \frac{3\mu}{8}\bar{\rho}^2.$$

$$2.4.15 \quad x(t) = \sqrt{\lambda / \left[0.75 - \left(0.75 - \frac{\lambda}{\rho_0^2} \right) \exp(-\lambda t) \right]} \cos(t + \varphi_0), \quad \bar{\rho} = \sqrt{\frac{4}{3}\lambda}.$$

В данном приближении частота автоколебаний $\omega = 1$ и от амплитуды автоколебаний не зависит.

$$2.4.19 \quad h = -\lambda. \text{ Предельный цикл устойчив при } \lambda > 0.$$

$$2.4.20 \quad h = -\lambda. \text{ Предельный цикл устойчив при } \lambda > 0.$$

Список литературы

1. *Мандельштам Л.И.* Лекции по теории колебаний. М.: Наука, 1972.
2. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959; М.: Наука, 1981.
3. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1958.
4. *Горелик Г.С.* Колебания и волны. М.: Физматлит, 1959.
5. *Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1976.
6. *Ланда П.С.* Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980.
7. *Моисеев Н.Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1981.
8. *Блехман И.И.* Синхронизация в природе и технике. М.: Наука, 1981.
9. *Магнус К.* Колебания: Введение в исследование колебательных систем. М.: Мир, 1982.
10. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.
11. *Берже П., Помо И., Видаль Л.* Порядок в хаосе. М.: Мир, 1991.
12. *Карлов Н.В., Кириченко Н.А.* Колебания, волны, структуры. М.: Физматлит, 2001.
13. *Гукенхуймер Дж., Холмс Ф.* Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. М.; Ижевск: Изд-во института компьютерных исследований, 2002.
14. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М.* Нелинейные колебания: Учеб. пособие для вузов. М.: Изд-во физ.-мат.лит., 2002.
15. *Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальные нелинейные явления. М.: Техносфера, 2003.
16. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е. и др.* Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. М.; Ижевск: Изд-во института компьютерных исследований, 2003.
17. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М., Исаева О.Б.* Нелинейность: от колебаний к хаосу (задачи и учебные программы). М.; Ижевск: Изд-во НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2006.
18. *Анищенко В.С.* Знакомство с нелинейной динамикой. 3-е изд. М.: УРС, 2007.

Часть 3

СТАТИСТИЧЕСКАЯ РАДИОФИЗИКА

Введение

Случайные воздействия, неизбежно присутствующие в любой реальной системе, приводят к флуктуациям характеристик, задающих состояние системы. В радиофизике такие флуктуации традиционно называют шумом. С учетом шума все процессы в радиофизических системах следует рассматривать как случайные и применять к ним соответствующие статистические методы описания. Исследование стохастических (случайных) процессов в колебательных и волновых системах составляет предмет статистической радиофизики в современном понимании.

В данной части пособия приведены задачи по трем разделам курса “Статистическая радиофизика”:

3.1. Основы теории случайных процессов.

3.2. Преобразование случайных процессов детерминированными системами.

3.3. Марковские процессы и стохастические дифференциальные уравнения.

В разделе 3.1 рассматриваются основные характеристики случайных процессов, свойства стационарности, эргодичности, спектры стационарных случайных процессов. В разделе 3.2 приведены задачи, связанные с преобразованием характеристик случайных процессов безынерционными и линейными инерционными системами с заданными параметрами. Также в данный раздел включены некоторые задачи по линейной фильтрации шума. Раздел 3.3 посвящен марковским процессам. Рассматриваются марковские цепи, одношаговые процессы и диффузионные процессы, задаваемые стохастическими дифференциальными уравнениями. Каждый раздел сопровождается краткой теорией, включающей основные определения и формулы, необходимые для решения задач, и примерами решения некоторых задач. Отдельно собраны ответы к большинству задач. Кроме того, приведены образцы тестов для проверки знаний студентов по трем указанным разделам курса “Статистическая радиофизика”. Более подробные теоретические сведения и методы решения задач можно найти в [1 – 16].

3.1 Основы теории случайных процессов

3.1.1. Краткие теоретические сведения

Случайный (стохастический) процесс – это процесс изменения состояния системы во времени, протекающий по вероятностным (статистическим) законам. Пусть множество V значений переменной x есть пространство состояний системы. Величина x может быть векторной, скалярной, вещественной или комплексной. Случайный процесс описывается случайной функцией $X(t)$, принимающей значения во множестве V , где аргумент t обычно имеет смысл времени. Для любого фиксированного t_0 значение $X_0 = X(t_0)$ – случайная величина. *Реализация случайного процесса* – это детерминированная функция $x(t)$, получаемая в результате измерения. Имеется статистический ансамбль реализаций случайного процесса. Множество состояний V может быть дискретным (конечным или счетным) или непрерывным. Время t может принимать непрерывное или счетное множество значений. В последнем случае говорят о *случайной последовательности* $X(n)$. Ниже приводятся основные характеристики для вещественных скалярных непрерывнозначных случайных процессов.

Случайный процесс $X(t)$ характеризуется n -мерной плотностью вероятности $p_n(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n)$, которая является вещественной функцией n текущих значений случайной переменной X в n произвольных момента времени и может быть задана следующим равенством:

$$\begin{aligned} p_n(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \\ = P\{X(t_1) \in [x_1; x_1 + dx_1] \Lambda \dots \Lambda X(t_n) \in [x_n; x_n + dx_n]\}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

или

$$\begin{aligned} p_n(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n) = \\ = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0, i=1,2,\dots,n} \frac{P\{X(t_1) \in [x_1; x_1 + \Delta x_1] \Lambda \dots \Lambda X(t_n) \in [x_n; x_n + \Delta x_n]\}}{\Delta x_1 \dots \Delta x_n}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $P\{\dots\}$ – вероятность события, обозначенного в фигурных скобках.

Плотность вероятности должна удовлетворять следующим требованиям:

1) $p_n(\dots) \geq 0$ (неотрицательность);

2) $\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p_n(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = 1$ (нормировка);

3) для любого $k < n$

$p_k(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_k, t_k) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p_n(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n) dx_{k+1} dx_{k+2} \dots dx_n$ (согласование);

4) для любых i и j

$p_n(x_1, t_1, \dots, x_i, t_i, \dots, x_j, t_j, \dots, x_n, t_n) = p_n(x_1, t_1, \dots, x_j, t_j, \dots, x_i, t_i, \dots, x_n, t_n)$ (инвариантность относительно перестановки пар аргументов);

5) если значения случайного процесса в некоторые моменты времени t_i^0 статистически независимы, то

$$p_n(x_1, t_1^0, x_2, t_2^0, \dots, x_n, t_n^0) = p_1(x_1, t_1^0) p_1(x_2, t_2^0) \dots p_1(x_n, t_n^0).$$

Кроме плотности вероятности случайный процесс можно описать с помощью n -мерной функции распределения $F_n(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n)$ и n -мерной характеристической функции $\Theta_X(u_1, t_1, u_2, t_2, \dots, u_n, t_n)$, которые связаны с плотностью вероятности следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} F_n(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n) &= \\ &= \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p_n(x'_1, t_1, x'_2, t_2, \dots, x'_n, t_n) dx'_1 dx'_2 \dots dx'_n; \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$p_n(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n) = \frac{\partial^n F_n(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}; \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \Theta_X(u_1, t_1, u_2, t_2, \dots, u_n, t_n) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p_n(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n) \exp(j \sum_{i=1}^n u_i x_i) dx_1 \dots dx_n; \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} p_n(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n) &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \Theta_X(u_1, t_1, \dots, u_n, t_n) \exp(-j \sum_{i=1}^n u_i x_i) du_1 \dots du_n, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $j = \sqrt{-1}$.

Случайный процесс $X(t)$ *полностью задан*, если для любого n известна одна из функций: $p_n(\dots)$; $F_n(\dots)$ или $\Theta_X(\dots)$. В этом случае можно найти любые статистические характеристики процесса.

Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – некоторая детерминированная функция своих аргументов. Пусть аргументы функции f есть значения случайного процесса $X(t)$ в n моментов времени: $X(t_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$. *Статистическим средним* (математическим ожиданием) функции $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ на ансамбле реализаций случайного процесса $X(t)$ называется следующая детерминированная функция аргументов t_i :

$$\bar{f}(t_1, t_2, \dots, t_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p_n(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n) f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n. \quad (3.7)$$

Далее будем обозначать операцию статистического усреднения с помощью угловых скобок $\langle \dots \rangle$:

$$\bar{f}(t_1, t_2, \dots, t_n) = \langle f(X_1, X_2, \dots, X_n) \rangle.$$

Моментными функциями (моментами) случайного процесса называют следующие статистические средние от степенных функций:

$$\langle X_1^{r_1} X_2^{r_2} \dots X_k^{r_k} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p_n(x_1, t_1, \dots, x_k, t_k) x_1^{r_1} \dots x_k^{r_k} dx_1 \dots dx_k \quad (3.8)$$

либо

$$\begin{aligned} & \langle \tilde{X}_1^{r_1} \tilde{X}_2^{r_2} \dots \tilde{X}_k^{r_k} \rangle = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p_n(x_1, t_1, \dots, x_k, t_k) (x_1 - \bar{X}(t_1))^{r_1} \dots (x_k - \bar{X}(t_k))^{r_k} dx_1 \dots dx_k, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где $X_i = X(t_i)$ – значения случайного процесса в моменты времени t_i ; а $\tilde{X}_i = X(t_i) - \bar{X}(t_i)$ – значения флуктуации (отклонения от среднего); $\bar{X}(t) = \langle X(t) \rangle$ – среднее значение случайного процесса. Моменты вида (3.8) называют *начальными*, а вида (3.9) – *центральными*. Число рассматриваемых отсчетов времени k называют *размерностью момента*, а сумму показателей степеней $\sum_{i=1}^k r_i = r$ – *порядком момента*. Моменты случайного процесса представляют собой детерминированные функции аргументов t_i или константы.

Наиболее важны моменты первого и второго порядка. К ним относятся следующие:

1) *среднее значение* случайного процесса (одномерный начальный момент порядка $r = 1$)

$$\bar{X}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x, t) x dx; \quad (3.10)$$

2) *средний квадрат* (одномерный начальный момент порядка $r = 2$)

$$\overline{X^2}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x, t) x^2 dx; \quad (3.11)$$

3) *дисперсия* (одномерный центральный момент порядка $r = 2$)

$$\sigma_X^2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x, t) (x - \bar{X}(t))^2 dx = \overline{X^2} - \bar{X}^2; \quad (3.12)$$

4) *ковариационная* (или автоковариационная) функция (двумерный начальный момент порядка $r = 2$)

$$K_X(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_2(x_1, t_1, x_2, t_2) x_1 x_2 dx_1 dx_2; \quad (3.13)$$

5) *корреляционная* (или автокорреляционная) функция (двумерный центральный момент порядка $r = 2$)

$$\begin{aligned} \Psi_X(t_1, t_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_2(x_1, t_1, x_2, t_2) (x_1 - \bar{X}(t_1)) (x_2 - \bar{X}(t_2)) dx_1 dx_2 = \\ &= K_X(t_1, t_2) - \bar{X}(t_1) \bar{X}(t_2). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Нормированную корреляционную функцию

$$R_X(t_1, t_2) = \frac{\Psi_X(t_1, t_2)}{\sqrt{\sigma_X^2(t_1)\sigma_X^2(t_2)}} \quad (3.15)$$

называют *коэффициентом корреляции*.

Корреляционная функция случайного процесса обладает следующими свойствами:

- 1) $\Psi_X^2(t_1, t_2) \leq \sigma_X^2(t_1)\sigma_X^2(t_2)$ (соответственно $|R_X(t_1, t_2)| \leq 1$);
- 2) $\Psi_X(t, t) = \sigma_X^2(t)$;
- 3) $\Psi_X(t_1, t_2) = \Psi_X(t_2, t_1)$;
- 4) если значения случайного процесса в некоторые моменты времени t'_1 и t'_2 статистически независимы, то они *некоррелированы*, т.е. $\Psi_X(t'_1, t'_2) = 0$. Обратное утверждение в общем случае не верно.

Начальные моменты случайного процесса являются коэффициентами в разложении n -мерной характеристической функции в ряд Маклорена:

$$\begin{aligned} \Theta_X(u_1, t_1, u_2, t_2, \dots, u_n, t_n) = \\ = \sum_{r_1=0}^{\infty} \dots \sum_{r_n=0}^{\infty} \frac{\langle X^{r_1}(t_1)X^{r_2}(t_2)\dots X^{r_n}(t_n) \rangle}{r_1!r_2!\dots r_n!} (ju_1)^{r_1}(ju_2)^{r_2}\dots(ju_n)^{r_n} \end{aligned} \quad (3.16)$$

и соответственно могут быть найдены по формуле

$$\langle X^{r_1}(t_1)\dots X^{r_n}(t_n) \rangle = (-j)^r \frac{\partial^r \Theta_X(u_1, t_1, \dots, u_n, t_n)}{\partial u_1^{r_1} \dots \partial u_n^{r_n}} \Big|_{u_1=u_2=\dots=u_n=0}, \quad (3.17)$$

где $j = \sqrt{-1}$; $r = \sum_{i=1}^n r_i$.

Аналогично (3.16) можно представить разложение натурального логарифма от характеристической функции:

$$\begin{aligned} \ln \Theta_X(u_1, t_1, u_2, t_2, \dots, u_n, t_n) = \\ = \sum_{r_1=0}^{\infty} \dots \sum_{r_n=0}^{\infty} \frac{\langle\langle X^{r_1}(t_1)X^{r_2}(t_2)\dots X^{r_n}(t_n) \rangle\rangle}{r_1!r_2!\dots r_n!} (ju_1)^{r_1}(ju_2)^{r_2}\dots(ju_n)^{r_n}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Коэффициенты в разложении, обозначенные в выражении (3.18) как $\langle\langle X^{r_1}(t_1)X^{r_2}(t_2)\dots X^{r_n}(t_n) \rangle\rangle$, называются *кумулянтными функциями* (*кумулянтами*) случайного процесса $X(t)$.

Среди множества случайных процессов выделяют *стационарные процессы*. Стационарность случайного процесса означает, что стохастическая система находится в установившемся состоянии и ее статистические характеристики не зависят от сдвига во времени. Различают стационарность в узком (строгом) смысле и стационарность в широком смысле.

Случайный процесс $X(t)$ называют *стационарным в узком (строгом) смысле*, если для любого целого положительного n , любой константы T и любых моментов времени t_i , $i = 1, 2, \dots, n$ имеет место равенство

$$p_n(x_1, t_1 \pm T, x_2, t_2 \pm T, \dots, x_n, t_n \pm T) = p_n(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n), \quad (3.19)$$

что означает инвариантность плотности вероятности (и, следовательно, всех статистических характеристик) относительно сдвига во времени. При этом одномерная плотность вероятности не зависит от времени ($p_1(x, t) \equiv p_1(x)$), и одномерные моменты являются константами. Двумерная плотность вероятности зависит только от разности моментов времени $\tau = t_2 - t_1$ ($p_2(x_1, t_1, x_2, t_2) \equiv p_2(x_1, x_2, \tau)$). Соответственно двумерные моменты являются функциями только τ .

Случайный процесс $X(t)$ называется *стационарным в широком смысле*, если выполняются условия

$$\langle X(t) \rangle \equiv \text{const}; \quad \Psi_X(t_1, t_2) = \Psi_X(t_2 - t_1); \quad \langle X^2(t) \rangle < \infty. \quad (3.20)$$

Для процессов с конечной “мощностью” (т.е. процессов, для которых $\langle X^2(t) \rangle < \infty$) из строгой стационарности следует стационарность в широком смысле. Из стационарности в широком смысле в общем случае не следует строгой стационарности.

Корреляционная функция стационарного процесса обладает следующими свойствами:

- 1) $|\Psi_X(\tau)| \leq \sigma_X^2$, где $\tau = t_2 - t_1$;
- 2) $\Psi_X(0) = \sigma_X^2$;
- 3) $\Psi_X(\tau) = \Psi_X(\tau)$ (четная функция);
- 4) если корреляционная функция непрерывна при $\tau = 0$, то она непрерывна для любого значения τ .

Стационарный в строгом смысле случайный процесс, для которого выполняется условие $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \Psi_X^2(\tau) = 0$, называется *процессом с перемешиванием*. Для него справедливо равенство

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} p_2(x_1, x_2, \tau) = p_1(x_1)p_1(x_2) \quad (\text{расцепление корреляций}).$$

Скорость перемешивания (расцепления корреляций) характеризуют *временем корреляции* $\tau_{\text{кор}}$. Чаще всего используют следующие два определения времени корреляции:

1. Время корреляции определяется как интервал, на котором огибающая корреляционной функции $\gamma_X(\tau)$ убывает в e раз (где e – основание натурального логарифма):

$$\gamma_X(\tau_{\text{кор}}) = \frac{\sigma_X^2}{e}.$$

2. Время корреляции определяется по формуле

$$\tau_{\text{кор}} = \frac{1}{\sigma_X^2} \int_0^\infty \gamma_X(\tau) d\tau.$$

Кроме свойства стационарности случайный процесс может обладать важным свойством *эргодичности*. Эргодичность случайного процесса означает, что можно получить определенные статистические характеристики процесса, заменяя статистическое усреднение (по ансамблю реализаций) усреднением по времени вдоль одной реализации. Можно выделить эргодичность относительно отдельных моментных функций, эргодичность 1-, 2-, ..., k -го порядка и, наконец, строгую эргодичность.

Пусть $X(t)$ – стационарный в строгом смысле случайный процесс. Среднее по времени значение детерминированной функции случайных аргументов $f[X(t_1), \dots, X(t_k)]$ вдоль некоторой реализации $x(t)$ случайного процесса определяется как

$$\begin{aligned} & \langle f[x(t_1), \dots, x(t_k)] \rangle_t = \\ & = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f[x(t_1), x(t_1 + \tau_1), \dots, x(t_1 + \tau_{k-1})] dt_1, \end{aligned} \quad (3.21)$$

где $\tau_i = t_{i+1} - t_i$. Символом $\langle \dots \rangle_t$ будем обозначать операцию усреднения по времени.

Эргодичность относительно среднего значения означает выполнение следующего равенства:

$$\text{l.i.m.}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x) x dx, \quad (3.22)$$

где слева стоит среднеквадратический предел случайной функции аргумента T . Если процесс $X(t)$ является эргодическим относительно среднего значения, то среднее по времени значение $\langle x(t) \rangle_t$ для почти любой реализации $x(t)$ равно среднему по ансамблю значению $\langle X(t) \rangle$:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x) x dx.$$

Аналогично можно ввести эргодичность относительно среднего квадрата, эргодичность относительно дисперсии и т.д.

Эргодичность первого порядка означает выполнение следующего равенства:

$$\text{l.i.m.}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f[X(t)] dt = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x) f(x) dx, \quad (3.23)$$

где $f(\dots)$ – любая детерминированная функция своего аргумента.

Если процесс $X(t)$ является эргодическим 1-го порядка, то он также является эргодическим относительно всех одномерных моментов. В этом случае все одномерные моменты можно найти, используя усреднение по времени вдоль почти любой реализации случайного процесса. Достаточным условием эргодичности 1-го порядка является свойство перемешивания.

Эргодичность второго порядка означает выполнение следующего равенства:

$$\begin{aligned} & \text{l.i.m.}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f[X(t), X(t + \tau)] dt = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_2(x_1, x_2, \tau) f(x) dx_1 dx_2, \end{aligned} \quad (3.24)$$

где $f(\dots)$ – любая детерминированная функция своих аргументов.

Если процесс $X(t)$ является эргодическим 2-го порядка, то он обладает свойством эргодичности относительно всех двумерных моментов. В этом случае все двумерные моменты можно найти, используя усреднение по времени вдоль почти любой реализации случайного процесса. Аналогично можно определить эргодичность 3-го, ..., k -го порядка. *Строгая эргодичность* означает, что все статистические характеристики случайного процесса можно найти, используя усреднение по времени.

По форме вероятностного распределения выделяют класс *нормальных процессов*. *Нормальным (гауссовым)* случайным процессом называется такой процесс $X(t)$, для которого любая совокупность значений $X(t_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ распределена по совместному нормальному (гауссову) закону:

$$p_n(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \text{Det} \hat{B}}} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \tilde{b}_{ik}(t_i, t_k) (x_i - \bar{X}(t_i)) (x_k - \bar{X}(t_k)) \right], \quad (3.25)$$

где $\hat{B}$ – матрица корреляций с элементами

$$b_{ik} = \langle (X(t_i) - \bar{X}(t_i))(X(t_k) - \bar{X}(t_k)) \rangle,$$

а $\tilde{b}_{ik}$ – элементы обратной матрицы $\hat{B}^{-1}$.

Одномерная гауссова плотность вероятности выражается формулой

$$p_1(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2(t)}} \exp \left[-\frac{(x - \bar{X}(t))^2}{2\sigma_X^2(t)} \right], \quad (3.26)$$

где $\bar{X}(t)$ – среднее значение; $\sigma_X^2(t)$ – дисперсия случайного процесса. Гауссово распределение со средним $\bar{X}(t) \equiv 0$ и дисперсией $\sigma_X^2(t) \equiv 1$ называется *стандартным*.

Нормальные случайные процессы обладают следующими важными свойствами:

1. Нормальный случайный процесс полностью задан, если известны функции $\bar{X}(t)$ и $\Psi_X(t_1, t_2)$.
2. Некоррелированные значения нормального случайного процесса статистически независимы.
3. Для нормальных случайных процессов с ограниченной дисперсией свойства стационарности в строгом смысле и в широком смысле совпадают.
4. Если $X_1(t), X_2(t), \dots, X_m(t)$ – совместно нормальные случайные процессы, то их линейная комбинация $X(t) = \sum_{i=1}^m a_i(t) X_i(t)$, где $a_i(t)$ – детерминированные множители, также является нормальным случайным процессом.
5. Случайный процесс, получаемый в результате линейного преобразования нормального случайного процесса, также является нормальным.

