

В. С. Анищенко, В. В. Астахов, Т. Е. Вадивасова,
Г. И. Стрелкова

**Синхронизация
регулярных, хаотических и
стохастических колебаний**

Под общей редакцией проф. В. С. Анищенко

2008

Аннотация

Книга посвящена систематическому изложению результатов теоретического, численного и экспериментального анализа эффектов синхронизации периодических, квазипериодических, хаотических и стохастических колебаний. Подробно излагается классическая теория синхронизации и обсуждаются пределы ее применимости к изучению эффекта синхронизации квазипериодических и непериодических колебаний. Книга может быть рекомендована в качестве учебного пособия по курсу "Нелинейная теория колебаний" для физико-математических специальностей университетов. Ориентирована на студентов старших курсов, аспирантов, молодых ученых и преподавателей. Книга включает 78 иллюстраций и список литературы, содержащий 133 наименования.

Предисловие

Синхронизация – одно из фундаментальных свойств нелинейных систем, которое заключается в установлении определенных соотношений между характерными временами, частотами или фазами колебаний парциальных систем в результате их взаимодействия. Эффект синхронизации, открытый Гюйгенсом [1] в XVII веке играет огромную роль в природе и технике, что отражено в ряде монографий [2–16]. Большое влияние на создание теории синхронизации оказало развитие электронных средств связи в первой половине XX века. В связи с чем можно отметить известную работу Ван дер Поля [17]. В дальнейшем была детально разработана ставшая классической теория синхронизации периодических автоколебаний [2–5, 9, 10, 13, 18–26], в том числе в присутствии шума [27–31], имеются работы (хотя и не в столь значительном количестве), посвященные синхронизации квазипериодических колебаний [32–35].

В рамках классической теории различают *вынужденную синхронизацию*, т.е. синхронизацию автоколебаний внешним сигналом, и *взаимную синхронизацию*, наблюдающуюся при взаимном влиянии двух автоколебательных систем. В обоих случаях проявляются одни и те же эффекты, связанные с двумя классическими механизмами синхронизации: захватом собственных частот (и, соответственно, фаз) колебаний или же подавлением одной из двух независимых частот. Пусть $\Phi_1(t)$ и ω_1 – фаза и частота одного квазигармонического автогенератора, а $\Phi_2(t)$ и ω_2 – фаза и частота другого, связанного с ним автогенератора. Условия синхронизации формулируются как

$$|m\Phi_1(t) - n\Phi_2(t)| = \text{const} \quad (1)$$

и

$$m\omega_1 = n\omega_2, \quad (2)$$

где m и n – целые числа. Условия (1,2) определяют эффект захвата фаз и частот, который должен выполняться в некоторой области значений управляющих параметров, называемой областью синхронизации.

Простейший случай 1:1 ($m = n = 1$) соответствует основной области синхронизации или области синхронизации на основном тоне.

Явление синхронизации автоколебаний в рамках хорошо разработанной теории синхронизации периодических колебаний уже многие годы привлекает особое внимание исследователей. Отчасти это обусловлено важностью данного явления с точки зрения практических приложений. В качестве примера можно привести синхронизацию электронных часов внешним воздействием высокостабильного генератора, в результате которой обеспечивается высокая точность времени в системе транспорта. Синхронизация мощных генераторов периодических колебаний с помощью слабого воздействия от внешнего высокостабильного генератора позволяет существенно улучшить его характеристики, такие как стабильность частоты, флюктуации амплитуды и фазы и другие.

В последние годы интерес к явлению синхронизации проявляют биологи, химики и даже представители социальных и экономических наук. Отмечено синхронное поведение взаимодействующих клеток живой ткани, ансамблей нейронов, биологических популяций и т.д. Однако весьма существенным обстоятельством при исследовании этих проблем явилось то, что анализируемые колебательные процессы здесь не всегда являются строго периодическими. Естественно, возникают многие вопросы о применимости классической теории синхронизации к такого рода колебательным процессам.

С открытием и доказательством возможности существования хаотических (непериодических) колебаний как особых решений в динамических системах естественно возникла проблема синхронизации таких колебаний. Появилось большое количество публикаций по этой проблеме [36–46], однако более или менее общей теории синхронизации хаотических колебаний пока не создано. Этому есть весомые причины, обусловленные широким спектром различных характеристик хаотических колебаний, отсутствием единого понимания сути эффекта и наличием неопределенности понятия фазы и частоты хаотических колебаний.

Не так давно было обнаружено, что явление подобное синхронизации можно наблюдать в классе колебательных систем, не являющихся, строго говоря, автогенераторами. Речь идет о так называемых стохастических осцилляторах – нелинейных диссипативных системах, в которых колебания возникают под действием шума. Различают два типа стохастических осцилляторов: возбудимые осцилляторы и бистабильные осцилляторы. Для возбудимых систем характерна генерация импульсов в условиях, когда сигнал внешнего воздействия превышает некоторый пороговый уровень. В

результате действия шума такая система совершает стохастические колебания, представляющие собой случайную последовательность импульсов. Бистабильный стохастический осциллятор представляет собой нелинейную систему с двумя устойчивыми состояниями. Присутствие шума приводит к случайным переключениям системы из одного состояния в другое. В обоих случаях колебания описываются статистическими характеристиками, такими как средняя частота импульсов зажигания или средняя частота переключений. Эффекты частичного (нестрого) захвата средних частот и мгновенных фаз колебаний в системах указанного типа исследовались в ряде работ [14, 47–50] По сути дела в такого рода системах речь должна идти о так называемой "стохастической синхронизации", то есть о синхронизации случайных колебательных процессов.

В предлагаемой вниманию читателя книге делается попытка дать ответ на вопрос: возможно ли использовать и, если необходимо, в некотором смысле обобщить классические представления о синхронизации периодических колебаний на случай более сложных, квазипериодических, хаотических и стохастических колебаний? Если да, то нужно четко сформулировать границы применимости идей классической теории синхронизации к более сложным типам автоколебаний и выделить те конкретные типы колебательных процессов, для которых можно конструктивно использовать классические представления.

Книга включает пять глав. В первой главе последовательно излагается классическая теория синхронизации квазигармонических колебаний на примере синхронизации генератора Ван дер Поля. Описаны важные аспекты теории, которые используются в качестве основы при рассмотрении синхронизации более сложных колебаний. Во второй главе излагается теория синхронизации генераторов типа Ван дер Поля в условиях внешнего аддитивного шумового воздействия. Изложение ведется на основе классических работ Р.Л. Стратоновича. В третьей главе приведены результаты исследований синхронизации квазипериодических колебаний на примере колебаний с двумя независимыми частотами. Обсуждаются особенности применимости идей и выводов классической теории к случаю автогенератора квазипериодических колебаний. Четвертая глава посвящена анализу эффектов синхронизации хаотических колебаний. Показано, что наиболее конструктивно идеи классической теории можно использовать применительно лишь к особому типу хаотических автоколебаний, отвечающих режиму фазо-когерентного хаотического аттрактора. Наконец, пятая глава посвящена описанию эффектов синхронизации стохастических автоколебаний. Рассматриваются колебания, индуцированные шумом в бистабиль-

ных системах, и хаотические переключения в динамических системах с кризисом аттракторов.

Особенностью предлагаемой книги является следующее. При изложении классической теории синхронизации большее, чем обычно принято в учебных пособиях, внимание уделялось анализу бифуркаций устойчивых и неустойчивых синхронных движений в моделях различного уровня сложности (фазовое уравнение, укороченные уравнения для амплитуды и фазы, уравнение неавтономного осциллятора Ван дер Поля); все представленные в работе графические иллюстрации были получены авторами специально для этой книги или взяты из оригинальных публикаций авторов. При расчетах использовались компьютерные программы, созданные на кафедре радиофизики и нелинейной динамики Саратовского госуниверситета, а также специальные программные комплексы [51].

Настоящее пособие ориентировано на студентов, аспирантов и преподавателей вузов по специальностям, включающим изучение теории колебаний, и может быть рекомендовано в качестве учебного пособия по курсу теории колебаний.

В пособии использованы научные результаты авторов, полученные в рамках Программы Министерства образования и науки РФ "Развитие научного потенциала высшей школы". Авторы выражают благодарность дирекции Инновационного образовательного проекта СГУ за частичное финансирование работ по созданию настоящего пособия.

Авторы пользуются возможностью поблагодарить аспирантов кафедры С.М. Николаева и С.А. Коблянского за проведение ряда сложных компьютерных экспериментов. Мы также благодарны воспитанникам кафедры А.Б. Нейману, И.А. Хованову, А.Н. Сильченко, Б.В. Шульгину, которые являются авторами и соавторами ряда научных работ, использованных в книге.

B. C. Анищенко

B. B. Астахов

T. E. Вадивасова

Г. И. Стрелкова

Оглавление

| | |
|---|----|
| 1. Синхронизация периодических автоколебаний | 9 |
| 1.1 Введение | 9 |
| 1.2 Внешняя синхронизация генератора Ван дер Поля. | 10 |
| 1.3 Бифуркационный анализ системы укороченных уравнений . . . | 23 |
| 1.4 Бифуркационный анализ неавтономного генератора Ван дер Поля | 28 |
| 1.5 Выводы | 36 |
| 2. Синхронизация автоколебаний в присутствии шума | 39 |
| 2.1 Введение | 39 |
| 2.2 Вынужденная синхронизация зашумленных автоколебаний | 40 |
| 2.3 Взаимная синхронизация квазигармонических автогенераторов | 49 |
| 3. Синхронизация квазипериодических колебаний | 53 |
| 3.1 Введение | 53 |
| 3.2 Взаимная синхронизация двух симметрично связанных генераторов | 54 |
| 3.3 Воздействие внешней периодической силы | 58 |
| 3.4 Основные бифуркции квазипериодических режимов | 61 |
| 3.5 Особенности синхронизации резонансных предельных циклов | 65 |
| 3.6 Синхронизация двухчастотных колебаний | 69 |
| 3.7 Результаты экспериментальных исследований | 72 |
| 3.8 Внешняя синхронизация квазипериодических колебаний | 73 |
| 3.9 Экспериментальный анализ внешней синхронизации | 76 |
| 4. Синхронизация хаоса | 79 |
| 4.1 Введение | 79 |
| 4.2 Частотно-фазовая синхронизация хаотических автоколебаний | 80 |
| 4.3 Исследование вынужденной синхронизации | 92 |

| | |
|--|------------|
| 4.4 Частотно-фазовая синхронизация хаоса в присутствии шума | 95 |
| 4.5 Полная синхронизация взаимодействующих хаотических си- стем | 97 |
| 4.6 Количественные характеристики степени синхронности... | 102 |
| 5. Синхронизация стохастических колебаний | 107 |
| 5.1 Введение | 107 |
| 5.2 Внешняя синхронизация процесса переключений... | 111 |
| 5.3 Внешняя стохастическая синхронизация триггера Шмитта . . . | 115 |
| 5.4 Внешняя и взаимная стохастическая синхронизация... | 119 |
| 5.5 Стохастическая синхронизация... | 124 |

1. Синхронизация периодических автоколебаний

1.1 Введение

В данной главе рассматривается явление синхронизации периодических автоколебаний внешним гармоническим воздействием. Описание явления, возможные методы исследования, бифуркационные механизмы возникновения режимов синхронизации представлены на примере неавтономного генератора Ван дер Поля, который является одной из базовых и наиболее популярных моделей теории колебаний и нелинейной динамики.

Генератор Ван дер Поля представляет собой осциллятор с нелинейной диссипацией. При малой амплитуде колебаний он имеет отрицательную диссипацию (происходит подкачка энергии), а при большой – положительную (энергия рассеивается системой). Благодаря такой нелинейности, возможна ситуация, когда наступает динамический баланс между энергией, поступившей в систему, и энергией, рассеянной системой, в среднем за некоторый характерный интервал времени. При этом система генерирует самоподдерживающиеся колебания, характеристики которых не зависят от начальных условий, а определяются параметрами системы. Подобные колебания были названы А.А. Андроновым автоколебаниями, а системы, способные их демонстрировать, – автоколебательными системами. Первоначально осциллятор Ван дер Поля представлял собой радиотехническое устройство на электронной лампе. В дальнейшем было установлено, что уравнение осциллятора Ван дер Поля имеет гораздо более общий характер, и при определенных упрощающих предположениях оно описывает автоколебательные процессы в системах самой различной природы.

Явление синхронизации периодических автоколебаний внешним гармоническим воздействием проявляется в том, что при определенных условиях генератор подстраивает свой ритм под частоту воздействия. При этом амплитуда воздействия может быть достаточно малой величиной, существенно меньше амплитуды колебаний автономного генератора. В простейшем случае генератор совершает колебания на частоте внешней силы,

когда она меняется в конечной окрестности собственной частоты автономного генератора, так называемая основная область синхронизации.

В данной главе мы ограничимся описанием только основной области синхронизации неавтономного осциллятора Ван дер Поля, используя фазовое уравнение, укороченные уравнения для амплитуды и фазы и полное неавтономное уравнение Ван дер Поля. Чтобы чрезмерно не усложнять изложение бифуркационных переходов на плоскости управляющих параметров, мы не останавливаемся на описании динамики систем в окрестности точки Богданова–Такенса (окрестность, где сходятся линии, разграничивающие области захвата, подавления и квазипериодических движений). Заинтересованному читателю рекомендуем монографию [52] Теория синхронизации периодических автоколебаний излагается в [9, 10, 13, 17–19, 52–63].

1.2 Внешняя синхронизация генератора Ван дер Поля. Укороченные уравнения для амплитуды и фазы

Уравнение генератора Ван дер Поля можно записать в разных формах, что зависит от задания нормировок динамических переменных и параметров системы. Обычно уравнения Ван дер Поля представляют в форме

$$\frac{d^2u}{dt^2} - \alpha(1 - \beta u^2) \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0, \quad (1.1)$$

или

$$\ddot{y} - \varepsilon(1 - y^2)\dot{y} + y = 0, \quad (1.2)$$

или

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = 0. \quad (1.3)$$

Здесь u, y, x – динамические переменные; $\alpha, \varepsilon, \lambda$ – параметры, управляющие возбуждением автоколебаний; ω_0 – коэффициент, характеризующий собственную частоту генератора.

Если в первом уравнении перейти к новому времени $\tau = \omega_0 t$, то получим уравнение (1.2), в котором $y = \sqrt{\beta}u$, $\dot{y} = \frac{dy}{d\tau} = \frac{du}{dt}\omega_0$, $\varepsilon = \frac{\alpha}{\omega_0}$. В таком осцилляторе собственная частота ω_0 равна единице. Уравнение (1.3) связано с уравнением (1.2) следующей заменой: $x = \sqrt{\varepsilon}y$, $\lambda = \varepsilon$. К уравнению Ван дер Поля сводится и так называемое уравнение Рэлея:

$$\ddot{z} - (\lambda - \dot{z}^2)\dot{z} + z = 0. \quad (1.4)$$

Если уравнение (1.4) продифференцировать и ввести замену $\dot{z} = \frac{1}{\sqrt{3}}x$, то получит уравнение (1.3).

При отрицательных значениях управляющего параметра $(\alpha, \varepsilon, \lambda)$ в системах (1.1), (1.2), (1.3), (1.4) автоколебания не возбуждаются. Рождение предельного цикла происходит в них при переходе параметра через ноль. При малых положительных значениях параметра наблюдаются квазигармонические автоколебания, а при больших значениях они становятся релаксационными. Однако в системах (1.1) и (1.2) при переходе параметра через ноль рождается предельный цикл конечного радиуса и его размер при дальнейшем увеличении параметра не меняется. В системе (1.3) предельный цикл рождается из неустойчивого фокуса и его радиус увеличивается пропорционально $\sqrt{\lambda}$. В этой системе происходит суперкритическая бифуркация Андронова-Хопфа.

Рассмотрим уравнение генератора Ван дер Поля при внешнем гармоническом воздействии, используя следующую нормировку

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2) \dot{x} + x = b \sin \omega t, \quad (1.5)$$

где λ – управляющий параметр автономного генератора, b, ω – амплитуда и частота внешнего воздействия.

Перепишем уравнения (1.5) в следующем виде

$$\begin{aligned} \ddot{x} + x &= (\lambda - x^2) \dot{x} + b \sin \omega t \\ \ddot{x} + \omega^2 x &= (\omega^2 - 1) x + (\lambda - x^2) \dot{x} + b \sin \omega t. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Если частота внешнего воздействия близка к собственной частоте автономного генератора ($\omega \sim 1$), параметр возбуждения λ является малой положительной величиной, и внешнее воздействие слабое (амплитуда b – малая величина), то правая часть уравнения (1.6) представляет собой малое возмущение гармонического осциллятора с частотой ω и неавтономный генератор является квазигармонической или слабонелинейной системой. В этом случае решение уравнения (1.6) можно искать в виде¹:

$$x(t) = \operatorname{Re}(a(t) \exp(i\omega t)) = \frac{1}{2}(a \exp(i\omega t) + a^* \exp(-i\omega t)) \quad (1.7)$$

с дополнительным условием

¹ Такое представление аналогично замене переменных $x = \rho(t) \cos(\omega t + \varphi(t))$, $\dot{x} = -\omega \rho(t) \sin(\omega t + \varphi(t))$, где $\rho(t) = |a(t)|$, $\varphi(t) = \operatorname{Arg} a(t)$, которую также широко используют в данном методе усреднения Ван дер Поля.

$$\dot{a} \exp(i\omega t) + \dot{a}^* \exp(-i\omega t) = 0. \quad (1.8)$$

С учетом дополнительного условия запишем первую и вторую производную:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{1}{2} [\dot{a} \exp(i\omega t) + \dot{a}^* \exp(-i\omega t) + i\omega a \exp(i\omega t) - i\omega a^* \exp(-i\omega t)] = \\ &= \frac{1}{2} [i\omega a \exp(i\omega t) - i\omega a^* \exp(-i\omega t)],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{1}{2} [i\omega \dot{a} \exp(i\omega t) - i\omega \dot{a}^* \exp(-i\omega t) - \omega^2 a \exp(i\omega t) - \omega^2 a^* \exp(-i\omega t)] = \\ &= i\omega \dot{a} \exp(i\omega t) - \frac{\omega^2}{2} [a \exp(i\omega t) + a^* \exp(-i\omega t)].\end{aligned}$$

Подставив \ddot{x}, \dot{x}, x в уравнение (1.6) и выразив $\sin(\omega t)$ через экспоненты, получим

$$\begin{aligned}i\omega \dot{a} \exp(i\omega t) &= \frac{\omega^2 - 1}{2} [a \exp(i\omega t) + a^* \exp(-i\omega t)] + \frac{i\omega}{2} \left[\lambda - \frac{1}{4} \left(a^2 \exp(2i\omega t) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2|a|^2 + (a^*)^2 \exp(-2i\omega t) \right) \right] \times (a \exp(i\omega t) - a^* \exp(-i\omega t)) + \\ &\quad + \frac{b}{2i} (\exp(i\omega t) - \exp(-i\omega t)),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{a} &= \frac{\omega^2 - 1}{2i\omega} [a + a^* \exp(-2i\omega t)] + \left[\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{8} \left(a^2 \exp(2i\omega t) + 2|a|^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (a^*)^2 \exp(-2i\omega t) \right) \right] \times (a - a^* \exp(-2i\omega t)) - \frac{b}{2\omega} (1 - \exp(-2i\omega t)).\end{aligned}$$

Далее, раскрывая скобки и усредняя за период $T = 2\pi/\omega$ правую и левую части уравнения, получим укороченное уравнение для комплексной амплитуды

$$\dot{a} = -i \frac{\omega^2 - 1}{2\omega} a + \frac{\lambda}{2} a - \frac{1}{8} |a|^2 a - \frac{b}{2\omega}. \quad (1.9)$$

Представляя комплексную величину в полярных координатах

$$a(t) = \rho(t) \exp(i\varphi(t)), \quad (1.10)$$

получим укороченные уравнения для амплитуды и фазы

$$\dot{\rho} = \frac{\lambda}{2}\rho - \frac{1}{8}\rho^3 - \beta \cos \varphi, \quad (1.11)$$

$$\dot{\varphi} = -\Delta + \frac{\beta}{\rho} \sin \varphi, \quad (1.12)$$

где $\Delta = \frac{\omega^2 - 1}{2\omega}$ характеризует расстройку между частотой внешнего воздействия и собственной частотой генератора, а $\beta = \frac{b}{2\omega}$ – интенсивность внешнего воздействия.

Напомним, что решение для исходного уравнения генератора Ван дер Поля имеет вид

$$x(t) = \operatorname{Re} [a(t) \exp(i\omega t)] = \operatorname{Re} [\rho(t) \exp(i\omega t + i\varphi(t))] = \rho(t) \cos [\omega t + \varphi(t)].$$

То есть генератор совершает колебания на частоте внешнего воздействия ω , когда $\varphi(t) = \text{const}$. Возможны также двухчастотные колебания или так называемые биения, когда амплитуда и фаза медленно меняются во времени.

Синхронизация – подстройка частоты генератора к частоте внешней силы – возможна и при очень слабом воздействии. В этом случае возмущение амплитуды является малым, а существенным является возмущение фазы. Процесс синхронизации может быть описан в фазовом приближении.

Предположим, что в системе укороченных уравнений для амплитуды и фазы (1.11), (1.12) амплитуда внешнего воздействия β является малой величиной. Амплитуда колебаний $\rho(t)$ под внешним воздействием существенно не изменилась по сравнению с амплитудой автоколебаний автономного генератора. То есть амплитуда $\rho(t)$ практически соответствует радиусу предельного цикла автономного генератора, который можно определить из уравнения

$$\dot{\rho} = \frac{\lambda}{2}\rho - \frac{1}{8}\rho^3. \quad (1.13)$$

Стационарным значениям амплитуды ($\dot{\rho} = 0$) соответствуют состояния равновесия (особые точки или неподвижные точки) уравнения (1.13). Выход на стационарное значение, решение $\rho(t)$, описывающее переходной процесс из некоторого начального состояния $\rho(0)$, можно определить, интегрируя дифференциальное уравнение (1.13).

Определим состояния равновесия и их устойчивость. В состоянии равновесия (или в неподвижной точке) производная $\dot{\rho} = 0$. Тогда правая часть дифференциального уравнения (1.13) равна нулю, и получаем алгебраическое уравнение для неподвижных точек

$$\frac{\lambda}{2}\rho - \frac{1}{8}\rho^3 = 0, \quad (1.14)$$

из которого находим три неподвижные точки P_1, P_2, P_3 с координатами

$$\rho_1 = 0, \quad (1.15)$$

$$\rho_{2,3} = \pm\sqrt{4\lambda}, \quad (1.16)$$

соответственно.

Первая неподвижная точка $P_1 : [\rho_1 = 0]$ существует при любых значениях параметра λ , а две других $P_{2,3} : [\rho_{2,3} = \pm\sqrt{4\lambda}]$ - только при $\lambda \geq 0$. При $\lambda = 0$ все три точки сливаются в одну. В автономном осцилляторе Ван дер Поля на фазовой плоскости (x, \dot{x}) решение $\rho_1 = 0$ отвечает неподвижной точке, расположенной в начале координат. Решения $\rho_{2,3} = \pm\sqrt{4\lambda}$ отвечают радиусу предельного цикла, который возникает при переходе через бифуркационное значение $\lambda = 0$ и растет пропорционально $\sqrt{\lambda}$.

Устойчивость неподвижных точек P_1, P_2, P_3 системы (1.13) характеризует собственное значение

$$\mu = \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\lambda}{2}\rho - \frac{1}{8}\rho^3 \right)_{\rho=\rho_i}, \quad (1.17)$$

которое представляет собой производную по динамической переменной от правой части уравнения (1.13), вычисленную в неподвижной точке P_i с координатами $\rho_i (i = 1, 2, 3)$. Для неподвижной точки $P_1 : [\rho_1 = 0]$ получаем $\mu_1 = \lambda/2$. Следовательно, при $\lambda < 0$ собственное значение μ_1 отрицательное и точка P_1 устойчива. При $\lambda > 0$ собственное значение μ_1 положительное и точка P_1 неустойчива. Для неподвижных точек $P_{2,3} : [\rho_{2,3} = \pm\sqrt{4\lambda}]$ собственные значения одинаковые и равны

$$\mu_{2,3} = \frac{\lambda}{2} - \frac{3}{8}\rho_i^2 = \frac{\lambda}{2} - \frac{3}{2}\lambda = -\lambda.$$

Следовательно, при $\lambda > 0$ рождаются устойчивые неподвижные точки $P_{2,3} : [\rho_{2,3} = \pm\sqrt{4\lambda}]$.

Непосредственно для системы (1.13) изложенное выше соответствует бифуркации вил, и уравнение (1.13) представляет собой нормальную форму суперкритической бифуркации вил:

Бифуркационная диаграмма, представленная на рис. 1.1, показывает, что при $\lambda < 0$ существует одна устойчивая неподвижная точка $P_1 :$

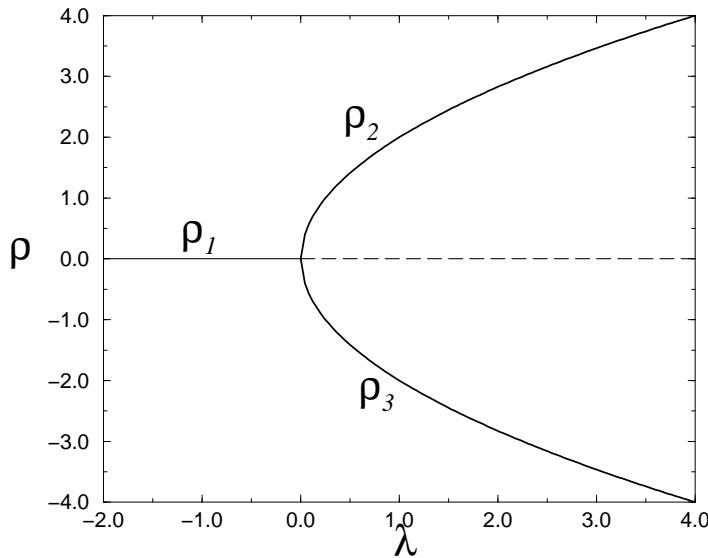


Рис. 1.1. Диаграмма суперкритической бифуркации вил

$[\rho_1 = 0]$. При переходе через бифуркационное значение $\lambda = 0$ точка P_1 теряет устойчивость и в ее окрестности рождается пара устойчивых симметричных друг другу неподвижных точек P_2, P_3 , координаты которых меняются с ростом управляющего параметра пропорционально корню из надкритичности:

$$\rho_{2,3} = \pm\sqrt{4\lambda}.$$

Уравнение типа (1.13) в комплексном виде представляет собой нормальную форму суперкритической бифуркации Андронова - Хопфа².

В автономном генераторе Ван дер Поля на фазовой плоскости (x, \dot{x}) при вариации управляющего параметра λ будут наблюдаться следующие перестройки фазовых портретов. При $\lambda < 0$ имеется одна устойчивая точка равновесия, расположенная в начале координат. С увеличением параметра λ при переходе через ноль состояние равновесия теряет устойчивость. В его окрестности рождается устойчивый предельный цикл, радиус которого растет пропорционально корню из надкритичности $\bar{\rho} = \sqrt{4\lambda}$ (где $\bar{\rho}$ - радиус предельного цикла или стационарное значение амплитуды автоколебаний).

² Стого говоря, нормальная форма суперкритической бифуркации вил и суперкритической бифуркации Андронова - Хопфа имеют следующий вид: $\dot{x} = mx - x^3$ и $\dot{z} = (m + i\omega)z - z|z|^2$, соответственно.

Для того чтобы описать процесс установления стационарной амплитуды автоколебаний, проинтегрируем дифференциальное уравнение (1.13). Разделим обе части уравнения на ρ^3 и умножим на -2.

$$\frac{-2}{\rho^3} \frac{d\rho}{dt} = -\lambda \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{4}. \quad (1.18)$$

Перепишем это уравнение в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho^2} \right) = -\lambda \left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{4\lambda} \right). \quad (1.19)$$

Сделав замену переменных

$$r = \frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{4\lambda}, \quad (1.20)$$

получим

$$\frac{dr}{dt} = -\lambda r. \quad (1.21)$$

Решение уравнения имеет вид

$$r(t) = C \exp(-\lambda t). \quad (1.22)$$

Константу C определим из начальных условий. При $t = 0$ получим $r(0) = r_0 = C$ или

$$C = r_0 = \frac{1}{\rho_0^2} - \frac{1}{4\lambda},$$

где ρ_0 – значение амплитуды автоколебаний в начальный момент времени.

Перепишем решение для исходной переменной ρ

$$\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{4\lambda} = \left[\frac{1}{\rho_0^2} - \frac{1}{4\lambda} \right] \exp(-\lambda t). \quad (1.23)$$

Напомним, что стационарное значение амплитуды автоколебаний равно $\bar{\rho} = \sqrt{4\lambda}$. С учетом этого перепишем решение в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{\bar{\rho}^2} &= \left[\frac{1}{\rho_0^2} - \frac{1}{\bar{\rho}^2} \right] \exp(-\lambda t), \\ \frac{\bar{\rho}^2}{\rho^2} - 1 &= \left[\frac{\bar{\rho}^2}{\rho_0^2} - 1 \right] \exp(-\lambda t), \\ \rho(t) &= \frac{\bar{\rho}}{\sqrt{\left[\frac{\bar{\rho}^2}{\rho_0^2} - 1 \right] \exp(-\lambda t) + 1}}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Данное выражение определяет процесс установления амплитуды автоколебаний в автономном генераторе Ван дер Поля. При возрастании времени в системе устанавливается стационарное значение $\rho(t) \rightarrow \bar{\rho} = \sqrt{4\lambda}$.

На рисунке 1.2 проиллюстрирован процесс установления стационарной амплитуды автоколебаний при различных начальных значениях ρ_0 .

Вернемся к укороченным уравнениям для амплитуды и фазы (1.11), (1.12). При слабом внешнем гармоническом воздействии полагаем, что амплитуда $\rho(t)$ соответствует радиусу предельного цикла автономного генератора $\rho(t) = \bar{\rho} = \sqrt{4\lambda}$, и процесс синхронизации может быть описан в фазовом приближении

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\Delta + \frac{\beta}{\sqrt{4\lambda}} \sin(\varphi). \quad (1.25)$$

Данная динамическая система имеет одну динамическую переменную φ и, соответственно, размерность фазового пространства равна единице. Состояние динамической системы можно представлять либо на действительной оси от $-\infty$ до $+\infty$, либо на окружности радиуса $\bar{\rho} = \sqrt{4\lambda}$, учитывая периодичность функции $\sin \varphi$. Поведение системы зависит от параметров Δ, β, λ , которые характеризуют расстройку между частотой внешнего воздействия и частотой автономного генератора (Δ), амплитуду внешнего воздействия (β) и поведение автономного генератора (λ).

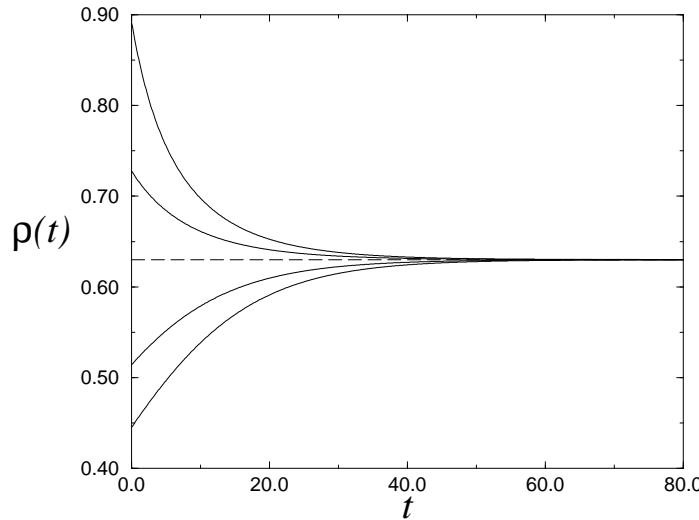


Рис. 1.2. Процесс установления стационарного значения амплитуды автоколебаний при различных начальных значениях ρ_0 , в случае $\lambda = 0.1$

Рассмотрим динамику фазы в зависимости от расстройки Δ и амплитуды внешнего воздействия β при фиксированном значении параметра λ , отвечающим квазигармоническим колебаниям автономного генератора.

На рисунке 1.3 построены зависимости фазы φ от времени t при $\lambda = 0.1, \beta = 0.01$ и различных значениях параметра расстройки. Из рисунка видно, что при малых значениях расстройки фаза не меняется во времени, остается постоянной величиной (линии 5 и 6 при $\Delta = \mp 0.03$). С увеличением расстройки по частоте, когда $|\Delta|$ превышает некоторое критическое значение $|\Delta_c|$, происходит качественное изменение в поведении фазы $\varphi(t)$. Ее величина начинает меняться во времени. В зависимости от знака параметра Δ (если частота внешнего воздействия больше (меньше) собственной частоты генератора, то $\Delta > 0$ ($\Delta < 0$)) величина фазы $\varphi(t)$ либо уменьшается, либо нарастает во времени. При малой надкритичности $|\Delta - \Delta_c|$ во временной реализации $\varphi(t)$ можно выделить продолжительные интервалы, в течение которых фаза остается практически постоянной, чередующихся с короткими интервалами, во время которых происходит изменение фазы на 2π . С ростом надкритичности $|\Delta - \Delta_c|$ интервалы постоянства фазы уменьшаются, средняя скорость изменения фазы увеличивается.

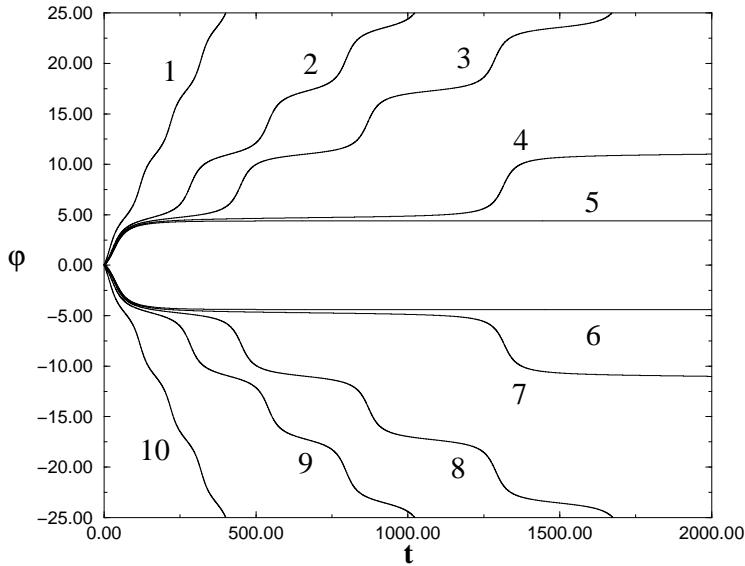


Рис. 1.3. Графики зависимости фазы φ от времени t при $\lambda = 0.1, \beta = 0.01$ и различных значениях параметра расстройки. Линии 1 и 10 соответствуют $\Delta = \mp 0.07$; 2 и 9 – $\Delta = \mp 0.04$; 3 и 8 – $\Delta = \mp 0.035$; 4 и 7 – $\Delta = \mp 0.032$; 5 и 6 – $\Delta = \mp 0.03$.

Таким образом, существует интервал значений расстройки $|\Delta| < \Delta_c$, где фаза не меняется ($\varphi(t) = \text{const}$), ее производная, скорость изменения фазы равна нулю. Это означает, что генератор совершает периодические колебания на частоте внешнего воздействия, наблюдается явление синхронизации. За пределами интервала синхронизации фаза меняется во времени, колебания становятся квазипериодическими. Средняя скорость изменения фазы $\langle \dot{\varphi}(t) \rangle$ определяет вторую независимую частоту – частоту биений. Из рисунка 1.3 видно, что при малой надкритичности средняя скорость изменения фазы очень низкая, что соответствует очень малой частоте биений. С ростом надкритичности происходит увеличение частоты биений.

При фазовом описании синхронным движением отвечают состояния равновесия или неподвижные точки динамической системы (1.25). Режимы синхронизации должны соответствовать устойчивым состояниям равновесия. Для системы (1.25) найдем состояния равновесия, определим их область существования по параметрам, исследуем устойчивость и бифуркации неподвижных точек при изменении параметров системы.

Неподвижные точки системы (1.25) будем представлять в одномерном фазовом пространстве на окружности радиуса $\bar{\rho} = \sqrt{4\lambda}$, построенной на плоскости с координатами $\rho \sin(\varphi), \rho \cos(\varphi)$ (см. рис. 1.4).

Условием существования состояний равновесия является равенство нулю правой части уравнения (1.25)

$$-\Delta + \frac{\beta}{\sqrt{4\lambda}} \sin(\varphi) = 0. \quad (1.26)$$

Из (1.26) находим две неподвижные точки с координатами

$$\bar{\varphi}_1 = \arcsin \frac{\Delta \sqrt{4\lambda}}{\beta}, \quad (1.27)$$

$$\bar{\varphi}_2 = \pi - \arcsin \frac{\Delta \sqrt{4\lambda}}{\beta}. \quad (1.28)$$

Они существуют, если $\left| \frac{\Delta \sqrt{4\lambda}}{\beta} \right| \leq 1$ или $|\Delta| \leq \frac{\beta}{\sqrt{4\lambda}}$. Следовательно, при фиксированном λ границы области существования неподвижных точек на плоскости параметров (β, Δ) определяет линия, заданная уравнением

$$\beta = \sqrt{4\lambda} |\Delta|. \quad (1.29)$$

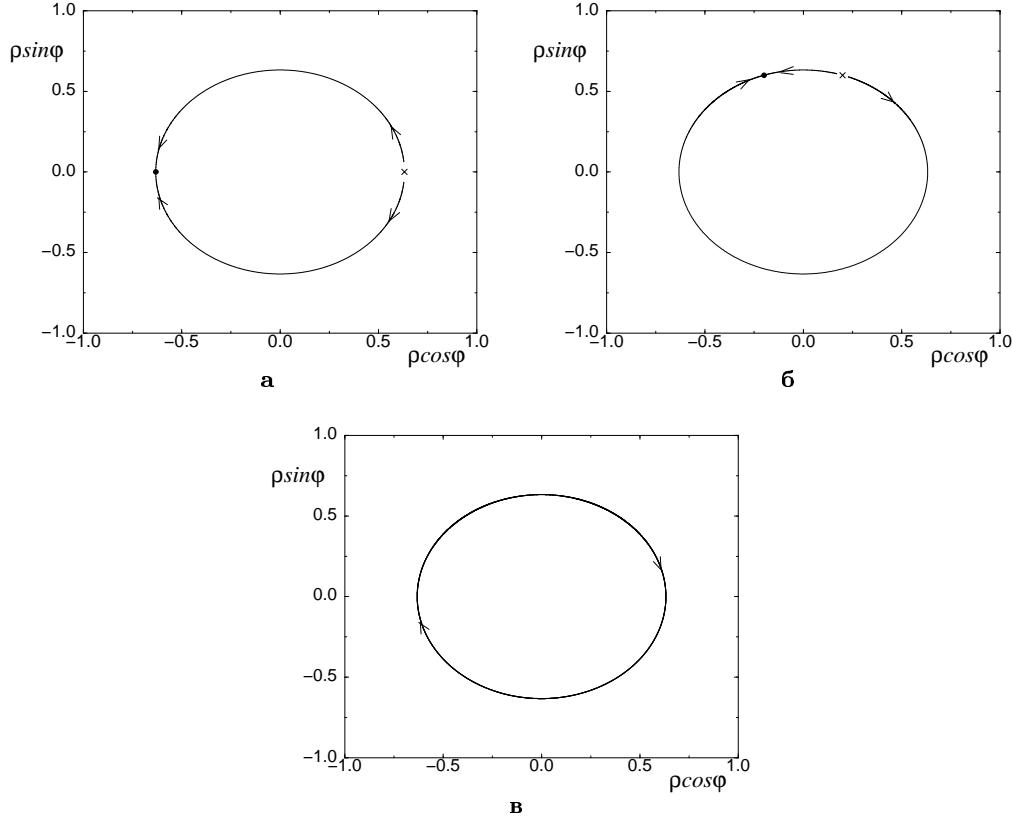


Рис. 1.4. Фазовые портреты системы (1.25) при $\lambda = 0.1, \beta = 0.01$ и различных значениях параметра расстройки: а – $\Delta = 0$; б – $\Delta = 0.03$; в – $\Delta = 0.032$. Символами (●) и (×) показаны устойчивая и неустойчивая точки, соответственно

Область синхронизации, границы которой определяет уравнение (1.29), построены на рис. 1.5.

Исследуем устойчивость неподвижных точек. Рассмотрим поведение системы (1.25) в окрестности неподвижных точек $\bar{\varphi}_i (i = 1, 2)$ в линейном приближении. Представим динамическую переменную в виде $\varphi(t) = \bar{\varphi}_i + \tilde{\varphi}(t)$, где $\tilde{\varphi}(t)$ характеризует малое отклонение от состояния равновесия $\bar{\varphi}_i$. Перепишем уравнение (1.25) следующим образом

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\bar{\varphi}_i + \tilde{\varphi}) &= -\Delta + \frac{\beta}{\sqrt{4\lambda}} \sin(\bar{\varphi}_i + \tilde{\varphi}), \\ \frac{d\tilde{\varphi}}{dt} &= -\Delta + \frac{\beta}{\sqrt{4\lambda}} (\sin \bar{\varphi}_i \cos \tilde{\varphi} + \sin \tilde{\varphi} \cos \bar{\varphi}_i). \end{aligned}$$

Раскладывая $\cos \tilde{\varphi}$ и $\sin \tilde{\varphi}$ в ряд Тейлора и учитывая слагаемые не выше первого порядка малости по $\tilde{\varphi}$, получим следующее линеаризованное

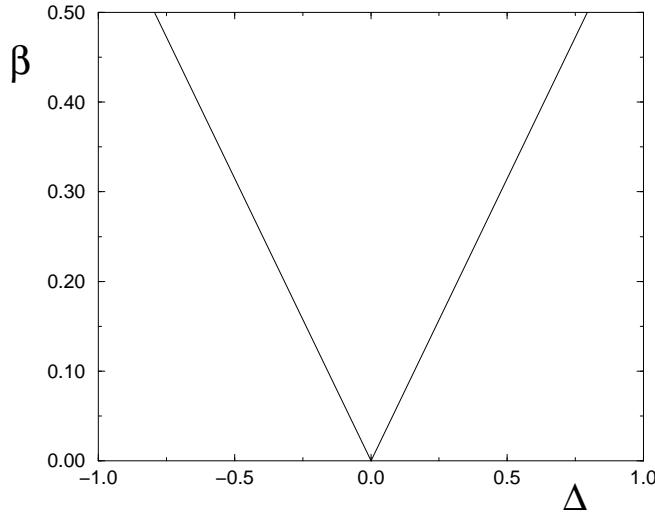


Рис. 1.5. Область синхронизации на плоскости управляемых параметров при $\lambda = 0.1$

уравнение

$$\frac{d\tilde{\varphi}}{dt} = -\Delta + \frac{\beta}{\sqrt{4\lambda}} (\sin \bar{\varphi}_i + \tilde{\varphi} \cos \bar{\varphi}_i).$$

Из определения неподвижной точки следует, что

$$-\Delta + \frac{\beta}{\sqrt{4\lambda}} \sin \bar{\varphi}_i = 0.$$

В результате получаем уравнения

$$\frac{d\tilde{\varphi}}{dt} = \left(\frac{\beta}{\sqrt{4\lambda}} \cos \bar{\varphi}_i \right) \tilde{\varphi}, \quad (1.30)$$

решение которого имеет вид

$$\tilde{\varphi}(t) \sim \exp \left[\left(\frac{\beta}{\sqrt{4\lambda}} \cos(\bar{\varphi}_i) \right) \times t \right]. \quad (1.31)$$

Таким образом, устойчивость состояний равновесия зависит от знака $\cos \bar{\varphi}_i$. Если $\cos \bar{\varphi}_i > 0$, то малое отклонение $\tilde{\varphi}(t)$ нарастает во времени, и состояние равновесия $\bar{\varphi}_i$ является неустойчивым. Если $\cos \bar{\varphi}_i < 0$, то малое отклонение затухает во времени, и состояние равновесия является устойчивым. Из выражения для координат неподвижных точек (1.27), (1.28) следует, что $\cos \bar{\varphi}_1 > 0$ и неподвижная точка $\bar{\varphi}_1$ неустойчивая. Точка $\bar{\varphi}_2$ является устойчивой, поскольку $\cos \bar{\varphi}_2 < 0$.

На рис. 1.4,а,б показана устойчивая и неустойчивая неподвижные точки в фазовом пространстве системы при различных значениях параметра Δ . Как видно из выражений (1.27) и (1.28), при $\Delta = 0$ координата неустойчивой точки равна $\bar{\varphi}_1 = 0$, а координата устойчивой точки равна $\bar{\varphi}_2 = \pi$ (рис. 1.4,а). При увеличении расстройки, когда $\frac{\Delta\sqrt{4\lambda}}{\beta}$ стремится к единице, неустойчивая и устойчивая неподвижные точки перемещаются по окружности навстречу друг другу: неустойчивая – против часовой стрелки, устойчивая – по часовой. При $\varphi = \frac{\pi}{2}$ они сливаются, и затем исчезают, когда $\frac{\Delta\sqrt{4\lambda}}{\beta}$ превышает единицу (рис. 1.4,б). Исчезновение неподвижных точек происходит при выходе из области синхронизации. Изображающая точка совершает вращательное движение по окружности, средняя скорость которого $\langle \dot{\varphi}(t) \rangle$ определяет частоту биений.

На рисунке 1.6 построена зависимость $\Omega = \langle \dot{\varphi}(t) \rangle$ от расстройки по частоте Δ системы (1.25) при $\beta = 0.01$ и $\lambda = 0.1$. Интервал значений Δ , где $\Omega = 0$, соответствует области синхронизации, за пределами которой наблюдаются биения с частотой Ω .

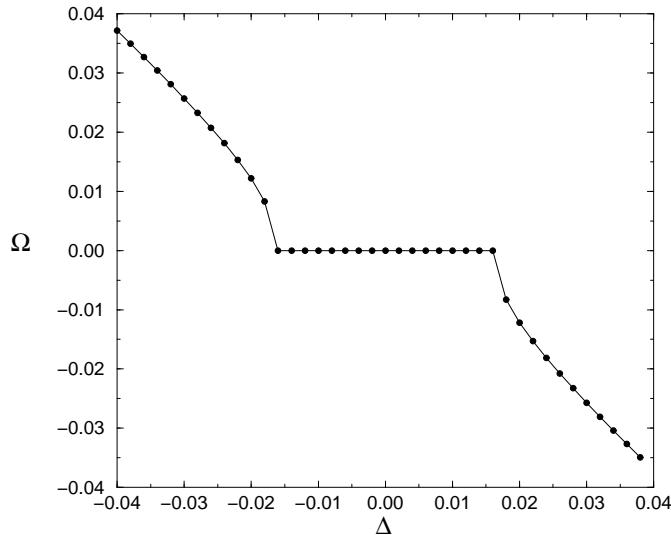


Рис. 1.6. График зависимости $\Omega = \langle \dot{\varphi}(t) \rangle$ от расстройки по частоте Δ системы (1.25) при $\beta = 0.01$ и $\lambda = 0.1$

1.3 Бифуркационный анализ системы укороченных уравнений

Фазовое описание явления синхронизации с помощью уравнения (1.25) допустимо только при очень слабом внешнем воздействии, когда возмущением амплитуды колебаний автономного генератора можно пренебречь. Появление или исчезновение синхронизации связано с бифуркацией рождения или исчезновения устойчивой и неустойчивой неподвижных точек в одномерном фазовом пространстве. На плоскости управляющих параметров (β, Δ) имеется “язык” синхронизации, границы которого заданы прямыми линиями $\beta = \sqrt{4\lambda} |\Delta|$, на которых и происходит указанная единственная бифуркация для двух неподвижных точек. Учет амплитудного уравнения, то есть рассмотрение системы укороченных уравнений для амплитуды и фазы (1.11), (1.12) приводит к более сложным бифуркационным явлениям на плоскости управляющих параметров (β, Δ) .

Для системы укороченных уравнений (1.11), (1.12) режимам синхронизации также отвечают состояния равновесия $\varphi(t) = \text{const}$ и $\rho(t) = \text{const}$, но уже на фазовой плоскости с координатами $\rho \sin \varphi$ и $\rho \cos \varphi$. На рисунке 1.7 на плоскости управляющих параметров (β, Δ) при фиксированном

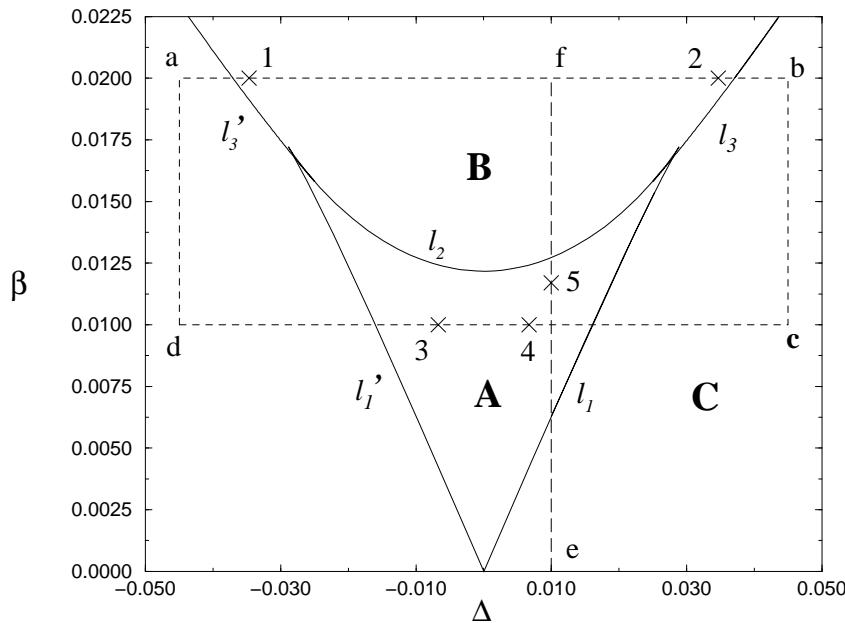


Рис. 1.7. Линии бифуркационных значений устойчивых и неустойчивых состояний равновесия системы укороченных уравнений (1.11), (1.12) на плоскости управляющих параметров (β, Δ) при фиксированном значении $\lambda = 0.1$

$\lambda = 0.1$ построены области синхронизации и линии различных бифуркаций синхронных движений.

Режим синхронизации существует при значениях параметров из области A и области B , которые окружает область C квазипериодических движений. В области A на фазовой плоскости имеется три неподвижных точки: устойчивый узел P_N (именно эта точка отвечает режиму синхронизации), седловая точка P_S и неустойчивая точка P_R , которая в зависимости от значений β и Δ может быть либо неустойчивым узлом (репеллером), либо неустойчивым фокусом. На рисунке 1.8,а представлен фазовый портрет, характерный для области синхронизации A . В области B режиму синхронизации также отвечает устойчивая неподвижная точка P_N , однако структура фазового пространства стала принципиально иной (рис. 1.8,б). Здесь отсутствуют неустойчивые точки P_R и P_S . Область C соответствует

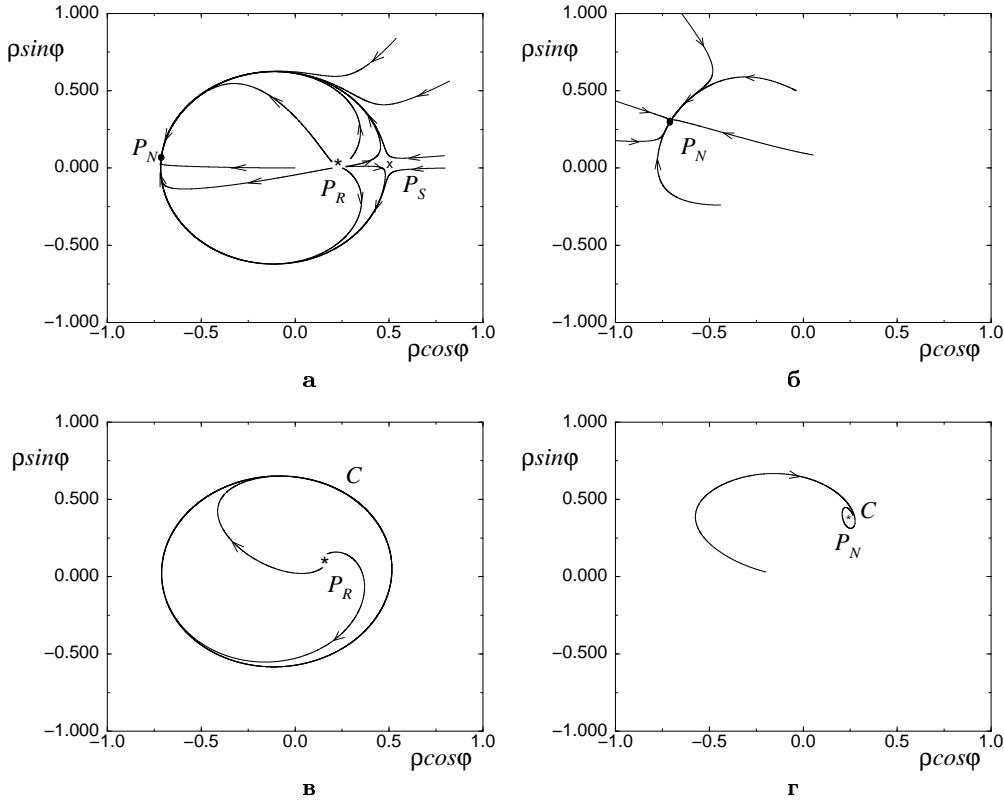


Рис. 1.8. Характерные фазовые портреты системы (1.11)–(1.12) при $\lambda = 0.1$ и параметрах внешнего воздействия β и Δ из областей A , B и C на рис. 1.7, а именно, (а) – $\beta = 0.01$, $\Delta = 0.001$ (область A); (б) – $\beta = 0.02$, $\Delta = 0.01$ (область B); (в) – $\beta = 0.01$, $\Delta = 0.03$ (область C); (г) – $\beta = 0.02$, $\Delta = 0.037$ (область C)

квазипериодическим режимам, которым в системе укороченных уравнений (1.11), (1.12) отвечает устойчивый предельный цикл C (рис. 1.8,в). На фазовом портрете системы помимо устойчивого предельного цикла C имеется неустойчивый фокус P_R .

Рассмотрим бифуркации характерных режимов системы при движении по плоскости параметров (β, Δ) .

На рисунке 1.9 построена бифуркационная диаграмма в зависимости от параметра расстройки Δ при фиксированном $\beta = 0.01$. На плоскости параметров (β, Δ) это соответствует перемещению вдоль линии cd . При малой расстройке Δ (в интервале между точками 3 и 4, отмеченных символами “ \times ” на рис. 1.7 и 1.9) неподвижная точка P_R является неустойчивым узлом или репеллером. Фазовый портрет системы для рассматриваемой ситуации показан на рис. 1.8,в. С увеличением или уменьшением Δ при переходе через точки 3 и 4 репеллер превращается в неустойчивый фокус. При дальнейшем изменении Δ , включая и выход из области A при пересечении линий l_1 и l'_1 , неустойчивый фокус P_R никаких бифуркаций не претерпевает. Нарушение режима синхронизации определяет поведение неподвижных точек P_N и P_S . На фазовом портрете неустойчивые многообразия седла P_S замыкаются на устойчивый узел P_N . С увеличением Δ седло и устойчивый узел сближаются и на границе l_1 сливаются в седлоузел. Далее происходит бифуркация рождения устойчивого предельного цикла при исчезновении сложной особой точки седло-узел. Предельный

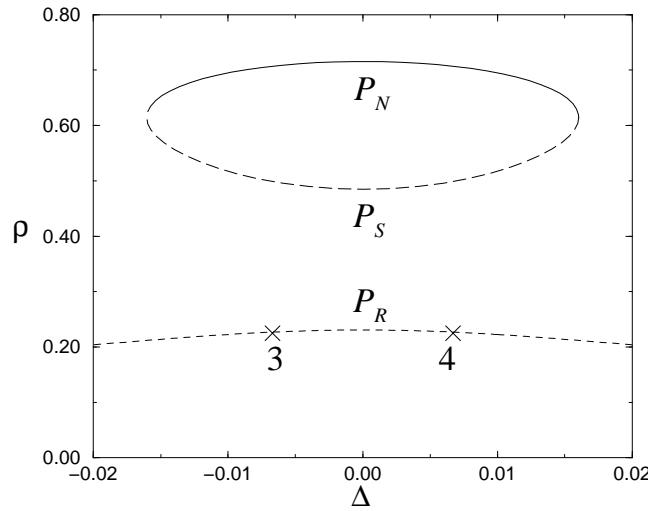


Рис. 1.9. Бифуркационная диаграмма для неподвижных точек P_N, P_S и P_R системы (1.11)–(1.12) при изменении параметра расстройки Δ и фиксированных значениях $\beta = 0.01$ и $\lambda = 0.1$

цикл возникает “жестко” и сразу же за бифуркационной точкой имеет конечный радиус (рис. 1.8,в). Вблизи бифуркационной точки соответствующие колебания конечной амплитуды имеют очень большой период. В исходной системе для переменной $x(t)$ это будет соответствовать жесткому возникновению медленных биений. Рассмотренные бифуркции на границе областей A и C определяют как механизм синхронизации через захват. Область A языка синхронизации также называют областью захвата.

На рисунке 1.10 построена бифуркационная диаграмма для неподвижных точек системы (уравнения (1.11) и (1.12)) при изменении параметра β и фиксированном значении $\Delta = 0.01$. На плоскости параметров (β, Δ) (рис. 1.7) это соответствует перемещению вдоль линии ef . В области C ниже линии l_1 на фазовой плоскости имеется устойчивый предельный цикл C и расположенный внутри него неустойчивый фокус P_R . С ростом амплитуды внешнего воздействия β неустойчивый фокус P_R перемещается по фазовой плоскости. При пересечении линии l_1 с ним никаких бифуркаций не происходит. На границе области синхронизации предельный цикл C исчезает, рождается сложная особая точка седло-узел. Выше линии l_1 устойчивый узел P_N и седло P_S расходятся на фазовой плоскости. С увеличением β за точкой, отмеченной символом “ \times ”, неустойчивый фокус P_R превращается в неустойчивый узел и сближается с седлом P_S . При пересечении линии l_2 происходит седло-узловая бифуркация, в результате которой неустойчивый узел P_R и седло P_S сливаются и исчезают. На фазо-

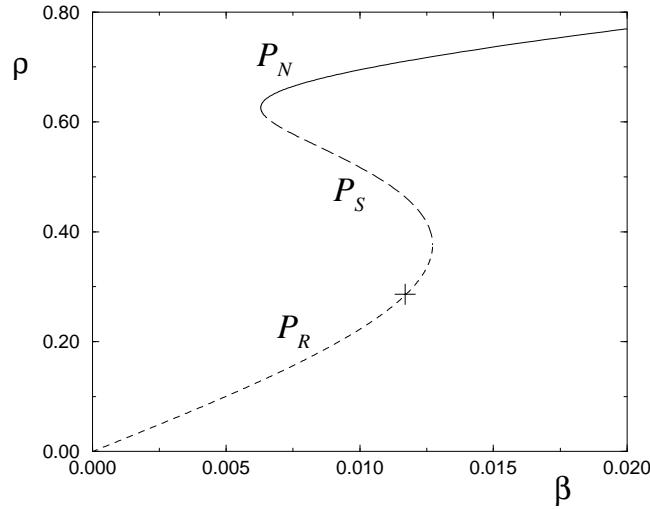


Рис. 1.10. Бифуркационная диаграмма для неподвижных точек системы (1.11, 1.12) при изменении параметра β и фиксированных значениях $\Delta = 0.01$ и $\lambda = 0.1$

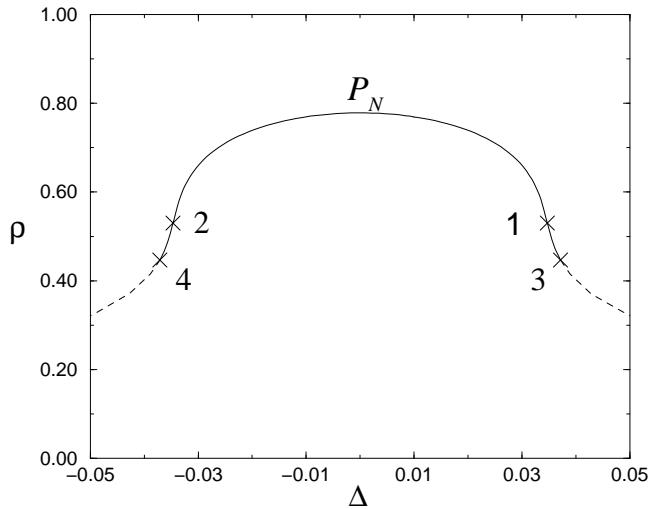


Рис. 1.11. Бифуркационная диаграмма состояния равновесия P_N системы (1.11), (1.12) при изменении параметра расстройки Δ и фиксированных значениях $\beta = 0.02$ и $\lambda = 0.1$

вой плоскости остается одна особая точка — устойчивый узел P_N , который в области B на рис. 1.7 продолжает отвечать режиму вынужденной синхронизации генератора Ван дер Поля. Область B языка синхронизации называется областью подавления. Механизм нарушения (или возникновения) синхронизации здесь иной, чем на границе областей A и C .

На рисунке 1.11 построена бифуркационная диаграмма неподвижной точки P_N при изменении параметра Δ и фиксированном значении $\beta = 0.02$. На плоскости параметров (β, Δ) (рис. 1.7) это соответствует перемещению вдоль линии ab . В интервале значений расстройки, ограниченном точками 1 и 2 состояние равновесия P_N является устойчивым узлом. За точкой 2 до пересечения линии l_3 устойчивый узел превращается в устойчивый фокус. При пересечении линии l_3 происходит суперкритическая бифуркация Андронова–Хопфа. Точка P_N теряет устойчивость. Из неустойчивого фокуса в его окрестности рождается устойчивый предельный цикл, радиус которого увеличивается пропорционально корню из надkritичности. Соответствующий фазовый портрет показан на рис. 1.8,г. Во временной реализации $x(t)$ генератора Ван дер Поля при внешнем воздействии это соответствует мягкому возникновению биений. Вторая независимая мода квазипериодических движений нарастает плавно от нуля. При обратном движении по параметру при входе в область B происходит полное подавление автоколебательной моды и система совершает колебания

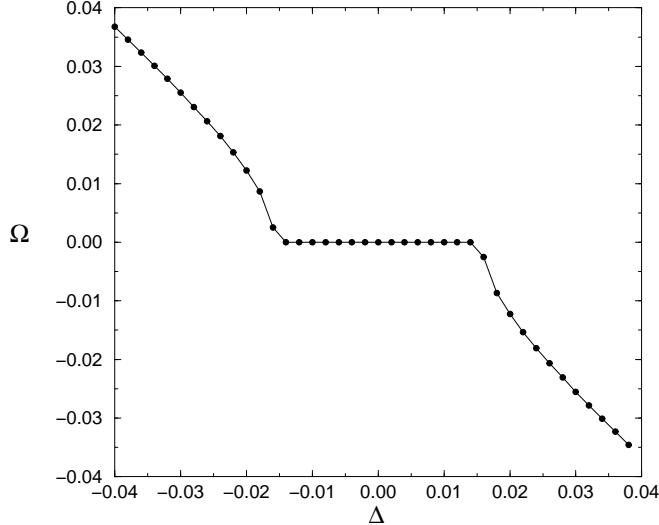


Рис. 1.12. График зависимости $\Omega = \langle \dot{\varphi}(t) \rangle$ от расстройки по частоте Δ системы уравнений для амплитуды и фазы (1.11) – (1.12) при $\lambda = 0.1$ и $\beta = 0.01$

на частоте внешнего воздействия, что возможно только при больших амплитудах внешней силы.

На рисунке 1.12 построена зависимость $\Omega = \langle \dot{\varphi}(t) \rangle$ от расстройки по частоте Δ для системы укороченных уравнений (1.11)–(1.12) при $\lambda = 0.1$ и $\beta = 0.01$. Горизонтальный участок соответствует области синхронизации, когда $\Omega = 0$ и колебания $x(t)$ происходят на частоте внешнего воздействия ω . Ширина полки на графике зависит от параметра β . По мере его увеличения область синхронизации расширяется. Выбранные значения $\beta = 0.01$ и $\lambda = 0.1$ соответствуют области захвата (область A на рис. 1.7), при выходе из которой возникают биения с частотой Ω .