Во многих задачах используется *спектральное представление* случайных процессов. Пусть $X(t)$ – стационарный в широком смысле скалярный вещественный случайный процесс с ограниченным средним квадратом $\langle X^2(t) \rangle$. *Случайным спектром* процесса $X(t)$ на интервале $t \in [-T/2, T/2]$ называется преобразование Фурье от случайной функции:

$$X_T(j\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} X(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (3.27)$$

$X_T(j\omega)$ – это комплексная случайная функция аргумента ω . Статистической спектральной характеристикой стационарного случайного процесса служит *спектральная плотность мощности* (или просто *спектральная плотность*). Она может быть введена как

$$W_X(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \langle |X_T(j\omega)|^2 \rangle. \quad (3.28)$$

Можно показать, что для процесса с нулевым средним значением и достаточно быстро спадающей ковариационной функцией $K_X(\tau)$ из определения (3.28) следует, что спектральная плотность мощности есть прямое преобразование Фурье от ковариационной функции:

$$W_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (3.29)$$

Обратное преобразование Фурье дает ковариационную функцию:

$$K_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_X(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (3.30)$$

Можно определить спектральную плотность мощности для любого стационарного случайного процесса, воспользовавшись следующей *теоремой Винера – Хинчина*. Пусть $K_X(\tau)$ – ковариационная функция стационарного в широком смысле случайного процесса $X(t)$. Она всегда может быть представлена в виде интеграла Фурье – Стильтьеса:

$$K_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau} dZ_X(\omega), \quad (3.31)$$

где $Z_X(\tau)$ – монотонно неубывающая вещественная неотрицательная функция (интегральный спектр стационарного случайного процесса). Спектральная плотность мощности соответственно есть

$$W_X(\omega) = \frac{dZ_X(\omega)}{d\omega}. \quad (3.32)$$

Определенная таким образом функция $W_X(\omega)$ связана с ковариационной функцией преобразованиями Фурье (3.29) – (3.30). Однако при этом для некоторых частот она может принимать бесконечные значения.

Спектральная плотность мощности $W_X(\omega)$ вещественного стационарного случайного процесса $X(t)$ обладает следующими свойствами:

1. $W_X(\omega)$ – вещественная неотрицательная функция¹.
2. $W_X(\omega) = W_X(-\omega)$ (четная функция).
3. В силу четности функций $K_X(\tau)$ и $W_X(\omega)$ можно переписать (3.29) – (3.30) в виде

$$W_X(\omega) = 2 \int_0^{\infty} K_X(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau, \quad (3.33)$$

$$K_X(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} W_X(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega. \quad (3.34)$$

4. Функция $W_X(\omega)$ при некоторых значениях аргумента может иметь особенности в виде δ -функции (т.е. спектр в общем случае является смешанным), что связано с отсутствием требования интегрируемости ковариационной функции. Например, если среднее значение процесса $\bar{X}$ отлично от нуля, то

$$W_X(\omega) = W_{\tilde{X}}(\omega) + 2\pi\delta(\omega)\bar{X}^2, \quad (3.35)$$

где

$$W_{\tilde{X}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (3.36)$$

– спектр флуктуаций.

5. Средний квадрат и дисперсию процесса $X(t)$ можно найти, интегрируя спектральную плотность мощности $W_X(\omega)$ или $W_{\tilde{X}}(\omega)$ соответственно по всем частотам:

$$\begin{aligned} \bar{X}^2 &= K_X(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_X(\omega) d\omega, \\ \sigma_X^2 &= \Psi_X(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\tilde{X}}(\omega) d\omega. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Кроме спектральной плотности мощности $W_X(\omega)$, определенной как для положительных, так и для отрицательных значений аргумента, часто используют так называемую *одностороннюю (физическую)* спектральную плотность мощности случайного процесса, которая отлична от нуля только для положительных частот и определяется следующим образом:

$$W_X^+(\omega) = 2W_X(\omega) \text{ при } \omega \geq 0 \text{ и } W_X^+(\omega) = 0 \text{ при } \omega < 0. \quad (3.38)$$

Часто рассматривают такую характеристику, как *ширина спектра* стационарного случайного процесса. Если спектральная плотность мощности случайного процесса имеет один хорошо выраженный максимум,

¹Это утверждение справедливо и для комплексного стационарного случайного процесса.

то используются следующие два определения ширины спектра:

1. Эффективная ширина спектра

$$\Delta\omega_{\text{эфф}} = \frac{1}{W_{\tilde{X}}(\omega_0)} \int_0^\infty W_{\tilde{X}}(\omega) d\omega = \frac{\pi\sigma_X^2}{W_{\tilde{X}}(\omega_0)}, \quad (3.39)$$

где ω_0 – частота спектрального максимума.

2. Ширина спектра на уровне половинной мощности

$$\Delta\omega_{1/2} = \omega_2 - \omega_1, \quad \text{где } W_{\tilde{X}}(\omega_{1,2}) = \frac{1}{2}W_{\tilde{X}}(\omega_0). \quad (3.40)$$

Для ширины спектра и времени корреляции стационарного случайного процесса справедливы следующие соотношения (*соотношение неопределенности*): чем шире энергетический спектр случайного процесса, тем меньше время корреляции и, наоборот, чем уже спектр, тем больше время корреляции.

По спектральным свойствам различают широкополосные и узкополосные случайные процессы. Идеализированной моделью случайного процесса с бесконечно широким спектром является *белый шум* – абсолютно случайный, стационарный в строгом смысле процесс, обладающий постоянной спектральной плотностью мощности на всех частотах: $W_{\text{БШ}} \equiv W_0 \equiv \text{const}$. Легко видеть, что корреляционная функция такого процесса задается функцией Дирака ($\Psi_{\text{БШ}}(\tau) = W_0\delta(\tau)$), а дисперсия – бесконечна.

3.1.2. Задачи

Задача 3.1.1

Найти константу нормировки C , среднее значение $\bar{X}$, дисперсию σ_X^2 , функцию распределения $F(x)$ и характеристическую функцию $\Theta_X(u)$ для случайной величины X , график плотности вероятности которой приведен на рис. 3.1.

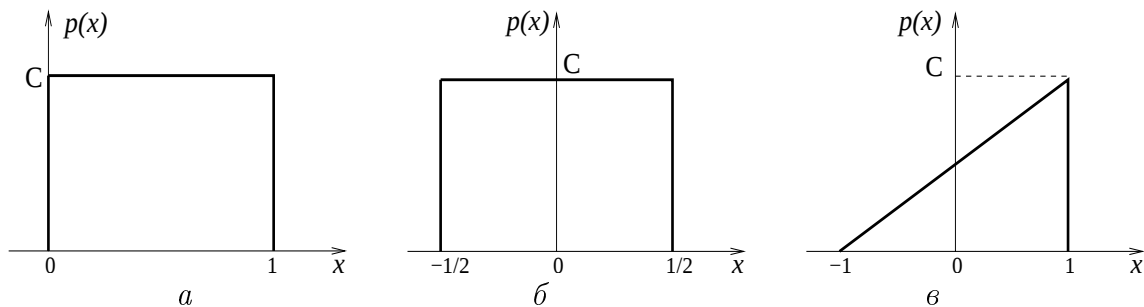


Рис. 3.1

Задача 3.1.2

Плотность вероятности случайной величины X задана выражением

$$p(x) = \begin{cases} Cx^{-4}, & x > 1, \\ 0, & x \leq 1. \end{cases}$$

Найти константу C , дисперсию σ_X^2 , вероятность P_1 , того, что случайная величина примет значение в интервале $[1; 2]$, вероятность P_2 , того, что при трех независимых испытаниях значение случайной величины ни разу не попадет в интервал $[1; 2]$.

Задача 3.1.3

Найти среднее значение и дисперсию случайной величины X , если ее характеристическая функция имеет вид

$$\text{а) } \Theta_X(u) = \frac{\lambda}{\lambda - ju};$$

$$\text{б) } \Theta_X(u) = \frac{2(1 - \cos u)}{u^2};$$

$$\text{в) } \Theta_X(u) = \frac{e^{ju} - 1}{ju};$$

$$\text{г) } \Theta_X(u) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2ju}}.$$

Найти константу C , плотности вероятностей величин X и Y и определить, являются ли величины X и Y статистически зависимыми.

Задача 3.1.4

Найти одномерную плотность вероятности случайной величины X , если её характеристическая функция имеет вид

$$\Theta_X(u) = 1 - |u|, \quad |u| \leq 1.$$

Задача 3.1.5

Совместная плотность вероятности системы двух случайных величин X и Y задается выражением

$$p(x, y) = \frac{C}{\pi} \exp(2x - x^2 - y^2 - 1).$$

Найти константу C , плотности вероятностей величин X и Y и определить, являются ли величины X и Y статистически зависимыми.

Задача 3.1.6

Совокупность двух случайных величин X , Y имеет следующие характеристики: $\bar{X} = 0$, $\bar{Y} = 2$, $\sigma_X^2 = 2$, $\sigma_Y^2 = 1$ и коэффициент корреляции $R_{XY} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Найти среднее значение и дисперсию случайной величины $Z = 2X - 3Y$.

Задача 3.1.7

X – нормально распределенная случайная величина со средним значением $\bar{X} = 0$ и дисперсией σ_X^2 . Найти характеристическую функцию случайной величины X^2 .

Задача 3.1.8

Имеется совокупность случайных величин X_1, X_2, X_3 . Выразить кумулянт $\langle\langle X_1 X_2 X_3 \rangle\rangle$ через средние значения случайных величин и их смешанные моменты.

Задача 3.1.9

Задана двумерная плотность вероятности случайного процесса $X(t)$:

$$p_2(x_1, t_1, x_2, t_2) = \frac{1}{2\pi} \left(1 + x_1 x_2 e^{-\alpha|t_2 - t_1|} \right) \exp \left[-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \right].$$

Найти:

- а) одномерную плотность вероятности $p_1(x, t)$, среднее значение $\bar{X}$ и дисперсию σ_X^2 ;
- б) корреляционную функцию $\Psi_X(t_1, t_2)$ и коэффициент корреляции $R_X(t_1, t_2)$;
- в) одномерную и двумерную характеристические функции $\Theta_X(u, t)$, $\Theta_X(u_1, t_1, u_2, t_2)$.

Задача 3.1.10

Найти среднее значение и ковариационную функцию $K_X(t_1, t_2)$ случайного процесса

$$X(t) = \frac{1}{2}(1 + \eta(t))\xi_1(t) + \frac{1}{2}(1 - \eta(t))\xi_2(t),$$

где $\eta(t)$, $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$ – статистически независимые стационарные случайные процессы. Причем средние значения $\bar{\eta}$ и $\bar{\xi}_{1,2}$ равны нулю, а ковариационные функции $K_\eta(\tau)$ и $K_{\xi_{1,2}}(\tau)$, где $\tau = t_2 - t_1$, считаются заданными.

Задача 3.1.11

Найти коэффициент корреляции $R_X(t_1, t_2)$ случайного процесса $X(t) = Y(t) - Y(t - t_0)$, если

$$\Psi_Y(t_1, t_2) = A e^{-\alpha|t_1 - t_2|}, \quad t_0 = \text{const.}$$

Задача 3.1.12

Найти корреляционную функцию случайного процесса

$$X(t) = (1 + \alpha)\xi(t),$$

где α – случайная величина со средним значением $\bar{\alpha}$ и дисперсией σ_α^2 ; $\xi(t)$ – не зависящий от α стационарный случайный процесс со средним значением $\bar{\xi}$ и корреляционной функцией $\Psi_\xi(\tau)$, $\tau = t_2 - t_1$.

Задача 3.1.13

Квазидетерминированный случайный процесс $X(t)$ определяется как

$$X(t) = a \cos(\omega_0 t + \phi),$$

где a и ω_0 – заданные константы; ϕ – случайная величина, равномерно распределенная в интервале $[-\pi, \pi]$. Найти среднее значение $\bar{X}$, корреляционную функцию $\Psi_X(t_1, t_2)$ и коэффициент корреляции $R_X(t_1, t_2)$ процесса $X(t)$.

Задача 3.1.14

Найти ковариационную функцию случайного процесса

$$X(t) = \alpha \cos(\omega_0 t + \phi),$$

где α и ϕ – случайные величины, совместная плотность вероятности которых есть

$$p(\alpha, \phi) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-\alpha^2/2} (1 + \alpha \cos \phi),$$

$$\phi \in [-\pi, \pi]; \alpha \in (-\infty, \infty).$$

Задача 3.1.15

Найти корреляционную функцию квазидетерминированного случайного процесса

$$X(t) = \alpha \cos \omega_0 t + \beta \sin \omega_0 t,$$

где ω_0 – заданная константа; α и β – статистически независимые вещественные случайные величины со средними значениями $\bar{\alpha} = \bar{\beta} = \alpha_0$ и дисперсиями $\sigma_\alpha^2 = \sigma_\beta^2 = \sigma^2$.

Задача 3.1.16

Найти корреляционную функцию квазидетерминированного случайного процесса

$$X(t) = \sum_{i=1}^m (\alpha_i \cos \omega_i t + \beta_i \sin \omega_i t),$$

где ω_i – заданные константы; α_i и β_i – статистически независимые вещественные случайные величины со средними значениями $\bar{\alpha} = \bar{\beta} = 0$ и дисперсиями $\bar{\alpha}_i^2 = \bar{\beta}_i^2 = \sigma_i^2$ $i = 1, 2, \dots, m$.

Задача 3.1.17

Найти коэффициент корреляции случайного процесса

$$X(t) = an(t) \cos(\omega_0 t + \phi),$$

где a и ω_0 – заданные константы; ϕ – случайная величина, равномерно распределенная в интервале $[-\pi, \pi]$; $n(t)$ – независимый от ϕ стационарный белый шум ($\bar{n}(t) \equiv 0$, $\langle n(t_1)n(t_2) \rangle = W_0 \delta(t_2 - t_1)$).

Задача 3.1.18

Доказать, что корреляционная функция не изменяется от добавления к случайному процессу любой неслучайной функции.

Задача 3.1.19

Найти корреляционную функцию случайного процесса $Z(t) = aX(t) + bY(t)$, где a и b – константы; $X(t)$ и $Y(t)$ – случайные процессы со следующими характеристиками:

$$\begin{aligned}\Psi_X(t_1, t_2) &= \exp(-\alpha|t_2 - t_1|); \quad \bar{X}(t) \equiv 0; \\ \Psi_Y(t_1, t_2) &= 2 \exp(-\beta|t_2 - t_1|) - 1; \quad \bar{Y}(t) \equiv 1; \\ \Psi_{XY}(t_1, t_2) &= 2 \exp(-\gamma|t_2 - t_1|).\end{aligned}$$

Задача 3.1.20

Найти одномерную плотность вероятности квазидетерминированного случайного процесса

$$X(t) = \alpha \cos \omega_0 t + \beta \sin \omega_0 t,$$

где ω_0 – заданная константа; α и β – статистически независимые вещественные случайные величины, распределенные по стандартному нормальному закону.

Задача 3.1.21

Найти одномерную плотность вероятности квазидетерминированного случайного процесса $X(t) = \alpha + \beta t$, где α и β – статистически независимые вещественные случайные величины, распределенные по гауссову закону со средними значениями $\bar{\alpha} = 0$ и $\bar{\beta} = 0$ и известными дисперсиями $\bar{\alpha}^2$ и $\bar{\beta}^2$.

Задача 3.1.22

Определить одномерную характеристическую функцию случайного процесса $Y(t) = aX(t) + b$, где a и b – константы; $X(t)$ – стационарный стандартный нормальный процесс.

Задача 3.1.23

Найти среднее значение случайного процесса

$$Z(t) = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{X(t)X(t+\theta)}{|X(t)X(t+\theta)|} \right],$$

где $X(t)$ – нормальный стационарный случайный процесс со средним значением $\bar{X}(t) \equiv 0$ и коэффициентом корреляции $R_X(\tau)$, $\tau = t_2 - t_1$.

Задача 3.1.24

Является ли стационарным в широком смысле случайный процесс

$$X(t) = a \cos(\omega_0 t + \phi),$$

где a и ω_0 – заданные константы; ϕ – случайная величина, равномерно распределенная в интервале $[-\pi, \pi]$?

Задача 3.1.25

Найти условия, при которых случайный процесс

$$X(t) = \alpha \cos(\omega_0 t + \phi)$$

будет стационарным в широком смысле. Известно, что ω_0 – константа, α и ϕ – случайные величины.

Задача 3.1.26

Найти условия, при которых случайный процесс

$$X(t) = \alpha \cos \omega_0 t + \beta \sin \omega_0 t$$

будет стационарным в широком смысле. Известно, что ω_0 – константа, α и β – случайные величины.

Задача 3.1.27

Является ли случайный процесс $Y(t) = X(t) + \alpha$ стационарным в широком смысле, если $X(t)$ – стационарный в широком смысле случайный процесс, а α – случайная величина, причем $\alpha = X(t_0)$?

Задача 3.1.28

Доказать, что случайный процесс

$$X(t) = \xi(t) \cos \omega_0 t + \eta(t) \sin \omega_0 t$$

является стационарным в широком смысле. Известно, что $\xi(t)$ и $\eta(t)$ – два стационарных и стационарно связанных в широком смысле случайных процесса, причем $\bar{\xi}(t) \equiv \bar{\eta}(t) \equiv 0$, $\Psi_\xi(\tau) \equiv \Psi_\eta(\tau)$ и $\Psi_{\xi\eta}(\tau) \equiv -\Psi_{\eta\xi}(\tau)$, $\tau = t_2 - t_1$.

Задача 3.1.29

Является ли квазидетерминированный случайный процесс

$$X(t) = a \cos(\omega_0 t + \phi)$$

а) эргодическим относительно среднего значения? б) эргодическим относительно корреляционной функции? Известно, что a и ω_0 – константы, а ϕ – случайная величина, равномерно распределенная в интервале $[-\pi, \pi]$.

Задача 3.1.30

Является ли квазидетерминированный случайный процесс

$$X(t) = \alpha \cos(\omega_0 t + \phi)$$

а) эргодическим относительно среднего значения? б) эргодическим относительно корреляционной функции? Известно, что ω_0 – константа, а α

и ϕ – независимые случайные величины, причем величина ϕ равномерно распределена в интервале $[-\pi, \pi]$.

Задача 3.1.31

Найти спектральную плотность мощности $W_X(\omega)$, эффективную ширину спектра $\Delta\omega_{\text{эф}}$ и ширину спектра на уровне половинной мощности $\Delta\omega_{0.5}$ для стационарного случайного процесса $X(t)$ с ковариационной функцией

$$\begin{aligned} \text{а) } K_X(\tau) &= \sigma_X^2 e^{-\alpha|\tau|}; \\ \text{б) } K_X(\tau) &= \sigma_X^2 e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau, \\ \tau &= t_2 - t_1, \quad \alpha > 0. \end{aligned}$$

В случае б) ширину спектра найти приблизительно, считая процесс узкополосным.

Задача 3.1.32

Найти спектральную плотность мощности $W_X(\omega)$ квазидетерминированного случайного процесса

$$X(t) = a \cos(\omega_0 t + \phi),$$

где a и ω_0 – заданные положительные константы; ϕ – случайная величина, равномерно распределенная в интервале $[-\pi, \pi]$.

Задача 3.1.33

Найти спектральную плотность мощности $W_X(\omega)$ случайного процесса

$$X(t) = an(t) \cos(\omega_0 t + \phi),$$

где a и ω_0 – заданные положительные константы; ϕ – случайная величина, равномерно распределенная в интервале $[-\pi, \pi]$; $n(t)$ – не зависящий от ϕ стационарный белый шум со средним значением $\bar{n}(t) \equiv 0$ и корреляционной функцией $\Psi_n(\tau) = W_0 \delta(\tau)$, $\tau = t_2 - t_1$.

Задача 3.1.34

Найти спектральную плотность мощности $W_X(\omega)$ стационарного случайного процесса $X(t)$ с ковариационной функцией

$$K_X(\tau) = \sigma_X^2 e^{-\alpha\tau^2}, \quad \alpha > 0, \quad \tau = t_2 - t_1.$$

Определить эффективную ширину спектра $\Delta\omega_{\text{эф}}$ и найти, как она связана с временем корреляции $\tau_{\text{кор}}$. Время корреляции определить как интервал, на котором огибающая корреляционной функции убывает в e раз.

Задача 3.1.35

Найти спектральную плотность мощности стационарного случайного процесса $X(t)$, если ковариационная функция процесса есть

$$K_X(\tau) = e^{-\alpha\tau^2} \cos \omega_0 \tau, \quad \alpha > 0, \quad \tau = t_2 - t_1.$$

Задача 3.1.36

Найти спектральную плотность мощности $W_X(\omega)$ стационарного случайного процесса $X(t)$ с ковариационной функцией

$$K_X(\tau) = \begin{cases} \sigma_X^2(1 - |\tau|), & |\tau| \leq \tau_0; \\ 0, & |\tau| > \tau_0, \end{cases}$$

$$\tau = t_2 - t_1.$$

Задача 3.1.37

Найти спектральную плотность мощности $W_X(\omega)$ стационарного случайного процесса $X(t)$ с ковариационной функцией

$$K_X(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|), \quad \alpha > 0, \quad \tau = t_2 - t_1.$$

Задача 3.1.38

Найти спектральную плотность мощности $W_X(\omega)$ стационарного случайного процесса $X(t)$ с ковариационной функцией

$$K_X(\tau) = \sigma_X^2 e^{-\alpha|\tau|} \left(1 + \alpha|\tau| + \frac{1}{3}\alpha^2\tau^2\right), \quad \alpha > 0, \quad \tau = t_2 - t_1.$$

Задача 3.1.39

Найти спектральную плотность мощности $W_X(\omega)$ стационарного случайного процесса $X(t)$ с ковариационной функцией

$$K_X(\tau) = \sigma_X^2 e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \beta\tau - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta|\tau|\right), \quad \alpha > 0, \quad \tau = t_2 - t_1.$$

Задача 3.1.40

Найти спектральную плотность мощности случайного процесса $Z(t) = X(t) + Y(t)$, где $X(t)$ и $Y(t)$ – статистически независимые стационарные случайные процессы, причем $X(t)$ – белый шум со спектральной плотностью мощности W_0 , а $Y(t)$ – экспоненциально коррелированный процесс с нулевым средним значением: $\bar{Y} \equiv 0$; $\Psi_Y(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|)$, $\alpha > 0$, $\tau = t_2 - t_1$.

Задача 3.1.41

Определить спектр $W_Z(\omega)$ случайного процесса $Z(t) = X(t) \cdot Y(t)$, где $X(t)$ и $Y(t)$ – независимые стационарные случайные процессы с корреляционными функциями

$$K_X(\tau) = \sigma_X^2 e^{-\alpha_1|\tau|}, \quad K_Y(\tau) = \sigma_Y^2 e^{-\alpha_2|\tau|}, \quad \tau = t_2 - t_1, \quad \alpha_{1,2} > 0$$

и средними значениями $\bar{X}$, $\bar{Y}$.