1.4 Бифуркационный анализ неавтономного генератора Ван дер Поля

Вернемся к полным уравнениям (1.5) генератора Ван дер Поля при внешнем гармоническом воздействии

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2) \dot{x} + x = b \sin \omega t,$$

и исследуем поведение этой системы в зависимости от амплитуды и частоты внешнего гармонического воздействия при фиксированном значении управляющего параметра автономного генератора λ .

Напомним, что для автономного генератора (при $b = 0$) размерность фазового пространства равна двум и его поведение зависит только от значений параметра λ . При $\lambda < 0$ автоколебания в генераторе не возбуждаются. На фазовой плоскости имеется единственная особая точка, расположенная в начале координат, которая является устойчивой, и при $\lambda < -2$ представляет собой устойчивый узел, при $-2 < \lambda < 0$ – устойчивый фокус. Если $0 < \lambda < 2$, состояние равновесия является неустойчивым фокусом. Если $\lambda > 2$, то неустойчивым узлом. При переходе λ через ноль происходит суперкритическая бифуркация Андронова–Хопфа, в результате которой из неустойчивого фокуса рождается устойчивый предельный цикл. При малых значениях управляющего параметра генератор демонстрирует квазигармонические колебания, которые с ростом λ превращаются в релаксационные.

Размерность фазового пространства неавтономного генератора Ван дер Поля равна трем, и здесь помимо неподвижных точек и предельных циклов может существовать двумерный тор. Запишем уравнение неавтономного генератора (1.5) в виде системы трех дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= (\lambda - x^2) y - x + b \sin(z), \\ \dot{z} &= \omega.\end{aligned}\tag{1.32}$$

Здесь x, y, z – динамические переменные, которые и определяют размерность фазового пространства. В широкой области значений параметров динамика данной системы является довольно сложной и разнообразной. Мы ограничимся исследованием режимов синхронизации и их бифуркаций в окрестности так называемого основного языка синхронизации, когда частота синхронных колебаний совпадает с частотой внешнего воздействия, причем будем рассматривать только квазигармонические режимы автономного генератора, когда параметр λ имеет небольшие значения.

На рисунке 1.13 на плоскости амплитуда – частота внешнего воздействия построены линии бифуркационных значений синхронных движений при фиксированном значении параметра λ . В областях A и B система демонстрирует режимы синхронизации, а в области C – режим квазипериодических колебаний. Следует отметить, что в отличие от укороченных уравнений для амплитуды и фазы в системе (1.32) устойчивым и неустойчивым синхронным движениям отвечают устойчивые и неустойчивые предельные циклы, а квазипериодическим колебаниям соответствует двумерный эргодический тор в трехмерном фазовом пространстве системы. При

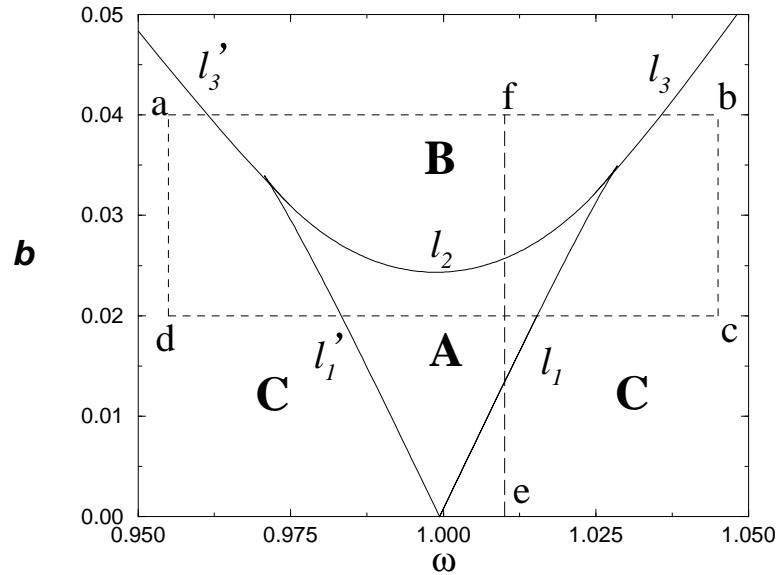


Рис. 1.13. Основной язык синхронизации на плоскости параметров амплитуда b – частота ω внешнего воздействия системы (1.32) при $\lambda = 0.1$

значениях параметров из области A в фазовом пространстве системы имеется три предельных цикла: устойчивый C_N , седловой C_S и абсолютно

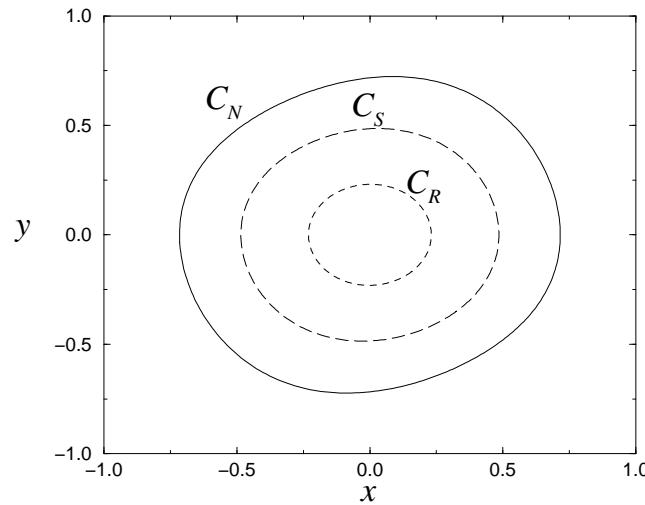


Рис. 1.14. Проекции предельных циклов на плоскость (x, y) системы (1.32) при значениях параметров $b = 0.02, \omega = 1.01, \lambda = 0.1$. C_N – устойчивый, C_S – седловой и C_R – абсолютно неустойчивый предельные циклы

неустойчивый C_R . Проекции предельных циклов на плоскость (x, y) показаны на рис. 1.14.

Режиму синхронизации отвечает устойчивый предельный цикл C_N . Он и седловый предельный цикл C_S лежат на поверхности двумерного тора, который образован замыканием неустойчивых многообразий седлового цикла C_S на устойчивый цикл C_N . Рассмотрим бифуркции этих предельных циклов при движении по плоскости управляющих параметров (b, ω) и фиксированном $\lambda = 0.1$.

На рисунке 1.15 построена бифуркационная диаграмма в зависимости от частоты внешнего воздействия ω при фиксированной амплитуде $b = 0.02$, что соответствует перемещению вдоль линии cd на рис. 1.13. На оси ординат бифуркационной диаграммы (рис. 1.15) отложены максимальные значения динамической переменной $x(t)$ соответствующих предельных циклов C_N, C_S, C_R . При изменении частоты внешнего воздействия ω при пересечении границ областей синхронизации l_1 и l'_1 неустойчивый предельный цикл C_R никаких бифуркаций не претерпевает. Переход от синхронных колебаний к квазипериодическим связан с бифуркациями двух других предельных циклов. Из диаграммы видно, что с увеличением или уменьшением ω с приближением к бифуркационным линиям l_1 или l'_1 устойчивый цикл C_N сближается с седловым C_S . На границе они сливаются в особый седло-узловой цикл (один из мультиплликаторов цикла принимает значение +1), и при переходе через бифуркационную линию исчезают.

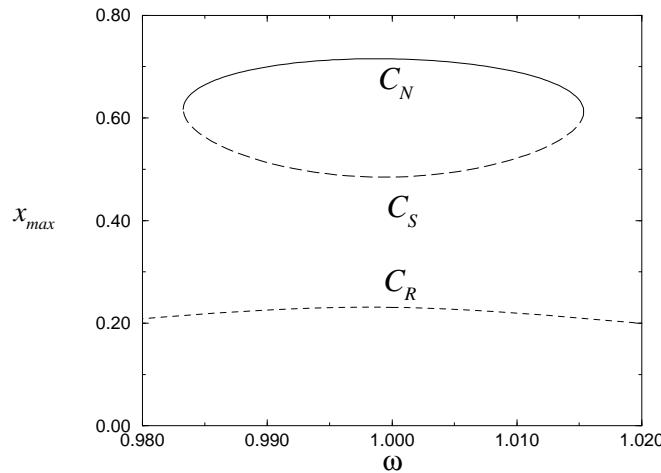


Рис. 1.15. Бифуркационная диаграмма для предельных циклов C_N, C_S, C_R системы (1.32) при изменении частоты внешнего воздействия ω и фиксированных значениях $b = 0.02$ и $\lambda = 0.1$. По оси ординат отложены максимальные значения динамической переменной x перечисленных предельных циклов.

Данная седло-узловая бифуркация слияния и исчезновения предельных циклов C_N и C_S происходит на поверхности двумерного тора. Вне области синхронизации фазовая траектория покрывает поверхность тора нигде не замыкаясь, что соответствует квазипериодическим колебаниям. Проекция фазового портрета двумерного тора показана на рис. 1.16. При пересечении границ l_1 и l'_1 квазипериодические колебания возникают жестким образом, амплитуда модуляции ("толщина" тора на фазовом портрете) сразу же за точкой бифуркации принимает конечную достаточно большую величину. Здесь помимо притягивающего тора T в фазовом пространстве системы имеется еще неустойчивый предельный цикл C_R . Рассмотренные перестройки фазового портрета системы на границе областей A и C определяют как бифуркационный механизм синхронизации через захват. Область A языка синхронизации называют областью захвата.

На рисунке 1.17 построена бифуркационная диаграмма для устойчивого C_N , неустойчивого C_R и седлового C_S предельных циклов системы (1.32) в зависимости от амплитуды внешнего воздействия b при фиксированных значениях $\omega = 1.01, \lambda = 0.1$, что соответствует перемещению вдоль линии ef на плоскости параметров амплитуда– частота внешнего воздействия рис. 1.13.

При малых амплитудах внешнего воздействия b ниже линии l_1 , помимо притягивающего тора, существует неустойчивый предельный цикл C_R , родившийся из состояния равновесия в начале координат. С ростом b амплитуда этого неустойчивого цикла растет. При пересечении линии l_1 с

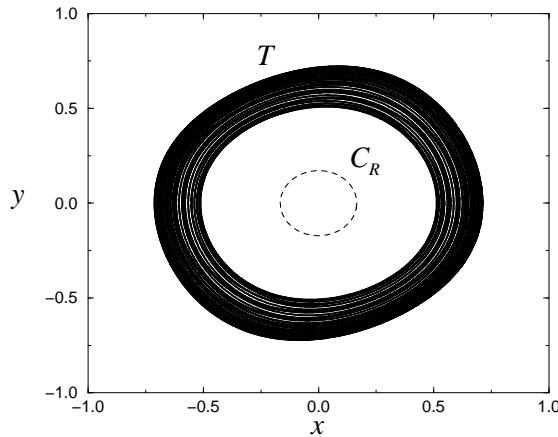


Рис. 1.16. Фазовый портрет (притягивающий двумерный тор T и неустойчивый предельный цикл C_R), системы (1.32) после седло-узловой бифуркации предельных циклов C_N и C_S при значениях параметров $\lambda = 0.1, b = 0.02, \omega = 1.017$

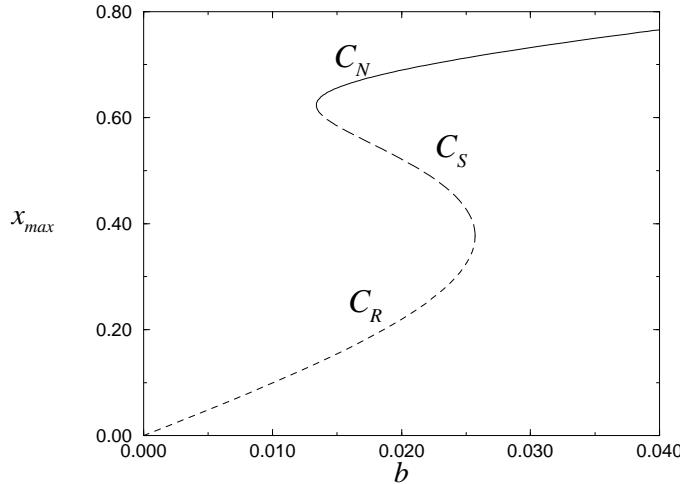


Рис. 1.17. Бифуркационная диаграмма предельных циклов системы (1.32) при изменении амплитуды внешнего воздействия b и фиксированных значениях $\omega = 1.01, \lambda = 0.1$

ним ничего не происходит, в то время как на притягивающем двумерном торе в результате седло-узловой бифуркации рождается пара предельных циклов – устойчивый C_N и седловый C_S . При дальнейшем увеличении b седловый цикл C_S сближается с неустойчивым циклом C_R . При пересечении линии l_2 происходит седло-репеллерная бифуркация, эти два цикла сливаются и исчезают. Исчезновение седлового цикла C_S приводит к разрушению резонансного тора. В фазовом пространстве остается только устойчивый предельный цикл C_N , отвечающий режиму синхронизации. Область синхронизации B , расположенную выше линии l_2 на рис. 1.13, называют областью подавления. В отличие от области захвата A при выходе из области подавления с изменением частоты внешнего воздействия квазипериодические колебания возникают мягким образом, амплитуда модуляции нарастает постепенно от нуля, что обусловлено характером бифуркаций предельного цикла C_N .

На рисунке 1.18 представлена бифуркационная диаграмма предельного цикла C_N при изменении частоты внешнего воздействия ω и фиксированных значениях $b = 0.04, \lambda = 0.1$, что соответствует перемещению вдоль линии ab по плоскости параметров амплитуда–частота внешнего воздействия на рис. 1.13. В интервале значений, ограниченных линиями l_3 и l'_3 , предельный цикл является устойчивым (сплошная линия бифуркационной диаграммы на рис. 1.18). Для предельного цикла один из мультиплликаторов всегда равен единице. Два оставшихся мультиплликатора по модулю меньше единицы в этом интервале значений. При пересечении би-

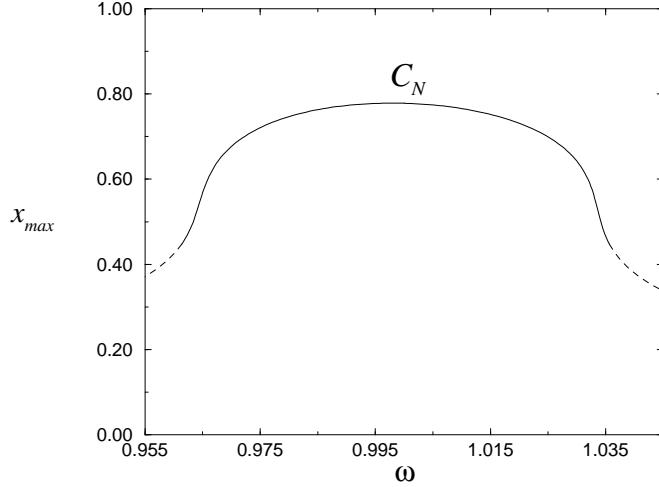


Рис. 1.18. Бифуркационная диаграмма предельного цикла системы (1.32) при изменении частоты внешнего воздействия ω и фиксированных значениях $b = 0.04, \lambda = 0.1$. Сплошная линия соответствует устойчивому состоянию, штриховая – неустойчивому состоянию предельного цикла C_N

фуркационных линий l_3 и l'_3 два мультипликатора являются комплексно-сопряженными и по модулю становятся больше единицы. Предельный цикл теряет устойчивость и из него рождается притягивающий двумерный тор, проекция которого на плоскость (x, y) представлена на рис. 1.19. "Толщина" тора плавно увеличивается с ростом надкритичности. Такая пе-

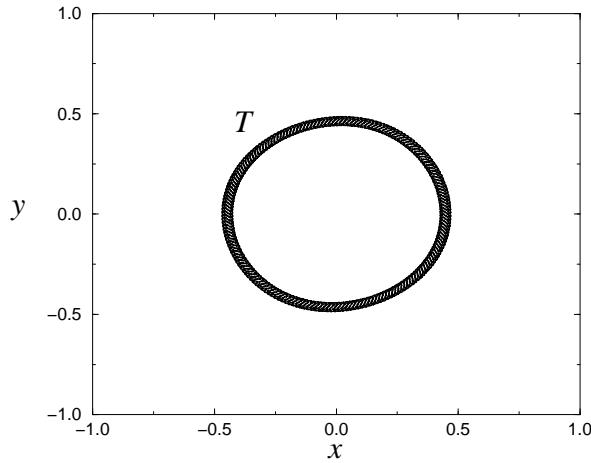


Рис. 1.19. Проекция двумерного тора при значениях параметров $\lambda = 0.1, b = 0.04, \omega = 1.0357$ (вблизи линии l_3 на рис. 1.13), родившегося в результате вторичной прямой бифуркации Андronова–Хопфа (или бифуркации Неймарка–Сакера)

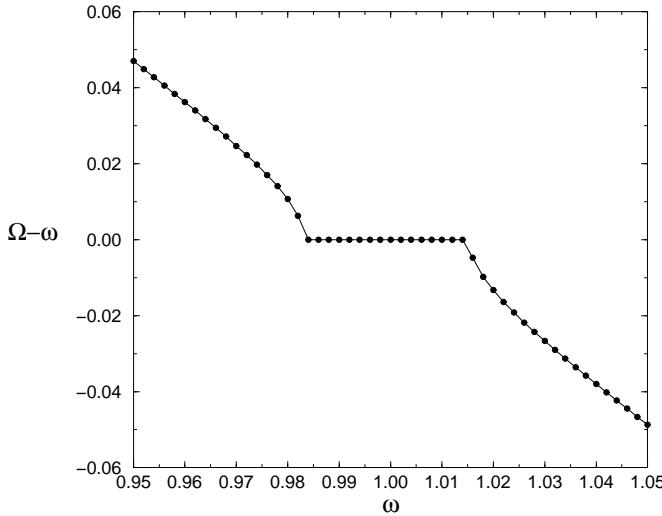


Рис. 1.20. График зависимости $\Omega - \omega$ (разности между средней частотой автоколебаний и частотой внешнего воздействия) от частоты внешнего воздействия ω системы (1.32) при $\lambda = 0.1$ и $b = 0.02$

рестройка фазового потрета называется бифуркацией Неймарка–Сакера и она определяет механизм синхронизации через подавление³.

В области синхронизации B генератор совершают колебания на частоте внешнего воздействия. Однако в отличие от случая слабого внешнего воздействия, здесь собственная автоколебательная мода не подстраивается к ритму внешнего воздействия, а является полностью подавленной им. И только с увеличением расстройки по частоте, при переходе границ l_3 и l'_3 области синхронизации (рис. 1.13) возбуждается автоколебательная мода и начинает плавно нарастать. При небольшой надкритичности в спектре квазипериодических колебаний с двумя независимыми частотами продолжают превалировать спектральные составляющие соответствующие внешней силе. По этой причине такой режим слабо модулированных колебаний часто также относят к режиму синхронизации.

На рисунке 1.20 построена зависимость разности между средней частотой автоколебаний и частотой внешнего воздействия системы (1.32) при $\lambda = 0.1$ и $b = 0.02$. Горизонтальный участок соответствует области синхронизации, когда генератор совершает колебания на частоте внешнего

³ Здесь следует отметить, что границы l_3 и l'_3 на плоскости параметров (β, ω) представляют собой линии рождения тора, на которые опираются языки синхронизации с различными числами вращения, которые определяются отношением частоты биения к частоте внешнего воздействия. Частота биений характеризуется разностью частот автоколебательной моды и внешнего воздействия. Однако в рамках данной главы мы не рассматриваем структуру пространства управляющих параметров в широкой области значений.

воздействия ω . Ширина горизонтального участка зависит от амплитуды внешнего воздействия b . Данное значение $b = 0.02$ при $\lambda = 0.1$ соответствует области захвата.

1.5 Выводы

В данной главе рассмотрено явление синхронизации периодических автоколебаний внешней гармонической силой на примере неавтономного генератора Ван дер Поля. Представлено описание основной области синхронизации на плоскости управляющих параметров амплитуда – частота внешнего воздействия, используя фазовое уравнение, укороченные уравнения для амплитуды и фазы и полное неавтономное уравнение Ван дер Поля.

Для случая малого параметра возбуждения автономного генератора, малой амплитуды внешней силы и частоты внешней силы близкой к собственной частоте генератора, систему можно рассматривать как слабо возмущенный гармонический осциллятор. Для него методом усреднения Ван дер Поля получены укороченные уравнения для амплитуды и фазы.

Фазовое уравнение позволяет описать область захвата. В одномерном фазовом пространстве динамической системы синхронным движениям отвечают устойчивая и неустойчивая неподвижные точки. При выходе из области синхронизации происходит их слияние и исчезновение, возникает дрейф фазы.

Фазовое описание допустимо только при очень слабом внешнем воздействии, когда возмущением амплитуды автономного генератора можно пренебречь. Учет амплитудного уравнения приводит к более сложным бифуркационным явлениям на плоскости управляющих параметров. Язык синхронизации содержит область захвата и область подавления. Синхронным движениям отвечают неподвижные точки на фазовой плоскости, квазипериодическим колебаниям – предельный цикл. При выходе из области захвата с увеличением расстройки по частоте происходит бифуркация рождения устойчивого предельного цикла при исчезновении сложной особой точки седло-узел. При переходе из области захвата в область подавления с увеличением амплитуды внешнего воздействия происходит седло-репеллерная бифуркация: седло и неустойчивый узел сливаются и исчезают. Выход из области захвата с увеличением расстройки по частоте сопровождается суперкритической бифуркацией Андронова – Хопфа: происходит рождение устойчивого предельного цикла из неустойчивого фокуса.

Анализ полного неавтономного уравнения Ван дер Поля при небольших значениях параметра возбуждения приводит к аналогичным результатам в устройстве основной области синхронизации на плоскости управляющих параметров. При этом следует учитывать, что размерность фазового пространства неавтономного осциллятора равна трем. Синхронным движениям отвечают предельные циклы. Квазипериодическим колебаниям – притягивающий двумерный эргодический тор. При выходе из области захвата квазипериодические колебания возникают жестким образом в результате седло-узловой бифуркации предельных циклов на резонансном торе. При переходе из области захвата в область подавления с увеличением амплитуды внешнего воздействия происходит седло-репеллерная бифуркация предельных циклов, что приводит к разрушению резонансного тора. При выходе из области захвата с увеличением расстройки по частоте квазипериодические колебания возникают мягким образом: предельный цикл теряет устойчивость и из него рождается притягивающий двумерный тор.

2. Синхронизация автоколебаний в присутствии шума

2.1 Введение

Исследование влияния случайных воздействий на поведение нелинейных динамических систем (к которым относятся и автоколебательные системы) представляет собой важную задачу, как с точки зрения фундаментальной теории, так и в свете практических приложений. Важность данной задачи определяется тем, что процессы, протекающие в реальных системах любой природы, в большинстве случаев нельзя рассматривать как чисто случайные (стохастические) или чисто детерминированные (динамические). Они, как правило, являются результатом совместного действия детерминированного оператора эволюции и случайных сил [64–68]. В радиофизических задачах флуктуации, вызванные действием случайных сил, традиционно называют шумом. В настоящее время этот термин получил общенаучное употребление. В радиофизике шум всегда играл особенно заметную, хотя в основном негативную роль. Вопросы генерации, усиления, передачи и приема сигналов при наличии шума, а также исследование природы и статистических характеристик источников шума в радиофизических системах традиционно составляют предмет статистической радиофизики. Именно в статистической радиофизике впервые встал вопрос исследования влияния шума на процессы в нелинейных динамических в том числе автоколебательных системах [69]. Синхронизация генераторов типа генератора Ван дер Поля в присутствии источников внутреннего шума впервые была поставлена и решена в работах Р. Л. Стратоновича, А. Н. Малахова и др. [9, 27, 28, 70]. Предполагалось, что мощность шума много меньше мощности колебаний и гармонического воздействия и что статистические характеристики шума можно приближенно описать с помощью модели белого гауссова шума. В частности, шум можно считать белым (некоррелированным), если его времена корреляции много меньше времени установления стационарных значений амплитуды и фазы колебаний.

2.2 Вынужденная синхронизация зашумленных автоколебаний гармонической внешней силой

Рассмотрим вынужденную синхронизацию на основном тоне, предполагая режим автоколебаний квазигармоническим. Простейшей математической моделью для исследования данного вопроса может служить следующее стохастическое дифференциальное уравнение:

$$\ddot{x} + x = (\lambda - x^2)\dot{x} + b \cos(\omega_1 t + \varphi_1^0) + \sqrt{2D}n(t), \quad (2.1)$$

где $\xi(t) = \sqrt{2D}n(t)$ – гауссов белый шум с постоянной интенсивностью D , b , φ_1^0 и ω_1 – соответственно, амплитуда, начальная фаза и безразмерная частота внешнего воздействия.

Считая внешнюю силу и интенсивность шума малыми и учитывая полосовые свойства автогенератора, приходим к модели автоколебаний в виде узкополосного стохастического процесса, называемого гармоническим шумом. Иначе говоря, мы рассматриваем колебания автогенератора близкими к гармоническим и ищем решение (2.1) в виде

$$\begin{aligned} x(t) &= \rho(t) \cos(\omega_1 t + \varphi(t)), \\ \dot{x}(t) &= -\rho(t)\omega_1 \sin(\omega_1 t + \varphi(t)), \end{aligned} \quad (2.2)$$

где мгновенная амплитуда $\rho(t)$ и случайная компонента фазы $\varphi(t)$ предполагаются медленно меняющимися функциями по сравнению с периодом колебаний $T_1 = 2\pi/\omega_1$. Подставляя выражения (2.2) в (2.1) и производя усреднение за период T_1 , получаем следующую систему стохастических уравнений для амплитуды и фазы колебаний

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{\rho^2}{8} \right) \rho - \sqrt{2D} \frac{1}{2\pi} \int_t^{t+T_1} n(\theta) \sin(\omega_1 \theta + \varphi) d\theta, \\ \dot{\varphi} &= \Delta - \frac{\beta}{\rho} \cos(\varphi - \varphi_1^0) - \frac{\sqrt{2D}}{\rho} \frac{1}{2\pi} \int_t^{t+T_1} n(\theta) \cos(\omega_1 \theta + \varphi) d\theta. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Параметр $\Delta = (1 - \omega_1^2)/2\omega_1 \cong 1 - \omega_1$ характеризует частотную расстройку, а параметр $\beta = b/2\omega_1$ – амплитуду воздействия. Произведя преобразование слагаемых, содержащих источник шума $n(t)$, можно получить следующие приближенные выражения:

$$\begin{aligned} \xi_1(t, \varphi) &= \frac{1}{2\pi} \int_t^{t+T_1} n(\theta) \sin(\omega_1 \theta + \varphi) d\theta = -\frac{\sqrt{2D}}{4\rho} - \frac{1}{\sqrt{2}} n_1(t), \\ \xi_2(t, \varphi) &= \frac{1}{2\pi} \int_t^{t+T_1} n(\theta) \cos(\omega_1 \theta + \varphi) d\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} n_2(t), \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $n_1(t)$ и $n_2(t)$ – независимые источники нормированного гауссова белого шума: $\langle n_{1,2}(t) \rangle \equiv 0$, $\langle n_i(t + \tau) n_j(t) \rangle = \delta_{i,j} \delta(\tau)$, $i, j = 1, 2$, $\delta_{i,j}$ – символ Кронеккера. Подставляя преобразованные источники шума в (2.3), приходим к классической стохастической модели квазигармонического автогенератора с внешним гармоническим воздействием [9, 27, 28, 70, 71]:

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{\rho^2}{8} \right) \rho - \beta \sin(\varphi - \varphi_1^0) + \frac{D}{2\rho\omega_1^2} + \frac{\sqrt{D}}{\omega_1} n_1(t), \\ \dot{\varphi} &= \Delta - \frac{\beta}{\rho} \cos(\varphi - \varphi_1^0) + \frac{\sqrt{D}}{\omega_1 \rho} n_2(t).\end{aligned}\quad (2.5)$$

Выбор начальной фазы воздействия φ_1^0 не принципиален. Он влияет только на постоянную составляющую переменной φ . В дальнейшем положим $\varphi_1^0 = 0$, тогда переменная φ равна разности фаз генератора и внешнего воздействия. В [27] отмечается, что аналогичная система уравнений может быть получена не только при гармоническом воздействии, но и в случае, когда внешнее воздействие является периодической функцией любой формы, например последовательностью импульсов.

Если выполняются условия $b^2 \ll \lambda$, $D \ll \lambda$, то отклонения амплитуды от ее невозмущенного значения $a_0 = 2\sqrt{\lambda}$ невелики. Пренебрегая амплитудными флуктуациями, получаем уравнение фазовой динамики в виде

$$\dot{\varphi} = \Delta - \Delta_c \cos \varphi + \sqrt{2B_\varphi} n_2(t), \quad (2.6)$$

где $\Delta_c = \frac{\beta}{2\sqrt{\lambda}}$ – ширина полосы синхронизации в отсутствии шума, а $B_\varphi = \frac{D}{8\omega_1^2 \lambda}$ – интенсивность “фазового шума”. Уравнение (2.6) описывает диффузионный процесс, который можно представлять как броуновское движение “частицы” с координатой φ в одномерном наклоненном периодическом потенциале $U(\varphi) = -\Delta \cdot \varphi + \Delta_c \sin \varphi$ (см. рис. 2.1). При отсутствии шума в случае $\Delta < \Delta_c$ минимумы потенциала $\varphi_k^{min} = -\arccos(\Delta/\Delta_c) + 2\pi k$, $k = 0, 1, 2, \dots$ соответствуют синхронизации, так как мгновенная разность фаз автоколебаний и внешней силы остается постоянной во времени. Наличие шума приводит к диффузии разности фаз в потенциале $U(\varphi)$: $\varphi(t)$ флуктуирует вблизи минимумов потенциала φ_k^{min} и совершает случайные переходы из одной потенциальной ямы в другую, скачком меняясь на 2π .

На рис. 2.2 показаны реализации разности фаз для различных значений интенсивности шума и, соответственно, различных B_φ , полученные в

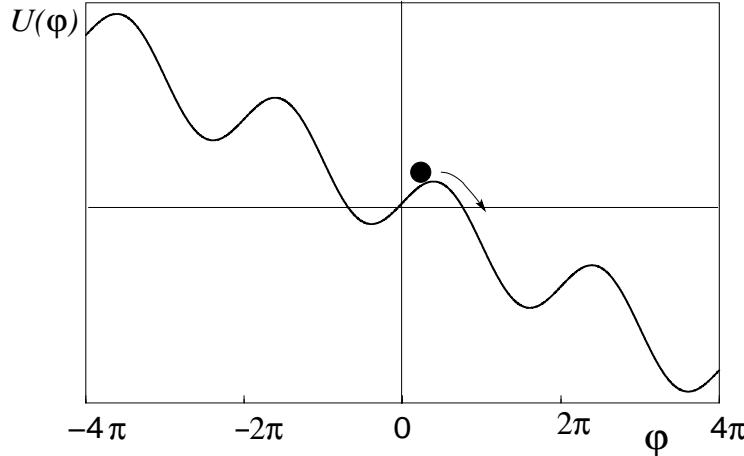


Рис. 2.1. Профиль потенциала $U(\varphi)$ при $\Delta \neq 0$

результате численного интегрирования СДУ (2.6). Как видно из рисунка, при малых интенсивностях шума ($B_\varphi = 0.02$) мгновенная разность фаз в течение длительного времени остается близкой к начальному значению. Увеличение интенсивности шума приводит к уменьшению длительности времен пребывания φ в одной из потенциальных ям и становятся видны перескоки мгновенной разности фаз между различными метастабильными состояниями ($B_\varphi = 0.05$). Участки приблизительного постоянства мгно-

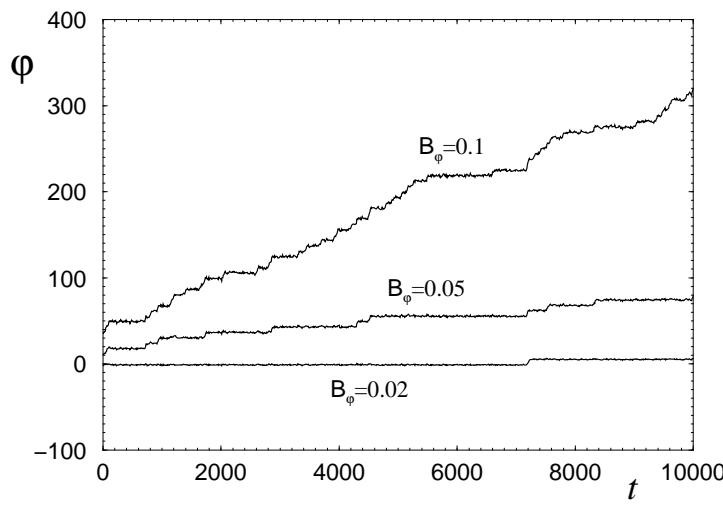


Рис. 2.2. Зависимость мгновенной разности фаз от времени для нескольких значений интенсивности шума. Другие параметры: $\Delta = 0.06$ и $\Delta_c = 0.15$

венной разности фаз $\varphi \cong \text{const}$ еще достаточно хорошо заметны, однако среднее значение φ возрастает во времени. Чем больше наклон (расстройка), чем мельче ямы (чем меньше амплитуда синхронизирующего сигнала) и чем большее интенсивность шума, тем меньше суммарное время, в течение которого фазы генератора и воздействия захвачены. Сильный шум приводит к быстрому неограниченному росту абсолютной величины разности фаз (см. зависимость $\varphi(t)$ для $B_\varphi = 0.1$), и существенному изменению средней частоты колебаний.