Задача 3.1.42

Найти взаимную спектральную плотность мощности $W_{XY}(\omega)$ двух процессов: $X(t) = aZ(t)$ и $Y(t) = bZ(t) + A$, где $Z(t)$ – стационарный случайный процесс со спектральной плотностью мощности

$$W_Z(\omega) = \frac{2\gamma}{\gamma^2 + \omega^2};$$

A – случайная величина, не зависящая от $Z(t)$; a и b – константы.

Задача 3.1.43

Найти корреляционную функцию $\Psi_X(\tau)$ стационарного случайного процесса $X(t)$, график спектральной плотности мощности которого приведен на рис. 3.2. Для частного случая $\omega_1 = 0$ определить величину интервала $\Delta t = t_{k+1} - t_k$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ между некоррелированными значениями $X(t_k)$, $X(t_{k+1})$.

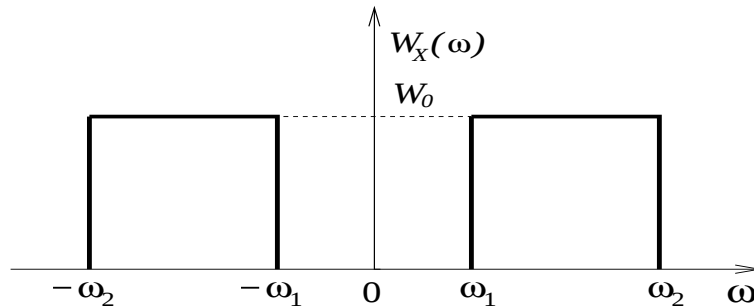


Рис. 3.2

Задача 3.1.44

Найти корреляционную функцию $\Psi_X(\tau)$ стационарного случайного процесса $X(t)$ со спектральной плотностью мощности

$$W_X(\omega) = W_0 e^{-\alpha \omega^2},$$

где $W_0 = \text{const.}$ Двумя способами определить время корреляции:

а) как интервал, на котором огибающая корреляционной функции $\gamma_X(\tau)$ убывает в e раз; б) как величину, задаваемую выражением

$$\tau_{\text{кор}} = \frac{1}{\sigma_X^2} \int_0^\infty \gamma_X(\tau) d\tau.$$

Задача 3.1.45

Найти корреляционную функцию стационарного случайного процесса $X(t)$ со спектром

$$W_X(\omega) = \begin{cases} A, & |\omega| \leq \omega_1, \\ A \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0 - \omega_1}, & \omega_1 < |\omega| \leq \omega_0, \\ 0, & |\omega| > \omega_0, \end{cases}$$

где A – константа.

Задача 3.1.46

Найти ковариационную функцию стационарного случайного процесса $X(t)$, если его спектр задается выражением

$$W_X(\omega) = \sum_{i=1}^m \frac{a_i}{\gamma_i^2 + \omega^2},$$

где a_i и γ_i – вещественные положительные константы.

3.1.3. Примеры решения задач**Задача 3.1.13**

Чтобы найти среднее значение случайной переменной X в произвольный момент времени, усредняем выражение $a \cos(\omega_0 t + \phi)$ как детерминированную функцию случайного аргумента ϕ . С учетом равномерного распределения ϕ в интервале $[-\pi, \pi]$ (т.е. $p(\phi) = \frac{1}{2\pi}$, $|\phi| \leq \pi$) получаем:

$$\bar{X} = a \langle \cos(\omega_0 t + \phi) \rangle = \frac{a}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega_0 t + \phi) d\phi \equiv 0.$$

Аналогично находим корреляционную функцию:

$$\begin{aligned} \Psi_X(t_1, t_2) &= \langle X(t_1)X(t_2) \rangle - \langle X(t_1) \rangle \langle X(t_2) \rangle = \\ &= a^2 \langle \cos(\omega_0 t_1 + \phi) \cos(\omega_0 t_2 + \phi) \rangle = \\ &= \frac{a^2}{2} (\cos \omega_0(t_2 - t_1) + \langle \cos[\omega_0(t_2 + t_1) + 2\phi] \rangle). \end{aligned}$$

С учетом того, что

$$\langle \cos[\omega_0(t_2 + t_1) + 2\phi] \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos[\omega_0(t_1 + t_2) + 2\phi] d\phi \equiv 0,$$

получаем

$$\Psi_X(t_1, t_2) = \frac{a^2}{2} \cos \omega_0(t_2 - t_1).$$

Таким образом, корреляционная функция процесса $X(t)$ зависит только от разности моментов времени $\tau = t_2 - t_1$.

Нормируем корреляционную функцию на значение при $\tau = 0$ (т.е. на дисперсию) и получаем коэффициент корреляции:

$$R_X(\tau) = \frac{\Psi_X(\tau)}{\Psi_X(0)} = \cos \omega_0 \tau.$$

Задача 3.1.24

Из решения задачи (3.1.13) следует, что

$$\bar{X} \equiv \text{const} = 0,$$

$$\Psi_X(t_1, t_2) = \Psi_X(\tau) = \frac{a^2}{2} \cos \omega_0 \tau, \quad \tau = t_2 - t_1,$$

$$\sigma_X^2 = \Psi_X(0) = \frac{a^2}{2} = \text{const} < \infty.$$

Таким образом, для процесса $X(t)$ выполняются все условия, которым удовлетворяет стационарный в широком смысле случайный процесс.

Задача 3.1.29

Из решения задачи (3.1.13) известны среднее по ансамблю значение процесса $X(t)$ и его корреляционная функция:

$$\bar{X} = 0,$$

$$\Psi_X(\tau) = \Psi_X(\tau) = \frac{a^2}{2} \cos \omega_0 \tau, \quad \tau = t_2 - t_1.$$

Кроме того, процесс $X(t)$ является стационарным в широком смысле (см. решение задачи (3.1.24)).

а) Находим среднее по времени значение случайного процесса $X(t)$ для некоторой реализации $x^0(t) = a \cos(\omega_0 t + \phi^0)$, где ϕ^0 – значение случайной величины ϕ , выбранное произвольным образом:

$$\langle x^0(t) \rangle_t = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{a}{T} \int_0^T \cos(\omega_0 t + \phi^0) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{a}{T} \frac{\sin(\omega_0 T + \phi^0)}{\omega_0}.$$

Так как синус – ограниченная функция, то при любом выборе ϕ^0 (т.е. для любой реализации случайного процесса $X(t)$) получаем, что среднее по времени значение равно нулю. Поскольку среднее по времени значение для любой реализации одинаково и совпадает со средним по ансамблю, то процесс $X(t)$ является эргодическим относительно среднего значения.

б) Аналогичным образом находим оценку корреляционной функции $\Psi_X^0(\tau)$, заменяя усреднение по ансамблю усреднением по времени вдоль произвольной реализации $x^0(t)$. Учитывая, что среднее значение равно нулю, получаем:

$$\begin{aligned} \Psi_X^0(\tau) &= \langle x^0(t)x^0(t+\tau) \rangle_t = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{a^2}{T} \int_0^T \cos(\omega_0 t + \phi^0) \cos[\omega_0(t+\tau) + \phi^0] dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{a^2}{2T} \left[\frac{\sin[\omega_0(2T+\tau) + \phi^0] - \sin(\omega_0\tau + \phi^0)}{2\omega_0} + T \cos(\omega_0\tau) \right] = \\ &= \frac{a^2}{2} \cos(\omega_0\tau). \end{aligned}$$

Для любой реализации $x^0(t)$ получаем одну и ту же оценку корреляционной функции, совпадающую с $\Psi_X(\tau)$. Следовательно, процесс $X(t)$ является эргодическим относительно корреляционной функции.

Задача 3.1.31

Поскольку спектр стационарного случайного процесса является прямым фурье-преобразованием от ковариационной функции, для стационарного случайного процесса с ковариационной функцией $K_X(\tau) = \sigma_X^2 e^{-\alpha|\tau|}$ имеем

$$W_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \sigma_X^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau|} e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

Разбиваем область интегрирования на интервалы положительных и отрицательных значений τ и представляем $|\tau|$ соответствующим образом:

$$\begin{aligned} W_X(\omega) &= \sigma_X^2 \int_{-\infty}^0 e^{(\alpha-j\omega)\tau} d\tau + \sigma_X^2 \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+j\omega)\tau} d\tau = \\ &= \sigma_X^2 \left[\frac{1}{(\alpha-j\omega)} e^{(\alpha-j\omega)\tau} \Big|_{-\infty}^0 - \frac{1}{(\alpha+j\omega)} e^{-(\alpha+j\omega)\tau} \Big|_0^{+\infty} \right]. \end{aligned}$$

Подставляя пределы интегрирования и приводя дроби к общему знаменателю, получаем так называемую лоренцеву форму спектра:

$$W_X(\omega) = \frac{2\sigma_X^2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

Эффективная ширина спектра есть

$$\Delta\omega_{\text{эф}} = \frac{1}{W_{\tilde{X}}(\omega_0)} \int_0^{\infty} W_{\tilde{X}}(\omega_0) d\omega = \frac{\pi\sigma_X^2}{W_{\tilde{X}}(\omega_0)},$$

где $W_{\tilde{X}}(\omega_0)$ – спектр флуктуаций, ω_0 – частота спектрального максимума. В рассматриваемом случае среднее значение $\bar{X}$ равно нулю, поскольку спектр не содержит δ -пика на нулевой частоте. Следовательно, спектр флуктуаций совпадает с полным спектром, а дисперсия со средним квадратом. Очевидно дисперсия процесса $X(t)$ есть $K_X(0) = \sigma_X^2$. С учетом того, что $\omega_0 = 0$, получаем

$$\Delta\omega_{\text{эф}} = \frac{\pi\alpha}{2}.$$

Ширина спектра на уровне половинной мощности определяется как

$$\Delta\omega_{1/2} = \omega_2 - \omega_1, \quad \text{где} \quad W_{\tilde{X}}(\omega_{1,2}) = \frac{1}{2} W_{\tilde{X}}(\omega_0).$$

Из равенства

$$\frac{2\sigma_X^2\alpha}{\alpha^2 + \omega_{1,2}^2} = \frac{\sigma_X^2}{\alpha}$$

получаем, что $\omega_{1,2} = \pm\alpha$. Таким образом,

$$\Delta\omega_{1/2} = 2\alpha.$$

3.2 Преобразование случайных процессов детерминированными системами

3.2.1. Краткие теоретические сведения

Пусть на вход *детерминированной* преобразующей системы (системы с заданными параметрами) поступает случайный процесс $X(t)$. Каждой реализации $x(t)$ входного процесса однозначно соответствует некоторая реализация $y(t)$ на выходе системы. Таким образом, имеется статистический ансамбль выходных реализаций, которые составляют случайный процесс $Y(t)$ на выходе. Обычно статистические характеристики процесса $X(t)$ предполагаются известными и требуется найти некоторые статистические характеристики процесса $Y(t)$. В зависимости от свойств оператора $\hat{T} : X(t) \rightarrow Y(t)$ все виды преобразований можно разделить на безынерционные (функциональные) и инерционные, линейные и нелинейные, стационарные и нестационарные.

Безынерционные преобразования случайных процессов

Безынерционное (функциональное) преобразование случайного процесса детерминированной системой может быть задано как

$$Y(t) = f[X(t)], \quad (3.41)$$

где $y = f(x)$ – детерминированная функция своего аргумента, называемая *характеристикой преобразования*.

Пусть $X(t)$ – скалярный вещественный случайный процесс. Если известна плотность вероятности $p_n^X(\dots)$ процесса $X(t)$ на входе преобразователя, то моментные функции случайного процесса $Y(t)$ на выходе можно найти, усредняя по входному распределению. Например:

$$\begin{aligned} \bar{Y}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) p_1^X(x, t) dx, \\ K_Y(t_1, t_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1) f(x_2) p_2^X(x_1, t_1, x_2, t_2) dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Рассмотрим преобразование плотности вероятности случайного процесса безынерционной системой. Можно выделить три случая преобразования в зависимости от особенностей характеристики преобразователя.

1. Характеристика $y = f(x)$ – взаимно однозначная функция. В этом случае одномерная плотность вероятности выходного процесса связана с одномерной плотностью вероятности входного процесса соотношением

$$p_1^Y(y, t) = p_1^X(g(y), t) \left| \frac{dg(y)}{dy} \right|, \quad (3.43)$$

где $x = g(y)$ – обратная функция. Аналогично, для n -мерной плотности вероятности выходного процесса имеем

$$p_n^Y(y_1, t_1, \dots, y_n, t_n) = p_n^X(g(y_1), t_1, \dots, g(y_n), t_n) \prod_{i=1}^n \left| \frac{dg(y_i)}{dy_i} \right|. \quad (3.44)$$

2. Обратная функция неоднозначна: $x_j = g_j(y)$, $j = 1, 2, \dots, m$ – номер ветви обратной функции. В этом случае справедливы соотношения

$$p_1^Y(y, t) = \sum_{j=1}^m p_1^X(g_j(y), t) \left| \frac{dg_j(y)}{dy} \right| \quad (3.45)$$

и

$$p_n^Y(y_1, t_1, \dots, y_n, t_n) = \sum_{j=1}^m p_n^X(g_j(y_1), t_1, \dots, g_j(y_n), t_n) \prod_{i=1}^n \left| \frac{dg_j(y_i)}{dy_i} \right|. \quad (3.46)$$

3. Характеристика преобразования $y = f(x)$ на некоторых интервалах изменения x принимает постоянные значения. В этом случае выходной процесс $Y(t)$ будет *смешанным* (дискретно-непрерывным), т.е. некоторые значения переменной Y будут приниматься с конечными вероятностями. Пусть, например, имеется один такой интервал значений $x \in [a, b]$, соответствующий одному значению выходного сигнала $y = y_0$, а на других участках функция $y = f(x)$ взаимно-однозначна. В этом случае одномерная плотность вероятности выходного процесса может быть представлена в виде

$$p_1^Y(y, t) = p_1^X(g(y), t) \left| \frac{dg(y)}{dy} \right| + P(y_0)\delta(y - y_0), \quad (3.47)$$

где $P(y_0) = P\{X(t) \in [a, b]\}$ – вероятность состояния $Y(t) = y_0$.

Если имеется несколько интервалов с постоянными значениями функции, то плотность вероятности выходного процесса будет содержать несколько δ -функций. Устройство, преобразующее непрерывнозначный процесс в дискретный, называется *квантователем*. Характеристика квантователя представляет собой ступенчатую функцию. Значения, соответствующие “ступенькам”, есть уровни квантования, а длина ступеньки – шаг квантования (шаг может быть как постоянным, так и переменным).

На практике часто встречаются задачи, связанные с преобразованием совокупности нескольких случайных процессов на входе безынерционного преобразователя в один выходной процесс. Пусть на вход преобразователя поступают два случайных процесса $X(t)$ и $Y(t)$, а процесс на выходе $Z(t)$ представляет собой детерминированную функцию входных процессов:

$$Z(t) = f[X(t), Y(t)]. \quad (3.48)$$

Совместная плотность вероятности $p_n^{XY}(x_1, y_1, t_1, \dots, x_n, y_n, t_n)$ процессов $X(t)$ и $Y(t)$ полагается известной и требуется найти плотность вероятности выходного процесса $Z(t)$. Справедливы следующие выражения для одномерной плотности вероятности $p_1^Z(z, t)$. Если функция $x = g(y, z)$ – однозначная, то

$$p_1^Z(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} p_1^{XY}(g(y, z), y, t) \left| \frac{\partial g(y, z)}{\partial z} \right| dy. \quad (3.49)$$

Если одному набору значений z и y соответствует m различных значений переменной x , т.е. $x_j = g_j(y, z)$, $j = 1, 2, \dots, m$, тогда имеем

$$p_1^Z(z, t) = \sum_{j=1}^m \int_{-\infty}^{\infty} p_1^{XY}(g_j(y, z), y, t) \left| \frac{\partial g_j(y, z)}{\partial z} \right| dy. \quad (3.50)$$

При решении задач следует учесть, что, если входные процессы $X(t)$ и $Y(t)$ статистически независимы, то

$$p_1^{XY}(x, y, t) = p_1^X(x, t)p_1^Y(y, t). \quad (3.51)$$

Преобразования случайных процессов линейными инерционными системами

Линейное инерционное преобразование может быть задано с помощью импульсной характеристики $h(t, \theta)$. В случае детерминированного преобразования $h(t, \theta)$ является детерминированной функцией своих аргументов. Если на вход преобразователя поступает случайный процесс $X(t)$, то выходной процесс $Y(t)$ также является случайным и может быть представлен в виде следующего среднеквадратического интеграла от случайной функции:

$$Y(t) = \int_{t_0}^t h(t, \theta) X(\theta) d\theta, \quad (3.52)$$

где t_0 – момент времени, начиная с которого на вход системы подается сигнал $X(t)$. В случае стационарного преобразования (для системы с постоянными параметрами) $h(t, \theta) = h(u)$, $u = t - \theta$. С учетом того, что $h(u) \equiv 0$ при $u \geq 0$, имеем

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{t-t_0} h(u) X(t-u) du. \quad (3.53)$$

В установившемся режиме $t_0 \rightarrow -\infty$

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u) X(t-u) du. \quad (3.54)$$

Для преобразования основных моментных функций справедливы следующие соотношения:

$$\bar{Y}(t) = \int_{t_0}^t h(t, \theta) \bar{X}(\theta) d\theta; \quad (3.55)$$

$$K_Y(t_1, t_2) = \int_{t_0}^{t_2} \int_{t_0}^{t_1} h(t_1, \theta_1) h(t_2, \theta_2) K_X(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2; \quad (3.56)$$

$$\Psi_Y(t_1, t_2) = \int_{t_0}^{t_2} \int_{t_0}^{t_1} h(t_1, \theta_1) h(t_2, \theta_2) \Psi_X(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2; \quad (3.57)$$

$$\sigma_Y^2(t) = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t h(t, \theta_1) h(t, \theta_2) \Psi_X(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2. \quad (3.58)$$

Для системы с постоянными параметрами в установившемся режиме данные соотношения принимают следующий вид:

$$\bar{Y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u) \bar{X}(t - u) du; \quad (3.59)$$

$$K_Y(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(u) h(v) K_X(t_1 - u, t_2 - v) dudv; \quad (3.60)$$

$$\Psi_Y(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(u) h(v) \Psi_X(t_1 - u, t_2 - v) dudv; \quad (3.61)$$

$$\sigma_Y^2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(u) h(v) \Psi_X(t - u, t - v) dudv. \quad (3.62)$$

Из соотношений (3.59) – (3.62) следует, что если на вход детерминированной линейной инерционной системы с постоянными параметрами поступает стационарный в широком смысле случайный процесс, то процесс на выходе системы в установившемся режиме также будет стационарным в широком смысле.

Детерминированное стационарное линейное инерционное преобразование может быть описано с помощью коэффициента передачи $S(j\omega)$. В случае стационарности случайных процессов на входе и выходе преобразователя выходная и входная спектральные плотности мощности связаны соотношением

$$W_Y(\omega) = |S(j\omega)|^2 W_X(\omega). \quad (3.63)$$

Если линейное инерционное преобразование задается дифференциальным оператором, то вместо приведенных выше общих соотношений для моментных функций выходного процесса можно получить более простые. Например, для преобразования дифференцирования

$$Y(t) = \frac{dX(t)}{dt}, \quad (3.64)$$

где входной процесс $X(t)$ полагается дифференцируемым в среднеквадратическом смысле, имеем

$$\bar{Y}(t) = \frac{d\bar{X}(t)}{dt}; \quad (3.65)$$

$$K_Y(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 K_X(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}; \quad (3.66)$$

$$\Psi_Y(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 \Psi_X(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}; \quad (3.67)$$

$$\sigma_Y^2(t) = \left. \frac{\partial^2 \Psi_X(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} \right|_{t_1=t_2=t}. \quad (3.68)$$

В случае стационарного входного процесса $X(t)$ процесс на выходе $Y(t)$ также будет стационарным, и для него справедливы следующие соотношения:

$$\bar{Y}(t) \equiv 0; \quad (3.69)$$

$$K_Y(\tau) = -\frac{d^2 K_X(\tau)}{d\tau^2}; \quad (3.70)$$

$$\Psi_Y(\tau) = -\frac{d^2 \Psi_X(\tau)}{d\tau^2}; \quad (3.71)$$

$$\sigma_Y^2 = -\left. \frac{d^2 \Psi_X(\tau)}{d\tau^2} \right|_{\tau=0} \equiv \text{const}; \quad (3.72)$$

$$W_Y(\omega) = \omega^2 W_X(\omega). \quad (3.73)$$

Линейная фильтрация шума

Пусть на некоторый детерминированный линейный фильтр с постоянными параметрами поступает сумма двух процессов – полезного сигнала и шума. $Y(t)$ – случайный процесс на выходе фильтра. Можно рассматривать две задачи фильтрации: обнаружение полезного сигнала на фоне шума или выделение сигнала из шума и оптимизировать фильтр соответствующим образом.

Рассмотрим задачу *обнаружения регулярного сигнала на фоне шума*. Пусть на вход фильтра поступает процесс $X(t) = x_c(t) + X_{\text{ш}}(t)$, где $x_c(t)$ – детерминированный сигнал с ограниченной энергией, а $X_{\text{ш}}(t)$ – входной шум, представляющий собой не зависящий от сигнала стационарный случайный процесс с нулевым средним значением ($\bar{X}_{\text{ш}}(t) \equiv 0$). На выходе фильтра получаем случайный процесс $Y(t) = y_c(t) + Y_{\text{ш}}(t)$, где $y_c(t)$ и $Y_{\text{ш}}(t)$ – выходные сигнал и шум соответственно. Задача состоит в отыскании фильтра, оптимального по критерию пикового отношения “сигнал / шум”, т.е. такого, который максимизирует значение величины

$$\gamma = \frac{y_c^{\text{п}}(t_{\text{п}})}{\sqrt{\sigma_{Y_{\text{ш}}}^2}}, \quad (3.74)$$

где $y_c^{\text{п}}(t_{\text{п}})$ – пиковое значение сигнала на выходе фильтра; $t_{\text{п}}$ – момент времени, соответствующий пиковому значению; $\sigma_{Y_{\text{ш}}}^2$ – дисперсия выходного шума. Максимальное значение выходного сигнала в момент времени $t_{\text{п}}$ будет достигаться при такой фазо-частотной характеристике (ФЧХ) фильтра, когда все спектральные компоненты выходного сигнала в момент $t_{\text{п}}$ имеют одну фазу. В то же время ФЧХ фильтра не влияет на дисперсию шума на выходе. С учетом этого получаем выражение для коэффициента передачи фильтра, оптимального по критерию максимума γ :

$$S_{\text{опт}}(j\omega) = \frac{\text{const}}{W_{X_{\text{ш}}}(\omega)} x_c^*(j\omega) e^{-j\omega t_{\text{п}}}, \quad (3.75)$$

где $W_{X_{\text{ш}}}(\omega)$ – спектральная плотность мощности входного шума; $x_c(j\omega)$ – спектральная плотность (фурье-преобразование) входного сигнала, знак * означает комплексно сопряженную величину.