Пусть значения параметров соответствуют области фазового захвата в отсутствии шума. Пренебрежем изменениями переменной $\varphi(t)$ в пределах одной потенциальной ямы и будем учитывать только приращения $\pm 2\pi$, возникающие в результате скачков из одной потенциальной ямы в другую. Скачки происходят в случайные моменты времени и их можно считать статистически независимыми. Таким образом, поведение разности фаз подобно случайному блужданиям. Спустя интервал времени $t - t_0$, значительно превосходящий среднее время между скачками, значение $\varphi(t)$ складывается из большого числа независимых случайных приращений. Вследствие центральной предельной теоремы, распределение $\varphi(t)$ становится гауссовым, причем дисперсия распределения растет по линейному закону: $\sigma_\varphi^2(t) = 2B_{\text{эфф}} \cdot (t - t_0)$, где постоянный множитель $B_{\text{эфф}}$ называют коэффициентом эффективной диффузии разности фаз. Линейный характер роста дисперсии $\sigma_\varphi^2(t)$ является приближенным. В действительности на фоне линейного роста наблюдаются мелкомасштабные изменения значения дисперсии, связанные с поведением системы в пределах одной потенциальной ямы. Для вычисления коэффициента эффективной диффузии разности фаз построенная численно зависимость σ_φ^2 от t по методу наименьших квадратов аппроксимируется линейной зависимостью: $\sigma_{\text{аппр}}^2 = at + b$. Тогда коэффициент эффективной диффузии разности фаз определяется как $B_{\text{эфф}} = a/2$. Величина $B_{\text{эфф}}$ пропорциональна вероятности скачка в единицу времени. Последняя может быть найдена из решения задачи о времени первого достижения границы (т.н. задача Крамерса [27, 65, 67, 70, 71]) В соответствии с изложенными в [27] рассуждениями, для коэффициента эффективной диффузии разности фаз можно получить следующее приближенное аналитическое выражение:

$$B_{\text{эфф}} = \pi \sqrt{\Delta_c^2 - \Delta^2} \left(1 + \exp \left(-\frac{2\pi\Delta}{B_\varphi} \right) \right) \exp \left(-\frac{U_0}{B_\varphi} \right), \quad (2.7)$$

где $U_0 = 2 \left(\sqrt{\Delta_c^2 - \Delta^2} - \Delta \cdot \arccos \frac{\Delta}{\Delta_c} \right)$ – глубина потенциальных ям. Из (2.7) следует, что эффективная диффузия разности фаз быстро растет

с ростом интенсивности шума, характеризующейся коэффициентом B_φ , а также с увеличением расстройки Δ . Необходимо отметить, что выражение (2.7) перестает быть справедливым при $\Delta \rightarrow \Delta_c$ и вне области синхронизации. По этой причине оно “не работает” и при близких к нулю значениях Δ_c , для которых ширина области синхронизации (без шума) очень мала.

При воздействии на генератор гауссова шума сбои фазы неизбежны при любых значениях расстройки и амплитуды синхронизирующего воздействия, т.е. синхронизация не может быть строгой. В этом случае принято говорить об эффективной синхронизации, проявляющейся в захвате фазы на достаточно длительных интервалах времени. Коэффициент $B_{\text{эфф}}$ характеризует среднее число фазовых сбоев в единицу времени, а значит может служить критерием эффективной синхронизации.

Поскольку полная фаза автоколебаний есть $\Phi(t) = \omega_1 t + \varphi(t)$, где ω_1 – детерминированная константа, то процессы $\Phi(t)$ и $\varphi(t)$ характеризуются одним и тем же коэффициентом эффективной диффузии. Таким образом, $B_{\text{эфф}}$ определяет полуширину непрерывной компоненты спектра колебаний $x(t)$, которая при небольших расстройках (вдали от границы синхронизации) имеет форму лоренциана.

Уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова (ФПК), соответствующее СДУ (2.6), имеет вид

$$\frac{\partial p_\varphi(\varphi, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \varphi} \left[(\Delta - \Delta_c \cos \varphi) p_\varphi(\varphi, t) - B_\varphi \frac{\partial p_\varphi(\varphi, t)}{\partial \varphi} \right]. \quad (2.8)$$

Значения фазовой переменной φ при любых Δ и Δ_c неограниченно растут по абсолютной величине, поэтому случайный процесс, описываемый уравнением (2.8), является нестационарным. Однако, поскольку коэффициенты уравнения ФПК – периодические по φ , то можно рассматривать приведенную фазу ϕ , ограниченную в интервале $[-\pi, \pi]$: $\phi(t) = \varphi(t) - 2\pi n - \pi$, где $n = \text{Int}(\varphi(t)/2\pi)$. Плотность вероятности приведенной фазы ϕ выражается как:

$$p_\phi(\phi, t) = \sum_n p_\varphi(\varphi, t). \quad (2.9)$$

Уравнение ФПК для $p_\phi(\phi, t)$ имеет тот же самый вид, что и (2.8), но теперь существует стационарное решение. Стационарную плотность вероятности $p_\phi^{\text{ст}}(\phi)$ можно найти с учетом периодических граничных условий $p_\phi(-\pi, t) = p_\phi(\pi, t)$ и условия нормировки $\int_{-\pi}^{\pi} p_\phi(\phi, t) d\phi = 1$ [27]:

$$p_{\phi}^{\text{ct}}(\phi) = C \exp\left(\frac{\Delta \cdot \phi - \Delta_c \sin \phi}{B_{\varphi}}\right) \int_{\phi}^{\phi+2\pi} \exp\left(-\frac{\Delta \cdot \psi - \Delta_c \sin \psi}{B_{\varphi}}\right) d\psi, \\ -\pi \leq \phi \leq \pi, \quad (2.10)$$

где C — нормировочная константа. В частном случае, когда $\Delta = 0$, то есть, когда собственная частота осциллятора точно соответствует частоте возбуждения, стационарная плотность вероятности приведенной разности фаз имеет простой вид:

$$p_{\phi}^{\text{ct}}(\phi) = \frac{1}{2\pi I_0(\Delta_c/B_{\varphi})} \exp\left(\frac{\Delta_c}{B_{\varphi}} \cos(\phi + \pi/2)\right), \quad -\pi \leq \phi \leq \pi, \quad (2.11)$$

где $I_0(z)$ — модифицированная функция Бесселя. Для большой интенсивности шума, $I_0(\Delta_c/B_{\varphi}) \approx 1$ и $\exp[(\Delta_c/B_{\varphi}) \cos(\phi + \pi/2)] \approx 1$; таким образом, стационарная плотность вероятности с ростом интенсивности шума стремится к однородной, $p_{\phi}^{\text{ct}}(\phi) = 1/2\pi$. Эта ситуация соответствует отсутствию синхронизации. В противоположном случае очень слабого шума отклонения фазы ϕ от невозмущенного состояния устойчивого равновесия $\phi_0 = -\pi/2$ будут малыми и можно положить $\cos(\phi + \pi/2) \approx 1 - (\phi + \pi/2)^2/2$, $I_0(\Delta_c/B_{\varphi}) \approx \exp(\Delta_c/B_{\varphi})/\sqrt{2\pi\Delta_c/B_{\varphi}}$. Получаем, что стационарная плотность вероятности имеет гауссову форму:

$$p_{\phi}^{\text{ct}}(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi B_{\varphi}/\Delta_c}} \exp\left(-\frac{(\phi + \pi/2)^2}{2B_{\varphi}/\Delta_c}\right) \quad (2.12)$$

с максимумом в точке ϕ_0 . Хорошо заметный максимум гауссова распределения разности фаз свидетельствует о захвате фазы. В пределе $B_{\varphi} \rightarrow 0$ плотность вероятности становится δ -функцией, то есть $\lim_{B_{\varphi} \rightarrow 0} p_{\phi}^{\text{ct}}(\phi) = \delta(\phi + \pi/2)$. При небольшой, но конечной интенсивности шума распределение $p_{\phi}^{\text{ct}}(\phi)$ отклоняется от гауссовского, но имеет при этом хорошо заметный максимум.

Введение отличной от нуля расстройки приводит к изменению координаты равновесия ϕ_0 и соответствующему смещению максимума распределения $p_{\phi}^{\text{ct}}(\phi)$. Дисперсия распределения растет с ростом расстройки. Примеры распределений ϕ , численно полученных для модели (2.6), приведены на (рис. 2.3). При $\Delta = \pm\Delta_c$ в системе (2.6) без шума устойчивое и неустойчивое состояния равновесия сливаются и исчезают, что соответствует границе фазового захвата. Однако в присутствии шума пересечение границы $\Delta = \pm\Delta_c$ не приводит к изменению характера распределения переменной ϕ (рис. 2.3). Причина этого ясна. Если $|\Delta| < \Delta_c$, то случайные толчки

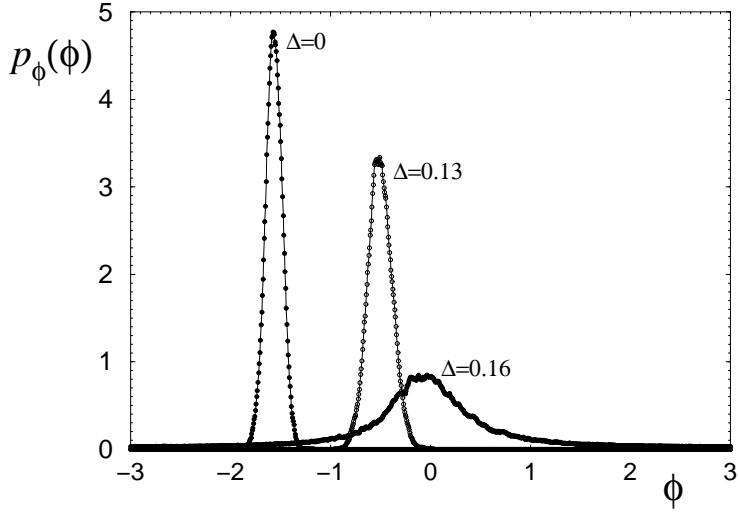


Рис. 2.3. Распределения ограниченной разности фаз $\phi \in [-\pi, \pi]$, численно полученные для модели (2.6) при $B_\phi = 0.001$, $\Delta_c = 0.15$ и различных значениях расстройки

все равно выталкивают систему из состояния равновесия ϕ_0 , приводя к распределению $p_\phi^{\text{ст}}(\phi)$ конечной ширины с максимумом в точке ϕ_0 . Если $|\Delta| > \Delta_c$, то точки ϕ_0 не существует. Однако, поскольку в окрестности исчезнувшей точки равновесия скорость $\dot{\phi}$ мала, то в течении длительных промежутков времени значения ϕ близки к ϕ_0 . На графике зависимости $\varphi(t)$ этому соответствуют почти горизонтальные участки. Соответственно, у распределения $p_\phi^{\text{ст}}(\phi)$ сохраняется максимум в точке, близкой к исчезнувшей точке равновесия. При дальнейшем увеличении расстройки стационарное распределение постепенно приближается к равномерному. Таким образом, можно сделать вывод об отсутствии бифуркационного перехода, связанного с качественным изменением стационарного распределения разности фаз и определяющей границы фазовой синхронизации генератора с гауссовым шумом.

Зная стационарную плотность вероятности $p_\phi^{\text{ст}}(\phi)$ можно найти среднюю разностную частоту колебаний Ω :

$$\Omega = \omega_c - \omega_1 = \langle \dot{\phi} \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} (\Delta - \Delta_c \cos \phi) p_\phi^{\text{ст}}(\phi) d\phi, \quad (2.13)$$

где ω_c - средняя частота автоколебаний в присутствии воздействия. В области синхронизации в системе с шумом величина Ω отлична от нуля и представляет собой средний сдвиг частоты синхронных колебаний в сторону собственной частоты автогенератора, вызванный флуктуациями фа-

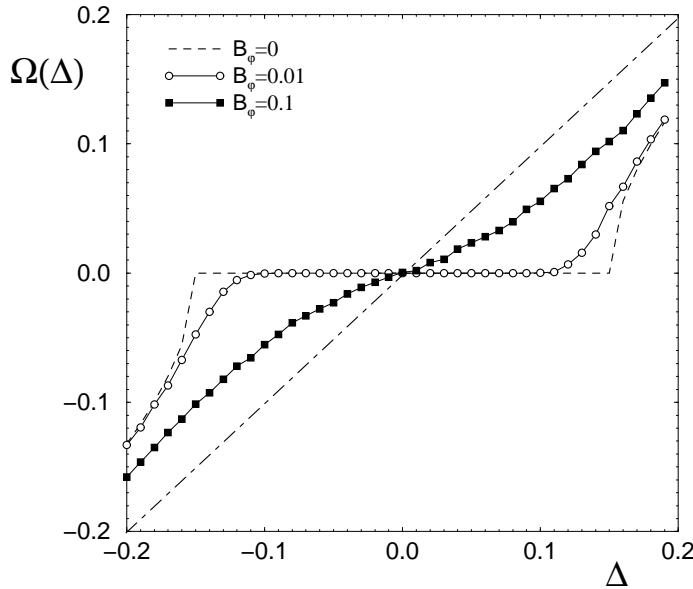


Рис. 2.4. Зависимости средней разностной частоты Ω от параметра расстройки в модели (2.6), полученные при $\Delta_c = 0.15$ для двух различных значений интенсивности шума и в отсутствие шума. Штрих-пунктиром нанесена прямая $\Omega = \Delta$

зы. Графики зависимости Ω от расстройки Δ , рассчитанные для модели (2.6), приведены на рис. 2.4. Величина Ω плавно меняется с изменением расстройки, обращаясь в ноль только в точке $\Delta = 0$. Полученные в присутствии шума кривые располагаются между кривой, соответствующей системе без шума, и прямой $\Omega = \Delta$, отражающей полное отсутствие синхронизации (штрих-пунктир). Таким образом, наличие случайных гауссовских возмущений приводит к тому, что средняя частота автоколебаний не совпадает с частотой воздействия, а находится между частотой воздействия и частотой невозмущенных автоколебаний. Однако, если интенсивность шума достаточно мала зависимость $\Omega(\Delta)$ имеет характерную для синхронизации почти горизонтальную “полочку”. С ростом интенсивности шума такая “полочка” постепенно исчезает.

При нулевой расстройке средняя частота автоколебаний совпадает с частотой воздействия, но это не означает, что имеет место эффективная синхронизация в смысле захвата фазы на длительных интервалах времени. О захвате фазы можно говорить, если коэффициент эффективной диффузии разности фаз принимает достаточно малые значения. Как следует из (2.7) при $\Delta = 0$ коэффициент $B_{\text{эфф}}$ убывает с ростом амплитуды воздействия (параметра Δ_c в уравнении (2.6) и любое его заданное малое

значение может быть получено только при определенном значении Δ_c . Иначе говоря, существует амплитудный порог вынужденной синхронизации в системе с шумом.

Наконец, рассмотрим, как эволюционирует спектральная плотность мощности синхронизируемых автоколебаний в присутствии шума, используя для этого фазовую модель (2.6). Зафиксируем расстройку Δ и интенсивность шума и проследим эволюцию спектральной плотности мощности колебаний $x(t) = \cos(\omega_1 t + \varphi(t))$ при увеличении Δ_c (т.е. амплитуды воздействия). Результаты расчетов приведены на рис. 2.5. При малом значении Δ_c в спектре (кривая 1), кроме острого пика на частоте воздействия ω_1 (теоретически - это должна быть δ -функция) хорошо видна спектральная линия с максимумом на некоторой частоте ω_c , соответствующая автоколебаниям. Расстояние между спектральными максимумами равно Ω . С ростом Δ_c спектральная линия автоколебаний смещается в сторону δ -пика и при этом уширяется (кривая 2). Образуется широкий пьедестал спектра с максимумом, смещенным на величину Ω относительно частоты воздействия ω_1 . Смещение может быть очень мало, но всегда отлично от нуля, если $\Delta \neq 0$ и значение Δ_c конечно (кривая 3).

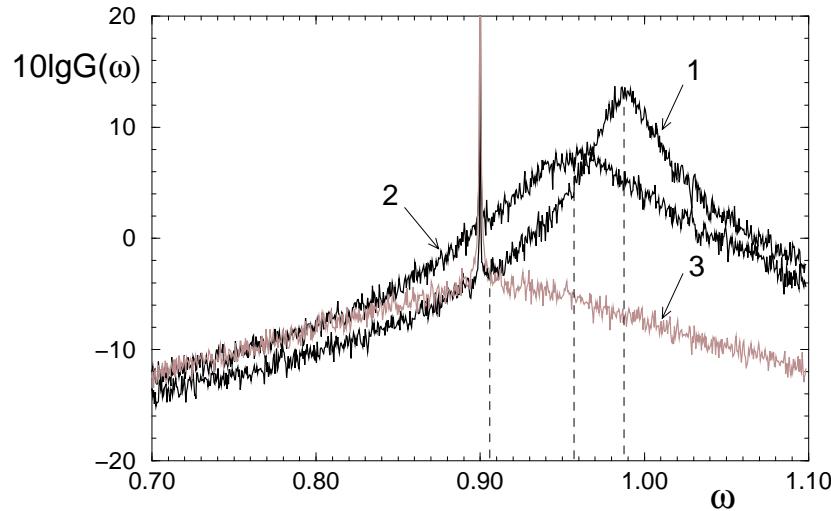


Рис. 2.5. Спектры колебаний $x(t) = \cos(\omega_1 t + \varphi(t))$, где $\varphi(t)$ задается фазовым уравнением (2.6) при фиксированном значении расстройки $\Delta = 0.1$ и различных значениях параметра Δ_c : 0.05 (кривая 1); 0.1 (кривая 2); 0.15 (кривая 3). Интенсивность шума соответствует значению $B_\varphi = 0.01$, частота воздействия $\omega_1 = 0.9$. Для удобства сравнения спектры не нормированы ($G(\omega)$ – ненормированный спектр мощности). Пунктирными линиями отмечены спектральные максимумы на частоте автоколебаний ω_c .

2.3 Взаимная синхронизация квазигармонических автогенераторов в присутствии шума

Рассмотрим взаимную синхронизацию двух генераторов, содержащих источники шума. Пусть исходная модель имеет вид:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 &= (\lambda_1 - x_1^2) \dot{x}_1 + \gamma_1 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \sqrt{2D_1} n_1(t), \\ \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 &= (\lambda_2 - x_2^2) \dot{x}_2 + \gamma_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \sqrt{2D_2} n_2(t),\end{aligned}\quad (2.14)$$

где $n_1(t)$ и $n_2(t)$ – независимые источники стандартного гауссова белого шума, D_1 и D_2 – постоянные, задающие интенсивность шума, γ_1 и γ_2 – коэффициенты связи, ω_1 и ω_2 – параметры, управляющие собственными частотами генераторов. Переходя к укороченным стохастическим уравнениям и пренебрегая амплитудными возмущениями, получаем следующую систему стохастических уравнений, описывающих динамику фаз парциальных генераторов

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_1 &= \Delta_{c1} \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + \sqrt{2B_{\varphi 1}} n_{12}(t), \\ \dot{\varphi}_2 &= \Delta - \Delta_{c2} \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + \sqrt{2B_{\varphi 2}} n_{22}(t).\end{aligned}\quad (2.15)$$

Здесь переменные $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ представляют собой случайные компоненты полных фаз первого и второго генераторов, соответственно, а n_{12} и n_{22} – независимые источники стандартного гауссова белого шума ($\langle n_{12}(t) \rangle \equiv 0$, $\langle n_{22}(t) \rangle \equiv 0$, $\langle n_{i2}(t) n_{j2}(t + \tau) \rangle = \delta_{ij} \delta(\tau)$, $i, j = 1, 2$). Параметры модели (2.15) связаны с параметрами исходной модели (2.14) следующими соотношениями: $\Delta = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\omega_1} \approx \omega_2 - \omega_1$; $\Delta_{c1} = \frac{\gamma_1}{2} \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$; $\Delta_{c2} = \frac{\gamma_2}{2} \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}$; $B_{\varphi 1} = \frac{D_1}{8\lambda_1\omega_1^2}$; $B_{\varphi 2} = \frac{D_2}{8\lambda_2\omega_2^2}$. Величина Δ представляет собой частотную расстройку невзаимодействующих генераторов, Δ_{c1} и Δ_{c2} определяют, соответственно, влияние второго генератора на первый и первого на второй, а $B_{\varphi 1}$ и $B_{\varphi 2}$ задают интенсивности фазовых флуктуаций в генераторах при отсутствии связи и, таким образом, характеризуют ширину спектров автоколебаний.

Из уравнений (2.15) следует уравнение для мгновенной разности фаз генераторов $\varphi(t) = \varphi_2(t) - \varphi_1(t)$:

$$\dot{\varphi} = \Delta - \Delta_c \sin \varphi + \sqrt{2B_\varphi} n(t), \quad (2.16)$$

где $\Delta_c = \Delta_{c1} + \Delta_{c2}$ – параметр, характеризующий глубину связи, а $\sqrt{2B_\varphi} n(t)$ – гауссов белый шум с интенсивностью, складывающейся из интенсивностей источников шума каждого из генераторов: $B_\varphi = B_{\varphi 1} + B_{\varphi 2}$

(в силу статистической независимости последних). Уравнение (2.16) аналогично уравнению (2.6), исследованному в предыдущем разделе. Замена косинуса на синус влияет только на постоянную компоненту переменной φ и, соответственно, на координату максимума плотности вероятности. Для модели (2.16) при $\Delta = 0$ максимум распределения ϕ находится в нуле. В общем случае постоянная компонента разности фаз определяется типом связи парциальных генераторов в исходной модели (2.14). Таким образом, в случае взаимодействующих зашумленных генераторов, как и в случае периодического воздействия на зашумленный генератор, имеется конечная область значений расстройки, в которой наблюдается эффективная синхронизация, состоящая в захвате фаз на достаточно длительных интервалах времени. При этом разностная частота генераторов $\Omega = \langle \dot{\varphi}_2(t) \rangle - \langle \dot{\varphi}_1(t) \rangle$ оказывается близка к нулю, хотя строгое равенство $\Omega = 0$ имеет место только при нулевой расстройке. Эффект синхронизации зависит от глубины связи Δ_c и суммарной интенсивности шума обоих генераторов. При слабой связи и большом шуме эффективная синхронизация не наблюдается даже в случае $\Delta = 0$.

Рассмотрим, какова будет ширина спектральной линии синхронизованных автоколебаний. Приближенное аналитическое решение данной задачи можно найти в [9, 28]. Здесь мы ограничимся результатами, полученными численно для модели (2.15). Колебания автогенераторов будем задавать в виде $x_{1,2}(t) = \cos(\omega_1 t + \varphi_{1,2}(t))$, пренебрегая амплитудами, значения которых полагаем постоянными. Пусть $\Delta = 0$ (расстройка отсутствует). Спектры колебаний имеют форму лоренцеанов с максимумами на одной и той же частоте $\omega_0 = 1$. Полуширина спектра каждого из генераторов равна соответствующему коэффициенту эффективной диффузии фазы: $B_{\text{эффект}}^1$ или $B_{\text{эффект}}^2$. При отсутствии связи ($\Delta_{c1} = \Delta_{c2} = 0$) имеем: $B_{\text{эффект}}^1 = B_{\varphi 1}$; $B_{\text{эффект}}^2 = B_{\varphi 2}$. Выберем $B_{\varphi 1} < B_{\varphi 2}$, т.е. спектр первого генератора уже, чем спектр второго.

На рис. 2.6 приведены спектры колебаний первого генератора для двух значений Δ_{c1} при фиксированном Δ_{c2} . Оба случая соответствуют эффективной синхронизации, когда значения $B_{\text{эффект}}^1$ и $B_{\text{эффект}}^2$ близки между собой. Спектр второго генератора практически не отличается от спектра первого генератора и на рисунке не изображен.

Рисунок 2.7 иллюстрирует зависимости парциальных коэффициентов $B_{\text{эффект}}^1$ и $B_{\text{эффект}}^2$ от параметра связи Δ_{c1} .

Результаты, приведенные на рис. 2.6 и 2.7, свидетельствуют, что спектры синхронных колебаний будут уже, если генератор, оказывающий боль-

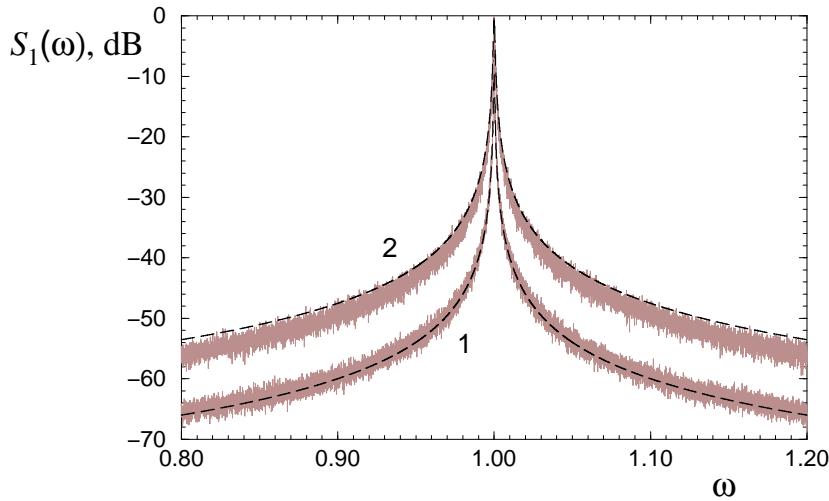


Рис. 2.6. Нормированные спектры колебаний $x_1(t) = \cos(\omega_1 t + \varphi_1(t))$, при использовании модели (2.15), для двух значений параметра Δ_{c1} : 0.02 (кривая 1) и 0.2 (кривая 2). Значения других параметров: $B_{\varphi_1} = 0.0001$; $B_{\varphi_2} = 0.001$; $\Delta = 0$; $\Delta_{c2} = 0.1$; $\omega_1 = 1$. Пунктирными линиями нанесены соответствующие аппроксимации спектра в форме лоренциана с полушириной, равной численно найденному значению коэффициента эффективной диффузии фазы $B_{\text{эфф1}}$

шее воздействие (синхронизующий) является “менее зашумленным” и, наоборот, спектры шире, если синхронизующий генератор “шумит сильнее”.

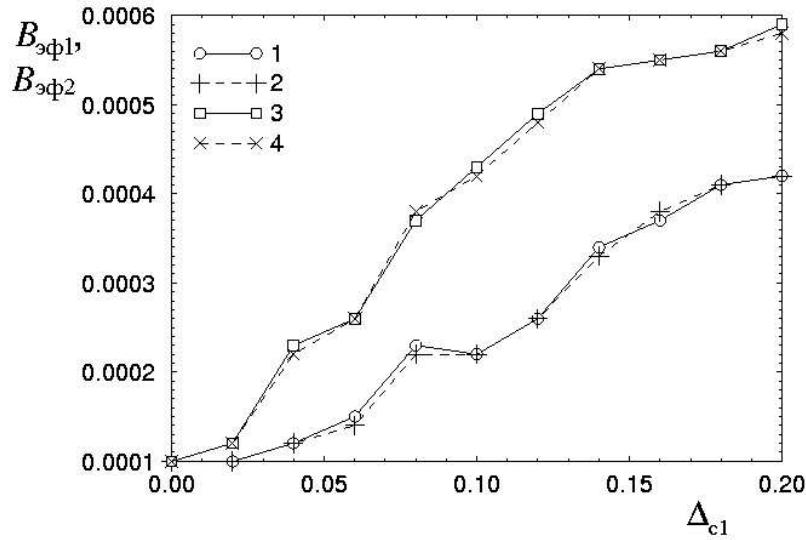


Рис. 2.7. Зависимости парциальных коэффициентов $B_{\text{эфф1}}$ и $B_{\text{эфф2}}$ от параметра связи Δ_{c1} : при $\Delta_{c2} = 0.1$ (кривые 1 и 2) и при $\Delta_{c2} = 0.05$ (кривые 3 и 4). Интенсивности источников шума задавались параметрами $B_{\varphi_1} = 0.0001$ и $B_{\varphi_2} = 0.001$

2.4 Выводы

В данной главе мы рассмотрели классическую задачу фазового захвата в автогенераторах, находящихся под воздействием случайных сил. Было показано, что шум препятствует синхронизации автоколебательных систем (как вынужденной, так и взаимной), приводя к случайным скачкам разности фаз. Однако, если шум достаточно слабый, можно ввести понятие эффективной (нестрогой) синхронизации. Эффективная синхронизация не связана с бифуркационным переходом и не имеет четкого критерия. Границы эффективной синхронизации устанавливаются условно: либо накладывается требование на абсолютную величину смещения частоты Ω , которая не должна отклоняться от нуля более, чем на заданную величину; либо требуют, чтобы коэффициент эффективной диффузии разности фаз $B_{\text{эфф}}$ не превосходил некоторого достаточно малого значения.

При исследовании влияния шума на автоколебательные системы мы ограничились квазигармоническими режимами генерации, рассмотрели синхронизацию только на основном тоне и в рамках фазового приближения. Однако исследованные нами на простейших моделях эффекты носят более общий характер и полученные результаты качественно справедливы для более сложных типов автоколебаний (релаксационных, квазипериодических, хаотических). Эффективную синхронизацию можно наблюдать не только на основном тоне, но также на гармониках и субгармониках [9]. Влияние амплитудных флуктуаций на эффективную синхронизацию, особенно при большой амплитуде синхронизующего сигнала, также не была рассмотрено в данной книге. Однако этот вопрос до настоящего времени слабо освещен в литературе и нуждается в дополнительных исследованиях.

3. Синхронизация квазипериодических колебаний

3.1 Введение

После детального рассмотрения фундаментальной задачи о синхронизации периодических автоколебаний естественно перейти к следующей по уровню сложности задаче: исследованию закономерностей синхронизации квазипериодических колебаний. Будем рассматривать наиболее простой случай двухчастотных колебаний, образом которых в фазовом пространстве является двумерный тор. Речь пойдет о синхронизации устойчивых фазовых траекторий динамической системы на двумерном торе. Как известно, на двумерном торе возможны две структуры траекторий. Первая – это резонансная структура, отвечающая “языкам Арнольда” с рациональным числом вращения $\Theta = p : q$, где p, q – целые числа. Притягивающее предельное множество фазовых траекторий в случае резонансов на двумерном торе есть ни что иное как устойчивый предельный цикл, спектр мощности которого формально содержит лишь одну независимую частоту ω_0 и ее гармоники $n\omega_0$. Вторая структура отвечает так называемым эргодическим колебаниям с двумя рационально несвязанными частотами ω_0 и ω_1 . Число вращения Θ в этом случае выражается иррациональным числом. Спектр мощности колебаний в эргодическом случае включает две рационально несвязанные частоты и набор комбинационных частот $n\omega_0 \pm m\omega_1$, n и m – целые числа $\pm 1, \pm 2, \dots$. Сечения Пуанкаре резонансного и эргодического двумерного торов существенно отличаются. В первом случае это конечное число неподвижных точек, зависящее от величины числа вращения Θ , во втором – замкнутая инвариантная кривая.

Анализ проблемы синхронизации квазипериодических колебаний начнем с резонансного случая, а затем перейдем к случаю эргодических колебаний.