Если входной шум $X_{\text{ш}}(t)$ является белым, то $W_{X_{\text{ш}}}(\omega) \equiv W_0 \equiv \text{const}$ и коэффициент передачи оптимального фильтра полностью определяется спектром входного сигнала. В этом случае оптимальный фильтр называется *согласованным*. Коэффициент передачи согласованного фильтра выражается как

$$S_{\text{сф}}(j\omega) = \text{const} \cdot x_c^*(j\omega) e^{-j\omega t_{\text{п}}}. \quad (3.76)$$

Импульсная характеристика согласованного фильтра есть

$$h_{\text{сф}}(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{сф}}(j\omega) e^{j\omega u} d\omega = \text{const} \cdot x_c(t_{\text{п}} - u). \quad (3.77)$$

Другой возможной задачей является *выделение случайного сигнала из шума*. Пусть на детерминированный линейный фильтр с постоянными параметрами поступает сумма двух стационарных и стационарно связанных² случайных процессов – полезного сигнала $X_c(t)$ и шума $X_{\text{ш}}(t)$. Входные сигнал и шум в общем случае могут быть статистически зависимыми. Задача состоит в отыскании фильтра, оптимального по критерию минимума искажений сигнала, т.е. такого, который восстанавливает сигнал $X_c(t)$ с минимальной среднеквадратической ошибкой. Оптимальный фильтр должен минимизировать величину

$$\sigma_{\text{ош}}^2 = \langle (X_c(t + T_0) - Y(t))^2 \rangle, \quad (3.78)$$

называемую *средним квадратом ошибки оценки*. Величина T_0 задает временной сдвиг между значением выходного процесса и оцениваемым значением сигнала на входе. Если $T_0 < 0$, то фильтр называется *фильтром с задержкой*. Если $T_0 > 0$, то фильтр называется *прогнозирующим*.

Из условия минимума $\sigma_{\text{ош}}^2$ можно получить уравнение, которому должна удовлетворять импульсная характеристика фильтра, оптимального по

²Их совместная ковариационная функция зависит только от разности аргументов $(t_2 - t_1)$.

критерию минимума искажений. Это уравнение, называемое *уравнением Винера – Хопфа*, имеет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_{\text{опт}}(u) K_X(u-v) du = K_{XX_c}(v+T_0), \quad (3.79)$$

где K_X – ковариационная функция процесса $X(t)$; K_{XX_c} – взаимная ковариационная функция процессов $X(t)$ и $X_c(t)$. Решение уравнения Винера – Хопфа соответствует физически реализуемому фильтру, если $h_{\text{опт}}(u) \equiv 0$ при $u \leq 0$. В этом случае нижний предел интеграла нужно положить равным нулю. Точное решение уравнения (3.79) в этом случае часто оказывается затруднительным. Решение уравнения Винера – Хопфа в случае бесконечных пределов у интеграла представляет собой импульсную характеристику так называемого *идеального винеровского фильтра* $h_{\text{ВФ}}(u)$. Идеальный винеровский фильтр, как правило, физически не реализуем, но он полезен тем, что определяет минимально возможное значение среднего квадрата ошибки оценки $\sigma_{\text{ошВФ}}^2 = \inf_{h(u)} \sigma_{\text{ош}}^2$, которое задается выражением

$$\sigma_{\text{ошВФ}}^2 = K_{X_c}(0) - \int_{-\infty}^{\infty} h_{\text{ВФ}}(u) K_{XX_c}(u+T_0) du. \quad (3.80)$$

Кроме того, идеальный винеровский фильтр может быть использован при численной фильтрации.

3.2.2. Задачи

Задача 3.2.1

Случайный процесс $X(t)$ характеризуется равномерным одномерным распределением:

$$p_1^X(x, t) = \begin{cases} 1, & x \in [1; 2]; \\ 0, & x \notin [1; 2]. \end{cases}$$

Найти одномерную плотность вероятности $p_1^Y(y, t)$ процесса $Y(t)$ на выходе безынерционного преобразователя с характеристикой $y = \ln x$.

Задача 3.2.2

Найти одномерную плотность вероятности $p_1^Y(y, t)$, среднее значение $\bar{Y}(t)$ и дисперсию σ_Y^2 случайного процесса $Y(t)$ на выходах безынерционных детекторов, характеристики которых представлены на рис. 3.3. На вход детектора поступает стационарный нормальный случайный процесс $X(t)$ со средним значением $\bar{X}(t) \equiv 0$ и дисперсией $\sigma_X^2 \equiv 1$.

Задача 3.2.3

Одномерная плотность вероятности случайного процесса $X(t)$ задана законом Коши

$$p_1^X(x, t) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

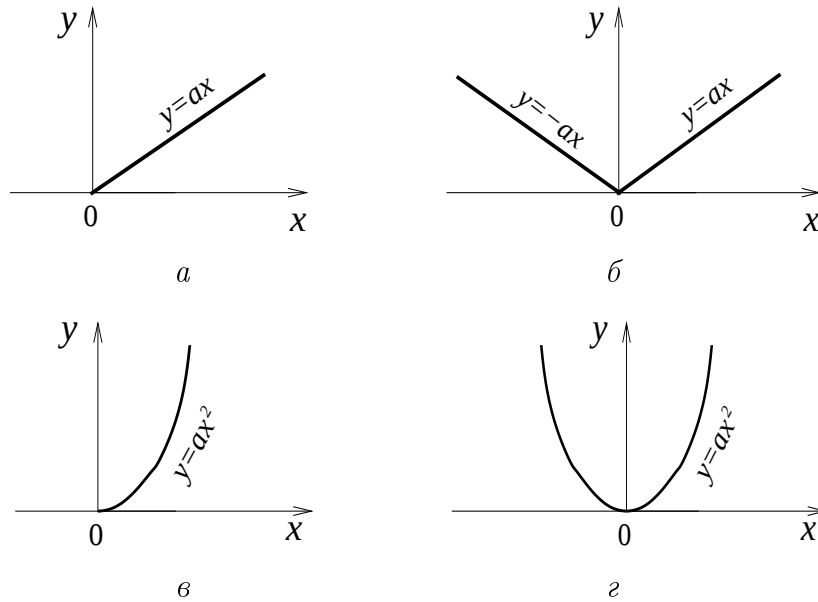


Рис. 3.3

Найти одномерную плотность вероятности процесса $Y(t)$, если:

- а) $Y(t) = aX^2(t)$ ($a = \text{const} > 0$);
 б) $Y(t) = 1 - X^3(t)$.

Задача 3.2.4

Найти одномерную плотность вероятности $p_1^Y(y, t)$ случайного процесса $Y(t) = aX(t) + b$, где a, b – вещественные положительные константы, а $X(t)$ – случайный процесс с одномерным рэлеевским распределением:

$$p_1^X(x, t) = x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad x \geq 0.$$

Задача 3.2.5

Огибающая $A(t)$ узкополосного случайного процесса на входе квадратичного детектора имеет распределение Рэля:

$$p_1(A, t) = \frac{A}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right), \quad A \geq 0.$$

Найти одномерную плотность вероятности напряжения $U(t)$ на выходе детектора, если

$$U(t) = \frac{1}{2}\alpha A^2(t), \quad \alpha = \text{const} > 0.$$

Задача 3.2.6

Найти одномерную плотность вероятности $p_1^X(x, t)$ случайного процесса

$$X(t) = a \cos(\omega_0 t + \phi),$$

где a и ω_0 – вещественные положительные константы; ϕ – случайная величина, равномерно распределенная в интервале $[-\pi, \pi]$.

Задача 3.2.7

Найти одномерную и двумерную плотности вероятности случайного процесса

$$Y(t) = e^{-t}|X|,$$

где X – случайная величина, равномерно распределенная в интервале $[-1, 1]$.

Задача 3.2.8

На двухуровневый квантователь с характеристикой

$$y = \text{Asgn}(x), \quad A = \text{const} > 0$$

воздействует стационарный нормальный случайный процесс $X(t)$ со средним значением $\bar{X} = 0$ и дисперсией σ_X^2 . Записать одномерную плотность вероятности случайного процесса $Y(t)$ на выходе квантователя и определить средний квадрат ошибки квантования

$$\varepsilon^2 = \langle (Y(t) - X(t))^2 \rangle.$$

Задача 3.2.9

Найти одномерную плотность вероятности, среднее значение и дисперсию напряжения $Y(t)$ на выходе идеального ограничителя с характеристикой

$$y = \begin{cases} x, & x \geq a, \\ 0, & x < a, \end{cases} \quad a = \text{const} > 0.$$

На вход ограничителя подается случайное напряжение $X(t)$ с одномерной плотностью вероятности

$$p_1^X(x, t) = x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad x \geq 0.$$

Задача 3.2.10

Двумерная плотность вероятности случайного процесса $X(t)$ имеет вид

$$p_2^X(x_1, t_1, x_2, t_2) = \frac{1}{2\pi} \exp\left[-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)\right] \left(1 + x_1 x_2 e^{-\alpha|t_2 - t_1|}\right), \quad \alpha > 0.$$

Найти двумерную плотность вероятности p_2^Y процесса $Y(t)$ на выходе преобразователя с характеристикой

$$y = ax + b,$$

где a и b – вещественные положительные константы.

Задача 3.2.11

Даны одномерные плотности вероятности стационарных процессов $X(t)$ и $Y(t)$ на входе и выходе функционального преобразователя:

$$\begin{aligned} p_1^X(x) &= 1, \quad x \in [0, 1]; \\ p_1^Y(y) &= \frac{y}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right), \quad y \geq 0. \end{aligned}$$

Найти вид нелинейной характеристики преобразователя $y = f(x)$.

Задача 3.2.12

Даны одномерные плотности вероятности стационарных процессов $X(t)$ и $Y(t)$ на входе и выходе функционального преобразователя:

$$\begin{aligned} p_1^X(x) &= ae^{-ax}, \quad x \geq 0, \quad a > 0; \\ p_1^Y(y) &= \frac{1}{2}, \quad y \in [-1, 1]. \end{aligned}$$

Найти вид нелинейной характеристики преобразователя $y = f(x)$.

Задача 3.2.13

$X(t)$ и $Y(t)$ – статистически независимые стационарные случайные процессы, одномерные плотности вероятности которых имеют вид

$$\begin{aligned} p_1^X(x) &= \frac{1}{2}e^{-x/2}, \quad x \geq 0; \\ p_1^Y(y) &= \frac{1}{3}e^{-y/3}, \quad y \geq 0. \end{aligned}$$

Найти одномерную плотность вероятности $p_1^Z(z, t)$ случайного процесса $Z(t) = X(t) + Y(t)$.

Задача 3.2.14

Вычислить одномерную плотность вероятности случайного процесса $Z(t) = X(t) \cdot Y(t)$, где $X(t)$ и $Y(t)$ – статистически независимые стационарные случайные процессы, одномерные плотности вероятности которых имеют вид

$$\begin{aligned} p_1^X(x) &= \frac{1}{2}, \quad x \in [-1, 1]; \\ p_1^Y(y) &= 2, \quad y \in [0.5, 1]. \end{aligned}$$

Задача 3.2.15

$X(t)$ и $Y(t)$ – статистически независимые стационарные случайные процессы, одномерные плотности вероятности которых имеют вид

$$\begin{aligned} p_1^X(x) &= 1, \quad x \in [0, 1]; \\ p_1^Y(y) &= \begin{cases} y, & y \in [0, 1], \\ 2 - y, & y \in (1, 2], \\ 0, & y \notin [0, 2]. \end{cases} \end{aligned}$$

Найти одномерную плотность вероятности случайного процесса $Z(t) = X(t) + Y(t)$.

Задача 3.2.16

Вычислить одномерную плотность вероятности случайного процесса $X(t) = \alpha(t) \cos(\omega_0 t + \phi(t))$, где $\omega_0 = \text{const}$, $\alpha(t)$ и $\phi(t)$ – статистически независимые стационарные случайные процессы, одномерные плотности вероятности которых имеют вид

$$p_1^\alpha(\alpha) = \frac{\alpha}{\sigma_\alpha^2} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2\sigma_\alpha^2}\right), \quad \alpha \geq 0;$$

$$p_1^\phi(\phi) = \frac{1}{2\pi}, \quad \phi \in [-\pi, \pi].$$

Задача 3.2.17

Вычислить одномерную плотность вероятности случайного процесса $X(t) = \cos[\phi_1(t) - \phi_2(t)]$, где $\phi_1(t)$ и $\phi_2(t)$ – статистически независимые стационарные случайные процессы, одномерные плотности вероятности которых имеют вид

$$p_1^{\phi_1}(\phi_1) = \frac{1}{2\pi}, \quad \phi_1 \in [-\pi, \pi];$$

$$p_1^{\phi_2}(\phi_2) = \frac{1}{2\pi}, \quad \phi_2 \in [-\pi, \pi].$$

Задача 3.2.18

Найти одномерную плотность вероятности случайного процесса $Z(t) = X(t) \cdot Y(t)$, где $X(t)$ и $Y(t)$ – статистически независимые стационарные случайные процессы, одномерные плотности вероятности которых имеют вид

$$p_1^X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right);$$

$$p_1^Y(y) = y \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right), \quad y \geq 0.$$

Задача 3.2.19

Случайный процесс $X(t)$ имеет гауссово одномерное распределение со средним значением $\bar{X}(t) \equiv a = \text{const}$ и дисперсией $\sigma_X^2 = \text{const}$, а случайный процесс $Y(t)$ имеет равномерное одномерное распределение в интервале $[a; b]$. $X(t)$ и $Y(t)$ – статистически независимы. Найти одномерное распределение $p_1^Z(z, t)$ процесса $Z(t) = X(t) + Y(t)$. Ответ выразить через интеграл вероятностей.

Задача 3.2.20

Стационарный случайный процесс $X(t)$ с ковариационной функцией $K_X(\tau) = \sigma_X^2 \exp(-\alpha|\tau|)$, $\tau = t_2 - t_1$, $\alpha > 0$, воздействует на фильтр нижних частот, амплитудно-частотная характеристика которого изображена на рис. 3.4. Найти дисперсию σ_Y^2 выходного напряжения $Y(t)$ в установившемся режиме.

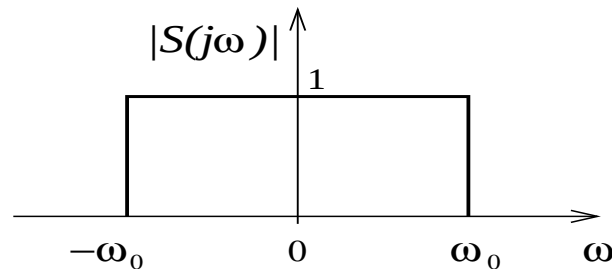


Рис. 3.4

Задача 3.2.21

На вход RC -цепочки (рис. 3.5) поступает ограниченный по частоте шум

$$W_X(\omega) = W_0 = \text{const}, \text{ если } |\omega| \leq \omega_1 \text{ и } W_X(\omega) \equiv 0, \text{ если } |\omega| > \omega_1.$$

Найти спектральную плотность мощности и дисперсию шума $Y(t)$ на выходе цепочки в установившемся режиме.

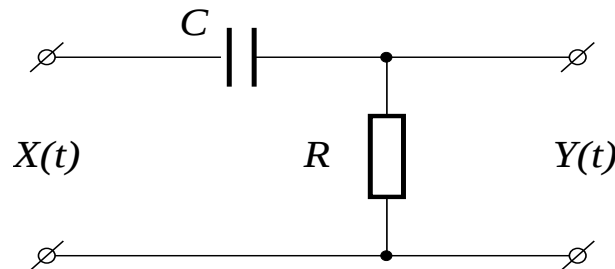


Рис. 3.5

Задача 3.2.22

На вход RC -цепочки (рис. 3.6) поступает стационарный случайный процесс $X(t)$ с ковариационной функцией $K_X(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|)$, $\tau = t_2 - t_1$. Найти спектральную плотность мощности процесса $Y(t)$ на выходе цепочки в установившемся режиме.

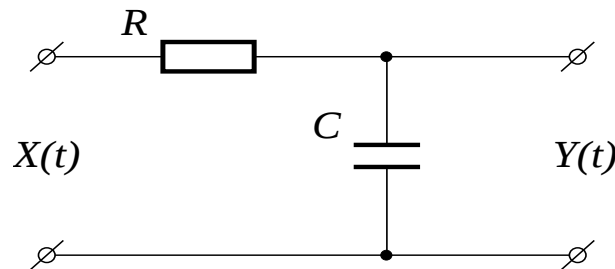


Рис. 3.6

Задача 3.2.23

На вход RL -цепочки (рис. 3.7) поступает стационарный белый шум $X(t)$ со спектральной плотностью мощности $W_0 = \text{const}$. Найти дисперсию процесса $Y(t)$ на выходе в установившемся режиме.

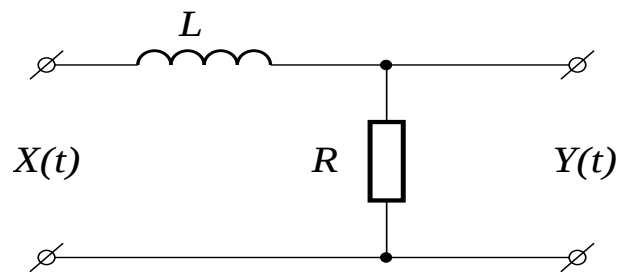


Рис. 3.7

Задача 3.2.24

На вход RL -цепочки (рис. 3.7) поступает случайный процесс

$$X(t) = a \cos(\omega_0 t + \phi),$$

где a и ω — константы; ϕ — случайная величина, равномерно распределенная в интервале $[-\pi; \pi]$. Найти корреляционную функцию процесса $Y(t)$ на выходе цепочки в установившемся режиме.

Задача 3.2.25

На вход цепи, изображенной на рис. 3.8, поступает стационарный белый шум $X(t)$ со спектральной плотностью мощности $W_0 = \text{const}$. Найти спектральную плотность мощности и корреляционную функцию процесса $Y(t)$ на выходе цепи в установившемся режиме.

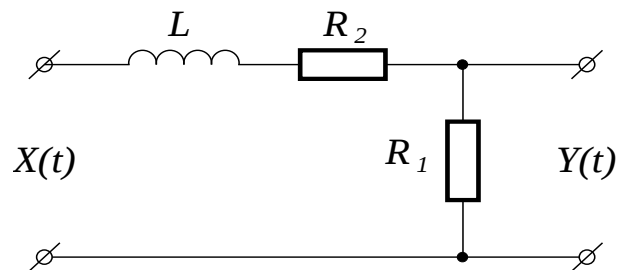


Рис. 3.8

Задача 3.2.26

На вход схемы, представленной на рис. 3.9, действует флуктуационное напряжение $X(t)$, представляющее собой стационарный белый шум со спектральной плотностью мощности W_0 . Найти спектр и корреляционную функцию выходного процесса $Y(t)$ в установившемся режиме.

Задача 3.2.27

На вход цепи, изображенной на рис. 3.10, воздействует стационарный белый шум $X(t)$ со спектральной плотностью мощности W_0 . Найти спектр и корреляционную функцию процесса $Y(t)$ на выходе цепи в установившемся режиме.

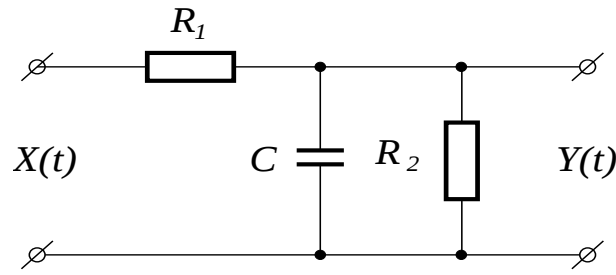


Рис. 3.9

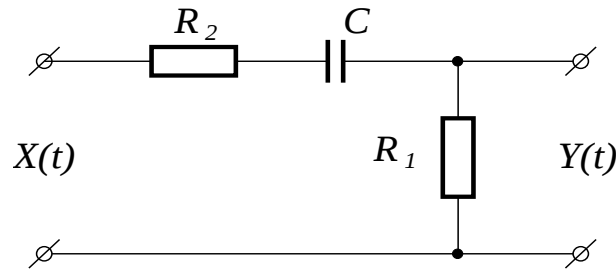


Рис. 3.10

Задача 3.2.28

На вход дифференцирующего устройства поступает стационарный случайный процесс $X(t)$ с корреляционной функцией

$$\Psi_X(\tau) = \sigma_X^2 e^{-\alpha \tau^2}, \quad \alpha > 0, \quad \tau = t_2 - t_1.$$

Найти корреляционную функцию и спектр сигнала

$$Y(t) = \frac{dX(t)}{dt}$$

на выходе дифференцирующего устройства.