3.2 Взаимная синхронизация двух симметрично связанных генераторов. Резонансный предельный цикл на двумерном торе

Рассмотрим детали классического механизма синхронизации двух связанных генераторов периодических колебаний. В качестве парциальной автоколебательной системы выберем модель генератора Ван дер Поля в режиме предельного цикла как образа устойчивых почти гармонических колебаний:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= y_1, \\ \dot{y}_1 &= (m - x_1^2)y_1 - \alpha_1^2 x_1.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Здесь m – параметр возбуждения, $\alpha_1^2 = (2\pi f_1)^2$, $f_1 = 1/T_0$, где f_1 – частота, T_0 – период колебаний. Как хорошо известно, автоколебания в системе (3.1) возникают вследствие бифуркации Андронова-Хопфа в точке $m^* = 0$, их амплитуда при $m > m^*$ растет пропорционально \sqrt{m} .

В качестве второй системы рассмотрим тот же генератор Ван дер Поля (3.1), введя расстройку по частоте ($\alpha_2 \neq \alpha_1$). Будем исследовать режим автоколебаний в случае симметричной связи между генераторами¹:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= y_1, \\ \dot{y}_1 &= (m - x_1^2)y_1 - \alpha_1^2 x_1 + k(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= (m - x_2^2)y_2 - \alpha_2^2 x_2 + k(x_1 - x_2).\end{aligned}\tag{3.2}$$

Здесь параметр k характеризует степень внутренней связи между генераторами, параметр m будет одинаковым для обоих генераторов, а частоты α_1 и α_2 выберем различными, но достаточно близкими друг к другу.

Рассмотрим режимы автоколебаний в системе (3.2) при значениях параметров $m = 0.1$, $\alpha_1 = 1$, $k = 0.02$. Параметр α_2 будем изменять в пределах $0.98 < \alpha_2 < 1.02$, исследуя влияние расстройки парциальных частот f_1 и f_2 на динамику системы.

На рис. 3.1 представлен результат расчета области синхронизации, которая характеризует эффект захвата частоты на основном тоне. Первый генератор ($\alpha_1 = 1$) захватывает частоту второго и в результате в области синхронизации (область I на рис. 3.1) частоты взаимодействующих генераторов равны: $f_1 = f_2$. При этом частота $f_2 = f_1$ в области I не совпадает

¹ Связь генераторов через переменные x_1 и x_2 (3.2) соответствует случаю инерционной связи генераторов через емкость.

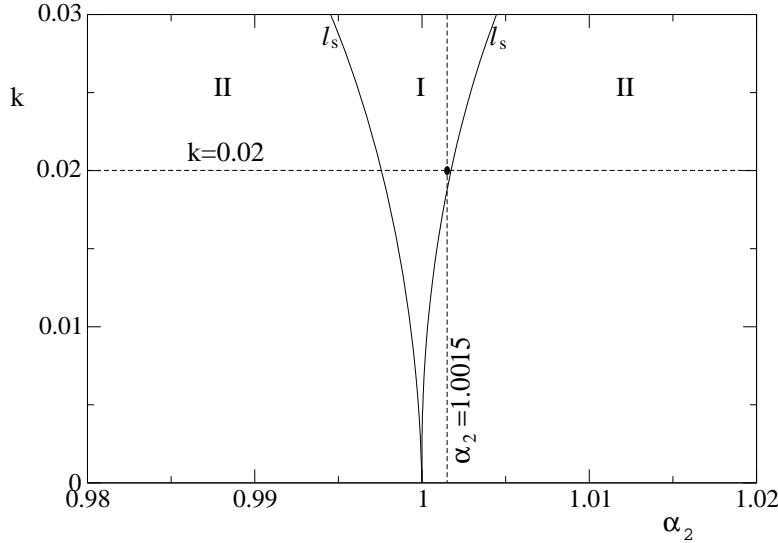


Рис. 3.1. Область взаимной синхронизации генераторов (3.2) при $m = 0.1$, $\alpha_1 = 1$. I – область существования резонансного предельного цикла с числом вращения $\Theta = 1 : 1$, II – область квазипериодических колебаний

с парциальной частотой второго генератора в отсутствии связи ($k = 0$). Рисунок 3.1 иллюстрирует эффект взаимной синхронизации двух генераторов путем захвата частоты. Область синхронизации I на плоскости параметров связь (k) – расстройка (α_2) представляет собой "ключ" или "язык" Арнольда с числом вращения Пуанкаре $\Theta = 1 : 1$, что отвечает синхронизации на основном тоне.

Вне области синхронизации (на рис. 3.1 это области II) наблюдаются режимы двухчастотных колебаний или биений, при которых частоты парциальных генераторов не совпадают ($f_1 \neq f_2$).

Рассмотрим этот эффект с точки зрения качественной теории дифференциальных уравнений. В области II образом автоколебательного режима является нерезонансный (в общем случае) эргодический двумерный тор, отвечающий режиму двухчастотных квазипериодических колебаний.

При входе в область I из области II (с пересечением бифуркационных линий l_s (рис. 3.1)) на двумерном торе рождается структура в виде устойчивого и седлового предельных циклов, лежащих на поверхности тора. Устойчивый цикл отвечает режиму взаимной синхронизации двух

генераторов, характеризуя устойчивое периодическое движение с частотой $f_1 = f_2$ в режиме захвата частоты.

Вышесказанное иллюстрирует рис. 3.2, где представлены проекции фазовых портретов двумерного тора T^2 (рис. 3.2, а) и устойчивого (L_0) и седлового (L_0^*) резонансных предельных циклов на нем (рис. 3.2, б). Отметим весьма важное обстоятельство: тор T^2 существует как в области II так и в области I! В физическом эксперименте в области I мы видим только устойчивый предельный цикл L_0 . Однако этот цикл лежит на поверхности двумерного тора, и мы это покажем. С этой целью рассмотрим сечение Пуанкаре плоскостью $x = 0$ как для режима рис. 3.2, а, так и рис. 3.2, б. Результаты представлены на рис. 3.3. Рисунок 3.3, а иллюстрирует замкнутую инвариантную кривую l как образ T^2 в сечении Пуанкаре. Рисунок 3.3, б необходимо пояснить более детально. В области синхрониза-

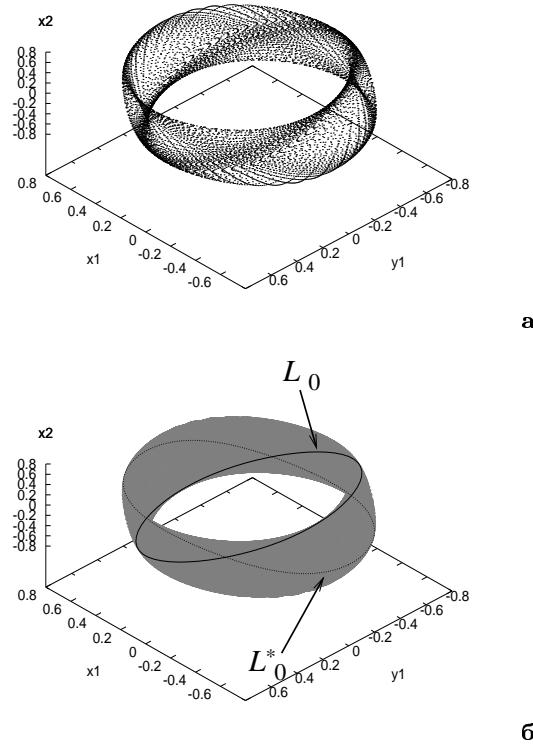


Рис. 3.2. Проекции фазовых траекторий на плоскость переменных (x_1, y_1, x_2) системы (3.2) для значений параметров $m = 0.1$, $k = 0.02$, $\alpha_1 = 1$: (а) для области II ($\alpha_2 = 1.003$) и (б) для области I ($\alpha_2 = 1.0015$). Проекция двумерного тора вне резонанса изображена серым, устойчивый L_0 и седловой L_0^* циклы на торе в области резонанса изображены жирными линиями

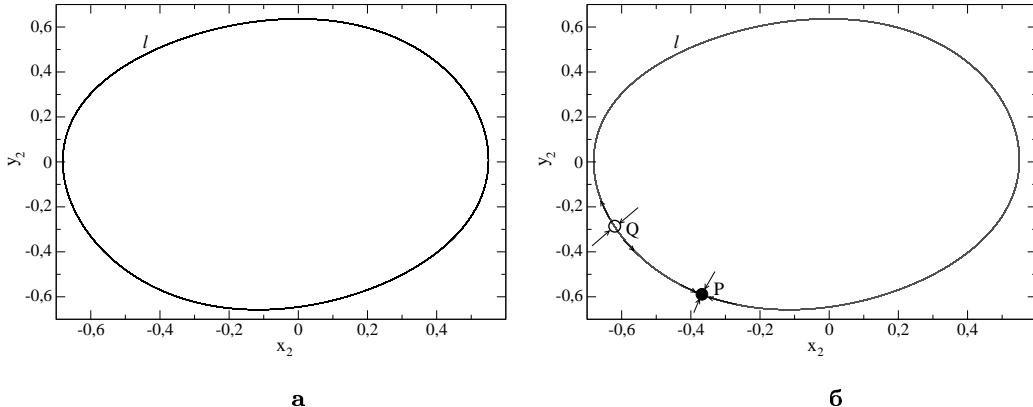


Рис. 3.3. Сечения эргодического тора (а) и резонансных циклов на нем (б) для случаев (а) и (б) рис. 3.2, соответственно

ции I (рис. 3.1) на торе существуют два предельных цикла: устойчивый и седловой (рис. 3.2, б). В сечении Пуанкаре (рис. 3.3, б) им отвечают устойчивая неподвижная точка P и седловая Q . Неустойчивые сепаратрисы седла Q замыкаются на устойчивый узел P , образуя замкнутую инвариантную кривую. Эта кривая и есть образ резонансного двумерного тора в области синхронизации. Если двигаться в плоскости параметров области I в направлении к бифуркационным линиям l_s (рис. 3.1), то имеет место следующая картина: седло Q и узел P идут на сближение, на бифуркационных линиях l_s они сливаются и с входом в область II они исчезают в результате седло-узловой бифуркации. Таким образом режиму синхронизации отвечает область существования устойчивого и седлового предельных циклов на двумерном торе, а разрушению режима синхронизации – седло-узловая бифуркация этих циклов.

На основании вышеизложенного можно сделать следующие выводы, важные для понимания результатов исследований, описываемых в настоящем разделе:

1. Режиму взаимной синхронизации генераторов через захват частоты отвечает устойчивый предельный цикл, лежащий на поверхности двумерного тора.
2. Этот предельный цикл не является образом колебаний ни первой, ни второй из взаимодействующих подсистем, он возникает как результат их взаимодействия.

В заключение этого раздела отметим, что изложенная выше качественная теория взаимной синхронизации двух генераторов не отличается принципиально от теории вынужденной синхронизации, изложенной в главе 1. Разница состоит лишь в том, что частота синхронных (захваченных) колебаний при вынужденной синхронизации всегда будет совпадать с частотой внешнего воздействия. Кроме того, изложенный механизм синхронизации на основном тоне ($\Theta = 1 : 1$) полностью идентичен и случаю $\Theta = p : q$, где p и q – рациональные числа. В этом случае седло-узловые бифуркации будут иметь место для более сложных (многообходных) циклов, что не имеет принципиального значения.

3.3 Воздействие внешней периодической силы на резонансный предельный цикл в системе связанных генераторов

Нашей задачей будет изучение особенностей синхронизации устойчивого резонансного предельного цикла на торе, показанного на рис. 3.2,б, внешним гармоническим сигналом. С этой целью исследуем реакцию системы (3.2) на внешний периодический сигнал, введя источник гармонического воздействия $k_e \sin[(2\pi f_e)t]$ во второе уравнение системы (3.2) [72]:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= y_1, \\ \dot{y}_1 &= (m - x_1^2)y_1 - \alpha_1^2 x_1 + k(x_2 - x_1) + k_e \sin[(2\pi f_e)t], \\ \dot{x}_2 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= (m - x_2^2)y_2 - \alpha_2^2 x_2 + k(x_1 - x_2).\end{aligned}\tag{3.3}$$

Выберем режим колебаний автономной системы (3.3) ($k_e = 0$), отвечающий области резонанса I (рис. 3.1), задав значения параметров $m = 0.1$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1.0015$, $k = 0.02$. Этому режиму отвечает указанная точка на плоскости параметров рис. 3.1. Автономная система будет реализовывать режим устойчивых периодических автоколебаний. Ему отвечает устойчивый предельный цикл L_0 . Отметим, что с точки зрения экспериментатора, наблюдающего режим периодических колебаний, это обычное устойчивое периодическое движение с частотой f_1 и спектром, включающим нечетные гармоники $f_n = 2n + 1$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) в силу квадратичного характера нелинейности. Тот факт, что предельный цикл L_0 лежит на поверхности двумерного тора никак не сказывается в физическом эксперименте. Однако, более детальные исследования показали, что этот факт является

принципиальным и приводит к весьма существенным различиям при анализе эффекта внешней синхронизации, если речь идет о синхронизации резонансного предельного цикла на двумерном торе.

На рис. 3.4,а,б представлены зависимости частот генераторов f_1 и f_2 от частоты внешнего сигнала f_e . Амплитуда сигнала воздействия была выбрана $k_e = 0.025$, частоты f_1 и f_2 нормировались на частоту внешнего сигнала f_e . Рисунок 3.4,в иллюстрирует зависимость числа вращения $\Theta = f_1 : f_2$ от частоты внешнего воздействия. Как видно из графиков, на рис. 3.4 целесообразно выделить области A , B , C и D , в которых динамика системы качественно различна. Используем для анализа результаты

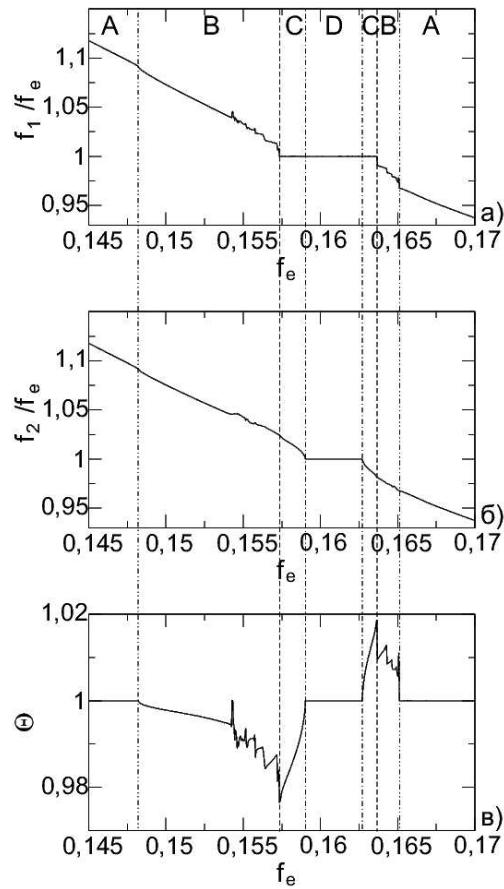


Рис. 3.4. Зависимости отношений частот генераторов f_1 (а) и f_2 (б) к частоте внешнего воздействия f_e и числа вращения $\Theta = f_1 : f_2$ (в) от частоты внешнего воздействия f_e при $k_e = 0.025$

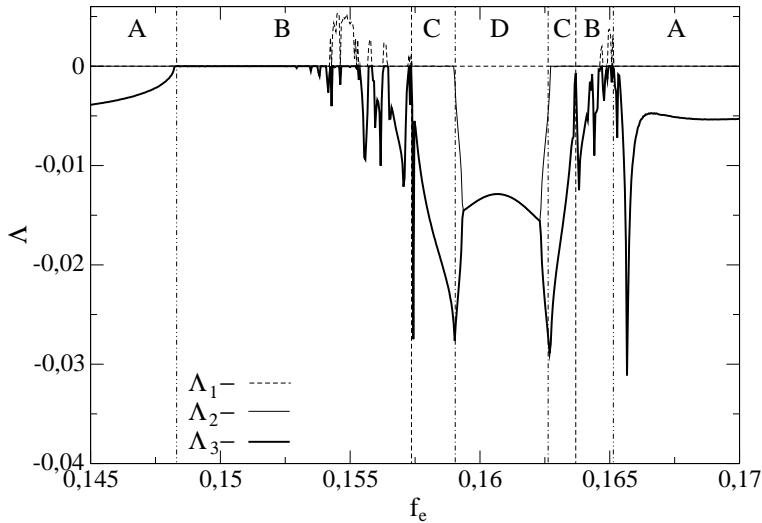


Рис. 3.5. Зависимости трех старших показателей Ляпунова от частоты внешнего воздействия f_e при $k_e = 0.025$

расчета спектра ляпуновских характеристических показателей, представленные на рис. 3.5.

В области A частота внешнего сигнала достаточно удалена от частоты предельного цикла $f_1 = f_2 \approx 0.158$. В системе реализуются квазипериодические колебания с частотами f_e и $f_1 = f_2$. Им отвечает существование в фазовом пространстве двумерного тора, что подтверждается наличием двух нулевых показателей Ляпунова в спектре ЛХП (рис. 3.5). Условие резонанса $f_1 = f_2$ в области A еще не нарушается.

В области B режим взаимной синхронизации (см. рис. 3.1, 3.2) разрушается. Частоты f_1 и f_2 становятся различными, о чем свидетельствует график зависимости числа вращения Θ (рис. 3.4,в). Рождается режим квазипериодических колебаний с тремя независимыми частотами f_1 , f_2 и f_e . Ему отвечает аттрактор в виде трехмерного тора и наличие трех нулевых показателей в спектре ЛХП (рис. 3.5). Динамика системы в области B достаточно сложна. На трехмерном торе с изменением частоты f_e могут возникать частичные резонансы в виде T^2 и даже хаотические режимы.

В области C реализуется первое из явлений, представляющих особый интерес: имеет место захват базовой частоты первого генератора внешним сигналом, при котором $f_e = f_1$, но $f_1 \neq f_2$. На трехмерном торе возникает резонансная структура в виде двумерного тора, что доказывается наличием двух нулевых показателей в спектре ЛХП (рис. 3.5). Расчеты показали,

что сечение Пуанкаре в этом режиме имеет вид замкнутой инвариантной кривой.

Наконец, в области D реализуется режим полной синхронизации: внешний сигнал захватывает обе частоты взаимодействующих генераторов, и выполняется условие $f_e = f_1 = f_2$. В области D в спектре ЛХП лишь один показатель является нулевым, на фазовом портрете можно видеть аттрактор в виде предельного цикла.

Изложенные выше результаты свидетельствуют о весьма важном отличии эффекта синхронизации резонансного предельного цикла на двумерном торе от классического случая. Это отличие заключается в том, что при уменьшении расстройки частот $f_e - f_1$ внешнее воздействие вначале разрушает режим исходной взаимной синхронизации, а затем осуществляется последовательный захват вначале одной базовой частоты, потом второй. В итоге реализуется эффект полной синхронизации, которому отвечает эффект захвата числа вращения (рис. 3.4,в, область D).

3.4 Основные бифуркции квазипериодических режимов при синхронизации резонансного предельного цикла

С целью более детального понимания механизмов перестройки режимов колебаний в системе (3.3) при вариации частоты внешнего воздействия была построена бифуркционная диаграмма системы на плоскости параметров "амплитуда-частота" внешней силы (рис. 3.6). Графики, представленные на рис. 3.4 и 3.5, соответствуют движению по прямой $k_e = 0.025$ диаграммы рис. 3.6. Переходам из областей A в область B отвечают бифуркционные линии l_{T^3} , из областей B в области C – линии l_p , из областей C в область D – линии l_f . Как видно из диаграммы, переходы в область D (полная синхронизация резонансного цикла) могут осуществляться из областей A или B через бифуркционные линии l_f . Рассмотрим более детально бифуркционные явления, которым отвечают вышеуказанные бифуркционные линии l_{T^3} , l_p и l_f .

Как показали исследования, основным колебательным режимом системы (3.3) является режим трехчастотных квазипериодических колебаний с частотами $f_e \neq f_1 \neq f_2$. Соответствующим аттрактором является трехмерный тор T^3 , область существования которого на диаграмме рис. 3.6 обозначена символом B . Все основные бифуркции в системе (3.3), ведущие

к синхронизации исходного резонансного цикла, связанные с бифуркациями именно режима T^3 .

Рассмотрим область B , где существует устойчивый трехмерный тор T^3 . С целью более наглядного представления бифуркаций трехмерного тора будем использовать двойное сечение Пуанкаре. Для получения двойного сечения Пуанкаре сначала производился расчет обычного сечения Пуанкаре, а затем в полученную последовательность точек вводилась дополнительная секущая плоскость. Далее, так как вероятность того, что полученные решения окажутся близки к дополнительной секущей плоскости, мала, производилась линейная аппроксимация решений в ее окрестности. Обычное сечение Пуанкаре для T^3 даст нам двумерный тор T_{T^3} . Двойное сечение Пуанкаре будет представлять собой инвариантную замкнутую кривую L_{T^3} . Неподвижная точка на этой инвариантной кривой будет являться образом резонансного двумерного тора, лежащего на T^3 .

Исследуем переход из области B в область A диаграммы рис. 3.6 через бифуркационную линию l_{T^3} . На рис. 3.7 представлены результаты соответствующих расчетов с использованием двойного сечения Пуанкаре. Образом T^3 здесь является кривая L_{T^3} , отвечающая режиму T^3 в области B . При достижении бифуркационной точки (точки пересечения линии l_{T^3} из области B в направлении области A) на кривой L_{T^3} рождается неподвиж-

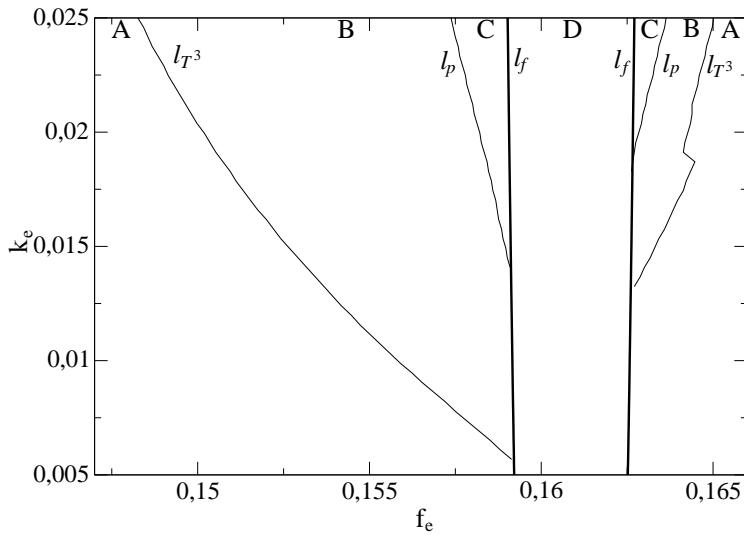


Рис. 3.6. Бифуркационная диаграмма системы (3.3) на плоскости параметров (f_e, k_e) , построена для фиксированных значений $m = 0.1$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1.0015$, $k = 0.02$

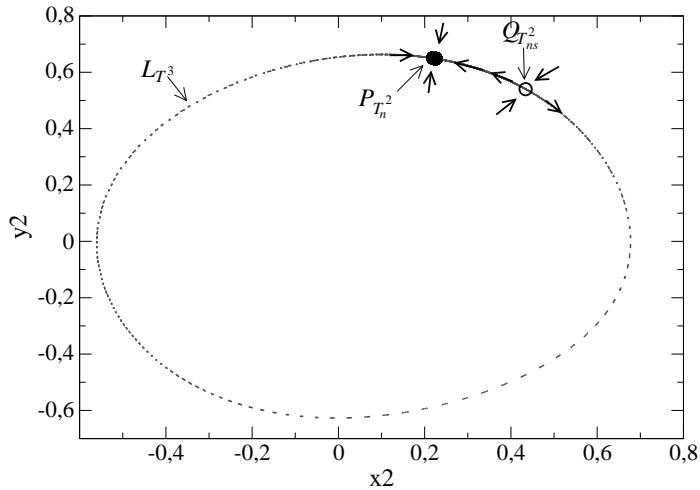


Рис. 3.7. Седло-узловая бифуркация в двойном сечении Пуанкаре, соответствующая пересечению линии l_{T^3} из области B в область A . L_{T^3} – инвариантная кривая, $P_{T_n^2}$ – устойчивый узел, $Q_{T_{ns}^2}$ – седло. Расчеты представлены для значений параметров: $f_e = 1.482$, $k_e = 0.025$, $m = 0.1$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1.0015$, $k = 0.02$

ная точка типа "седло-узел". Смещение по параметрам в область A приводит к расщеплению седло-узла на устойчивый узел и седло. В представлении двойного сечения Пуанкаре реализуется классическая седло-узловая бифуркация.

В полном фазовом пространстве системы (3.3) картина, представленная на рис. 3.7, отвечает рождению (исчезновению) пары двумерных торов на трехмерном торе T^3 . Один из этих торов устойчивый (T_n^2), другой – седловой (T_{ns}^2).

Исследуем бифуркационный переход из области B в область C , которому отвечает пересечение бифуркационных линий l_p на диаграмме рис. 3.6. Расчеты показали, что на линии l_p реализуется также седло-узловая бифуркация и в области C рождаются также устойчивый и седловой резонансные² двумерные торы, лежащие на трехмерном торе T^3 . Результаты расчетов иллюстрирует рис. 3.8. Режиму колебаний в области B отвечает трехмерный тор T^3 , сечение Пуанкаре которого обозначено T_{T^3} на рис. 3.8. Резонансному устойчивому двумерному тору в области C отвечает инвариантная замкнутая кривая, обозначенная на рис. 3.8 $L_{T_p^2}$. Для сравнения

² Под резонансным двумерным тором здесь понимается частичный резонанс на трехмерном торе, когда две из трех независимых частот становятся равными. При этом двумерный тор на трехмерном торе является эргодическим.

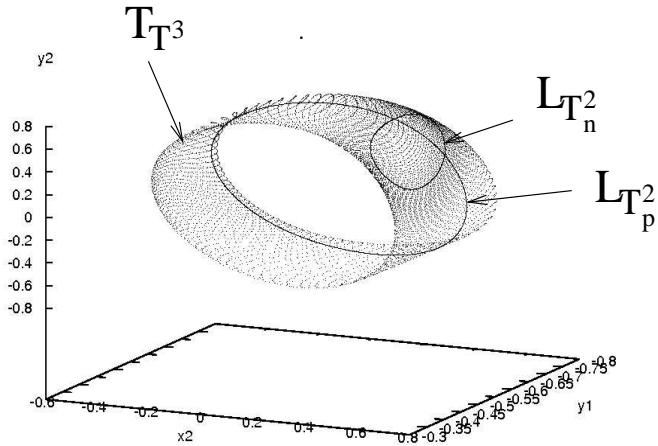


Рис. 3.8. Проекции сечений Пуанкаре трехмерного тора T_{T^3} ($f_e = 0.15$) и резонансных двумерных торов $L_{T_n^2}$ ($f_e = 0.1482$) и $L_{T_p^2}$ ($f_e = 0.158$)

на рис. 3.8 представлен и образ устойчивого двумерного резонансного тора $L_{T_n^2}$ в области A . Седловые торы на рис. 3.8 не приведены.

Торы T_n^2 и T_p^2 различные, так как с физической точки зрения отвечают разным условиям частичной синхронизации. В области A – $f_1 = f_2$ и $f_e \neq f_1$, а в области C – $f_e = f_1$, и $f_1 \neq f_2$.

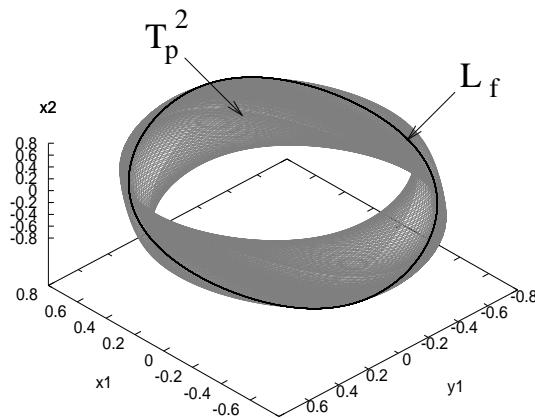


Рис. 3.9. Проекции фазовых портретов двумерного тора T_p^2 (серый) и резонансного предельного цикла L_f (черный) на нем, рассчитанные для значений частоты $f_e = 0.1587$ (T_p^2) и $f_e = 0.1592$ (L_f)

Наконец, рассмотрим бифуркационный переход из области C в область D путем пересечения линии l_f . Этому переходу отвечает эффект захвата второй частоты $f_2 = f_e$ и возникновение режима полной синхронизации $f_1 = f_2 = f_e$. Исследования показали, что линия l_f отвечает классической седло-узловой бифуркации резонансных циклов, лежащих на двумерном торе T_p^2 . На двумерном торе T_p^2 , который существует в области C и является резонансной структурой на T^3 , в бифуркационной точке (на линии l_f) рождается устойчивый и седловый циклы. При пересечении линии l_f в направлении области D возникает устойчивое периодическое движение, отвечающее режиму полной синхронизации. Результаты иллюстрирует рис. 3.9, где представлены фазовые проекции двумерного тора T_p^2 (в области C) и устойчивого резонансного предельного цикла L_f на нем (область D).

3.5 Особенности синхронизации резонансных предельных циклов

Изучение эффектов синхронизации, представленных выше, показало, что рассмотренный случай резонанса с числом вращения $\Theta = 1 : 1$ является наиболее общим и достаточно сложным с точки зрения теории бифуркаций. Представляется важным изучение эффектов синхронизации при других значениях числа вращения, отвечающих резонансам $\Theta = m : n$, где $m, n = 1, 2, \dots$. Кроме того, эффекты синхронизации в системе (3.3) должны зависеть от коэффициента связи генераторов k . Эта зависимость важна для понимания механизмов синхронизации генераторов квазипериодических колебаний, в которых параметр связи может не входить явным образом в динамическую модель или в силу конструктивных особенностей системы не являться независимым параметром. В связи с вышесказанным представляется интересным исследовать особенности бифуркационных свойств системы (3.3) при различных значениях параметра связи k .

Рассмотрим режим резонансного предельного цикла в системе (3.2) с числом вращения $\Theta = 1 : 3$ и попытаемся осуществить его синхронизацию внешним периодическим сигналом (3.3).

В автономной системе (3.3) при значениях параметров $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0.328$, $m = 0.1$ и $k = 0.005$ реализуется эффект взаимной синхронизации, и существует устойчивый резонансный цикл на двумерном торе с числом вращения $\Theta = 1 : 3$. Фазовый портрет этого цикла и спектр мощности

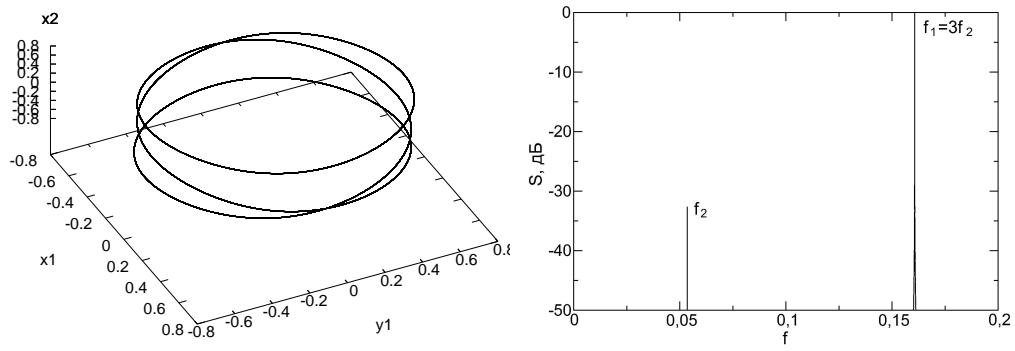


Рис. 3.10. Предельный цикл в системе (3.2) в условиях резонанса $\Theta = 1 : 3$ (а) и соответствующий спектр мощности колебаний (б), рассчитанные для $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0.328$, $m = 0.1$ и $k = 0.005$

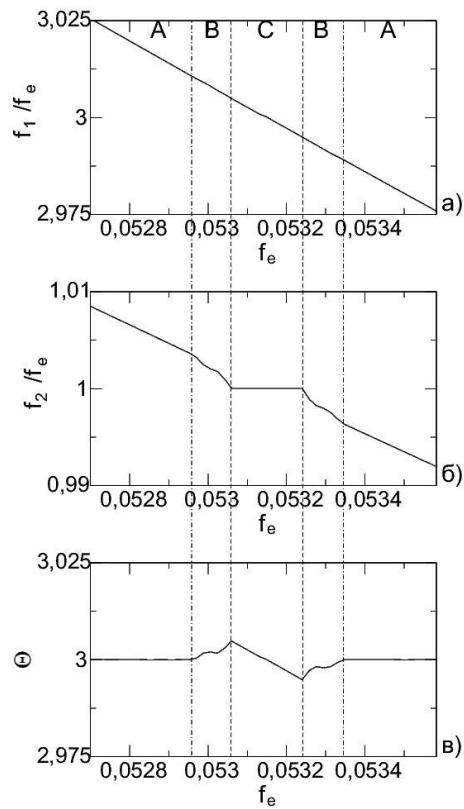


Рис. 3.11. Зависимость отношений частот генераторов f_1 и f_2 к частоте f_e и числа вращения Θ от частоты внешнего воздействия f_e при $k_e = 0.005$ для резонанса $1 : 3$

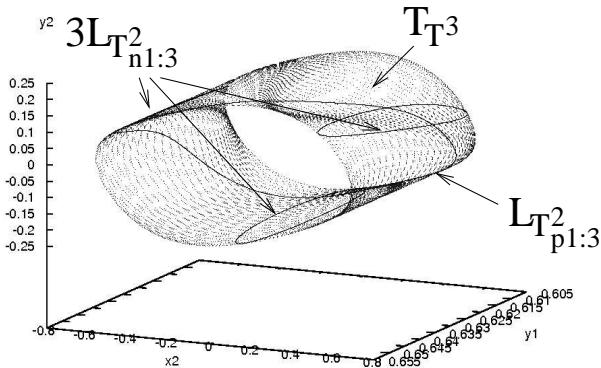


Рис. 3.12. Проекции сечений Пуанкаре двумерных торов в виде циклов: $3L_{T^2_{n1:3}}$, отвечающего области A (рис. 3.11) ($f_e = 0.0527$), и $L_{T^2_{p1:3}}$ отвечающего области C (рис. 3.11) ($f_e = 0.0531$), лежащих на поверхности трехмерного тора T^3

показаны на рис. 3.10. Введем внешнее воздействие (3.3) и будем изменять f_e вблизи частоты f_2 .