Задача 3.2.29

Определить дисперсию производной стационарного случайного процесса $X(t)$, если его спектр имеет вид

$$W_X(\omega) = \frac{a^2}{(\gamma^2 + \omega^2)^2}.$$

Задача 3.2.30

Найти корреляционную функцию процесса

$$Y(t) = X(t) + \frac{dX(t)}{dt},$$

если $X(t)$ – стационарный случайный процесс с корреляционной функцией

$$\Psi_X(\tau) = e^{-\alpha \tau^2}, \quad \alpha > 0, \quad \tau = t_2 - t_1.$$

Задача 3.2.31

Определить взаимные спектральные плотности мощности $W_{XY}(\omega)$ и $W_{YX}(\omega)$ стационарных случайных процессов $X(t)$ и $Y(t) = dX(t)/dt$, если известна ковариационная функция случайного процесса $X(t)$:

$$K_X(\tau) = e^{-\alpha\tau^2}, \quad \alpha > 0, \quad \tau = t_2 - t_1.$$

Задача 3.2.32

Определить взаимную корреляционную функцию $\Psi_{YZ}(t_1, t_2)$ процессов

$$\begin{aligned} Y(t) &= AX(t) + B \frac{dX(t)}{dt}, \\ Z(t) &= C \frac{dX(t)}{dt} + D \frac{d^2X(t)}{dt^2}, \end{aligned}$$

где A, B, C, D – постоянные коэффициенты; $X(t)$ – случайный процесс с корреляционной функцией

$$\Psi_X(\tau) = \sigma_X^2 e^{-\alpha|\tau|}, \quad \alpha > 0, \quad \tau = t_2 - t_1.$$

Задача 3.2.33

На вход интегрирующего устройства воздействует стационарный случайный процесс $X(t)$ с корреляционной функцией

$$\Psi_X(\tau) = \sigma_X^2 e^{-\alpha|\tau|}, \quad \alpha > 0, \quad \tau = t_2 - t_1.$$

Определить дисперсию σ_Y^2 процесса

$$Y(t) = \int_0^t X(\theta) d\theta.$$

Задача 3.2.34

На RC - цепочку с импульсной характеристикой

$$h(u) = \frac{1}{RC} e^{-u/RC}, \quad u \geq 0$$

поступает стационарный случайный процесс $X(t)$ со средним значением $\bar{X} = x_0$ и корреляционной функцией

$$\Psi_X(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}, \quad \alpha > 0, \quad \tau = t_2 - t_1.$$

Найти среднее значение, дисперсию и корреляционную функцию процесса $Y(t)$ на выходе RC - цепочки в установившемся режиме.

Задача 3.2.35

Генератор случайных чисел производит стационарную случайную последовательность Бернулли $X(n)$. Случайная величина X в каждый момент

времени n имеет равномерное распределение в интервале $[-0.5; 0.5]$. Последовательность $Y(n)$ задается как $Y(n) = X(n) + X(n+1)$. Найти: а) корреляционную функцию $\Psi_Y(n_1, n_2)$ последовательности $Y(n)$, где n_1 и n_2 – два момента времени; б) плотность вероятности значений Y в произвольный момент времени $p_1^Y(y, n)$.

Задача 3.2.36

На вход линейного фильтра поступает сумма детерминированного сигнала $x_c(t)$ и независимого от сигнала стационарного белого шума $X_{\text{ш}}(t)$. Сигнал имеет форму экспоненциального видеоимпульса:

$$x_c(t) = Ee^{E(t-T)}, \quad t \leq T, \quad E > 0, \quad \text{и} \quad x_c(t) \equiv 0, \quad t > T.$$

Определить коэффициент передачи фильтра, максимизирующего отношение “сигнал/шум” на выходе фильтра в заданный момент времени $t_{\text{п}} = T$.

Задача 3.2.37

Записать выражение для коэффициента передачи согласованного фильтра $S_{\text{сф}}(j\omega)$, если форма входного сигнала задается выражением

$$x_c(t) = \begin{cases} e^{\alpha t} \cos \omega_0 t, & t \leq t_{\text{п}}, \\ 0, & t > t_{\text{п}}, \end{cases} \quad \alpha > 0.$$

Пиковое значение сигнала на выходе соответствует моменту времени $t_{\text{п}}$.

Задача 3.2.38

Форма сигнала, поступающего на вход согласованного фильтра, представлена на рис. 3.11. Найти: а) коэффициент передачи согласованного фильтра $S_{\text{сф}}(j\omega)$; б) импульсную характеристику согласованного фильтра $h_{\text{сф}}(u)$; в) форму выходного сигнала y_c . Считать, что момент достижения выходным сигналом пикового значения есть $t_{\text{п}} > T$.

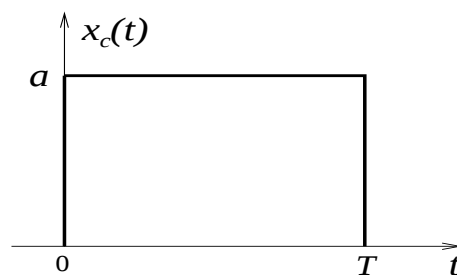


Рис. 3.11

Задача 3.2.39

На вход интегрирующей RC - цепочки с импульсной характеристикой

$$h(u) = \frac{1}{RC} \exp\left(-\frac{u}{RC}\right), \quad u \geq 0$$

поступает сумма детерминированного сигнала $x_c(t)$ и независимого от сигнала стационарного белого шума $X_{\text{ш}}(t)$ со спектральной плотностью мощности W_0 . Сигнал представляет собой прямоугольный видеоимпульс:

$$x_c(t) = \begin{cases} E > 0, & t \in [0, T], \\ 0, & t \notin [0, T]. \end{cases}$$

Найти соотношение для характерного времени фильтра $\tau_{\text{ф}} = RC$, максимизирующего величину

$$\gamma = \frac{y_c^{\text{п}}}{\sqrt{\sigma_{Y_{\text{ш}}}^2}},$$

где $y_c^{\text{п}}$ – пиковое значение выходного сигнала; $\sigma_{Y_{\text{ш}}}^2$ – дисперсия выходного шума.

Задача 3.2.40

На вход идеального винеровского фильтра без сдвига во времени ($T_0 = 0$) подается сумма стационарных статистически независимых случайных процессов $X_c(t)$ и $X_{\text{ш}}(t)$. Процесс $X_{\text{ш}}(t)$ представляет собой белый шум со спектральной плотностью мощности W_0 . Спектральная плотность мощности полезного сигнала $X_c(t)$ изображена на рис. 3.12. Найти: а) коэффициент передачи идеального винеровского фильтра $S_{\text{ВФ}}(j\omega)$; б) средний квадрат ошибки фильтрации $\sigma_{\text{ош}}^2$.

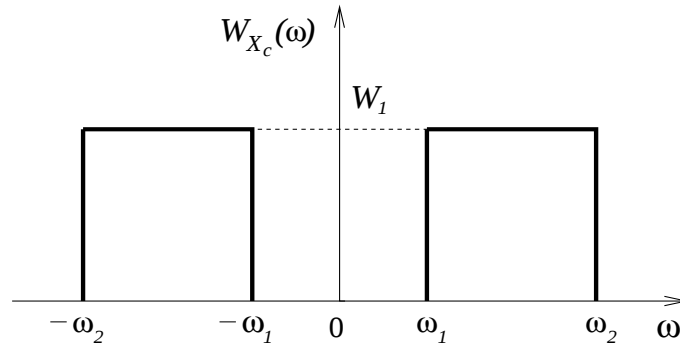


Рис. 3.12

Задача 3.2.41

На вход идеального винеровского фильтра с задержкой ($T_0 = -\Theta$) подается сумма стационарных статистически независимых случайных процессов $X_c(t)$ и $X_{\text{ш}}(t)$, где $X_{\text{ш}}(t)$ представляет собой белый шум со спектральной плотностью мощности W_0 , а $X_c(t)$ – полезный сигнал с лоренцевой формой спектра:

$$W_{X_c} = \frac{2\alpha\sigma_{X_c}^2}{\alpha^2 + \omega^2}, \quad \alpha > 0.$$

Найти импульсную характеристику идеального винеровского фильтра $h_{\text{вф}}(u)$.

Задача 3.2.42

На вход оптимального прогнозирующего фильтра, минимизирующего среднеквадратическую ошибку

$$\sigma_{\text{ош}}^2 = \langle (Y(t) - X_c(t + T_0))^2 \rangle,$$

воздействует сумма независимых стационарных случайных процессов: сигнала $X_c(t)$ и шума $X_{\text{ш}}(t)$. Известна спектральная плотность мощности входного сигнала $W_{X_c}(\omega)$ и взаимная спектральная плотность мощности сигнала и шума $W_{X_c X_{\text{ш}}}(\omega)$. Определить взаимную спектральную плотность мощности $W_{XY}(\omega)$ процесса $X(t) = X_c(t) + X_{\text{ш}}(t)$ на входе и процесса $Y(t)$ на выходе фильтра.

Задача 3.2.43

На вход RC -фильтра, изображенного на рис. 3.13, воздействует сумма независимых стационарных случайных процессов: сигнала $X_c(t)$ и шума $X_{\text{ш}}(t)$. Спектральная плотность мощности сигнала есть

$$W_{X_c}(\omega) = \frac{A^2}{\alpha^2 + \omega^2},$$

а шум является белым и характеризуется спектральной плотностью мощности W_0 . Найти оптимальное значение постоянной времени фильтра $\tau_{\text{ф}} = RC$, минимизирующее среднеквадратическую ошибку $\sigma_{\text{ош}}^2 = \langle (Y(t) - X_c(t))^2 \rangle$.

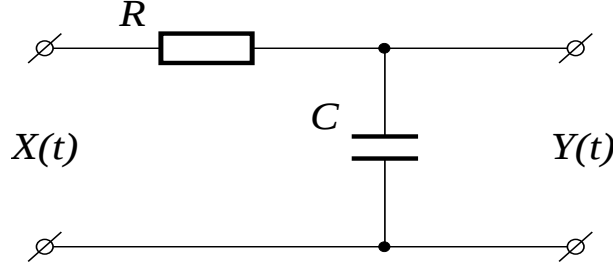


Рис. 3.13

3.2.3. Примеры решения задач**Задача 3.2.6**

В каждый момент времени значение случайного процесса $X(t)$ представляет собой функциональное преобразование случайной величины ϕ : $x = f(\phi, t)$. Обратное преобразование $\phi = g(x, t)$ не является однозначным. Одному и тому же значению x соответствуют два значения ϕ в интервале $[-\pi, \pi]$:

$$\phi_{1,2} = \pm \arccos\left(\frac{x}{a}\right) - \omega_0 t.$$

Распределение случайной величины ϕ известно: $p^\phi(\phi) = \frac{1}{2\pi}$, $\phi \in [-\pi, \pi]$. Воспользовавшись соотношением, аналогичным (3.45), получаем

$$p_1^X(x, t) = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right| + \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right| = \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}}, \quad x \in [-a, a].$$

Задача 3.2.14

Для решения данной задачи нужно воспользоваться соотношением (3.49), учтя статистическую независимость и стационарность процессов $X(t)$ и $Y(t)$. Для рассматриваемого случая $z = f(x, y) = xy$, соответственно $x = g(y, z) = \frac{z}{y}$. Тогда (3.49) принимает вид

$$p_1^Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_1^X(g(y, z)) p_1^Y(y) \frac{dy}{|y|} = \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \frac{dy}{|y|}.$$

Нужно определить пределы $y_{\min}$ и $y_{\max}$, для которых произведение плотностей вероятности $p_1^X(g(y, z)) p_1^Y(y)$ отлично от нуля (в данном случае оно равно единице). Учитывая, что $x \in [-1, 1]$ и $y \in [0.5, 1]$, приходим к системе неравенств:

$$y \geq |z| \quad \text{и} \quad 0.5 \leq y \leq 1.$$

Для различных значений z получаем следующие решения неравенств относительно y :

$$y \in [0.5, 1] \quad \text{при} \quad |z| \leq 0.5;$$

$$y \in [|z|, 1] \quad \text{при} \quad 0.5 \leq |z| \leq 1.$$

При всех других z неравенства не совместны.

Подставляя пределы интегрирования и находя значение интеграла, получаем

$$p_1^Z(z) = \begin{cases} \ln 2, & |z| \leq 0.5, \\ \frac{1}{|z|}, & 0.5 \leq |z| \leq 1, \\ 0, & |z| > 1. \end{cases}$$

Задача 3.2.21

Спектры стационарных процессов на входе и выходе линейного преобразователя с постоянными параметрами связаны соотношением (3.63): $W_Y(\omega) = |S(j\omega)|^2 W_X(\omega)$, где $S(j\omega)$ – коэффициент передачи. Для RC -цепочки, изображенной на рис. 3.5,

$$S(j\omega) = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega}} = \frac{j\omega}{j\omega + \alpha},$$

где $\alpha = \frac{1}{RC}$. Таким образом, в установившемся режиме, когда выходной процесс $Y(t)$ является стационарным, получаем

$$W_Y(\omega) = \begin{cases} \frac{W_0\omega^2}{\omega^2 + \alpha^2}, & |\omega| \leq \omega_1, \\ 0, & |\omega| > \omega_1. \end{cases}$$

Поскольку на частоте $\omega = 0$ значение W_Y конечно (отсутствует δ -пик), то среднее значение выходного процесса должно равняться нулю, а дисперсия совпадает со средним квадратом. Зная спектр, легко найти средний квадрат выходного процесса:

$$\begin{aligned} \sigma_Y^2 &= \langle Y^2(t) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_Y(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_1}^{\omega_1} \frac{W_0\omega^2}{\omega^2 + \alpha^2} d\omega = \\ &= \frac{W_0}{\pi} \left(\omega_1 - \alpha \arctg \frac{\omega_1}{\alpha} \right), \quad \alpha = \frac{1}{RC}. \end{aligned}$$

3.3 Марковские процессы и стохастические дифференциальные уравнения

3.3.1. Краткие теоретические сведения

Основные определения

Для любого случайного процесса $X(t)$ n -мерная плотность вероятности может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} p_n(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n) = \\ = p_{n-1}(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_{n-1}, t_{n-1}) \cdot v(x_n, t_n / x_{n-1}, t_{n-1}, \dots, x_1, t_1), \end{aligned} \quad (3.81)$$

где $v(x_n, t_n / x_{n-1}, t_{n-1}, \dots, x_1, t_1)$ – условная плотность вероятности, учитывающая $n - 1$ предшествующее состояние процесса. Условная плотность вероятности – неотрицательна и нормирована на единицу:

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(x_n, t_n / x_{n-1}, t_{n-1}, \dots, x_1, t_1) dx_n \equiv 1. \quad (3.82)$$

Случайный процесс $X(t)$, для которого условная плотность вероятности зависит только от одного условия, т.е.

$$v(x_n, t_n / x_{n-1}, t_{n-1}, \dots, x_1, t_1) = v(x_n, t_n / x_{n-1}, t_{n-1}), \quad (3.83)$$

называется *марковским (простейшим марковским)* случайным процессом³. Условная плотность вероятности в этом случае называется *плотностью вероятности перехода* из предшествующего состояния в последующее. Марковский процесс называется *однородным*, если $v(x_2, t_2 / x_1, t_1) = v(x_2, \tau / x_1)$, где $\tau = t_2 - t_1$.

Марковский процесс обладает следующими свойствами:

1. Если точно известно состояние системы в момент времени t_1 , то любое состояние в момент $t_2 > t_1$ не зависит от состояний системы в моменты времени $t < t_1$ (т.е. от предыстории процесса).
2. Для марковского процесса $X(t)$ справедливо равенство

$$p_n(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n) = p_1(x_1, t_1) \prod_{i=2}^n v(x_i, t_i / x_{i-1}, t_{i-1}) \quad (3.84)$$

и, следовательно, он полностью задан, если известны функции $p_1(x, t)$ и $v(x_2, t_2 / x_1, t_1)$.

3. Плотность вероятности перехода определяет эволюцию одномерной плотности вероятности во времени:

$$p_1(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} v(x, t / x_0, t_0) p_1(x_0, t_0) dx_0. \quad (3.85)$$

³Если условная плотность вероятности зависит от k предшествующих состояний, то процесс называется *k-связанным марковским* процессом.

Для любого марковского процесса плотности вероятности перехода между состояниями в три последовательных момента времени $t_1 < t_2 < t_3$ должны удовлетворять следующему уравнению:

$$v(x_3, t_3/x_1, t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} v(x_2, t_2/x_1, t_1)v(x_3, t_3/x_2, t_2)dx_2, \quad (3.86)$$

называемому *уравнением Чепмена – Колмогорова, уравнением Смолуховского* или *обобщенным уравнением Маркова*.

В зависимости от дискретности или непрерывности множества состояний и множества моментов времени различают дискретные марковские последовательности (*марковские цепи*), непрерывные марковские последовательности, дискретные марковские процессы и непрерывнозначные марковские процессы.

Марковские цепи

Дискретную марковскую последовательность называют *марковской цепью* (МЦ). Пусть $X(i)$ – марковская цепь со значениями x_m , где i – дискретное время; m – номер состояния. Множество возможных значений x_m может быть конечным ($m = 1, 2, 3, \dots, M < \infty$) или счетным ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm \infty$). Марковскую цепь с конечным множеством состояний называют *конечной* МЦ. Введем следующие обозначения: $P_m(i)$ – вероятность значения x_m в момент времени i ; $P(m_1, i_1, \dots, m_k, i_n)$ – совместная вероятность выпадения значений $x_{m_1}, \dots, x_{m_n}$ в моменты времени $i_1, \dots, i_n$ соответственно; $\Pi(m_n, i_n/m_{n-1}, i_{n-1}, m_{n-2}, i_{n-2}, \dots)$ – условная вероятность значения x_{m_n} в момент времени i_n при условии, что в предшествующие моменты времени $i_{n-1}, i_{n-2}, \dots$ случайной переменной принимались значения $x_{m_{n-1}}, x_{m_{n-2}}, \dots$ соответственно. Для *простой* МЦ условная вероятность зависит только от одного условия, т.е.

$$\Pi(m_n, i_n/m_{n-1}, i_{n-1}, m_{n-2}, i_{n-2}, \dots) = \Pi(m_n, i_n/m_{n-1}, i_{n-1}). \quad (3.87)$$

В этом случае она называется *вероятностью перехода* из состояния $x_{m_{n-1}}$ в момент времени i_{n-1} в состояние x_{m_n} в момент времени i_n . Будем обозначать $\Pi(m_n, i_n/m_{n-1}, i_{n-1})$ как $\Pi_{m_{n-1}m_n}(i_{n-1}, i_n)$. Далее будем говорить о марковских цепях, подразумевая простые МЦ.

Вероятность перехода МЦ удовлетворяет следующим условиям:

$$\Pi_{m_1m_2}(i_1, i_2) \geq 0; \quad \sum_{m_2} \Pi_{m_1m_2}(i_1, i_2) = 1; \quad \Pi_{m_1m_2}(i_1, i_1) = \delta_{m_1m_2}, \quad (3.88)$$

где $\delta_{m_1m_2}$ – символ Кронеккера. Для МЦ равенство (3.84) превращается в равенство

$$P(m_1, i_1, \dots, m_k, i_n) = P_{m_1}(i_1) \prod_{k=2}^n \Pi_{m_{k-1}m_k}(i_{k-1}, i_k). \quad (3.89)$$

Выражение (3.85) можно представить как

$$P_m(i) = \sum_{m_0} \Pi_{m_0m}(i_0, i)P_{m_0}(i_0). \quad (3.90)$$

Уравнение Чепмена – Колмогорова для МЦ принимает вид

$$\Pi_{m_1 m_3}(i_1, i_3) = \sum_{m_2} \Pi_{m_1 m_2}(i_1, i_2) \Pi_{m_2 m_3}(i_2, i_3) \quad (3.91)$$

и называется *уравнением Маркова*.

Конечная МЦ с числом состояний M задается с помощью стохастической матрицы

$$\hat{\Pi}(i_1, i_2) = \begin{bmatrix} \Pi_{11}(i_1, i_2) & \Pi_{12}(i_1, i_2) & \dots \Pi_{1M}(i_1, i_2) \\ \dots & \dots & \dots \\ \Pi_{M1}(i_1, i_2) & \Pi_{M2}(i_1, i_2) & \dots \Pi_{MM}(i_1, i_2) \end{bmatrix}.$$

При этом уравнение Маркова может быть записано в матричном виде как

$$\hat{\Pi}(i_1, i_3) = \hat{\Pi}(i_1, i_2) \hat{\Pi}(i_2, i_3). \quad (3.92)$$

Обозначим за $\hat{P}(i)$ вектор-строку, составленную из вероятностей различных значений случайной переменной в момент времени i :

$$\hat{P}(i) = (P_1(i), P_2(i), \dots, P_M(i)), \quad (3.93)$$

тогда равенство (3.89) принимает вид

$$\hat{P}(i) = \hat{P}(i_0) \hat{\Pi}(i_0, i). \quad (3.94)$$

Для однородной МЦ вероятности переходов зависят только от разности рассматриваемых моментов времени, поэтому конечную однородную МЦ можно описать с помощью *матрицы одношаговых переходных вероятностей* $\hat{\Pi}_1$, элементами которой являются вероятности переходов между различными состояниями за один шаг по времени:

$$\hat{\Pi}_1 = \begin{bmatrix} \Pi_{11}(1) & \Pi_{12}(1) & \dots \Pi_{1M}(1) \\ \dots & \dots & \dots \\ \Pi_{M1}(1) & \Pi_{M2}(1) & \dots \Pi_{MM}(1) \end{bmatrix}.$$

Теперь вместо (3.94) можно записать

$$\hat{P}(i) = \hat{P}(i_0) \hat{\Pi}_1^i, \quad (3.95)$$

где $\hat{\Pi}_1^i = \hat{\Pi}_1 \cdot \hat{\Pi}_1 \cdot \dots \cdot \hat{\Pi}_1$ (i раз).

Одна из важных задач, решаемых в теории марковских цепей, состоит в исследовании предельных *стационарных* (*финальных*) вероятностей состояний $P_m^{\text{ст}} = \lim_{i \rightarrow \infty} P_m(i)$. Для простой конечной однородной МЦ стационарное распределение вероятностей $P_m^{\text{ст}}$, $m = 1, 2, 3, \dots$ существует и не зависит от начального распределения $P_m(i_0)$. Вектор стационарных вероятностей $\hat{P}^{\text{ст}}$ является решением уравнения

$$\hat{P}^{\text{ст}} = \hat{P}^{\text{ст}} \hat{\Pi}_1. \quad (3.96)$$

Таким образом, для стационарных вероятностей можно записать следующую систему алгебраических уравнений:

$$P_m^{\text{ст}} = \sum_{m_0} P_{m_0}^{\text{ст}} \Pi_{m_0 m}, \quad \sum_m P_m^{\text{ст}} = 1, \quad m = 1, 2, 3, \dots, M. \quad (3.97)$$

Дискретные марковские процессы

Пусть теперь $X(t)$ – марковский процесс с непрерывным временем и дискретным множеством значений случайной переменной. Множество возможных значений x_m (состояний системы) может быть конечным ($m = 1, 2, 3, \dots, M < \infty$) или счетным ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm \infty$). Введем обозначения: $P_m(t)$ – вероятность состояния x_m в момент времени t ; $\Pi_{m_1 m_2}(t_1, t_2)$ – плотность вероятности перехода из состояния x_{m_1} в момент времени t_1 в состояние x_{m_2} в момент времени t_2 . Для состояний в три последовательные момента времени $t_1 < t_2 < t_3$ справедливо уравнение Чепмена – Колмогорова:

$$\Pi_{m_1 m_3}(t_1, t_3) = \sum_{m_2} \Pi_{m_1 m_2}(t_1, t_2) \Pi_{m_2 m_3}(t_2, t_3). \quad (3.98)$$

Для дискретного марковского процесса можно ввести вероятности переходов $a_{m_1 m}(t)$ в единицу времени:

$$\begin{aligned} \Pi_{m_1 m}(t, t+dt) &= a_{m_1 m}(t)dt, \quad m \neq m_1, \\ \Pi_{mm}(t, t+dt) &= 1 + a_{mm}(t)dt, \\ a_{m_1 m_1}(t) &= - \sum_{m \neq m_1} a_{m_1 m}(t). \end{aligned} \quad (3.99)$$

Исходя из (3.98) и (3.99) можно получить следующее уравнение эволюции вероятности состояния x_m во времени:

$$\frac{dP_m(t)}{dt} = \sum_{m_1} P_{m_1}(t) a_{m_1 m}(t), \quad (3.100)$$

называемое *управляющим уравнением*. Управляющее уравнение может быть переписано в несколько ином виде:

$$\frac{dP_m(t)}{dt} = \sum_{m_1} [a_{m_1 m}(t) P_{m_1}(t) - a_{mm_1}(t) P_m(t)]. \quad (3.101)$$

В такой форме записи виден балансный характер уравнения. При заданных $a_{m_1 m}(t)$ система управляющих уравнений (3.100) или (3.101) ($m = 1, 2, 3, \dots, M$), дополненная условием нормировки, позволяет при заданных начальных условиях определить эволюцию распределения вероятностей во времени. Если существует стационарное распределение вероятностей, то его можно найти, решая следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{m_1=1}^M P_{m_1}^{\text{ст}} a_{m_1 m} = 0, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad \sum_{m=1}^M P_m^{\text{ст}} = 1. \quad (3.102)$$

Дискретные марковские процессы, для которых возможны переходы только между соседними состояниями (т.е. состояниями, номера которых отличаются на единицу), называются *одношаговыми процессами*, *процессами генерации-рекомбинации* или *процессами “рождения-гибели”*. Введем следующие обозначения:

- 1) $a_{m+1\ m}(t) = r_{m+1}(t)$ – вероятность перехода (“рекомбинации”) из состояния с номером $m + 1$ в состояние с номером m в единицу времени;
- 2) $a_{m-1\ m}(t) = g_{m-1}(t)$ – вероятность перехода (“генерации”) из состояния с номером $m - 1$ в состояние с номером m в единицу времени.

Переходы в состояние с номером m из состояний с номерами $m_1 > m + 1$ или $m_1 < m - 1$ невозможны. Для коэффициентов $a_{mm}(t)$ получаем: $a_{mm}(t) = -(r_m(t) + g_m(t))$. Управляющее уравнение для одношагового процесса принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{dP_m(t)}{dt} = & r_{m+1}(t)P_{m+1}(t) + g_{m-1}(t)P_{m-1}(t) - \\ & - (r_m(t) + g_m(t))P_m(t). \end{aligned} \quad (3.103)$$

Если вероятности переходов одинаковы для всех состояний и не зависят от времени, т.е. $r_m(t) \equiv r = \text{const}$ и $g_m(t) \equiv g = \text{const}$, то дискретный марковский процесс $X(t)$ называется *случайными блужданиями* (с непрерывным временем) ⁴. В этом случае управляющее уравнение записывается как:

$$\frac{dP_m(t)}{dt} = rP_{m+1}(t) + gP_{m-1}(t) - (r + g)P_m(t). \quad (3.104)$$

Неограниченные случайные блуждания, для которых $r = 0$, называются *пуассоновским процессом*. Для него

$$\frac{dP_m(t)}{dt} = g(P_{m-1}(t) - P_m(t)), \quad m = 1, 2, 3, \dots \infty. \quad (3.105)$$

Выделяют также *случайный двоичный (телеграфный) сигнал*, представляющий собой случайные блуждания с двумя состояниями x_1 и x_2 . Соответствующая система управляющих уравнений есть

$$\begin{aligned} \frac{dP_1(t)}{dt} &= rP_2(t) - gP_1(t), \\ \frac{dP_2(t)}{dt} &= gP_1(t) - rP_2(t). \end{aligned} \quad (3.106)$$

Диффузионные марковские процессы

Среди непрерывнозначных марковских процессов выделяют класс *диффузионных процессов*. Скалярный вещественный непрерывнозначный марковский процесс $X(t)$ называется *диффузионным*, если существуют следующие ограниченные пределы:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} (x' - x)v(x', t + \Delta t/x, t)dx' = A(x, t); \quad (3.107)$$

⁴Можно также выделить случайные блуждания с дискретным временем, которые являются частным случаем однородной марковской цепи.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} (x' - x)^2 v(x', t + \Delta t/x, t) dx' = 2B(x, t) \neq 0; \quad (3.108)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} (x' - x)^k v(x', t + \Delta t/x, t) dx' = C_k(x, t) \equiv 0 \quad (3.109)$$

для любого $k > 2$.

Величина $A(x, t)$ представляет собой среднее значение локальной скорости изменения состояния и называется *коэффициентом сноса* или *дрейфа*. Величина $B(x, t)$ характеризует локальную скорость роста дисперсии приращения процесса и называется *коэффициентом диффузии*⁵.

Условия (3.108) – (3.109) означают локальный рост дисперсии приращения $\Delta X = X(t') - x(t)$ по линейному закону, т.е. для малых $\Delta t = t' - t$ справедливо

$$\sigma_{\Delta X}^2(t + \Delta t) = 2B(x, t)\Delta t. \quad (3.110)$$

Условие (3.109) исключает большие приращения процесса на малых временах. Хотя допускаются быстрые изменения значений процесса, но в противоположных направлениях. Конечные скачки появляются с нулевой вероятностью, а реализации процесса непрерывны с вероятностью единица. Примером диффузионного процесса может служить скорость броуновской частицы.

Плотность вероятности перехода $v(x, t/x_0, t_0)$ диффузионного процесса $X(t)$ удовлетворяют некоторым уравнениям в частных производных, которые можно получить из уравнения Чепмена – Колмогорова и условий (3.107) – (3.109). Эти уравнения называются *прямым и обратным уравнениями Колмогорова*. Прямое уравнение определяет эволюцию распределения в прямом времени и называется также *уравнением Фоккера – Планка – Колмогорова* (ФПК). Оно имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(x, t/x_0, t_0)}{\partial t} = & - \frac{\partial A(x, t)v(x, t/x_0, t_0)}{\partial x} + \\ & + \frac{\partial^2 B(x, t)v(x, t/x_0, t_0)}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (3.111)$$

и должно быть дополнено начальным условием: $v(x, t_0/x_0, t_0) = \delta(x - x_0)$. Умножая обе части этого уравнения на $p_1(x_0, t_0)$ и интегрируя по x_0 , получаем аналогичное уравнение ФПК для безусловной одномерной плотности вероятности:

$$\frac{\partial p_1(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial A(x, t)p_1(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 B(x, t)p_1(x, t)}{\partial x^2}, \quad (3.112)$$

с начальным условием $p_1(x, t_0) = p_1(x_0, t_0)$. Таким образом, диффузионный процесс $X(t)$ полностью определяется своими коэффициентами

⁵Иногда коэффициентом диффузии называют величину $2B(x, t)$.

сноса и диффузии при заданных начальных и граничных условиях для уравнений (3.111) – (3.112).

Пусть $X(t)$ – стационарный (в строгом смысле) диффузионный процесс. Тогда для него $A(x, t) \equiv A(x)$; $B(x, t) \equiv B(x)$ и $p_1(x, t) \equiv p_1^{\text{ст}}(x)$. Налагая граничные условия

$$p_1^{\text{ст}}(x)|_{x=\pm\infty} \equiv 0, \quad \left. \frac{dp_1^{\text{ст}}(x)}{dx} \right|_{x=\pm\infty} \equiv 0, \quad (3.113)$$

находим решение уравнения ФПК в виде

$$p_1^{\text{ст}}(x) = \frac{C}{B(x)} \exp \left(\int_{x_0}^x \frac{A(x')}{B(x')} dx' \right), \quad (3.114)$$

где x_0 – произвольно выбранное значение случайной переменной; C – нормировочная константа.

Диффузионный процесс $X(t)$ с заданным начальным состоянием $X(t_0) = x_0$, для которого $A(x, t) \equiv 0$, а $B(x, t) \equiv \text{const}$, называется *винеровским процессом*. Винеровский процесс обладает следующими свойствами:

1. Он является гауссовым процессом.
2. Его среднее значение определяется начальным состоянием ($\langle X(t) \rangle = x_0$).
3. Винеровский процесс является нестационарным и его дисперсия растет линейно во времени со скоростью, равной удвоенному коэффициенту диффузии, т.е. $\sigma_X^2(t) = 2B \cdot (t - t_0)$.
4. Винеровский процесс – это *процесс с независимыми приращениями* на неперекрывающихся интервалах времени.

Понятие диффузионного процесса может быть обобщено и на векторный марковский процесс $\mathbf{X}(t)$, для которого текущее состояние задается вектором $\mathbf{x}$ с компонентами x_j , $j = 1, 2, \dots, N$. Векторный диффузионный процесс характеризуется вектором сноса $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ с компонентами

$$A_j(\mathbf{x}, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int (x'_j - x_j) v(\mathbf{x}', t + \Delta t / \mathbf{x}, t) d\mathbf{x}', \quad (3.115)$$

$$j = 1, 2, \dots, N,$$

и матрицей диффузии $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t)$ с элементами

$$B_{jk}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int (x'_j - x_j)(x'_k - x_k) v(\mathbf{x}', t + \Delta t / \mathbf{x}, t) d\mathbf{x}', \quad (3.116)$$

$$j, k = 1, 2, \dots, N.$$

Интегралы в этих выражениях берутся по всем возможным значениям векторной переменной $\mathbf{x}'$. Уравнение ФПК для векторного диффузионного процесса $\mathbf{X}(t)$, записанное относительно одномерной плотности вероятности $p_1(\mathbf{x}, t)$, принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_1(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = & - \sum_{j=1}^N \frac{\partial A_j(\mathbf{x}, t) p_1(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j} + \\ & + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 B_{jk}(\mathbf{x}, t) p_1(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j \partial x_k}. \end{aligned} \quad (3.117)$$

Стохастические дифференциальные уравнения

Дифференциальные уравнения, содержащие случайные слагаемые, имеющие случайные параметры, случайные начальные или граничные условия называются *стохастическими дифференциальными уравнениями*

(СДУ). Пусть поведение некоторой системы описывается дифференциальным уравнением первого порядка (его часто называют *уравнением Ланжевена*), имеющим вид

$$\frac{dX}{dt} = f(X, t) + g(X, t)n(t), \quad (3.118)$$

где f и g – детерминированные гладкие функции своих аргументов; $n(t)$ – нормированный белый гауссов шум ($\langle n(t) \rangle \equiv 0$, $\langle n(t)n(t+\tau) \rangle = \delta(\tau)$). Множитель g характеризует интенсивность шума. Если g не зависит от состояния X , а является детерминированной функцией времени или константой, то шум, воздействующий на систему, называется *аддитивным*, если же интенсивность шумового воздействия зависит от X , то он называется *мультипликативным*.

Простейшее СДУ вида

$$\frac{dW}{dt} = gn(t), \quad W(t_0) = W_0, \quad g = \text{const} \quad (3.119)$$

описывает винеровский процесс $W(t)$ с коэффициентом диффузии $B_W = g^2/2$.

СДУ (3.118) можно переписать в интегральном представлении:

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^t f(X(\theta), \theta) d\theta + \int_{t_0}^t g(X(\theta), \theta) dW(\theta), \quad (3.120)$$

где $W(t)$ – винеровский процесс с нулевым начальным значением и коэффициентом диффузии $1/2$. Второй интеграл в этом выражении в случае мультипликативного шума является так называемым *стохастическим интегралом*. Соответствующий среднеквадратический предел от интегральной суммы

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t g(X(\theta), \theta) dW(\theta) = \\ & = l.i.m.m \rightarrow \infty \sum_{i=0}^{m-1} g(X(\theta'_i), \theta_i) [W(\theta_{i+1}) - W(\theta_i)] \end{aligned} \quad (3.121)$$

зависит от выбора точек $\theta'_i \in [\theta_i, \theta_{i+1})$ и соответственно может быть определен по-разному. Пусть $\theta'_i = (1 - \nu)\theta_i + \nu\theta_{i+1}$, где $\nu \in [0, 1)$. При произвольном значении ν стохастический интеграл (3.121) называется *обобщенным стохастическим интегралом*, а уравнение (3.118) – *обобщенным СДУ*. Если положить $\nu = 0$, то получаем *стохастический интеграл Ито* и *СДУ Ито*. В случае $\nu = 1/2$ приходим к *стохастическому интегралу Стратоновича* и *СДУ Стратоновича*.

Случайный процесс $X(t)$, являющийся решением обобщенного СДУ (3.118) и удовлетворяющий детерминированному начальному условию $X(t_0) = x_0$, представляет собой диффузионный марковский процесс с коэффициентом сноса

$$A(x, t) = f(x, t) + \nu g(x, t) \frac{\partial g(x, t)}{\partial x} \quad (3.122)$$

и коэффициентом диффузии

$$B(x, t) = \frac{1}{2} g^2(x, t). \quad (3.123)$$

Второе слагаемое в выражении (3.122) появляется только в случае мультипликативного шума. Оно называется *ложным сносом*. Если процесс $X(t)$ описывается СДУ Ито, то ложный снос отсутствует.

Пусть имеется система N обобщенных стохастических дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dX_j}{dt} = f_j(X_1, \dots, X_N, t) + \sum_{k=1}^N g_{jk}(X_1, \dots, X_N, t) n_k(t), \quad (3.124)$$

$$j = 1, 2, \dots, N,$$

где $n_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, N$ – статистически независимые нормированные источники нормального белого шума. При заданных начальных условиях $X_j(t_0) = x_j^0$, $j = 1, 2, \dots, N$ система (3.124) описывает векторный диффузионный процесс $\mathbf{X}(t) = X_1(t), X_2(t), \dots, X_N(t)$, который характеризуется вектором сноса с компонентами

$$A_j(\mathbf{x}, t) = f_j(\mathbf{x}, t) + \nu \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N g_{ik}(x, t) \frac{\partial g_{jk}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i}, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (3.125)$$

и матрицей диффузии с элементами

$$B_{jk}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N g_{ji}(x, t) g_{ki}(x, t), \quad j, k = 1, 2, \dots, N. \quad (3.126)$$

3.3.2. Задачи

Задача 3.3.1

Для простой однородной цепи Маркова с двумя состояниями $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$ задана одношаговая матрица переходных вероятностей

$$\hat{\Pi}_1 = \begin{bmatrix} 1 - \alpha & \alpha \\ \beta & 1 - \beta \end{bmatrix}.$$

Определить стационарные вероятности состояний $P_{1,2}^{\text{ст}}$, среднее значение $\bar{X}$ и дисперсию σ_X^2 стационарного распределения.

Задача 3.3.2

Одношаговая матрица простой однородной марковской цепи имеет вид

$$\hat{\Pi}_1 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 \end{bmatrix}.$$

Найти стационарное распределение вероятностей $P_m^{\text{ст}}$, $m = 1, 2, 3$ и соответствующее ему среднее значение $\bar{X}$, если цепь имеет следующие состояния: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$.

Задача 3.3.3

Одношаговая матрица простой однородной марковской цепи имеет вид

$$\hat{\Pi}_1 = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 3/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Найти стационарное распределение вероятностей $P_m^{\text{ст}}$, $m = 1, 2, 3$ и соответствующее ему среднее значение $\bar{X}$, если цепь имеет следующие состояния: $x_1 = 4$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$.

Задача 3.3.4

Марковская цепь $X(i)$ со счетным множеством состояний $x_0 = 0$; $x_{\pm 1} = \Delta x$; $x_{\pm 2} = 2\Delta x$; ... $x_{\pm m} = m\Delta x$; ... представляет собой неограниченные случайные блуждания. Это означает, что возможны переходы только между соседними состояниями, причем вероятности переходов постоянны и не зависят от состояния. Пусть $\Pi_m m+1 = p$ (вероятность “шага вправо”) и $\Pi_m m-1 = q$ (вероятность “шага влево”), причем $p + q = 1$ (“шаги на месте” исключаются). Найти: а) вероятность того, что из начального состояния x_0 за n шагов будет достигнуто состояние x_m ; б) среднее значение $\bar{X}(n)$ и дисперсию $\sigma_X^2(n)$.

Задача 3.3.5

Частица совершает одномерные случайные блуждания между двумя отражающими границами: $x_1 = 0$ и $x_M = d$. Шаг блужданий $\Delta = 1$. Вероятность шага вправо $\Pi_{m,m+1} = p$ ($m = 1, 2, \dots, M-1$), вероятность шага влево $\Pi_{m+1,m} = q$ ($m = 1, 2, \dots, M-1$), а вероятность остаться в

прежнем положении $\Pi_{m,m} = 1 - p - q$ ($m = 1, 2, \dots, M$). Граничные условия имеют вид: $\Pi_{1,2} = 1$, $\Pi_{M,M-1} = 1$. Найти стационарные вероятности состояний $P_m^{\text{ст}}$, $m = 1, 2, \dots, M$.

Задача 3.3.6

$X(t)$ – случайный телеграфный сигнал с состояниями $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$. Вероятности переходов между состояниями в единицу времени задаются величинами: $g = 0.1$ и $r = 0.4$. Найти среднее значение $\bar{X}$ и дисперсию σ_X^2 процесса, соответствующие стационарному распределению вероятностей.

Задача 3.3.7

Найти стационарные вероятности $P_m^{\text{ст}}$, $m = 1, 2, 3, 4$ одношагового процесса, изображенного на схеме (рис. 3.14).

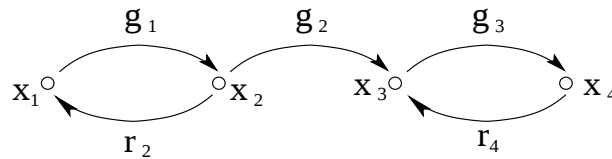


Рис. 3.14

Задача 3.3.8

Одношаговый процесс $X(t)$, представленный на схеме (рис. 3.15) имеет состояния $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$. Найти стационарные вероятности $P_m^{\text{ст}}$, $m = 1, 2, 3, 4$ и соответствующие стационарному распределению среднее значение $\bar{X}$ и дисперсию σ_X^2 .

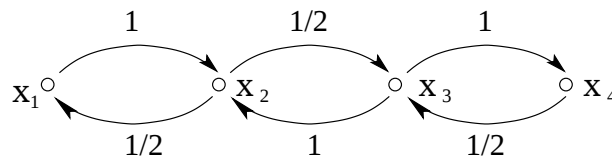


Рис. 3.15

Задача 3.3.9

Найти вероятности состояний x_m , $m = 0, 1, 2, 3, \dots$, пуассоновского процесса $X(t)$ с начальным условием $X(t_0) = x_0$, если вероятность перехода $x_m \rightarrow x_{m+1}$ в единицу времени есть g .

Задача 3.3.10

Доказать, что коэффициент корреляции нормального стационарного марковского процесса $X(t)$ равен $R_X(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$, $\alpha > 0$, $\tau = t_2 - t_1$.

Задача 3.3.11

Случайный процесс $X(t)$ задается СДУ вида

$$\frac{dX}{dt} - \mu = n(t), \quad X(0) = x_0, \quad \mu = \text{const} \geq 0,$$

где $n(t)$ – нормальный белый шум со спектром $W_n = 1$. Найти:

- а) одномерную плотность вероятности $p_1(x, t)$ и условную плотность вероятности $v(x_2, t_2/x_1, t_1)$;
- б) среднее значение $\bar{X}(t)$ и дисперсию $\sigma_X^2(t)$ случайного процесса $X(t)$;
- в) корреляционную функцию $\Psi_X(t_1, t_2)$.

Задача 3.3.12

В квазигармоническом автогенераторе, находящемся под воздействием слабого гауссова белого шума флуктуации амплитуды $\rho(t)$ приближенно можно описать СДУ вида

$$\frac{d\rho}{dt} + 2\gamma\rho = \sqrt{2D}n(t), \quad \gamma = \text{const} \geq 0,$$

где $n(t)$ – нормальный белый шум со спектром $W_n = 1$; D – константа, характеризующая интенсивность шумового воздействия. Записать уравнение Фоккера – Планка – Колмогорова для одномерной плотности вероятности $p_1(\rho, t)$ и найти его стационарное решение $p_1^{\text{ст}}(\rho)$.

Задача 3.3.13

Случайный процесс $X(t)$ задается СДУ:

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & \frac{dX}{dt} + \alpha X - \frac{1}{2X} = n(t), \quad X > 0, \quad \alpha = \text{const} \geq 0, \\ \text{б)} \quad & \frac{dX}{dt} + k \text{sgn}(X) = n(t), \quad k = \text{const} \geq 0, \end{aligned}$$

где $n(t)$ – нормальный белый шум со спектром $W_n = 1$. Найти стационарную плотность вероятности $p_1^{\text{ст}}(x)$, среднее значение $\bar{X}$ и дисперсию σ_X^2 случайного процесса $X(t)$.

Задача 3.3.14

Случайный процесс $X(t)$ задается следующим СДУ Ито:

$$\frac{dX}{dt} + X \ln(X/m) = Xn(t), \quad X > 0,$$

где $n(t)$ – нормальный белый шум со спектром $W_n = 1$; m – натуральное число. Найти стационарную плотность вероятности $p_1^{\text{ст}}(x)$ случайного процесса $X(t)$.

Задача 3.3.15

Случайный процесс $X(t)$ задается следующим СДУ:

$$\frac{dX}{dt} + X(X - 1) = Xn(t), \quad X \geq 0,$$

где $n(t)$ – нормальный белый шум со спектром $W_n = 1$. Найти стационарную плотность вероятности $p_1^{\text{ст}}(x)$ случайного процесса $X(t)$, в случае, когда СДУ понимается как

а) СДУ Ито;

б) СДУ Стратоновича.