Результаты внешнего воздействия представлены на рис. 3.11. Главное отличие результатов от случая $\Theta = 1 : 1$ (см. рис. 3.4) заключается в том, что эффект полной синхронизации здесь не реализуется. Наблюдается эффект захвата второй частоты ($f_e = f_2$), но при этом частота f_1 не изменяется под действием внешней силы. Как и в случае резонанса $1 : 1$ при условии, что частота f_e далека от f_2 , существует область A , в которой существует резонансный двумерный тор $T^2_{n1:3}$ на поверхности трехмерного тора T^3 . Также имеется область B , в которой ввиду разрушения резонанса $1 : 3$ существует трехмерный тор T^3 . Далее, происходит переход из области B в область C , при котором возникает резонансный двумерный тор $T^2_{p1:3}$, отвечающий режиму частичной синхронизации $f_e = f_2$, $f_1 \neq 3f_2$. Область D в данном случае отсутствует. Для полной синхронизации резонансного цикла в рассматриваемом случае необходимо использовать дополнительный внешний сигнал по частоте близкий к f_1 . На рис. 3.12 представлены в виде циклов L проекции сечений Пуанкаре двумерных торов, отвечающих областям A ($T^2_{n1:3}$) и C ($T^2_{p1:3}$) рис. 3.11, лежащие на трехмерном торе T^3 , представленном в сечении Пуанкаре в виде двумерного тора T_T^3 .

Результаты рис. 3.11 получены для относительно малой величины коэффициента связи $k = 0.005$. Интересно выяснить, как повлияет увеличение степени взаимосвязи генераторов на эффекты синхронизации? С этой целью были проведены расчеты для значения $k = 0.02$, представленные на

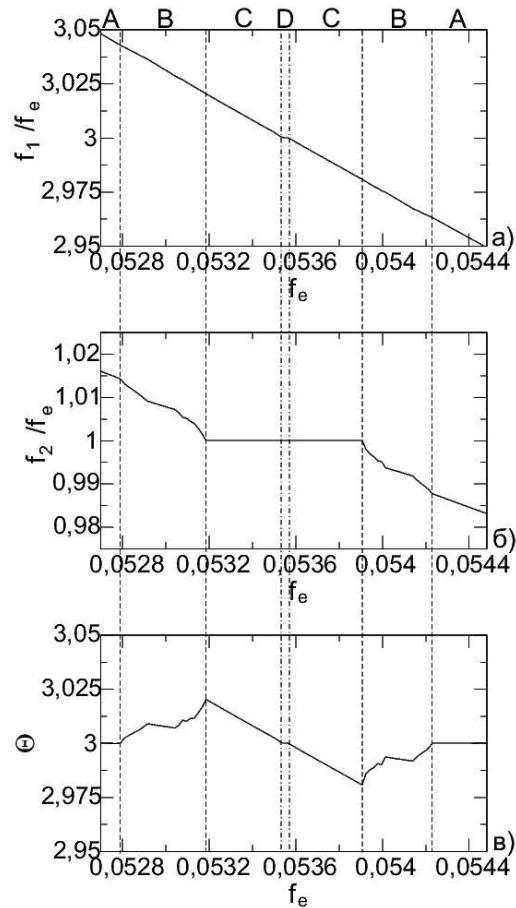


Рис. 3.13. Зависимость отношений частот генераторов f_1 и f_2 к частоте f_e и числа вращения Θ от частоты внешнего воздействия f_e при $k_e = 0.005$ и $k = 0.02$ для резонанса $1 : 3$

рис. 3.13. Как видно из рис. 3.13, с увеличением связи появляется область D – область полной синхронизации резонансного цикла на торе. Исследования показали, что с ростом $k > 0.02$ ширина области D увеличивается и реализуется картина, качественно повторяющая случай резонанса $1 : 1$ (см. рис. 3.4).

3.6 Синхронизация двухчастотных колебаний в автогенераторе квазипериодических колебаний

Представленные результаты свидетельствуют о следующем: резонансный цикл на двумерном торе в общем случае невозможно синхронизовать внешним периодическим сигналом. Основной причиной является то, что под действием внешнего сигнала режим резонанса разрушается. Колебания становятся квазипериодическими с тремя независимыми частотами. Эффект синхронизации реализуется при вариации параметров через седло-узловую бифуркацию рождения резонансных двумерных торов на трехмерном торе и далее – классическим образом через седло-узловую бифуркацию предельных циклов на двумерном торе. С физической точки зрения картина выглядит следующим образом. Вначале реализуется эффект захвата одной из базовых частот системы, вторая при этом оказывается незахваченной. Затем осуществляется эффект захвата второй базовой частоты. Реализуется синхронизация исходного периодического режима колебаний.

Наблюдаемые эффекты зависят от расстройки базовых частот (от числа вращения) и от степени взаимосвязи двух генераторов. Большая расстройка, когда исходные базовые частоты отличаются в несколько раз, приводит к тому, что синхронизуется лишь одна из базовых частот системы. Синхронизовать одновременно и вторую базовую частоту может облегчить увеличение степени связи между генераторами. Таковы основные выводы. Являются ли они в достаточной степени общими? С целью ответа на поставленный вопрос проведем исследования синхронизации квазипериодических колебаний с использованием генератора двухчастотных колебаний, описанного в работе [73].

Рассмотрим уравнения генератора:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= mx + y - x\phi - dx^3, \\ \dot{y} &= -x, \\ \dot{z} &= \phi, \\ \dot{\phi} &= -\gamma\phi + \gamma\Phi(x) - gz.\end{aligned}\tag{3.4}$$

Используя бифуркационную диаграмму системы (3.4), выберем значения управляющих параметров так, чтобы реализовать режим резонансных колебаний с числом вращения $\Theta = 1 : 4$ и эргодических колебаний с близким, но иррациональным значением числа вращения. Параметры имеют следующие значения: $m = 0.096$, $\gamma = 0.2$, $d = 0.001$; функция $\Phi(x) = I(x)x^2$. Для значения $g = 0.257$ получаем режим эргодического двумерного тора, для

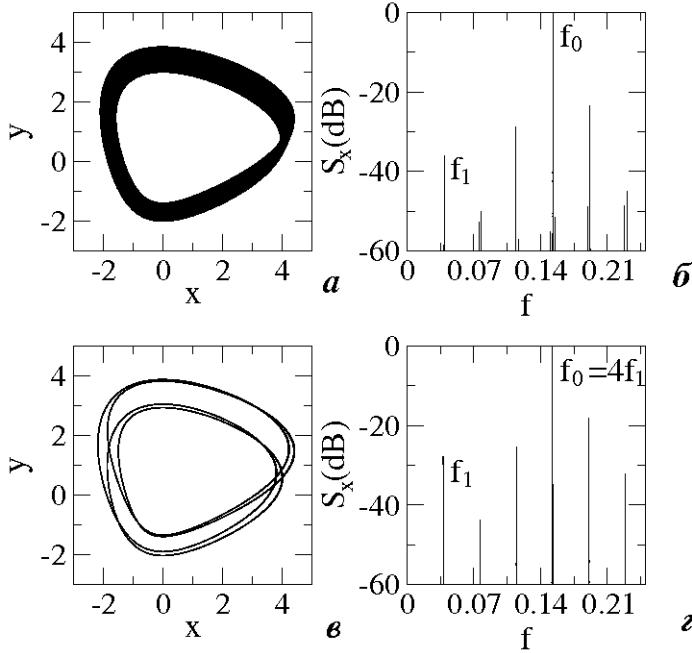


Рис. 3.14. Режимы эргодических (**а,б**) и резонансных (**в,г**) квазипериодических колебаний с двумя частотами (f_1 – частота модуляции, f_0 – частота несущей): (**а**) проекция эргодического тора на плоскость (x, y) , (**б**) соответствующий спектр мощности колебаний $x(t)$, (**в**) предельный цикл на торе в случае резонанса $f_1 : f_0 = 1 : 4$ и (**г**) спектр мощности резонансного цикла на торе

$g = 0.263$ – резонансный³ тор с числом вращения $\Theta = 1 : 4$. Результаты расчетов иллюстрирует рис. 3.14.

Теперь исследуем динамику системы (3.4) в указанных на рис. 3.14 режимах при внешнем гармоническом воздействии [74]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= mx + y - x\phi - dx^3 + k \sin(2\pi f_e), \\ \dot{y} &= -x, \\ \dot{z} &= \phi, \\ \dot{\phi} &= -\gamma\phi + \gamma\Phi(x) - gz. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Проведем численные расчеты спектра колебаний переменной $x(t)$ при изменении частоты внешнего сигнала f_e . Результаты представлены на

³ Здесь термин "резонансный тор" используется в классическом смысле и характеризует режим устойчивого предельного цикла на торе.

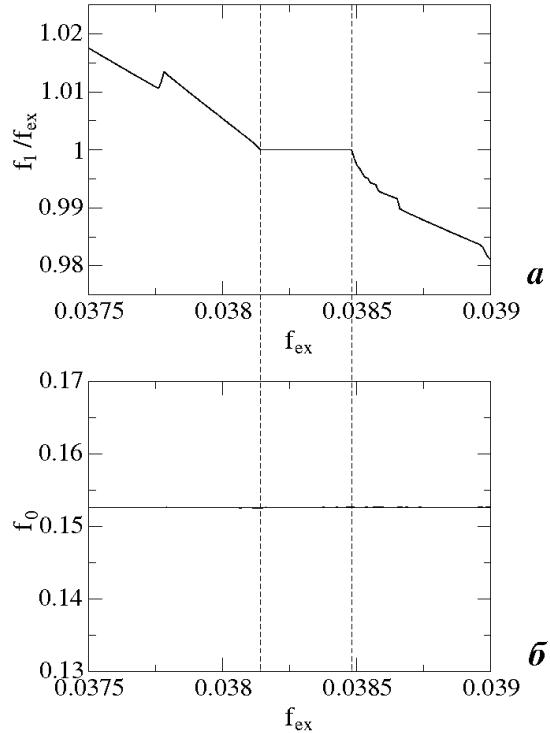


Рис. 3.15. Результаты расчета зависимости отношения частот f_1/f_e (а) и частоты f_0 (б) от частоты воздействия в неавтономной системе (3.5) для значений параметров $m = 0.096$, $g = 0.263$, $\gamma = 0.2$, $d = 0.001$, $k = 0.01$

рис. 3.15. Как видно из рис. 3.15,а, в области $f_e \simeq 0.0381 \div 0.0385$ имеет место захват частоты f_1 , т.е. синхронизация. В области синхронизации (рис. 3.15,а) частота модуляции f_1 захвачена внешней силой и выполняется условие $f_1/f_e = 1$. Результаты рис. 3.15,б свидетельствуют, что при этом частота f_0 не синхронизуется внешней силой. Как видно из графика, частота f_0 как вне области синхронизации частоты f_1 , так и внутри ее, практически не меняется, т.е. не реагирует на изменение частоты внешнего воздействия f_e .

Полностью аналогичные результаты получаются в случае воздействия внешнего сигнала на генератор в режиме эргодических биений (рис. 3.15). И это понятно. Как установлено при исследовании системы двух связанных генераторов Ван дер Поля (3.3), внешнее воздействие вначале разрушает режим резонанса. Именно это и наблюдается. Резонанс 1 : 4 вначале разрушается, затем синхронизуется одна из базовых частот (рис. 3.15).

Если мы разрушим резонанс, выйдя из области синхронизации $\Theta = 1 : 4$ (рис. 3.14,а), то при внешнем воздействии будет синхронизоваться только одна из базовых частот. В случае, показанном на рис. 3.15,а, таковой является f_1 , так как частота внешнего сигнала близка именно к f_1 . Изменив частоту внешнего сигнала, приблизив ее к f_0 , будем наблюдать эффект захвата частоты $f_0 = f_e$, при этом f_1 останется незахваченной.

Приведенные результаты подтверждают общий характер выводов, к которым мы пришли при исследовании системы двух связанных генераторов Ван дер Поля. Действительно, вблизи резонанса $\Theta = 1 : 4$, когда f_1 в четыре раза меньше f_0 (расстройка между базовыми частотами велика), внешнее воздействие приводит к эффекту захвата лишь одной из двух базовых частот. Синхронизовать обе частоты не представляется возможным. Причиной является не только их большое различие, но и тот факт, что генератор (3.4) не позволяет увеличить степень взаимосвязи между двумя автоколебательными модами системы. Эта взаимосвязь задается внутренними свойствами системы (3.4).

Изложенные выше результаты численного моделирования эффекта синхронизации подтверждаются данными физического эксперимента, полученными на электронной модели генератора двухчастотных колебаний (3.4).

3.7 Результаты экспериментальных исследований

В эксперименте исследовалась синхронизация предельного цикла, отвечающего резонансу 1 : 3 (рис. 3.16,а). На рис. 3.16,б представлена экспериментальная проекция двумерного тора, который появляется при внешнем воздействии на цикл (рис. 3.16,а) сигналом частоты 2.9 кГц (вне области синхронизации). Рисунок 3.16,в соответствует проекции тора в области синхронизации частоты f_1 ($f_e = 3.4$ кГц). На рис. 3.17,а,б представлены результаты измерений, аналогичных расчетам рис. 3.15. Рисунок 3.17,а иллюстрирует эффект внешней синхронизации частоты f_1 , а рис. 3.17,б подтверждает независимость частоты f_0 генератора от частоты внешнего сигнала f_e [74].

3.8 Внешняя синхронизация квазипериодических колебаний двухчастотным сигналом

Представленные выше результаты свидетельствуют о том, что синхронизация двухчастотных колебаний внешним гармоническим сигналом вне зависимости от условий резонанса проявляется в захвате сначала одной и затем (возможно) второй базовой частоты генератора квазипериодических колебаний. При некоторых особых условиях (большой коэффициент связи парциальных подсистем или близость базовых частот) возможно реализовать эффект захвата двух базовых частот. Однако в общем случае это не достигается. Естественно предположить, что эффект захвата двух базовых частот генератора можно обеспечить при внешнем двухчастотном воздействии, если число вращения внешнего генератора будет близко к числу вращения синхронизуемого генератора [34].

Рассмотрим случай одностороннего воздействия квазипериодических колебаний одного генератора на второй, работающий также в режиме квазипериодических колебаний. Уравнения системы двух взаимодействующих генераторов (3.4) при односторонней связи имеют вид:

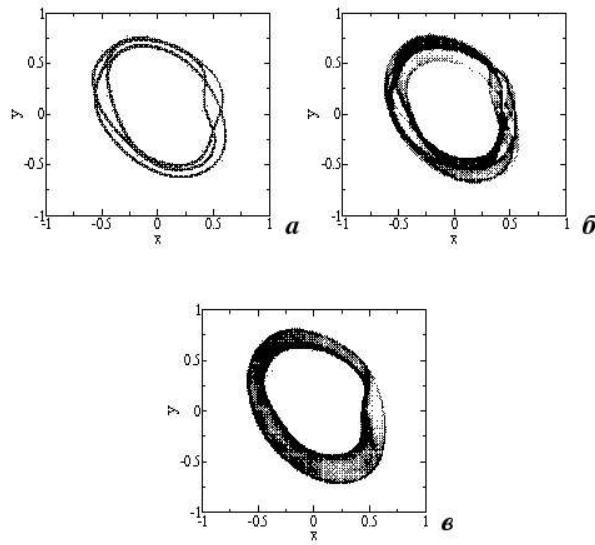


Рис. 3.16. Результаты физического эксперимента. (а) Проекция фазового портрета автономного предельного цикла на торе в резонансе 1 : 3, (б) двумерный тор при внешнем воздействии на цикл, вне области синхронизации ($f_e = 2.9$ кГц) и (в) проекция двумерного тора в области синхронизации частоты f_1 ($f_e = 3.4$ кГц)

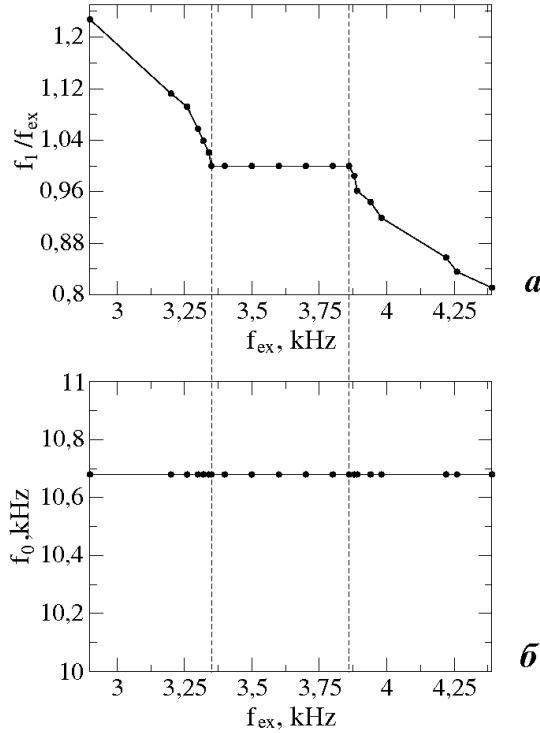


Рис. 3.17. Результаты физического эксперимента. (а) Зависимость отношения частот f_1/f_e и (б) зависимость частоты f_0 от частоты внешнего воздействия f_e

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= mx_1 + y_1 - x_1\phi_1 - dx_1^3 + kx_2, \\ \dot{y}_1 &= -x_1, \\ \dot{z}_1 &= \phi_1, \\ \dot{\phi}_1 &= -\gamma\phi_1 + \gamma\Phi(x_1) - g_1z_1, \\ \dot{x}_2 &= mx_2 + y_2 - x_2\phi_2 - dx_2^3, \\ \dot{y}_2 &= -x_2, \\ \dot{z}_2 &= \phi_2, \\ \dot{\phi}_2 &= -\gamma\phi_2 + \gamma\Phi(x_2) - g_2z_2. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Данная система описывает случай воздействия второго генератора на первый (слагаемое kx_2 в первом уравнении), интенсивность которого определяет величина параметра k . Зафиксируем значения параметров $m = 0.06$, $d = 0.001$, $\gamma = 0.2$, $g_1 = 0.55$. При фиксированном параметре $g_1 = 0.55$ первый генератор в автономном режиме реализует квазипериодические колебания с числом вращения $\Theta_1 = f_{11}/f_{01}$ (в нижних индексах частот перв-

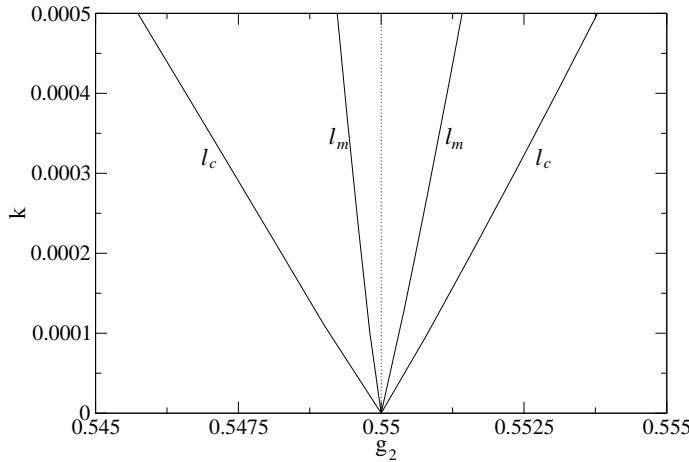


Рис. 3.18. Области синхронизации несущей (l_c) и огибающей (l_m) ($m = 0.06$, $\gamma = 0.2$, $g_1 = 0.55$, $d = 0.001$)

вая цифра “0” соответствует частоте несущей, первая цифра “1” – частоте модуляции, вторая цифра – номер генератора). Число вращения второго генератора Θ_2 управляется с помощью параметра g_2 . В случае нулевой связи при $g_1 \neq g_2$ числа вращения будут отличаться: $\Theta_1 \neq \Theta_2$. По аналогии с синхронизацией предельного цикла, когда вводится расстройка частот $\Delta f = f_1 - f_2$, мы будем рассматривать расстройку числа вращения $\Delta\Theta \simeq g_1 - g_2$. Задача анализа синхронизации в этом случае состоит в анализе режимов колебаний на плоскости двух управляемых параметров k и g_2 . Численное решение этой задачи иллюстрирует рис. 3.18, представляющий структуру областей синхронизации.

Внутри большого “клюва” синхронизации, ограниченного бифуркационными линиями l_c , имеет место эффект захвата базовых частот квазипериодических колебаний, $f_{01} = f_{02}$, т.е. происходит синхронизация несущих частот. При этом частоты модуляции остаются различными, $f_{11} \neq f_{12}$. Наблюдается эффект частичной синхронизации квазипериодических колебаний. Внутри области, ограниченной бифуркационными линиями l_m , реализуется захват частот модуляции и, соответственно, числа вращения $\Theta_1 = \Theta_2$. Этот эффект иллюстрирует рис. 3.19. Как видно из рисунка, существует конечная область расстройки по числу вращения Δg_2 , в которой $\Theta_2/\Theta_1 = 1$. Число вращения генератора 2 захватывает число вращения генератора 1. Как и в случае предельного цикла, ширина области захвата числа вращения растет с увеличением интенсивности воздействия k .

Описанные численные эксперименты по внешней синхронизации двух генераторов квазипериодических колебаний показали, что область захвата частот модуляции генераторов лежит внутри клюва синхронизации несущих частот. Сближенные значения управляющих параметров генераторов, в колебаниях системы сначала присутствуют четыре независимых частоты, затем, после захвата несущих частот, остаются три независимых частоты, а затем захватываются частоты модуляции и, соответственно, числа вращения.

3.9 Экспериментальный анализ внешней синхронизации двухчастотного генератора квазипериодическим сигналом

Исследуем эффекты воздействия двухчастотных колебаний в физическом эксперименте. Выберем в качестве синхронизируемого генератора квазипериодических колебаний, описываемый уравнениями (3.4). Внешним сигналом $F(t)$ будут служить амплитудно-модулируемые колебания, которые получались с использованием двух генераторов стандартных сигналов и модулятора [35]:

$$F(t) = k[1 + K_{\text{mod}} \sin(2\pi f_{1e}t)] \sin(2\pi f_{0e}t),$$

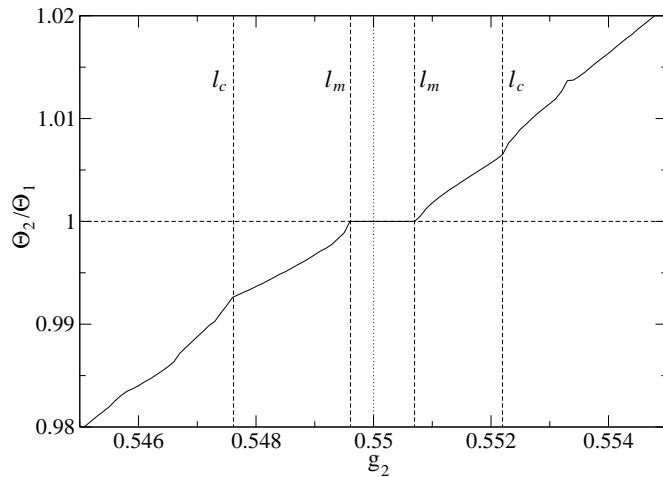


Рис. 3.19. Эффект захвата числа вращения ($m = 0.06$, $\gamma = 0.2$, $g_1 = 0.55$, $d = 0.001$, $k = 0.0003$)

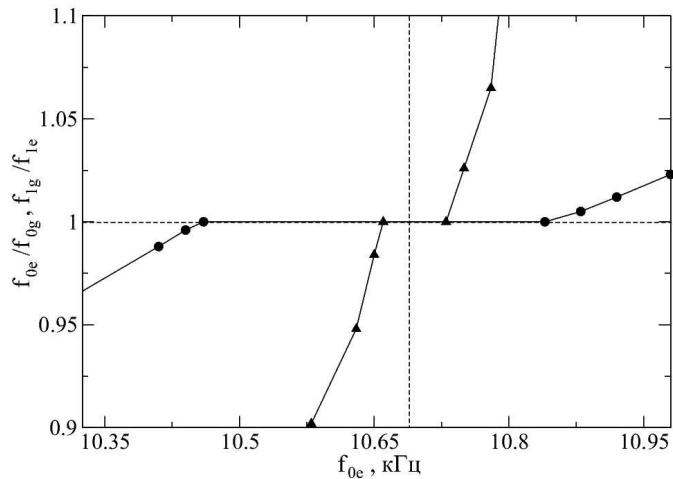


Рис. 3.20. Зависимость нормированных частот модуляции и несущей генератора от несущей частоты сигнала внешнего возмущения

где k – амплитудный множитель, K_{mod} – коэффициент модуляции, f_{1e} – частота модуляции, f_{0e} – частота несущей. Параметры генератора квазипериодических колебаний были выбраны следующими: $f_{1g} = 2.82$ кГц, $f_{0g} = 10.69$ кГц, а коэффициент модуляции был равен $\simeq 0.3$.

Зададим параметры внешнего сигнала $F(t)$ следующими: $f_{1e} = 3.06$ кГц, $f_{0e} = 10.69$ кГц, $K_{\text{mod}} = 0.5$ и будем изменять в эксперименте несущую частоту f_{0e} в пределах $10.0 \leq f_{0e} \leq 11.0$ кГц. Так как высокочастотная часть спектра сигнала $F(t)$ будет состоять из трех спектральных линий f_{0e} и $f_{0e} \pm f_{1e}$, то изменения f_{0e} , мы будем изменять число вращения внешнего квазипериодического сигнала $\Theta = f_{1e}/f_{0e}$.

Результаты представлены на рис. 3.20. На графиках изображены зависимости нормированных частот f_{0e}/f_{0g} (обозначено черными кружочками) и f_{1g}/f_{1e} (треугольники) от частоты несущей f_{0e} .

Как видно из графиков, вначале осуществляется захват несущей частоты генератора (f_{0g}) несущей частотой внешнего сигнала (f_{0e}). Появляется область в интервале частот $10.5 < f_{0e} < 10.85$, в которой $f_{0g} = f_{0e}$. Затем имеет место эффект захвата частоты модуляции, которому отвечает заметно меньший интервал частот ($10.65 < f_{0e} < 10.77$). Именно в этой области обе частоты генератора f_{0g} и f_{1g} оказываются захвачены внешним сигналом $F(t)$. Реализуется эффект захвата числа вращения.

3.10 Выводы

Представленные результаты анализа синхронизации двухчастотных квазипериодических колебаний позволяют обоснованно сделать следующие выводы. Квазипериодические автоколебания с двумя независимыми частотами являются результатом взаимодействия двух нелинейных активных осцилляторов, каждый из которых характеризуется собственной независимой базовой частотой автоколебаний. Случай резонансов, отвечающие “языкам Арнольда”, соответствуют эффектам взаимной синхронизации, когда осуществляется взаимозахват базовых частот. Несмотря на тот факт, что формально резонансам отвечают режимы устойчивых периодических колебаний с некоторой частотой синхронизации, с физической точки зрения в системе продолжают существовать две базовые моды колебаний. При попытке синхронизовать резонансный предельный цикл системы внешним гармоническим сигналом, режимы резонансов разрушаются и в системе возникают трехчастотные колебания. Эффект синхронизации в этом случае будет наблюдаться для каждой из существующих мод независимо. Вначале реализуется эффект захвата одной из двух независимых частот, затем второй. Конкретные условия синхронизации будут зависеть от числа вращения (от первоначальной расстройки базовых частот взаимодействующих осцилляторов) и от степени их взаимосвязи.

4. Синхронизация хаоса

4.1 Введение

Периодические и квазипериодические колебания составляют лишь небольшую долю возможных колебательных режимов динамических систем с размерностью фазового пространства $N \geq 3$. В связи с развитием нелинейной динамики и теории динамического хаоса неизбежно встал вопрос о синхронизации хаотических автоколебаний. Будучи фундаментальным свойством автоколебательных систем, синхронизация должна в той или иной форме наблюдаться и в режиме динамического хаоса. Хаотические автоколебания отличаются от периодических и квазипериодических прежде всего тем, что имеют сплошной спектр, напоминающий по форме спектр цветного шума. По этой причине для хаотических колебаний невозможно ввести строгий период и однозначно определить фазу колебаний, а спектральные линии (если они выделяются в спектре мощности хаоса на фоне сплошной компоненты) имеют конечную ширину.

Известно несколько определений синхронизации хаоса. Одной из первых была концепция, согласно которой синхронизация хаоса понималась как явление установления периодического режима под влиянием внешнего гармонического воздействия на систему в режиме хаотических автоколебаний. Переход от хаотических к регулярным колебаниям при этом наблюдается при достаточно высокой интенсивности воздействия, то есть имеется некий порог синхронизации [39, 75, 76].

Другой тип синхронизации хаоса имеет место при взаимодействии двух одинаковых хаотических систем. С увеличением коэффициента связи колебания в двух взаимодействующих системах становятся полностью идентичными: временные реализации соответствующих динамических переменных обоих подсистем полностью повторяют друг друга [36, 40, 41, 77, 78]. Этот тип синхронизации принято называть *полной синхронизацией*.

Кроме того, классические представления о синхронизации как об эффектах захвата или подавления частоты допускают обобщение на случай хаотических колебаний. Такой подход к проблеме синхронизации хаоса,

на наш взгляд, является наиболее последовательным. Соответствующий тип синхронизации получил название *частотно-фазовой* синхронизации хаоса. Концепция частотно-фазовой синхронизации хаотических автоколебаний отражена в ряде статей: [38, 42–44, 79, 80] и др., а также в монографиях [13, 14]. Однако частотно-фазовая синхронизация наблюдается не для любых хаотических автогенераторов, а только для автогенераторов в режиме так называемого спирального аттрактора [13, 81–83].

Помимо указанных выше типов синхронизации хаоса рассматриваются и некоторые другие эффекты частичной синхронизации, возникающие при взаимодействии неидентичных хаотических систем: к ним относятся *запаздывающая синхронизация* (lag-synchronization) и *обобщенная синхронизация*. Запаздывающая синхронизация наблюдается при сильном взаимодействии хаотических систем с незначительной расстройкой параметров. По своим характеристикам она близка к полной синхронизации: временные реализации соответствующих динамических переменных двух систем повторяют друг друга с некоторым запаздыванием во времени [45]. Обобщенная синхронизация хаоса означает возникновение функциональной взаимосвязи между мгновенными состояниями взаимодействующих хаотических систем [46, 84, 85].

4.2 Частотно-фазовая синхронизация хаотических автоколебаний

Режим спирального аттрактора можно назвать фазо-когерентным хаосом [13]. Действительно, хаотические автоколебания в этом случае характеризуются наличием ярко выраженной спектральной линии на некоторой базовой частоте ω_0 , которая соответствует средней частоте вращения фазовых траекторий вокруг состояния равновесия в соответствующим образом выбранной проекции. Базовая частота хаотических автоколебаний может быть захвачена или подавлена при взаимодействии генераторов, подобно частоте квазигармонических автоколебаний. Кроме того, можно определенным образом ввести мгновенную фазу хаотических автоколебаний и наблюдать эффект фазового захвата. Синхронизация хаоса в таком понимании наблюдается в широком классе динамических систем, в которых имеет место режим спирального аттрактора. Возможна как взаимная, так и вынужденная синхронизация фазо-когерентного хаоса, в том числе при периодическом воздействии. Хотя спиральный аттрактор является частным случаем хаотического аттрактора, он реализуется во многих

динамических системах, в которых имеется петля сепаратрисы состояния равновесия типа седло-фокус. Поэтому частотно-фазовая синхронизация хаоса не является чем-то исключительным, а представляет собой широко распространенное явление.

Рассмотрим режим спирального аттрактора в хорошо известной динамической системе Рёсслера [86]:

$$\dot{x} = -y - z, \quad \dot{y} = x + \alpha y, \quad \dot{z} = \beta + z(x - \mu). \quad (4.1)$$

Проекция фазовой траектории на плоскость переменных (x, y) и спектральная плотность мощности $S_x(\omega)$ колебаний $x(t)$ представлены на рис. 4.1. Как видно из рисунка, в проекции (рис. 4.1,а) траектория совершают вращательные движения вокруг нуля координат, а спектр $S_x(\omega)$ на фоне сплошного пьедестала имеет достаточно узкополосный пик на некоторой частоте $\omega = \omega_0$ (рис. 4.1,б).

Сpirальные аттракторы типа рис. 4.1,а возникают в результате последовательности бифуркаций удвоения периода предельного цикла. Исходный устойчивый предельный цикл становится неустойчивым (седловым), но траектории на спиральном аттракторе врачаются вблизи этого седлового цикла с высокой степенью регулярности. Если в фазовом пространстве ввести секущую поверхность, которую траектория пересекает всюду трансверсально (например, плоскость $y = 0$), и рассчитать последовательность интервалов времени T_i между пересечениями траекторией этой поверхности в одном и том же направлении, то можно убедиться в

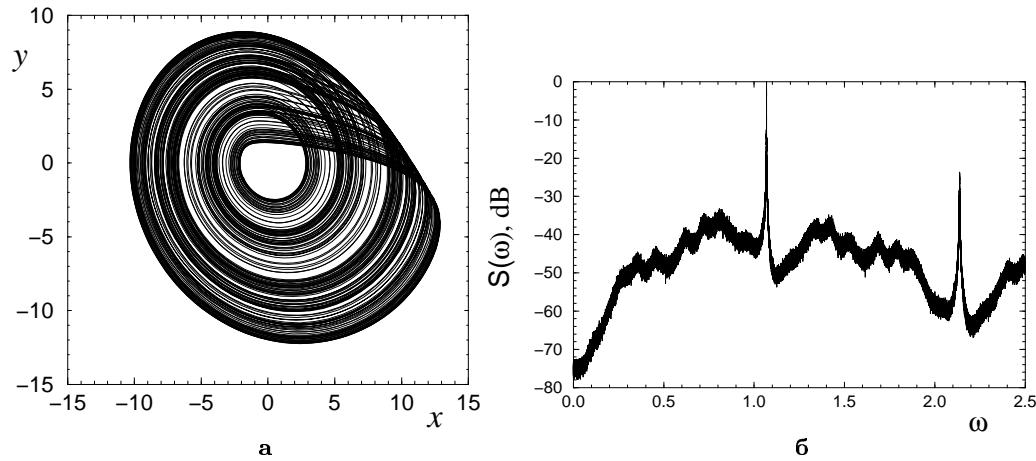


Рис. 4.1. Проекция спирального аттрактора на плоскость переменных (x, y) (а) и нормированный спектр мощности $S_x(\omega)$ колебаний $x(t)$ (б) в системе (4.1) при $\alpha = \beta = 0.2$, $\mu = 6.5$

следующем. Распределение интервалов времени $p(T_i)$ (см. рис. 4.2) имеет ярко выраженный максимум при $T = T_0$, что свидетельствует о близком к регулярному вращению с почти постоянным периодом. По этой причине данный тип хаоса называют фазо-когерентным. Следствием регулярности вращения фазовых траекторий является наличие в спектре мощности узкой спектральной линии с максимумом на частоте $\omega_0 = 2\pi/T_0$. Ширина этой линии конечна, но мала: $\Delta\omega/\omega_0 \ll 1$. Таким образом, без учета широкого, но низкого пьедестала (на уровне -50 децибел) генератор спирального хаоса подобен запутенному генератору периодических колебаний.

В работах [42, 43, 80] впервые был установлен эффект захвата базовой частоты хаотических автоколебаний и показано существование области захвата (области синхронного хаоса) в пространстве параметров. Эти результаты положили начало формированию представлений о синхронизации хаоса на основе классической теории колебаний. В указанных работах явление синхронизации хаоса исследовалось для генератора с инерционной нелинейностью (ГИН) Анищенко-Астахова. Здесь мы проиллюстрируем их на примере аттрактора Рёссlera. Введем внешнее гармоническое воздействие в систему (4.1)

$$\dot{x} = -y - z + b \sin(\omega_1 t), \quad \dot{y} = x + \alpha y, \quad \dot{z} = \beta + z(x - \mu). \quad (4.2)$$

Здесь b , ω_1 – амплитуда и круговая частота внешнего воздействия. Зададим значения параметров $\alpha = \beta = 0.2$, $\mu = 6.5$. В этом случае

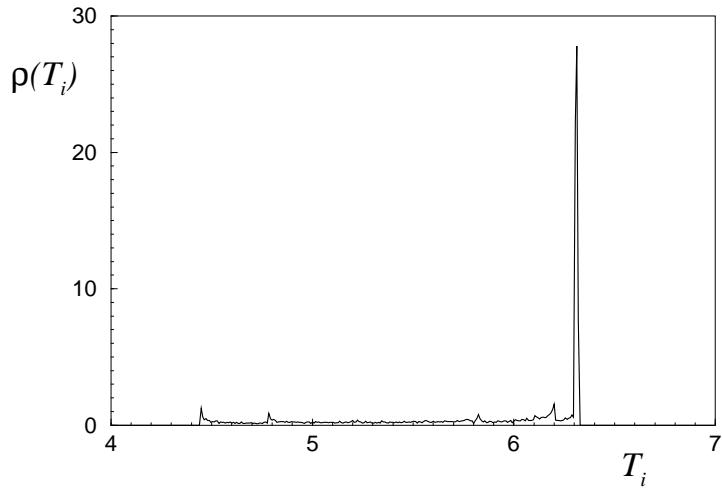


Рис. 4.2. Распределение интервалов времени между последовательными пересечениями фазовой траекторией секущей плоскости $y = 0$ в одном направлении, рассчитанное для аттрактора Рёссlera, представленного на рис. 4.1,а

значение базовой частоты спирального аттрактора в отсутствии внешней силы будет $\omega_0 = 1.0683 \pm 10^{-4}$ (см. рис. 4.1,б). Выберем значение амплитуды $b = 0.05$ и будем исследовать эволюцию спектра мощности $S_x(\omega)$ переменной $x(t)$ при изменении частоты воздействия ω_1 в интервале $1.060 \leq \omega_1 \leq 1.065$. Результаты расчета спектров для трех значений ω_{ex} представлены на рис. 4.3.

Как видно из данных, представленных на рис. 4.3, для относительно большой расстройки частоты воздействия и базовой частоты автономной системы в спектре колебаний (кривая 1) присутствуют линия сигнала воздействия ω_1 и линия базовой частоты ω_0 . С уменьшением расстройки эти линии сближаются (кривая 2) и, наконец, происходит захват базовой частоты хаотических автоколебаний внешним сигналом: $\omega_0 = \omega_1$ (кривая 3). Моменту захвата отвечает значение частоты воздействия $\omega_1 = 1.065$, не равное исходной величине $\omega_0 = 1.0683$. Таким образом, в результате захвата спектральная линия базовой частоты хаотических автоколебаний сместились и стала равной частоте внешнего воздействия. Имеет место полная аналогия с эффектом захвата частоты в классической теории синхронизации предельного цикла. Дальнейшие исследования показали, что эта аналогия имеет фундаментальный характер. Для спирального хаоса, как и для предельного цикла, можно говорить об эффектах захвата ча-

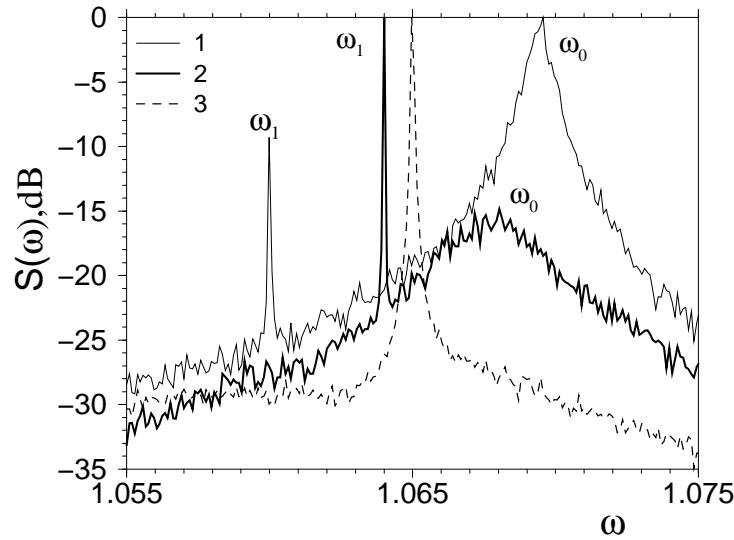


Рис. 4.3. Эффект захвата базовой частоты ω_0 в системе (4.2). Нормированный спектр мощности колебаний $x(t)$ при $\omega_1 = 1.06$ (кривая 1), $\omega_1 = 1.064$ (кривая 2) и $\omega_1 = 1.065$ (кривая 3)

стоты и фазы. Однако, чтобы применить фазовый подход требуется корректно определить мгновенную фазу хаотических автоколебаний.

Высокая степень регулярности вращения фазовой траектории аттрактора Рёсслера, позволяет представить колебания $x(t)$ и $y(t)$ в том же виде, который использовался ранее при анализе синхронизации генератора Ван дер Поля:

$$x(t) = \rho(t) \cos \Phi(t), \quad y(t) = \rho(t) \sin \Phi(t). \quad (4.3)$$

Замена переменных (4.3) означает следующее. На плоскости переменных (x, y) (рис. 4.1,а) изображающей точке на траектории сопоставляется вектор с началом в состоянии равновесия. Для системы Рёсслера при значениях параметров, соответствующих спиральному аттрактору, состояние равновесия расположено практически в начале координат. Таким образом, начало рассматриваемого вектора можно совместить с точкой $(0, 0)$. Длина вектора представляет собой мгновенную амплитуду колебаний $\rho(t)$, а угол поворота вектора относительно оси абсцисс - мгновенную фазу $\Phi(t)$. Положительный угол соответствует вращению против часовой стрелки. Именно так вращается изображающая точка в плоскости (x, y) в системе Рёсслера. В случае, когда вращение изображающей точки в рассматриваемой проекции происходит по часовой стрелке (как, например, в ГИН), следует во втором уравнении (4.3) перед синусом поставить знак “-”. Замена переменных (4.3) означает переход на плоскости динамических переменных (x, y) к полярной системе отсчета. Таким образом, зная текущие значения x и y , легко найти мгновенные значения амплитуды и фазы:

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}, \\ \Phi(t) &= \arctg \frac{y(t)}{x(t)} \pm \pi k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.4)$$

Добавление или вычитание целого числа поворотов на угол π необходимо, чтобы “достроить” фазу до полного угла вращения. При этом значение целочисленной переменной k определяется из условия непрерывности функции $\Phi(t)$. Полученная таким образом мгновенная фаза $\Phi(t)$ является полной фазой, определенной в бесконечном интервале: $\Phi(t) \in [-\infty, +\infty]$. Кроме того, иногда возникает необходимость рассмотреть фазу, определенную в ограниченном интервале: $\tilde{\Phi}(t) \in [-\pi, +\pi]$ или $\tilde{\Phi}(t) \in [0, 2\pi]$. Очевидно, что $\Phi(t) = \tilde{\Phi}(t) \pm m\pi$, где m – некоторое целое число.

Рассмотренное нами определение мгновенных амплитуды и фазы не является единственным [13, 88]. Вместо динамических переменных $x(t)$ и $y(t)$ в (4.3) могут быть использованы и другие пары переменных. При выборе таких переменных главное - обеспечить регулярное вращение проекции

фазовой траектории вокруг некоторой точки, которая берется за начало радиус-вектора. Подходящими переменными могут быть производные dx/dt и dy/dt [89] или переменные $x(t)$ и $x_H(t)$, где $x_H(t)$ – сопряженный по Гильберту процесс $x(t)$ [13, 44]:

$$x_H(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\theta)}{t - \theta} d\theta. \quad (4.5)$$

Кроме того, можно ввести фазу, используя последовательность моментов времени t_i , соответствующих пересечениям траекторией секущей плоскости [13] в заданном направлении. При кусочно линейной аппроксимации фаза в произвольный момент времени определяется как

$$\Phi(t) = 2\pi \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} \pm 2\pi i, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (4.6)$$

Здесь i – число пересечений в заданном направлении за время наблюдения $t - t_0$.

Из любого определения мгновенной фазы $\Phi(t)$ следует определение мгновенной и средней частот колебаний:

$$\omega(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt}, \quad \omega_c = \left\langle \frac{d\Phi(t)}{dt} \right\rangle = \langle \omega(t) \rangle. \quad (4.7)$$

Здесь скобки $\langle \dots \rangle$ могут означать как усреднение по ансамблю, так и усреднение по времени, поскольку процесс $\omega(t)$, как правило, обладает свойством эргодичности. Рассматривая усреднение по времени, легко получить

$$\omega_c = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\Phi(t_0 + T) - \Phi(t_0)}{T}. \quad (4.8)$$

Очевидно, что мгновенные значения амплитуды, фазы и частоты при различных способах введения амплитуды и фазы будут различны. Однако, чтобы амплитудно-фазовое представление динамики хаотической системы имело смысл, необходимо, чтобы статистические характеристики (по крайней мере те, которые связаны с наблюдаемыми величинами и явлениями) не зависели от принятого за основу определения фазы. Необходимо отметить следующее: при исследовании фазовой синхронизации хаотических автоколебаний очень важно, чтобы мгновенная фаза была определена корректно. Критерием корректности определения мгновенной фазы в режиме спирального аттрактора служит совпадение средней частоты ω_c (4.8) с базовой частотой колебаний ω_0 [87, 88].

Произведя замену переменных (4.3) в уравнениях (4.2), получим уравнения системы Рёссlerа в виде:

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= \frac{1}{2}\alpha\rho - \frac{1}{2}\alpha\rho \cos 2\Phi - z \cos \Phi + b \cos \Phi \sin(\omega_1 t), \\ \dot{\Phi} &= 1 + \frac{1}{2}\alpha \sin 2\Phi + \frac{1}{\rho}z \sin \Phi - \frac{1}{\rho}b \sin \Phi \sin(\omega_1 t), \\ \dot{z} &= \beta + z(\rho \cos \Phi - \mu).\end{aligned}\quad (4.9)$$

Зафиксировав значения параметров $\alpha = \beta = 0.2$, $\mu = 6.5$ и $b = 0.05$, проинтегрируем систему (4.9) численно, изменения частоту внешнего воздействия ω_1 . Используя полученные данные для $\Phi(t)$, вычислим соответствующие значения средней частоты ω_c (4.8). На рис. 4.4 представлены зависимости отношений частот $\Theta_c = \omega_c/\omega_1$ (кривая 1) и $\Theta_0 = \omega_0/\omega_1$ (кривая 2) от частоты сигнала воздействия ω_1 .

Как видно из графиков, имеет место захват средней частоты ω_c внешним сигналом в конечной области частот $1.065 \leq \omega_1 \leq 1.078$. При этом рассчитанные значения средней частоты ω_c и базовой частоты ω_0 совпадают в пределах ошибки вычислений.

Используя данные расчетов мгновенной фазы $\Phi(t)$, построим графики зависимости мгновенной разности фаз автоколебаний и воздействия $\Delta\Phi(t) = \Phi(t) - \omega_1 t$ в зависимости от времени. На рис. 4.5 представлены

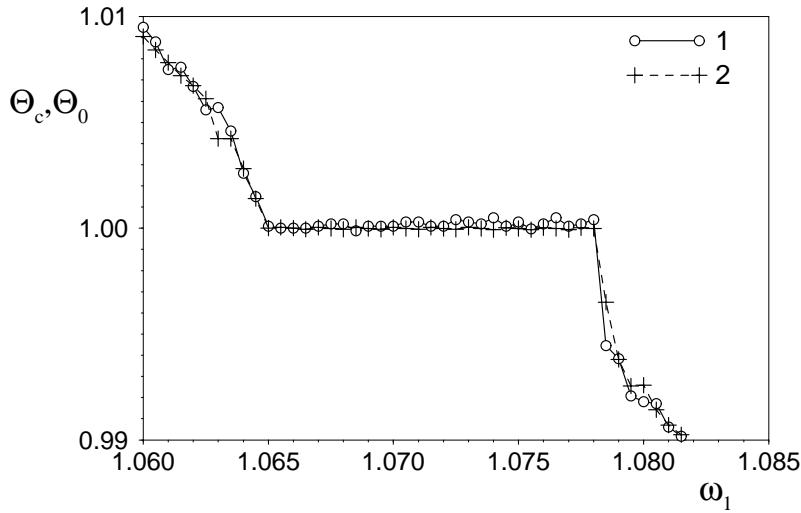


Рис. 4.4. Зависимости отношений частот $\Theta_c = \omega_c/\omega_1$ (кривая 1) и $\Theta_0 = \omega_0/\omega_1$ (кривая 2) от частоты воздействия ω_1 , рассчитанные для системы (4.9)

такие зависимости, полученные для трех значений частоты внешнего сигнала.

Как видно из графика, в области синхронизации (кривая 3) имеет место эффект захвата фазы генератора Ресслера внешним сигналом: абсолютная величина разности фаз $|\Delta\Phi|$ не растет во времени, а остается вблизи своего первоначального значения в момент времени t_0 .

Идея фазового описания синхронизации когерентного хаоса впервые была предложена в работе [44]. Согласно концепции фазовой синхронизации хаотических автоколебаний [13, 44] классическое определение эффекта фазового захвата (1) должно быть преобразовано следующим образом:

$$|m\Phi_1(t) - n\Phi_2(t)| \leq K, \quad (4.10)$$

где K – ограниченная константа, зависящая от начальной разности фаз, m и n – целые числа. В отличие от синхронизации периодических колебаний, в случае захвата фаз хаотических автогенераторов, разность фаз не является константой. Она флуктуирует во времени, но её отклонения от первоначального значения строго ограничены. Абсолютная величина таких отклонений не должна превышать 2π . Легко видеть, что из условия фазового захвата (4.10) следует рациональное соотношение средних частот:

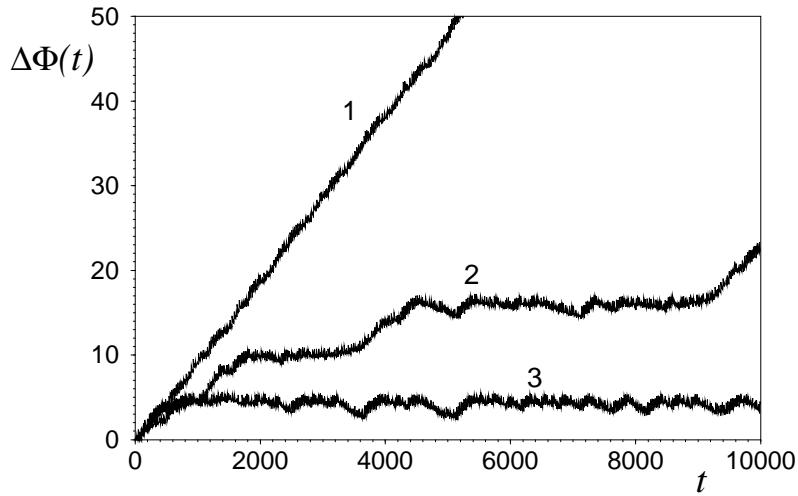


Рис. 4.5. Мгновенная разность фаз $\Delta\Phi(t) = \Phi(t) - \omega_1 t$ в зависимости от времени в системе (4.9) для трех значений частоты внешнего сигнала: $\omega_1 = 1.06$ (кривая 1), $\omega_1 = 1.064$ (кривая 2) и $\omega_1 = 1.065$ (кривая 3)

$$m\omega_{c1} = n\omega_{c2}, \text{ где } \omega_{c1} = \left\langle \frac{d\Phi_1(t)}{dt} \right\rangle, \quad \omega_{c2} = \left\langle \frac{d\Phi_2(t)}{dt} \right\rangle. \quad (4.11)$$

Поскольку в режиме спирального аттрактора базовые частоты спектров парциальных генераторов совпадают с соответствующими средними частотами, то равенство (4.11) должно выполняться и для базовых частот. Таким образом, частотная и фазовая синхронизация хаоса не являются двумя различными эффектами, а так же как и в классическом случае, представляют собой две стороны одного явления – частотно-фазовой синхронизации.

Синхронизация хаотического автогенератора наблюдается в некоторой области значений управляющих параметров, называемой *областью синхронизации*. Рассмотрим системы (4.2), (4.9) при $\alpha = \beta = 0.2$, $\mu = 6.5$. Будем менять параметры внешнего воздействия: ω_1 и b и построим область синхронных режимов на плоскости (ω_1, b) , используя для диагностики синхронизации хаоса рассмотренные выше критерии. Результаты расчетов приведены на рис. 4.6.

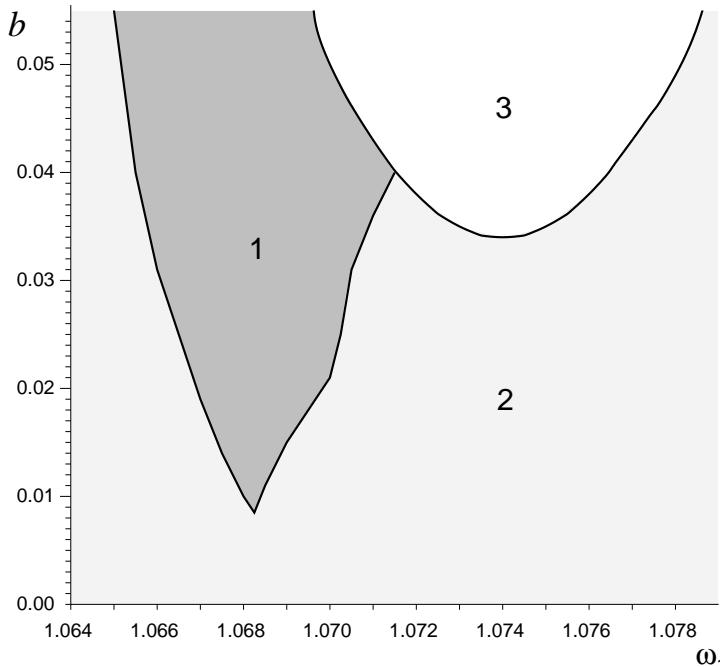


Рис. 4.6. Диаграмма режимов системы (4.2) на плоскости параметров (ω_1, b) : 1 – область синхронного хаоса; 2 – область несинхронного хаоса; 3 – область синхронных периодических колебаний

Область, помеченная на диаграмме цифрой 1, отвечает режиму синхронного хаоса. В этой области имеет место эффект захвата базовой частоты хаотического аттрактора ω_0 внешним сигналом на основном тоне, $\omega_c = \omega_1$. Одновременно в этой области происходит захват фазы с условием $|\Delta\Phi| = |\Phi(t) - \omega_1 t| \leq K$. Переход из области 1 в область 2 означает переход от синхронного хаоса к несинхронному хаосу, чему соответствует нарушение режима захвата частоты и фазы. Поскольку в спектре несинхронного хаоса (область 2), кроме широкополосного пьедестала, присутствуют спектральные линии двух базовых частот: ω_0 и ω_1 , его называют *тороидальным хаосом* или *тор-хаосом*. В области 3 существуют устойчивые периодические колебания (предельный цикл) периода $T = 4\frac{2\pi}{\omega_0}$ с захваченной основной частотой: $\omega_0 = \omega_1$ и субгармониками $\frac{\omega_1}{2}$ и $\frac{\omega_1}{4}$. Таким образом, область синхронизации, представленная на рис. 4.6, состоит из двух областей с различным характером синхронных колебаний: области синхронного хаоса (1) и области синхронных периодических колебаний (3). В общем случае устройство области синхронизации хаотических автоколебаний может быть очень сложным и включать множество областей, соответствующих различным хаотическим и периодическим аттракторам [43, 80, 90, 91].

Если ограничиться малыми значениями амплитуды воздействия (в рассматриваемом случае $b \leq 0.34$), то картина будет сравнительно простой: имеет место характерная область синхронизации хаоса в виде “клюва”, как и для случая периодических автоколебаний. Отличие в том, что клюв синхронизации хаоса не опирается на ось абсцисс, соответствующую нулевой амплитуде воздействия. Для того, чтобы фазовый захват хаотических автоколебаний стал возможен, необходимо, чтобы амплитуда воздействия (или связь, при взаимной синхронизации) превысила некоторое пороговое значение [13, 79, 92]. Причина существования порога тесно связана с бифуркационным механизмом частотно-фазовой синхронизации хаоса. Этот механизм все еще не достаточно изучен, однако ясно, что принципиальную роль в нем играют седловые предельные циклы, встроенные в хаотический аттрактор. Так в [43, 80] было показано, что на плоскости управляющих параметров линии касательных бифуркаций седловых циклов различных периодов накапливаются к границе синхронизации хаоса. Сама граница хаотической синхронизации представляет собой критическую линию, к которой сходятся точки касательных бифуркаций для циклов с возрастающими периодами.

Аналогичная интерпретация механизма синхронизации хаоса развивается в работах [79, 92]. Для анализа данной проблемы вводится неко-

торое искусственно сконструированное двумерное необратимое отображение, моделирующее синхронизацию хаотического генератора периодической внешней силой. Седловые циклы, являющиеся как бы "скелетом" синхронного хаотического аттрактора, претерпевают касательные бифуркации в паре с соответствующими периодическими репеллерами. Последние составляют скелет хаотического репеллера, который касается хаотического аттрактора в отдельных точках, а именно, в точках седловых и репеллерных циклов в момент их слияния¹. Каждая пара скелетных циклов принадлежит неустойчивой инвариантной кривой (соответствующей седловому тору потоковой системы). В результате касательной бифуркации движение на инвариантной кривой становится эргодическим, т.е. возникает направление, по которому изображающая точка уходит от синхронного аттрактора и, сделав оборот вдоль инвариантной кривой, вновь возвращается. При этом наблюдается скачок разности фаз на 2π .

В соответствии с концепцией, изложенной в [79, 92], существование порога синхронизации хаоса имеет очевидное объяснение: скелетные циклы хаотического аттрактора имеют близкие, но всё-же несколько различающиеся основные частоты (т.е. их периоды не являются строго кратными). Каждый такой цикл имеет свой ключ синхронизации, границами которого служат линии седло-репеллерных бифуркаций. Ключи синхронизации различных циклов опираются на различные точки оси абсцисс, соответствующей нулевой амплитуде воздействия. Таким образом, область синхронизации хаоса, представляющая собой пересечение ключов синхронизации всевозможных скелетных циклов, уже не может иметь общую точку с осью абсцисс. Ее нижняя граница отстоит от оси абсцисс на некоторое расстояние, равное пороговому значению амплитуды воздействия (рис. 4.7).

Численные эксперименты с автогенераторами когерентного хаоса, описываемыми обыкновенными дифференциальными уравнениями (например [93], в целом подтверждают предполагаемый бифуркационный механизм фазового захвата хаотических колебаний.

В классической теории синхронизации периодических автоколебаний различают два механизма синхронизации: захват фаз и подавление автоколебаний в одной из взаимодействующих систем. Переход в область синхронизации через подавление автоколебаний наблюдается при больших значениях частотнойстройки и сильном взаимодействии систем

¹ В моделируемой потоковой системе роль репеллерных циклов очевидно играют седловые циклы, но с большей размерностью неустойчивого многообразия, чем скелетные циклы аттрактора, а вместо хаотического репеллера существует хаотическое седло.

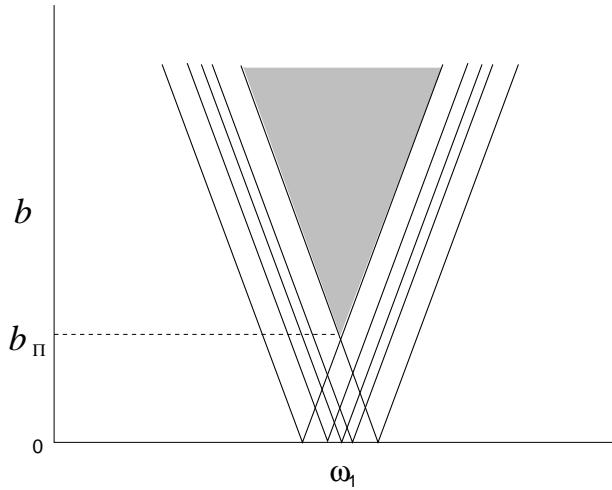


Рис. 4.7. Качественная иллюстрация возникновения амплитудного порога при синхронизации хаоса: сплошными тонкими линиями обозначены границы клюев синхронизации седловых скелетных циклов; закрашенная область соответствует синхронизации хаоса; пунктиром отмечен порог синхронизации $b_{\text{п}}$

(см. первый раздел данной главы). Подавление может иметь место и в случае хаотических автоколебаний. Как показывают результаты исследований (например, представленные в [42, 43, 80, 90, 91]) при взаимной синхронизации хаотических автогенераторов или при вынужденной синхронизации хаоса гармоническим сигналом эффекту подавления автоколебаний предшествует переход от несинхронного хаоса к квазипериодическому режиму. В области синхронизации в этом случае наблюдаются периодические колебания, а ее граница соответствует бифуркации рождения тора (бифуркации Неймарка)². Для того, чтобы наблюдать переход “несинхронный хаос” → “синхронный хаос”, реализуемый через механизм подавления, нужно рассмотреть одностороннее воздействие одного хаотического генератора на другой. При соответствующем выборе параметров частотной расстройки и коэффициента односторонней связи в такой системе в области хаотической динамики можно наблюдать оба классических механизма синхронизации, связанные с захватом и с подавлением автоколебаний.

Обобщенная синхронизация хаоса, наблюдаемая в системах с односторонней связью (связь типа “*master-slave*”) [46, 84, 85], есть ни что иное как подавление автоколебаний вынуждаемой системы. Состояние вынуж-

² Область периодических колебаний на рис. 4.6 не связана с эффектом подавления. Об этом свидетельствует характер границы между областями 2 и 3, которая связана с седло-узловой бифуркацией циклов.

ждаемой системы в этом случае полностью определяется состоянием воздействующей системы. Такое явление можно наблюдать при взаимодействии хаотических систем, не только с близким типом поведения, но и с совершенно различной структурой хаоса. Возможно также подавление хаоса периодическим сигналом (о чем говорилось выше) и даже случайной силой [94–98].