Будут ли результаты качественно различными?

Задача 3.3.16

Написать уравнение ФПК для нелинейного осциллятора

$$\ddot{X} + 2\gamma\dot{X} + \frac{\partial U(X)}{\partial X} = \sqrt{2D}n(t),$$

где $n(t)$ – нормальный белый шум со спектром $W_n = 1$; D – константа, характеризующая интенсивность шума. В случае сильного трения (когда можно пренебречь второй производной $\ddot{X}$) найти вид стационарного распределения $p_1^{\text{ст}}(x)$ с точностью до нормировочной константы.

Задача 3.3.17

Записать СДУ Ито, эквивалентное следующему СДУ Стратоновича:

$$\frac{dX}{dt} + \alpha X = \varepsilon(1 - X^3)Xn(t),$$

где $n(t)$ – нормальный белый шум со спектром $W_n = 1$; α и ε – заданные параметры системы.

Задача 3.3.18

Записать вектор сноса $\mathbf{A}$ и матрицу диффузии $\hat{\mathbf{B}}$ двумерного диффузионного процесса, задаваемого стохастическими уравнениями Стратоновича:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= Y + \sqrt{2D_1}n_1(t), \\ \frac{dY}{dt} &= -\omega_0^2 X + (\varepsilon_0 - X^2 + \sqrt{2D_2}n_2(t))Y, \end{aligned}$$

где $n_1(t)$ и $n_2(t)$ – статистически независимые источники нормального белого шума со спектрами $W_{n_1}(\omega) = W_{n_2}(\omega) = 1$; D_1 и D_2 – константы, характеризующие интенсивность шума.

Задача 3.3.19

Написать уравнение ФПК для осциллятора с флуктуациями частоты, задаваемого следующим СДУ:

$$\ddot{X} + 2\gamma\dot{X} + \omega_0^2(1 + \sqrt{2D}n(t))X = 0,$$

где $n(t)$ – нормальный белый шум со спектром $W_n = 1$; D – константа, характеризующая интенсивность шума.

Задача 3.3.20

Процесс $X(t)$ представляет собой ток в RL -цепи, последовательно соединенной с источником случайной э.д.с. $E(t) = \sqrt{2D}n(t)$ (рис. 3.16),

где $n(t)$ – нормальный белый шум со спектром $W_n = 1$; D – константа. Найти а) стационарную плотность вероятности $p_1^{\text{ст}}(x)$ случайного процесса $X(t)$; б) корреляционную функцию $\Psi_X(\tau)$ в установившемся режиме.

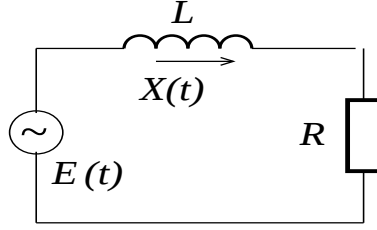


Рис. 3.16

3.3.3. Примеры решения задач

Задача 3.3.1

Для стационарных вероятностей состояний однородной марковской цепи справедливы уравнения (3.97). В рассматриваемом случае получаем уравнения

$$\begin{aligned} P_1^{\text{ст}} &= (1 - \alpha)P_1^{\text{ст}} + \beta P_2^{\text{ст}}, \\ P_2^{\text{ст}} &= \alpha P_1^{\text{ст}} + (1 - \beta)P_2^{\text{ст}}. \end{aligned}$$

Они являются линейно-зависимыми, поэтому надо взять любое из них и добавить к нему условие нормировки: $P_1^{\text{ст}} + P_2^{\text{ст}} = 1$. Например, берем первое уравнение и условие нормировки и получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \alpha P_1^{\text{ст}} - \beta P_2^{\text{ст}} &= 0, \\ P_1^{\text{ст}} + P_2^{\text{ст}} &= 1. \end{aligned}$$

Решая ее, получаем $P_1^{\text{ст}} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}$, $P_2^{\text{ст}} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$.

Найдя стационарные вероятности состояний, определяем среднее значение $\bar{X}$ и дисперсию σ_X^2 :

$$\begin{aligned} \bar{X} &= x_1 P_1^{\text{ст}} + x_2 P_2^{\text{ст}} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}; \\ \sigma_X^2 &= x_1^2 P_1^{\text{ст}} + x_2^2 P_2^{\text{ст}} - \bar{X}^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2}. \end{aligned}$$

Задача 3.3.6

Случайный телеграфный сигнал является частным случаем случайных блужданий с непрерывным временем и для него справедливы управляющие уравнения (3.106). Так как в стационарном случае вероятности состояний постоянны, получаем уравнения

$$\begin{aligned} r P_2^{\text{ст}} - g P_1^{\text{ст}} &= 0, \\ g P_1^{\text{ст}} - r P_2^{\text{ст}} &= 0. \end{aligned}$$

Выбираем одно из этих двух линейно-зависимых уравнений и решаем его, учитывая условие нормировки $P_1^{\text{ст}} + P_2^{\text{ст}} = 1$. В результате получаем $P_1^{\text{ст}} = \frac{r}{r+g} = \frac{4}{5}$, $P_2^{\text{ст}} = \frac{g}{r+g} = \frac{1}{5}$. Зная стационарные вероятности, находим среднее значение и дисперсию процесса:

$$\begin{aligned}\bar{X} &= x_1 P_1^{\text{ст}} + x_2 P_2^{\text{ст}} = \frac{1}{5}; \\ \sigma_X^2 &= x_1^2 P_1^{\text{ст}} + x_2^2 P_2^{\text{ст}} - \bar{X}^2 = \frac{4}{25}.\end{aligned}$$

Задача 3.3.12

Случайный процесс $\rho(t)$, описываемый заданным СДУ, является диффузионным процессом, причем коэффициенты сноса и диффузии определяются по формулам (3.122) и (3.123) соответственно. Получаем: $A(\rho, t) = -2\gamma\rho$, $B(\rho, t) \equiv D$. Уравнение ФПК для для одномерной плотности вероятности процесса $\rho(t)$ имеет вид

$$\frac{\partial p_1(\rho, t)}{\partial t} = 2\gamma \left(p_1(\rho, t) + \rho \frac{\partial p_1(\rho, t)}{\partial \rho} \right) + D \frac{\partial^2 p_1(\rho, t)}{\partial \rho^2}.$$

Его стационарное решение задается выражением (3.127). Для рассматриваемого случая получаем

$$p_1^{\text{ст}}(\rho) = C \exp \left(\int_0^\rho \frac{-2\gamma x}{D} dx \right) = C \exp \left(-\frac{\gamma \rho^2}{D} \right),$$

где C - нормировочная константа. Очевидно, что полученное распределение является гауссовым с нулевым средним значением и дисперсией $\sigma_\rho^2 = \frac{D}{2\gamma}$. Окончательно имеем

$$p_1^{\text{ст}}(\rho) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\rho^2}} \exp \left(-\frac{\rho^2}{2\sigma_\rho^2} \right), \quad \sigma_\rho^2 = \frac{D}{2\gamma}.$$

3.4 Ответы к задачам

Раздел 3.1

3.1.1 а) $\bar{X} = \frac{1}{\lambda}$, $\sigma_X^2 = \frac{1}{\lambda^2}$;

б) $\bar{X} = 0$, $\sigma_X^2 = \frac{1}{6}$;

в) $\bar{X} = \frac{1}{2}$, $\sigma_X^2 = \frac{1}{12}$;

г) $\bar{X} = 1$, $\sigma_X^2 = 2$.

3.1.4 $p(x) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sin x/2}{x/2} \right)^2$.

3.1.5 X и Y статистически зависимы.

3.1.7 $\Theta_{X^2}(u) = \frac{1}{\sqrt{1-2ju\sigma_X^2}}$.

3.1.8 $\langle\langle X_1 X_2 X_3 \rangle\rangle = 2 \langle X_1 \rangle \langle X_2 \rangle \langle X_3 \rangle + \langle X_1 X_2 X_3 \rangle - \langle X_1 \rangle \langle X_2 X_3 \rangle - \langle X_2 \rangle \langle X_1 X_3 \rangle - \langle X_3 \rangle \langle X_1 X_2 \rangle$.

3.1.9 б) $\Psi_X(t_1, t_2) \equiv R_X(t_1, t_2) = e^{-\alpha|t_2-t_1|}$;

в) $\Theta_X(u, t) = e^{-u^2/2}$, $\Theta_X(u_1, t_1, u_2, t_2) = e^{-(u_1^2+u_2^2)/2} (1 - u_1 u_2 e^{-\alpha|t_2-t_1|})$.

3.1.10 $\bar{X} \equiv 0$, $K_X(\tau) = \frac{1}{4}(1 + K_\nu(\tau))(K_{\xi_1}(\tau) + K_{\xi_2}(\tau))$, $\tau = t_2 - t_1$.

3.1.11 $R_X(\tau) = (e^{-\alpha|\tau|} - e^{-\alpha|\tau+t_0|}) (1 - e^{-\alpha|t_0|})^{-1}$, $\tau = t_2 - t_1$.

3.1.12 $\Psi_X(\tau) = (1 + \bar{\alpha})^2 \Psi_\xi(\tau) + \sigma_\xi^2 (\Psi_\xi(\tau) + \bar{\xi}^2)$, $\tau = t_2 - t_1$.

3.1.14 $K_x(t_1, t_2) = \frac{1}{2} \cos \omega_0(t_2 - t_1)$.

3.1.15 $\Psi_x(t_1, t_2) = \sigma^2 \cos \omega_0(t_2 - t_1) - \alpha_0^2 \sin \omega_0(t_1 + t_2)$.

3.1.16 $\Psi_X(\tau) = \sum_{i=1}^m \sigma_i^2 \cos \omega_i \tau$, $\tau = t_2 - t_1$.

3.1.17 $R_X(\tau) = 1$ при $\tau = 0$ и $R_X(\tau) = 0$ при $\tau \neq 0$, где $\tau = t_2 - t_1$.

3.1.19 $\Psi_Z(\tau) = a^2 e^{-\alpha|\tau|} + 4abe^{-\gamma|\tau|} + 2b^2 e^{-\beta|\tau|} - b^2$, $\tau = t_2 - t_1$.

3.1.20 $p_1(x, t) = \frac{1}{2\pi} e^{-x^2/2}$.

3.1.22 $\Theta_x(u, t) = \exp(jbu - \frac{1}{2}a^2 u^2)$.

3.1.23 $\bar{Z} = 1 - \frac{1}{\pi} \arccos [R_X(\theta)]$.

$$3.1.25 \quad \langle \alpha \cos \phi \rangle = \langle \alpha \sin \phi \rangle = \langle \alpha^2 \cos 2\phi \rangle = \langle \alpha^2 \sin 2\phi \rangle = 0; \\ \langle \alpha^2 \rangle \neq \infty.$$

$$3.1.26 \quad \langle \alpha \rangle = \langle \beta \rangle = \langle \alpha\beta \rangle = 0; \quad \langle \alpha^2 \rangle = \langle \beta^2 \rangle \neq \infty.$$

$$3.1.27 \quad \text{Нет.}$$

$$3.1.29 \quad \text{а) Да; б) Да.}$$

$$3.1.30 \quad \text{а) Да; б) Нет.}$$

$$3.1.31 \quad \text{б) } W_X(\omega) = \frac{\sigma_X^2 \alpha}{\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{\sigma_X^2 \alpha}{\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2}, \quad \Delta\omega_{\text{эф}} = \pi\alpha, \quad \Delta\omega_{0.5} = 2\alpha.$$

$$3.1.33 \quad W_X(\omega) = \frac{a^2 W_0}{2}.$$

$$3.1.34 \quad W_X(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \sigma_X^2 e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}; \quad \Delta\omega_{\text{эф}} = \sqrt{\pi\alpha} = \frac{\pi}{\tau_{\text{кор}}}.$$

$$3.1.35 \quad W_X(\omega) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \left(e^{-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{4\alpha}} + e^{-\frac{(\omega + \omega_0)^2}{4\alpha}} \right).$$

$$3.1.36 \quad W_X(\omega) = (2\omega(1 - \tau_0) \sin \omega\tau_0 - \cos \omega\tau_0 + 1) \omega^{-2}.$$

$$3.1.37 \quad W_X = \frac{4\alpha^3}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

$$3.1.39 \quad W_X(\omega) = \frac{2\sigma_X^2 \alpha \omega^2}{(\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\beta^2 \omega^2}.$$

$$3.1.40 \quad W_Z(\omega) = W_0 + \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

$$3.1.41 \quad W_Z(\omega) = \frac{2\sigma_X^2 \sigma_Y^2 (\alpha_1 + \alpha_2)}{\omega^2 + (\alpha_1 + \alpha_2)^2} + \frac{2\bar{X}^2 \sigma_Y^2 \alpha_2}{\omega^2 + \alpha_2^2} + \frac{2\bar{Y}^2 \sigma_X^2 \alpha_1}{\omega^2 + \alpha_1^2} + 2\pi \bar{X}^2 \bar{Y}^2 \delta(\omega).$$

$$3.1.42 \quad W_{XY}(\omega) = \frac{2ab\gamma}{\gamma^2 + \omega^2}.$$

$$3.1.43 \quad \Psi_X(\tau) = \frac{W_0}{\pi\tau} (\sin \omega_2 \tau - \sin \omega_1 \tau), \quad \tau = t_2 - t_1; \quad \Delta t = \frac{\pi}{\omega_2}.$$

$$3.1.44 \quad \Psi_X(\tau) = \frac{W_0}{\sqrt{4\pi\alpha}} e^{-\frac{\tau^2}{4\alpha}}, \quad \tau = t_2 - t_1;$$

$$\text{а) } \tau_{\text{кор}} = 2\sqrt{\alpha};$$

$$\text{б) } \tau_{\text{кор}} = \sqrt{\pi\alpha}.$$

$$3.1.45 \quad \Psi_X(\tau) = \frac{A}{\pi\tau(\omega_0 - \omega_1)} \sin \frac{\tau(\omega_0 + \omega_1)}{2} \sin \frac{\tau(\omega_0 - \omega_1)}{2}, \quad \tau = t_2 - t_1.$$

Раздел 3.2

$$3.2.2 \text{ б) } p_1^Y(y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}a} e^{-\frac{y^2}{2a^2}}, \quad y \geq 0, \quad \bar{Y} = \frac{2a}{\sqrt{2\pi}}, \quad \sigma_Y^2 = a^2 \left(1 - \frac{2}{\pi}\right);$$

$$\text{в) } p_1^Y(y, t) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}ay} e^{-\frac{y}{2a}} + \frac{1}{2}\delta(y), \quad y \geq 0, \quad \bar{Y} = \frac{a}{2}, \quad \sigma_Y^2 = \frac{5a^2}{4};$$

$$\text{г) } p_1^Y(y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}ay} e^{-\frac{y}{2a}}, \quad y \geq 0, \quad \bar{Y} = a, \quad \sigma_Y^2 = 2a^2.$$

$$3.2.3 \text{ а) } p_1^Y(y) = \frac{\sqrt{a}}{\pi(a+y)\sqrt{y}}, \quad y \geq 0.$$

$$3.2.5 \quad p_1^U(u) = \frac{1}{\alpha\sigma^2} e^{-\frac{u}{\alpha\sigma^2}}, \quad u \geq 0.$$

$$3.2.7 \quad p_1^Y(y, t) = e^t, \quad y \in [0, e^{-t}];$$

$$p_2^Y(y_1, t_1, y_2, t_2) = e^{t_1} \delta(y_2 - y_1 e^{t_1 - t_2}), \quad y_1 \in [0, e^{-t_1}] \text{ и } y_2 \in [0, e^{-t_2}].$$

$$3.2.8 \quad p_1^Y(y) = \frac{1}{2}(\delta(y+a) + \delta(y-a)); \quad \varepsilon^2 = \sigma_X^2 + a^2 - 2a\sqrt{\frac{2\sigma_X^2}{\pi}}.$$

$$3.2.9 \quad p_1^Y(y) = \left(1 - e^{-a^2/2}\right) \delta(y) + ye^{-y^2/2} \eta(y-a), \text{ где } \eta(\cdot) - \text{функция Хевисайда};$$

$$\bar{Y} = ae^{-a^2/2} + \sqrt{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \Phi(a)\right);$$

$$\sigma_X^2 = 2e^{-a^2/2} \left(\frac{a^2}{2} + 1\right) - \left(ae^{-a^2/2} + \sqrt{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \Phi(a)\right)\right)^2, \text{ где } \Phi(\cdot) - \text{интеграл вероятностей}.$$

$$3.2.10 \quad p_2^Y(y_1, t_1, y_2, t_2) = \frac{1}{2\pi a^2} \exp \left[-\frac{(y_1-b)^2 + (y_2-b)^2}{2a^2} \right] \left(1 + \frac{(y_1-b)(y_2-b)}{a^2} e^{-\alpha|t_2-t_1|} \right).$$

$$3.2.11 \quad 1) \quad y = \sqrt{2\sigma^2 \ln(1/(1-x))}; \quad 2) \quad y = \sqrt{2\sigma^2 \ln(1/x)}.$$

$$3.2.13 \quad p_1^Z(z) = e^{-z/3} (1 - e^{-z/6}), \quad z \geq 0.$$

$$3.2.15 \quad p_1^Z(z) = \begin{cases} \frac{z^2}{2}, & z \in [0; 1], \\ -z^2 + 3z - \frac{3}{2}, & z \in (1; 2], \\ \frac{z^2}{2} - 3z + \frac{9}{2}, & z \in (2; 3]. \end{cases}$$

$$3.2.16 \quad p_1^X(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_\alpha^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_\alpha^2}}.$$

$$3.2.17 \quad p_1^X(x) = \frac{2\pi - \arccos x}{2\pi^2 \sqrt{1-x^2}}, \quad |x| \leq 1.$$

$$3.2.18 \quad p_1^Z(z) = \frac{1}{2} e^{-|z|}.$$

3.2.19 $p_1^Z(z) = \frac{1}{b-a} \left[\Phi \left(\frac{z-a}{\sqrt{\sigma_X^2}} \right) - \Phi \left(\frac{z-b}{\sqrt{\sigma_X^2}} \right) \right]$, где $\Phi(\cdot)$ – интеграл вероятностей.

3.2.20 $\sigma_Y^2 = \frac{2\sigma_X^2}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega_0}{\alpha} \right).$

3.2.22 $W_Y(\omega) = \frac{2\alpha}{(\alpha^2 + \omega^2)(1 + R^2 C^2 \omega^2)}.$

3.2.23 $\sigma_Y^2 = \frac{RW_0}{2L}.$

3.2.24 $\Psi_Y(\tau) = \frac{a^2(R/L)^2}{2[(L/R)^2 + \omega_0^2]} \cos \omega_0 \tau, \quad \tau = t_2 - t_1.$

3.2.25 $W_Y(\omega) = \frac{\alpha^2 W_0 / T^2}{1/T^2 + \omega^2}; \quad \Psi_Y(\tau) = \frac{\alpha^2 W_0}{2T} e^{-\frac{|\tau|}{T}},$

где $\alpha = \frac{R_1}{R_1 + R_2}, \quad T = \frac{L}{R_1 + R_2}, \quad \tau = t_2 - t_1.$

3.2.26 $W_Y(\omega) = \frac{W_0}{R_1^2 C^2 (\alpha^2 + \omega^2)}; \quad \Psi_Y(\tau) = \frac{W_0}{2\alpha R_1^2 C^2} e^{-\alpha|\tau|},$

где $\alpha = \frac{1+R_1/R_2}{R_1 C}, \quad \tau = t_2 - t_1.$

3.2.27 $W_Y(\omega) = \frac{\alpha^2 R_1^2 C^2 W_0 \omega^2}{\alpha^2 + \omega^2}; \quad \Psi_Y(\tau) = \alpha^2 R_1^2 C^2 W_0 \left(\delta(\tau) + \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha|\tau|} \right),$

где $\alpha = \frac{1}{R_1 + R_2}, \quad \tau = t_2 - t_1.$

3.2.28 $\Psi_Y(\tau) = 2\alpha\sigma_X^2(1 - 2\alpha\tau^2)e^{-\alpha\tau^2}; \quad W_Y(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\sigma_X^2\omega^2 e^{-\omega^2/4\alpha}.$

3.2.29 $\sigma_{\dot{X}}^2 = \frac{a^2}{4\gamma}.$

3.2.30 $\Psi_Y(\tau) = (1 + 2\alpha - 4\alpha^2\tau^2)e^{-\alpha\tau^2}, \quad \tau = t_2 - t_1.$

3.2.31 $W_{XY}(\omega) = -W_{YX}(\omega) = j\omega\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}.$

3.2.32 $\Psi_{YZ}(\tau) = \alpha\sigma_X^2 e^{-\alpha|\tau|} [(AD - BC)\alpha + (BD\alpha^2 - AC)\operatorname{sgn}(\tau)].$

3.2.33 $\sigma_Y^2(t) = \frac{2\sigma_X^2}{\alpha^2} (e^{-\alpha t} + \alpha t - 1).$

3.2.34 $\bar{Y} \equiv x_0; \quad \sigma_Y^2 = \frac{1}{(\alpha RC)^2 - 1}; \quad \Psi_Y(\tau) = \frac{\alpha e^{-\alpha|\tau|}}{(\alpha RC)^2 - 1} (\alpha RC e^{(1/RC - \alpha)|\tau|} - 1).$

3.2.35 $\Psi_Y(n_1, n_2) = \frac{1}{6}$ при $k = 0$; $\frac{1}{12}$ при $|k| = 1$ и 0 при других k ,

где $k = n_2 - n_1; \quad p_1^Y(y) = 1 - |y|, \quad |y| \leq 1.$

3.2.37 $S_{\text{сф}} = \frac{C[(\alpha + j\omega) \cos \omega_0 t_{\text{н}} + \sin \omega_0 t_{\text{н}}]}{(\alpha + j\omega)^2 + \omega_0^2}, \quad C = \text{const.}$

$$3.2.38 \text{ а) } S_{c\Phi}(j\omega) = \frac{Ca}{j\omega} (e^{j\omega T} - 1) e^{-j\omega t_{\Pi}};$$

$$\text{б) } h_{c\Phi}(u) = \begin{cases} Ca, & u \in [t_{\Pi} - T, t_{\Pi}], \\ 0, & u \notin [t_{\Pi} - T, t_{\Pi}]. \end{cases}$$

$$\text{в) } y_c(t) = \begin{cases} Ca^2(t - t_{\Pi} + T), & t \in [t_{\Pi} - T, t_{\Pi}], \\ Ca^2(t_{\Pi} - t + T), & t \in (t_{\Pi}, t_{\Pi} + T], \\ 0, & t \notin [t_{\Pi} - T, t_{\Pi} + T], \end{cases} \quad \text{где } C = \text{const.}$$

$$3.2.39 \frac{\tau_{\Phi}^{\text{опт}}}{T} = \ln \left(\frac{\tau_{\Phi}^{\text{опт}}}{\tau_{\Phi}^{\text{опт}} + 2T} \right).$$

$$3.2.40 \text{ а) } S_{B\Phi}(j\omega) = \frac{W_{X_c}(\omega)}{W_{X_c}(\omega) + W_{X_{\text{ш}}}(\omega)} e^{j\omega T_0} = \frac{W_1}{W_1 + W_0}, \quad \omega_1 \leq |\omega| \leq \omega_2;$$

$$\text{б) } \sigma_{\text{ш}}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{W_{X_c}(\omega) W_{X_{\text{ш}}}(\omega)}{W_{X_c}(\omega) + W_{X_{\text{ш}}}(\omega)} d\omega = \frac{1}{\pi} \frac{W_1 W_0 (\omega_2 - \omega_1)}{W_1 + W_0}.$$

$$3.2.41 h_{B\Phi}(u) = \gamma e^{-\beta|u-\theta|}, \quad \text{где } \gamma = \frac{2\alpha\sigma_{X_c}^2}{W_0\beta}, \quad \beta = \sqrt{\alpha^2 + \frac{2\alpha\sigma_{X_c}^2}{W_0}}.$$

$$3.2.42 W_{XY}(\omega) = (W_{X_c}(\omega) + W_{X_c X_{\text{ш}}}(\omega)) e^{j\omega T_0}.$$

$$3.2.43 \tau_{\Phi}^{\text{опт}} = \frac{\sqrt{W_0}}{\sqrt{2A - \alpha}\sqrt{W_0}}.$$

Раздел 3.3

$$3.3.2 P_1^{\text{сг}} = \frac{1}{2}, \quad P_2^{\text{сг}} = \frac{1}{3}, \quad P_3^{\text{сг}} = \frac{1}{6}; \quad \bar{X} = \frac{2}{3}.$$

$$3.3.4 \text{ а) } P_m(n) = \frac{n!}{n_1! n_2!} p^{n_1} q^{n_2} \quad (\text{распределение Бернулли}), \quad \text{где } n_{1,2} = \frac{n \pm m}{2};$$

$$\text{б) } \bar{X}(n) = (p - q)n\Delta x, \quad \sigma_X^2(n) = (p + q - (p - q)^2)n(\Delta x)^2.$$

$$3.3.5 P_m^{\text{сг}} = P_0^{\text{сг}} \frac{(p/q)^{m-1}}{q}, \quad m = 1, 2, \dots, d-1, \\ P_0^{\text{сг}} = \frac{1}{1 + (p/q)^{d-1} + \frac{(p/q)^{d-1} - 1}{p-q}}, \quad P_d^{\text{сг}} = P_0^{\text{сг}} (p/q)^{d-1}.$$

$$3.3.7 P_1^{\text{сг}} = P_2^{\text{сг}} = 0, \quad P_3^{\text{сг}} = \frac{r_4}{r_4 + g_3}, \quad P_4^{\text{сг}} = \frac{g_3}{r_4 + g_3}.$$

$$3.3.9 P_m(t) = \frac{1}{m!} g^m e^{-g(t-t_0)} (t - t_0)^m, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$3.3.11 \text{ а) } p_1(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-t_0)}} \exp \left[-\frac{(x - (t-t_0)\mu - x_0)^2}{2(t-t_0)} \right],$$

$$v(x_2, t_2/x_1, t_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_2-t_1)}} \exp \left[-\frac{(x - \mu(t_2-t_1) - x_0)^2}{2(t_2-t_1)} \right];$$

$$\text{б) } \bar{X}(t) = \mu(t - t_0) + x_0, \quad \sigma_X^2(t) = t - t_0;$$

$$\text{в) } \Psi_X(t_1, t_2) = \min\{t_1, t_2\} - t_0.$$

$$\mathbf{3.3.13} \text{ а) } p_1^{\text{сТ}}(x) = 2\alpha x e^{-\alpha x^2}, \quad x > 0 \text{ (закон Рэлея), } \bar{X} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi/\alpha},$$

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{\alpha} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right);$$

$$\text{б) } p_1^{\text{сТ}}(x) = k e^{-2k|x|}, \quad \bar{X} \equiv 0, \quad \sigma_X^2 = \frac{1}{2k^2}.$$

$$\mathbf{3.3.14} \quad p_1^{\text{сТ}}(x) = \frac{m}{\sqrt{\pi}x^2} \exp \left[- \left(\ln^2(x/m) + \frac{1}{4} \right) \right].$$

$$\mathbf{3.3.15} \text{ а) } p_1^{\text{сТ}}(x) = 2e^{-2x}, \quad x \geq 0;$$

$$\text{б) } p_1^{\text{сТ}}(x) = 4xe^{-2x}, \quad x \geq 0.$$

$$\mathbf{3.3.18} \quad A_1(x, y) = y, \quad A_2(x, y) = -\omega_0^2 x + (\varepsilon_0 - x^2 + D_2)y;$$

$$B_{11} = D_1, \quad B_{22} = D_2 y^2, \quad B_{12} = B_{21} = 0.$$

$$\mathbf{3.3.20} \quad p_1^{\text{сТ}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_X^2}}, \quad \text{где } \sigma_X^2 = \frac{D}{RL};$$

$$\Psi_X(\tau) = \frac{D}{RL} e^{-R|\tau|/L}, \quad \tau = t_2 - t_1.$$

3. На рис. 3.17 приведена форма сигнала на входе согласованного фильтра. Изобразить вид импульсной характеристики фильтра, считая, что пиковое значение выходного сигнала достигается в момент времени $t_0 = T$.

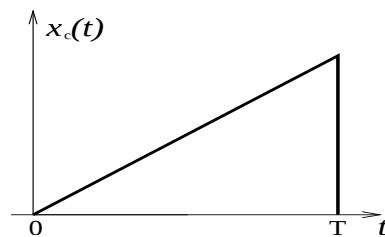


Рис. 3.17

4. Процесс $X(t)$ называется простейшим марковским, если выполняется равенство

$$v(x_n, t_n / x_{n-1}, t_{n-1}, \dots, x_1, t_1) = \dots$$

(дописать).

5. Записать уравнение Фоккера – Планка – Колмогорова для одномерной плотности вероятности диффузионного процесса $X(t)$ в форме “закона сохранения вероятности”.

Тест 3

1. Известна одномерная характеристическая функция $\Theta_X(u, t)$ случайного процесса $X(t)$. Как найти среднее значение случайного процесса не вычисляя плотности вероятности?

2. Случайный процесс $X(t)$ называется эргодическим первого порядка, если выполняется равенство
(дописать).

3. На вход линейного инерционного преобразователя с коэффициентом передачи $S(j\omega)$ поступает сумма статистически независимых стационарных случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$, имеющих нулевые средние значения и спектры $W_X(\omega)$ и $W_Y(\omega)$ соответственно. Каков будет спектр процесса $Z(t)$ на выходе преобразователя в установившемся режиме?

4. Записать уравнение Чепмена – Колмогорова для марковской цепи.

5. Записать СДУ Ито, эквивалентное следующему СДУ Стратоновича:

$$\frac{dX}{dt} + (\gamma_0 + \sqrt{2D}Xn(t)) = 0,$$

где $n(t)$ – нормальный белый шум со спектром $W_n \equiv 1$, $D = \text{const}$.

Тест 4

Чему равно время корреляции белого шума?

- а) 1;
- б) 0;
- в) ∞

(отметить правильный вариант ответа).

2. Случайные процессы $X(t)$ и $Y(t)$ связаны функциональным преобразованием: $Y(t) = \ln[X(t)]$. Записать одномерную плотность вероятности процесса $Y(t)$, если одномерная плотность вероятности процесса $X(t)$ равна константе в интервале $[1, 2]$.

3. На рис. 3.18 приведен график импульсной характеристики идеального винеровского фильтра. Является ли данный фильтр а) прогнозирующим фильтром, б) фильтром с запаздыванием или в) фильтром без сдвига во времени?

- а)
- б)
- в)

(выбрать правильный вариант ответа).

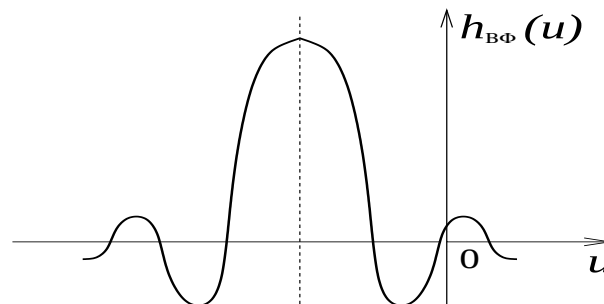


Рис. 3.18

4. Какой марковский процесс описывается управляющим уравнением вида

$$\frac{dP_m(t)}{dt} = g(P_{m-1}(t) - P_m(t)), \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad P_0 = 0 \quad ?$$

5. Записать стационарную плотность вероятности диффузионного процесса $X(t)$ с коэффициентом сноса $A(x) = -ax$ и коэффициентом диффузии $B(x) \equiv 1$.

Тест 5

1. Написать определение n -мерной характеристической функции случайного процесса $X(t)$.

2. Найти спектр стационарного случайного процесса $X(t)$, если его ковариационная функция имеет вид

$$K_X(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}, \quad \alpha > 0, \quad \tau = t_2 - t_1.$$

3. На вход безынерционного преобразователя с характеристикой $y = x^2$

поступает стационарный случайный процесс $X(t)$ с одномерной плотностью вероятности $p_1^X(x) = 1$, $x \in [-0.5; 0.5]$. Найти плотность вероятности выходного процесса $Y(t)$.

4. Может ли приведенная ниже матрица быть одношаговой стохастической матрицей конечной однородной марковской цепи?

$$\hat{\Pi}_1 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Да

Нет

(выбрать правильный вариант ответа).

5. Предел интегральной суммы вида

$$l.i.m._{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} g(X(\theta_i), \theta_i) [W(\theta_{i+1}) - W(\theta_i)],$$

где $g(x, t)$ – интегрируемая с квадратом детерминированная гладкая функция своих аргументов; $W(t)$ – винеровский процесс, называется

а) стохастическим интегралом Ито,

б) стохастическим интегралом Стратоновича,

в) обобщенным стохастическим интегралом

(выбрать правильный вариант ответа).

Тест 6

1. Чему равна дисперсия случайного процесса $X(t)$, если его корреляционная функция есть $\Psi_X(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$, $\tau = t_2 - t_1$?

2. На безынерционный преобразователь с характеристикой $z = \gamma y$, $\gamma = \text{const}$, поступает процесс $Y(t) = X_1(t) + X_2(t)$, где слагаемые представляют собой статистически независимые случайные процессы с нулевыми средними значениями и дисперсиями $\sigma_{X_1}^2 = a$ и $\sigma_{X_2}^2 = b$. Найти дисперсию процесса $Z(t)$ на выходе преобразователя.

3. На вход линейного фильтра с полосой пропускания $\Delta\Omega$ поступает случайный процесс $X(t)$ с шириной энергетического спектра $\Delta\omega$. Условие нормализации вероятностного распределения на выходе фильтра имеет вид

$$\Delta\Omega \dots \Delta\omega$$

(поставить нужный знак неравенства).

4. Является ли винеровский процесс стационарным в строгом или широком смысле?

а) является стационарным в строгом смысле,

б) является стационарным в широком смысле,

в) не является стационарным в каком-либо смысле
(выбрать правильный вариант ответа).

5. Найти коэффициент сноса и коэффициент диффузии случайного процесса $X(t)$, задаваемого СДУ

$$\frac{dX}{dt} = aX - bX^3 + \sqrt{2D}n(t),$$

где a , b , D – константы; $n(t)$ – нормальный белый шум со спектром $W_n \equiv 1$.

Тест 7

1. Записать, как связаны спектр и ковариационная функция стационарного случайного процесса.

2. Стационарный случайный процесс $X(t)$ называется эргодическим относительно среднего значения, если выполняется условие ...
(дописать).

3. Случайные процессы $X(t)$ и $Y(t)$ связаны преобразованием: $Y(t) = aX(t) + b$, где a и b – заданные константы. Записать среднее значение и дисперсию процесса $Y(t)$, если одномерная плотность вероятности процесса $X(t)$ есть: $p_1^X(x) = 1$, $x \in [-0.5; 0.5]$.

4. Как связаны спектры стационарных случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$ на входе и выходе линейного инерционного преобразователя с коэффициентом передачи $S(j\omega)$ в установившемся режиме?

5. Определить коэффициент сноса процесса $X(t)$, задаваемого СДУ Стратоновича

$$\frac{dX}{dt} = \varepsilon_0 + \sqrt{2D}X(1 - X)n(t),$$

где $n(t)$ – нормальный белый шум со спектром $W_n \equiv 1$, $D = \text{const}$.

Тест 8

1. Корреляционная функция вещественного стационарного случайного процесса является функцией

а) четной,

б) нечетной,

в) ни четной ни нечетной

(выбрать правильный вариант ответа).

2. Спектр стационарного случайного процесса $X(t)$ равен константе W_0 в ограниченной полосе частот $[-\omega_1; \omega_1]$ и обращается в ноль на всех других частотах. Найти дисперсию случайного процесса.

3. Каким свойством обладает фильтр, импульсная характеристика которого удовлетворяет уравнению Винера – Хопфа?

- а) минимальным значением среднего квадрата ошибки оценки входного сигнала,
 б) максимальным выходным отношением сигнал / шум,
 в) максимальной спектральной плотностью мощности на частоте
 (выбрать правильный вариант ответа).

4. Является ли винеровский процесс гауссовым?

Да

Нет

(выбрать правильный вариант ответа).

5. Диффузионный процесс $X(t)$ характеризуется следующими коэффициентами сноса и диффузии: $A(x, t) \equiv 0$, $B(x, t) \equiv B_0 = \text{const}$. Чему равна дисперсия σ_X^2 стационарного процесса?

Тест 9

1. На рис. 3.19 приведены графики нормированных корреляционных функций двух случайных процессов – процесса 1 и процесса 2. Какой из них является более широкополосным?

а) процесс 1,

б) процесс 2

(выбрать правильный вариант ответа).

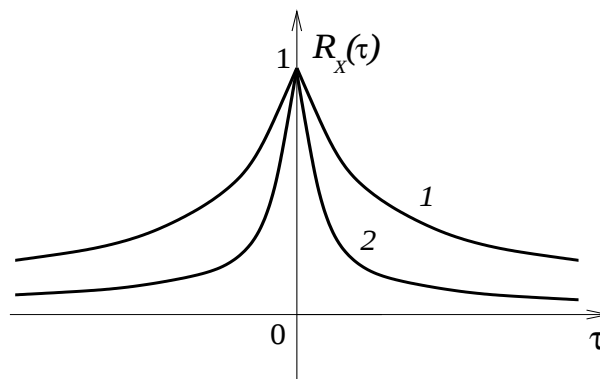


Рис. 3.19

2. На вход безынерционного преобразователя с характеристикой $y = f(x)$ поступает случайный процесс $X(t)$ с n -мерной плотностью вероятности $p_n^X(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n)$. Записать выражение для n -мерной плотности вероятности выходного процесса $Y(t)$, если обратное преобразование неоднозначно: $x_j = g_j(y)$, где j – номер ветви обратной функции.

3. Чему равна дисперсия стационарного случайного процесса

$Y(t) = \frac{dX(t)}{dt}$, если $X(t)$ – стационарный случайный процесс со спектром $W_X(\omega) \equiv W_0 = \text{const}$ в полосе частот $|\omega| \in [\omega_1; \omega_2]$?

4. Одношаговая матрица переходных вероятностей однородной марковской цепи имеет вид

$$\hat{\Pi}_1 = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Найти стационарные вероятности состояний.

5. Записать коэффициенты сноса и диффузии процесса $X(t)$, задаваемого СДУ

$$\frac{dX}{dt} + X = \sqrt{2D}n(t),$$

где $n(t)$ – нормальный белый шум со спектром $W_n \equiv 1$, $D = \text{const}$.

Тест 10

1. Случайный процесс задан как $Z(t) = X(t) + Y(t)$, где $X(t)$ и $Y(t)$ – статистически независимые стационарные случайные процессы, имеющие корреляционные функции $\Psi_X(t_1, t_2)$ и $\Psi_Y(t_1, t_2)$ соответственно. Чему равна корреляционная функция процесса $Z(t)$?

2. Как найти дисперсию стационарного случайного процесса $X(t)$, если известен его спектр $W_X(\omega)$ и среднее значение $\bar{X}$?

3. Известен спектр $W_X(\omega)$ стационарного случайного процесса $X(t)$. Найти спектр стационарного процесса

$$Y(t) = a \frac{d^2 X}{dt^2} + b \frac{dX}{dt},$$

где a и b – заданные константы.

4. Записать уравнение Чепмена – Колмогорова для марковского непрерывнозначного процесса $X(t)$.

5. Записать уравнение Ито, эквивалентное следующему уравнению Стратоновича:

$$\frac{dX}{dt} = X + X^2 \sqrt{2D}n(t),$$

где $n(t)$ – нормальный белый шум со спектром $W_n \equiv 1$, $D = \text{const}$.

Список литературы

1. *Рытов С.М.* Введение в статистическую радиофизику. Ч.1: Случайные процессы. М.: Наука, 1976.
2. *Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С.* Введение в статистическую радиофизику и оптику. М.: Наука, 1981.
3. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Радио и связь, 1989.
4. *Тихонов В.И., Миронов М.А.* Марковские процессы. М.: Сов. радио, 1977.
5. *Тихонов В.И., Харисов В.Н.* Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. М.: Радио и связь, 2004.
6. *Горяинов В.П., Журавлев А.Г., Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника. Примеры и задачи. М.: Сов. радио, 1980.
7. *Тихонов В.И., Шахтарин Б.И., Сизых В.В.* Случайные процессы. Примеры и задачи: В 4 т. Т.1: Случайные величины и процессы. М.: Радио и связь, 2003; Т.2: Линейные и нелинейные преобразования. М.: Радио и связь, 2004; Т.3: Оптимальная фильтрация, экстраполяция и моделирование. М.: Радио и связь, 2004; Т.4: Оптимальное обнаружение сигналов. М.: Радио и связь, 2005.
8. *Вентцель А.Д., Фрейдлин М.И.* Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979.
9. *Гардинер К.В.* Стохастические методы в естественных науках. М.: Мир, 1986.
10. *Хорстхемке В., Лефевр Р.* Индуцированные шумом переходы. М.: Мир, 1987.
11. *Ван Кампен Н.Г.* Стохастические процессы в физике и химии. М.: Высш. шк., 1990.
12. *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.* Теория вероятностей и ее инженерные приложения. М.: Наука, 1988.
13. *Миллер Б.М., Панков А.Р.* Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2002.
14. *Анищенко В.С.* Введение в статистическую радиофизику. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1979. Ч.1; 1983. Ч.2.
15. *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е.* Лекции по статистической радиофизику. Ч.1. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1992.
16. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е. и др.* Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. М.; Ижевск: Изд-во Ин-та компьютерных исследований, 2003.

Оглавление

Предисловие	3
1. ОСНОВЫ РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ	4
Введение	4
1.1. Радиотехнические сигналы и их спектры	5
1.1.1. Краткие теоретические сведения	5
1.1.2. Задачи	11
1.1.3. Примеры решения задач	16
1.2. Линейные радиоэлектронные системы	19
1.2.1. Краткие теоретические сведения	19
1.2.2. Задачи	24
1.2.3. Примеры решения задач	35
1.3. Нелинейные радиоэлектронные системы	39
1.3.1. Краткие теоретические сведения	39
1.3.2. Задачи	45
1.3.3. Примеры решения задач	50
1.4. Ответы к задачам	52
Список литературы	60
2. ОСНОВЫ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ	61
Введение	61
2.1. Состояния равновесия, устойчивость и бифуркации	62
2.1.1. Краткие теоретические сведения	62
2.1.2. Задачи и упражнения	67
2.2. Динамика систем с дискретным временем	72
2.2.1. Краткие теоретические сведения	72
2.2.2. Задачи и упражнения	78
2.3. Нелинейный осциллятор. Нелинейный резонанс	83
2.3.1. Краткие теоретические сведения	83
2.3.2. Задачи и упражнения	91
2.4. Автоколебания. Синхронизация автоколебаний	94
2.4.1. Краткие теоретические сведения	94
2.4.2. Задачи и упражнения	104
2.5. Ответы к задачам	110
Список литературы	114
3. СТАТИСТИЧЕСКАЯ РАДИОФИЗИКА	115
Введение	115
3.1. Основы теории случайных процессов	116
3.1.1. Краткие теоретические сведения	116
3.1.2. Задачи	125
3.1.3. Примеры решения задач	134
3.2. Преобразование случайных процессов детерминированными системами	137
3.2.1. Краткие теоретические сведения	137
3.2.2. Задачи	143
3.2.3. Примеры решения задач	154
3.3. Марковские процессы и стохастические дифференциальные уравнения	157
3.3.1. Краткие теоретические сведения	157
3.3.2. Задачи	166
3.3.3. Примеры решения задач	170

3.4. Ответы к задачам	172
3.5. Образцы тестов для проверки знаний студентов	178
Список литературы	185

Учебное издание

*Астахов Владимир Владимирович,
Вадивасова Татьяна Евгеньевна,
Хохлов Артур Вениаминович*

РАДИОФИЗИКА ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

*Учебное пособие для студентов физического факультета
и факультета нелинейных процессов*

Редактор В.А.Трушина
Технический редактор Л.В.Агальцова
Корректор Е.Б. Крылова
Оригинал-макет подготовил А.В.Хохлов

Подписано в печать 30.03.08. Формат 60х84 1/16.
Бумага офсетная. Гарнитура Times. Печать офсетная.
Усл.печ.л. 10,93(11,75). Уч.-изд.л. 11,6. Тираж 300. Заказ 23.

Издательство Саратовского университета.
410012, Саратов, Астраханская, 83.
Типография Издательства Саратовского университета.
410012, Саратов, Астраханская, 83.