4.3 Исследование вынужденной синхронизации генератора спирального хаоса в натурном эксперименте

Для проведения экспериментов была создана установка, включаящая радиотехнический генератор с инерционной нелинейностью Анищенко-Астахова (ГИН) [99], генератор гармонического сигнала, подаваемого на ГИН в качестве внешнего воздействия, и компьютер с быстродействующим АЦП. Блок-схема ГИН приведена на рис. 4.8, а его математическая модель в безразмерных переменных представляет собой следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = mx + y - xz - \delta x^3, \quad \dot{y} = -x, \quad \dot{z} = -gz + gI(x)x^2, \quad (4.12)$$

$$I(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

При определенных значениях параметров в генераторе реализуется спиральный хаотический аттрактор, наблюдаемый экспериментально. Соот-

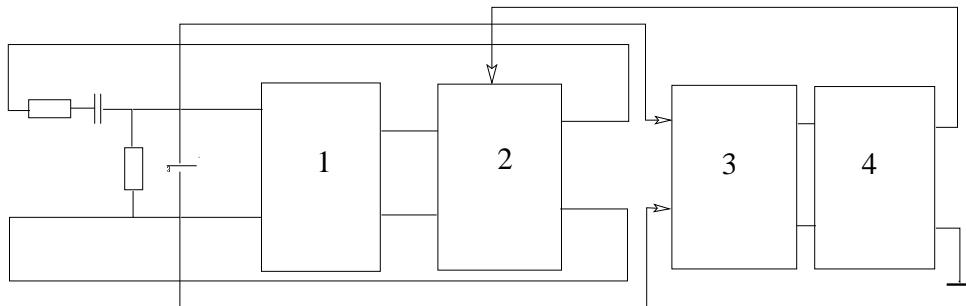


Рис. 4.8. Блок-схема генератора с инерционной нелинейностью: 1,2 – усилители, 3 – линейный усилитель, 4 – инерционный преобразователь

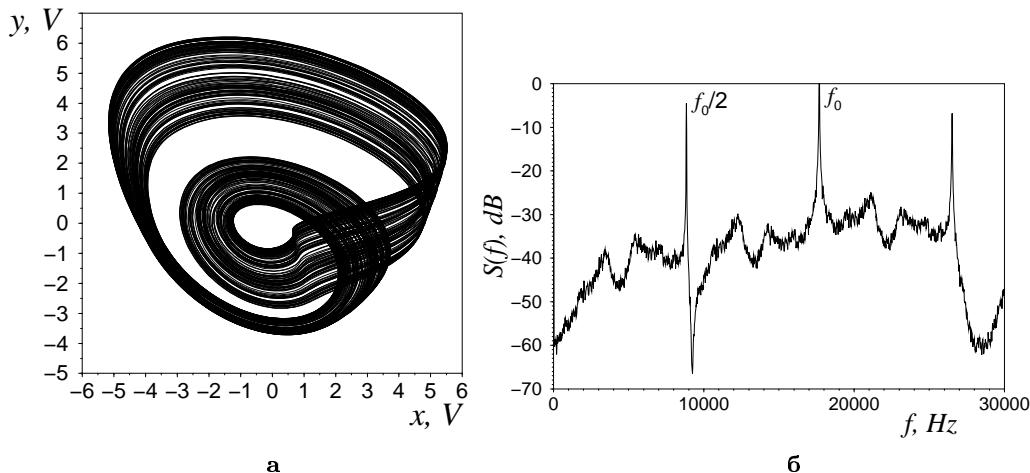


Рис. 4.9. Проекция спирального аттрактора (а) и нормированный спектр мощности $S_x(\omega)$ колебаний $x(t)$ (б) в режиме спирального хаоса, полученные экспериментально для радиотехнического генератора Анищенко-Астахова

ветствующая проекция аттрактора в плоскости x, y и спектр процесса $x(t)$ представлены на рис. 4.9, а, б³.

Исследуемый спиральный аттрактор является двухсвязанным, т.е. имеет вид двухходовой ленты Мёбиуса. Соответственно, в спектре мощности присутствует субгармоника на частоте $f_0/2$ и линии на кратных частотах. Этот факт не является принципиальным для исследования эффекта синхронизации. Если внешнее воздействие приводит к захвату базовой частоты f_0 , то захваченными оказываются все её гармоники и субгармоники. Выбор данного режима в эксперименте обусловлен тем обстоятельством, что развитый (односвязанный) спиральный аттрактор в ГИН оказывается слишком чувствительным к слабому шуму, неизбежно присутствующему в экспериментальной установке.

Экспериментально исследовалась вынужденная синхронизация генератора гармоническим воздействием с частотой f_1 , близкой к базовой частоте хаотических автоколебаний. Данные, полученные экспериментально для ГИН, находятся в полном соответствии с результатами численного моделирования вынужденной синхронизации хаоса в осцилляторе Рёссlera, которые были представлены в предыдущем разделе. На рис. 4.10 приведены фрагменты спектров колебаний, иллюстрирующие эффект захвата базовой частоты f_0 .

³ В действительности экспериментально снимаются не безразмерные переменные x и y , а напряжения в определенных точках установки, пропорциональные данным величинам.

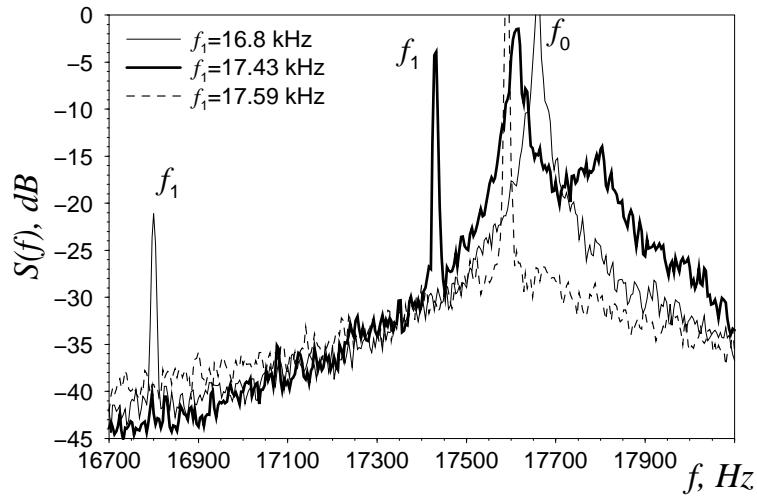


Рис. 4.10. Эффект захвата базовой частоты f_0 в хаотическом генераторе Анищенко-Астахова при изменении частоты гармонического воздействия (физический эксперимент)

Экспериментально измерялось отношение частот $\Theta_0 = f_0/f_1$ и была построена зависимость Θ_0 от частоты воздействия f_1 (рис. 4.11). Она свидетельствует о существовании конечной области захвата частоты.

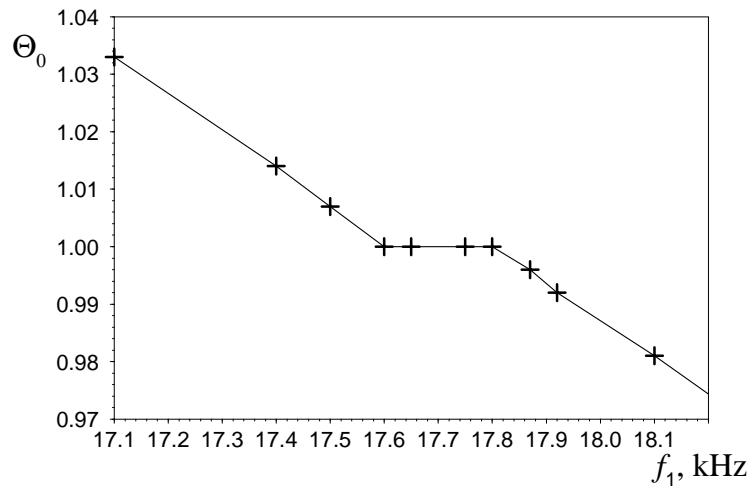


Рис. 4.11. Зависимость отношения частот $\Theta_0 = f_0/f_1$ от частоты воздействия f_1 в хаотическом генераторе Анищенко-Астахова (физический эксперимент)

На рис. 4.12 представлен фрагмент области вынужденной синхронизации хаотического радиотехнического генератора на плоскости управляющих параметров: частота воздействия f_1 , амплитуда внешней силы C .

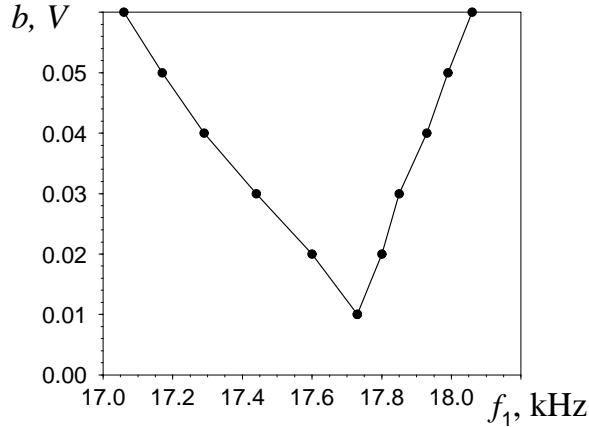


Рис. 4.12. Область синхронизации системы хаотического генератора Анищенко-Астахова на плоскости параметров (f_1, b) (физический эксперимент)

4.4 Частотно-фазовая синхронизация хаоса в присутствии шума

Тот факт, что частотно-фазовая синхронизация хаоса наблюдается в эксперименте означает грубость данного явления по отношению к слабому шумовому воздействию (поскольку в эксперименте всегда присутствует шум). При наличии шума синхронизация хаоса не будет строгой. Также как и в задаче о синхронизации квазигармонических колебаний в присутствии шума [27] захват фазы в течении сколь угодно большого интервала времени становится невозможным. Однако, если интенсивность шума мала, то условие ограниченности мгновенной разности фаз (4.10) в окрестности некоторого постоянного значения K может выполняться достаточно долго. В этом случае возможно говорить об эффективной синхронизации хаотических автоколебаний.

С целью анализа влияния шума на синхронизацию спирального хаоса была численно исследована система Рёссlera с внешним гармоническим воздействием, содержащая источник аддитивного белого гауссова шума:

$$\dot{x} = -y - z + b \sin(\omega_1 t) + \sqrt{2D} \xi(t), \quad \dot{y} = x + \alpha y, \quad \dot{z} = \beta + z(x - \mu). \quad (4.13)$$

где $\xi(t)$ – источник гауссова шума, причем: $\langle \xi(t) \rangle \equiv 0$; $\langle \xi(t)\xi(t+\tau) \rangle = \delta(\tau)$, $\delta(\dots)$ – функция Дирака. Постоянная D задает интенсивность шума.

На рис. 4.13, а представлены зависимости отношения частот Θ_c от частоты воздействия ω_1 , полученные для двух различных значений интенсивности шума. Пунктиром изображена кривая, полученная в отсутствии шума. При воздействии шума с интенсивностью $D = 0.01$ еще сохраняется область значений параметра ω_1 , в пределах которой Θ_c близко к единице (кривая 1). В этом случае допустимо говорить о существовании области эффективной синхронизации спирального хаоса. Можно выделить два эффекта, вызванные шумовым воздействием: область синхронизации возмущенной системы слегка сдвигается вправо, что может быть связано с изменением характеристик автоколебательного режима под действием шума; ширина области синхронизации существенно уменьшается. При увеличении интенсивности шума до значения $D = 0.02$ область эффективной синхронизации практически исчезает (кривая 2). Зависимости разности фаз $\Delta\Phi$ от времени, в случае шумового воздействия с интенсивностью $D = 0.1$ и $D = 0.2$ представлены на рис. 4.13, б. Пунктиром нанесена зависимость $\Delta\Phi$, полученная без шумового воздействия.

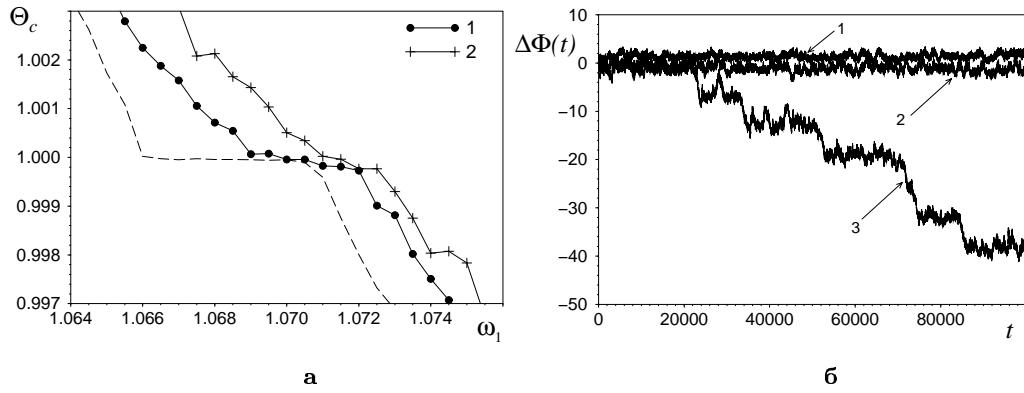


Рис. 4.13. Влияние гауссова белого шума на синхронизацию спирального хаоса в системе (4.13) при $\alpha = \beta = 0.2$, $\mu = 6.5$, $b = 0.03$: (а) число вращения $\Theta_c = \omega_c/\omega_1$ в зависимости от частоты воздействия ω_1 при интенсивности шумового воздействия $D = 0.01$ (кривая 1) и $D = 0.02$ (кривая 2). Пунктиром нанесена кривая, соответствующая отсутствию шума; (б) поведение разности фаз $\Delta\Phi$ во времени для $D = 0$ (кривая 1), $D = 0.01$ (кривая 2) и $D = 0.02$ (кривая 3). Расчет разности фаз проводился при значениях ω_1 , обеспечивающем оптимальные условия синхронизации (для $D = 0, 0.01, 0.02$ фиксировались значения $\omega_1 = 1.0683, 1.0705, 1.0720$, соответственно)

4.5 Полная синхронизация взаимодействующих хаотических систем

При взаимодействии двух совершенно идентичных хаотических автогенераторов, можно наблюдать явление полной синхронизации хаоса: начиная с некоторого значения параметра связи, колебания парциальных систем становятся полностью идентичными.

Рассмотрим в общем виде некоторую систему двух взаимодействующих полностью идентичных хаотических подсистем:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \mathbf{F}(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\alpha}_1) + \gamma \mathbf{g}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \\ \dot{x}_2 &= \mathbf{F}(\mathbf{x}_2, \boldsymbol{\alpha}_2) + \gamma \mathbf{g}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2).\end{aligned}\quad (4.14)$$

Здесь $\mathbf{x}_{1,2}$ – векторы состояния, а $\boldsymbol{\alpha}_{1,2}$ – векторные параметры подсистем. Если $\boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{\alpha}_2$, то парциальные элементы полностью идентичны. Векторная функция $g(\dots)$ определяет характер связи, причем $g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) = g(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2) = 0$. В случае полной идентичности парциальных подсистем в фазовом пространстве полной системы (4.14) существует инвариантное многообразие \mathbf{U} ($\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$), называемое *симметричным подпространством*. Фазовые траектории, лежащие в \mathbf{U} , соответствуют полностью синхронным колебаниям. Если предельное множество \mathbf{U} является притягивающим в фазовом пространстве системы (4.14), то есть является аттрактором, то реализуется *эффект полной синхронизации*.

Проиллюстрируем эффект полной синхронизации на примере двух симметрично связанных идентичных осцилляторов Рёссlera. Уравнения системы имеют вид:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -y_1 - z_1 + \gamma(x_2 - x_1), \\ \dot{y}_1 &= x_1 + \alpha y_1, \\ \dot{z}_1 &= \beta + z_1(x_1 - \mu), \\ \dot{x}_2 &= -y_2 - z_2 + \gamma(x_1 - x_2), \\ \dot{y}_2 &= x_2 + \alpha y_2, \\ \dot{z}_2 &= \beta + z_2(x_2 - \mu).\end{aligned}\quad (4.15)$$

Выберем режим спирального хаоса в каждой из взаимодействующих подсистем, положив $\alpha = \beta = 0.2$ и $\mu = 6.5$ и проследим эволюцию предельного множества фазовых траекторий системы (4.15) с увеличением параметра связи. С этой целью будем строить проекцию аттрактора на плоскость однотипных переменных (x_1, x_2) или (y_1, y_2) . Режиму полной

синхронизации при этом отвечает аттрактор, расположенный в симметричном подпространстве \mathbf{U} . Соответственно, проекции траекторий на аттракторе лежат на диагонали $x_1 = x_2$ (или $y_1 = y_2$).

На рис. 4.14 представлены результаты вычислений, проведенных для значения коэффициента связи $\gamma = 0.2$. Видно, что фазовая траектория, стартующая из начальной точки, не принадлежащей \mathbf{U} , после некоторого переходного процесса достигает инвариантного подпространства \mathbf{U} и там остается. Таким образом, при выбранном значении параметра связи в системе реализуется режим полной хаотической синхронизации: для любого момента времени $t > t_{\text{п}}$ ($t_{\text{п}}$ – время переходного процесса) $x_1(t) \equiv x_2(t)$, $y_1(t) \equiv y_2(t)$ и $z_1(t) \equiv z_2(t)$.

Многочисленные исследования показали, что полная синхронизация (в отличие от частотно-фазовой) может наблюдаться не только для спирального хаоса, но и в случае более сложных хаотических автоколебаний, таких как квазигиперболический хаос в системе Лоренца [41] или режим двойной спирали в генераторе Чуа [91, 100]. Полная хаотическая синхронизация возможна не только для автогенераторов, но также и для взаимодействующих нелинейных хаотических осцилляторов [102], находящихся под воздействием одной и той же внешней силы, и модельных отображений последовательности [36, 77, 103, 104].

Механизм возникновения и разрушения полной синхронизации, так же как и в случае частотно-фазовой синхронизации, связан с бифуркациями седловых и репеллерных циклов в хаотическом предельном множестве. В отличие от механизма частотно-фазовой синхронизации он достаточно

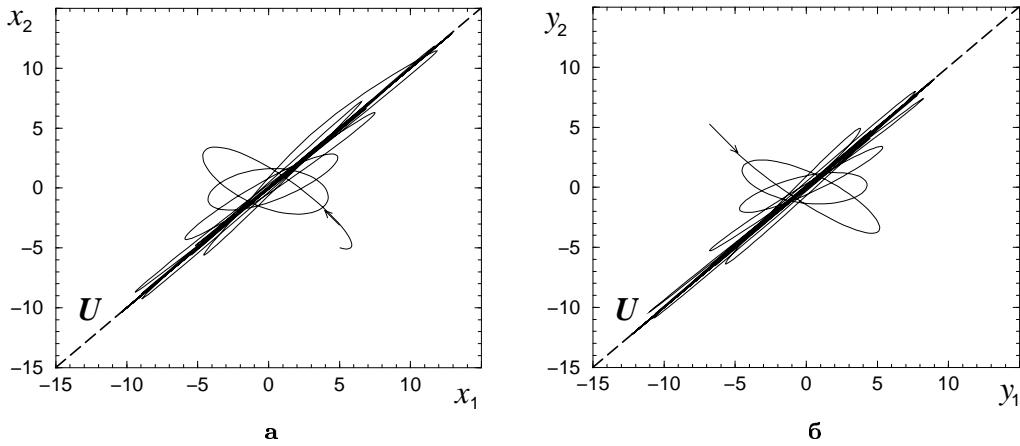


Рис. 4.14. Проекции фазовой траектории аттрактора системы (4.15) на плоскость переменных (x_1, x_2) (а) (y_1, y_2) (б)

полно исследован в целом ряде работ [41, 77, 101, 105–110]. В этих и многих других работах показывается, каким образом инвариантное многообразие \mathcal{U} системы (4.14) в котором располагается “синфазный” хаотический аттрактор, перестает быть притягивающим при уменьшении параметра связи.

Для простоты, вместо системы (4.14) рассмотрим модельное отображение последовательности, представляющие собой связанные одномерные необратимые отображения:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n) + \gamma g(y_n - x_n), \\ y_{n+1} &= f(y_n) + \gamma g(x_n - y_n). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Устойчивость траекторий системы (4.16), принадлежащих инвариантному многообразию \mathcal{U} (биссектрисе $x = y$), в этом случае определяется двумя ляпуновскими показателями, Λ_{tn} и Λ_{tr} . Показатель Λ_{tn} характеризует эволюцию возмущений, лежащих в \mathcal{U} , а Λ_{tr} – трансверсальных к нему. Таким образом, разрушение режима полной хаотической синхронизации в (4.16) диагностируется по знаку *трансверсального показателя*, определяемого выражением

$$\Lambda_{\text{tr}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_n}. \quad (4.17)$$

Если показатель Λ_{tr} становится положительным, это означает, что предельное множество, лежащее в \mathcal{U} , теряет устойчивость в трансверсальном направлении и траектория при сколь угодно малом нарушении симметрии в начальных условиях уходит от инвариантного многообразия \mathcal{U} на какой-либо аттрактор, не лежащий в \mathcal{U} . В многомерном случае эволюция возмущения, трансверсального к \mathcal{U} , описывается N ляпуновскими показателями (где N – размерность фазового пространства парциальной системы). Если хотя бы один из них становится положительным, то инвариантное многообразие перестает быть устойчивым. В результате происходит разрушение режима полной синхронизации хаоса, называемое *бифуркацией прорыва* (*blowout bifurcation*). Оно обычно сопровождается явлением переходной (на конечных временах) или “истинной” перемежаемости (*перемежаемость Ямады–Фуджисаки* или *on-off –перемежаемость* [101, 106]).

Однако ляпуновские показатели – это усредненные по аттрактору характеристики, которые не диагностируют всех локальных изменений в структуре предельного множества. В [77, 106, 109, 110] было показано, что еще до того, как Λ_{tr} становится положительным, возможно появление счетного множества точек инвариантного многообразия, в которых имеет

место трансверсальная неустойчивость. Эти точки принадлежат неустойчивым циклам, лежащим в инвариантном подпространстве. Для двумерного отображения (4.16) эти циклы являются репеллерами, в общем случае – седлами. Попав в окрестность такого цикла, изображающая точка (если она не лежит строго в U) удаляется от инвариантного многообразия. Если в системе при тех же значениях параметров нет другого аттрактора, кроме “синфазного” (лежащего в U), то через некоторое время траектория вновь вернется в окрестность инвариантного многообразия и в конечном счете попадет на него. Однако если число встроенных в “синфазный” хаотический аттрактор неустойчивых циклов велико, может наблюдаться длительный переходный процесс on-off- перемежаемости. Воздействие малого шума на “синфазный” хаос приводит к постоянному возобновлению процесса перемежаемости. Наблюдаемый экспериментально хаотический аттрактор в результате действия шума уже не лежит в инвариантном многообразии, а как бы разбухает. Это явление получило название *баблинга* или *пузырения* аттрактора⁴ [106, 110].

Если в системе имеется какой-либо регулярный или хаотический аттрактор, не лежащий в U , то возникновение неустойчивых циклов в “синфазном” аттракторе приводит к образованию “языков” бассейна притяжения “несинфазного” аттрактора, опирающихся на точки этих циклов [106, 109]. Подобный “язык” на фазовой плоскости качественно изображен на рис. 4.15. Границы языка образованы устойчивыми многообразиями “несинфазных” седловых циклов $S^{1,2}$.

Возникновение счетного множества языков, принадлежащих аттрактору, не лежащему в U , приводит к “изрешечиванию” локальной окрестности инвариантного многообразия, так что сколь угодно близко от любой точки “синфазного” аттрактора найдется точка, принадлежащая бассейну другого аттрактора. Такое явление получило название *ридлинга* или *изрешечивания*⁵ [106, 107, 110]. В результате изрешечивания хаотический аттрактор в U перестаёт быть аттрактором в обычном смысле. Он превращается в так называемый *слабый аттрактор* или *аттрактор Милнора* [111, 112].

На рис. 4.16 представлен вид изрешеченной окрестности хаотического аттрактора, лежащего в многообразии U (на биссектрисе) для системы связанных логистических отображений. Рисунок соответствует случаю, когда трансверсальный ляпуновский показатель ещё отрицателен, т.е. бифуркация прорыва еще не произошла.

⁴ От слова bubling – пузырение.

⁵ От слова riddling – изрешечивание.

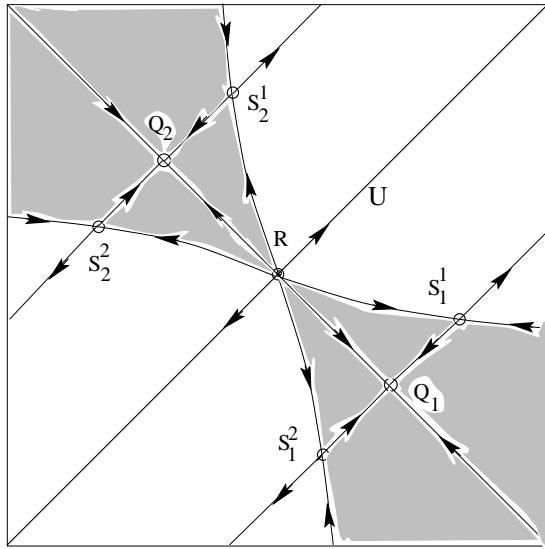


Рис. 4.15. Возникновение языка бассейна “несинфазного” цикла периода 2 (точки $Q_{1,2}$), опирающегося на репеллер R в инвариантном многообразии U (биссектриса). $S_{1,2}^1$ и $S_{1,2}^2$ – точки седловых циклов периода 2

После того, как трансверсальное направление становится неустойчивым в среднем на аттракторе, лежащий в инвариантном многообразии

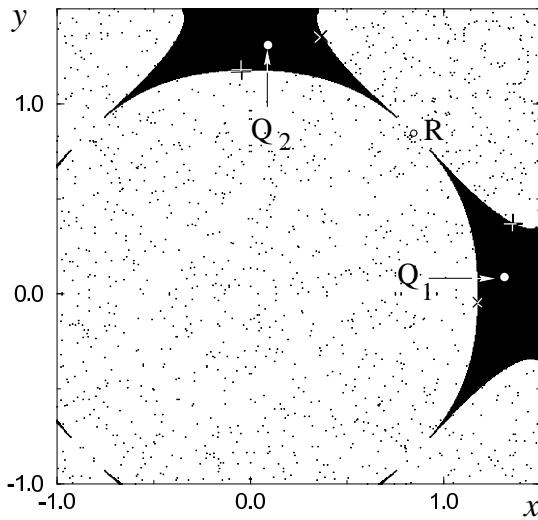


Рис. 4.16. Бистабильность и ридлинг в системе связанных логистических отображений. Помимо хаотического “синфазного” аттрактора, расположенного на биссектрисе $x = y$, имеется “несинфазный” устойчивый цикл периода 2 (ему принадлежат точки $Q_{1,2}$). Бассейн притяжения “несинфазного” аттрактора обозначен темными точками

аттрактор перестают быть аттрактором даже в смысле Милнора, что и соответствует бифуркации прорыва.

Подчеркнем еще раз, что полная синхронизация хаоса возможна только для полностью идентичных взаимодействующих систем. При расстройке парциальных систем по параметрам симметричное подпространство \mathbf{U} перестают существовать, и соответственно, при конечном значении параметра связи полная синхронизация невозможна. Однако если различие взаимодействующих систем незначительно, то при достаточно сильной связи наблюдается эффект, близкий к полной синхронизации. Он состоит в том, что колебания парциальных систем полностью повторяют друг друга с некоторой задержкой τ_d во времени: $\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}_2(t + \tau_d)$. Этот эффект, впервые описанный в [45], был назван *lag-синхронизацией* (*запаздывающей синхронизацией*)⁶. Хотя инвариантного подпространства \mathbf{U} в случае запаздывающей синхронизации не существует, хаотический аттрактор топологически эквивалентен аттрактору при полной синхронизации. Таким образом, запаздывающую синхронизацию можно рассматривать как обобщение понятия полной синхронизации на случай систем со слабой частотной расстройкой.

4.6 Количественные характеристики степени синхронности хаотических автоколебаний

Для взаимодействующих хаотических автогенераторов одного типа, но характеризующихся частотной расстройкой, можно выделить три степени синхронизации хаоса. Граница области синхронизации на плоскости параметров, управляющих связью и расстройкой, соответствует частотно-фазовой синхронизации парциальных систем. С уменьшением расстройки и ростом параметра связи может возникнуть более сильный эффект синхронизации – запаздывающая синхронизация. Переход от частотно-фазовой синхронизации к запаздывающей синхронизации является сложным процессом, бифуркационный механизм которого еще не в достаточной степени изучен, но, по-видимому, аналогичен механизму возникновения-разрушения полной синхронизации. При нулевой расстройке, начиная с некоторого значения параметра связи, может наблюдаться полная синхронизация: хаотическое предельное множество в симметричном подпространстве становится притягивающим в полном фазовом пространстве системы. В научной литературе можно встретить много различных количе-

⁶ По английски “lag” означает “отставание”, “запаздывание”.

ственных характеристик степени синхронности взаимодействующих хаотических автогенераторов. Одни из них позволяют определить границу частотно-фазового захвата, другие диагностируют запаздывающую или полную синхронизацию.

Взаимная частотно-фазовая синхронизация хаотических автогенераторов, так же как и рассмотренная ранее вынужденная синхронизация, легко диагностируется с помощью отношения характерных частот (базовых или средних частот взаимодействующих автогенераторов) Θ . В основной области синхронизации выполняется равенство $\Theta = 1$. Кроме того, фазовый захват можно определить с помощью коэффициента эффективной диффузии разности фаз $B_{\text{эфф}\Delta\phi}$, который дает оценку скорости линейного роста дисперсии разности фаз во времени. В случае строгого фазового захвата он должен быть равен нулю, что связано с выполнением условия (4.10). В численных экспериментах из-за ограниченной точности вычислений добиться нулевого значения коэффициента эффективной диффузии разности фаз не удается, однако оно резко (на несколько порядков) уменьшается на границе области захвата.

Иногда для оценки степени синхронности используют характеристики, типа следующей:

$$\nu = \frac{\sigma_{x_1+x_2}^2}{2(\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2)}, \quad (4.18)$$

где $x_1(t)$ и $x_2(t)$ – однотипные динамические переменные автогенераторов, $\sigma_{x_1}^2$ и $\sigma_{x_2}^2$ – дисперсии переменных $x_1(t)$ и $x_2(t)$, а $\sigma_{x_1+x_2}^2$ – дисперсия их суммы. Очевидно $\nu \in [0.5; 1]$, причем $\nu = 1$ соответствует случаю полной синхронизации, а при полной независимости процессов $x_1(t)$ и $x_2(t)$ получаем $\nu = 0.5$. Однако данная характеристика не позволяет четко диагностировать ни фазового захвата, ни запаздывающей синхронизации.

В [45] предлагается характеристика, позволяющая обнаруживать не только полную, но и запаздывающую синхронизацию взаимодействующих хаотических систем:

$$\kappa = \min_{\tau} G(\tau), \quad (4.19)$$

где $G(\tau)$ – функция подобия,

$$G^2(\tau) = \frac{\langle (x_2(t + \tau) - x_1(t))^2 \rangle}{\sqrt{\langle (x_1^2(t)) \rangle \langle (x_2^2(t)) \rangle}}, \quad (4.20)$$

где $x_1(t)$ и $x_2(t)$ – однотипные динамические переменные двух парциальных систем. В случае полной и запаздывающей синхронизации $\kappa = 0$. С ростом расстройки и с уменьшением связи κ растет.

Чтобы охарактеризовать степень синхронности можно использовать также взаимную нормированную корреляционную функцию (коэффициент взаимной корреляции):

$$R_{x_1x_2}(\tau) = \frac{\langle x_1(t)x_2(t+\tau) \rangle - \langle x_1(t) \rangle \langle x_2(t+\tau) \rangle}{\sqrt{(\langle x_1^2(t) \rangle - \langle x_1(t) \rangle^2)(\langle x_2^2(t+\tau) \rangle - \langle x_2(t+\tau) \rangle^2)}}. \quad (4.21)$$

Величина $\eta = \max_\tau R_{x_1x_2}(\tau)$ будет равна единице в случае запаздывающей синхронизации (и, разумеется, полной синхронизации) и стремится к нулю при потере колебаниями $x_1(t)$ и $x_2(t)$ статистической взаимосвязи.

Степень синхронности хаотических колебаний можно оценить и в рамках спектрального подхода. С этой целью можно использовать функцию когерентности [43, 113]

$$r_{x_1x_2}(\omega) = \frac{|S_{x_1x_2}(\omega)|}{\sqrt{S_{x_1}(\omega)S_{x_2}(\omega)}}, \quad (4.22)$$

где S_{x_1} , S_{x_2} – спектры мощности флюктуаций $x_1(t) - \langle x_1 \rangle$ и $x_2(t) - \langle x_2 \rangle$; $S_{x_1x_2}$ – взаимный спектр флюктуаций. Для статистически независимых процессов $r_{x_1x_2} \equiv 0$, а в случае линейной взаимосвязи $x_1(t)$ и $x_2(t)$ имеем $r_{x_1x_2} \equiv 1$. Чтобы ввести не зависящую от частоты количественную характеристику, можно рассматривать среднее значение коэффициента когерентности в исследуемом частотном интервале $\bar{\tau}$.

На рис. 4.17 в качестве примера приведены зависимости рассмотренных выше характеристик степени синхронности хаотических колебаний от параметра связи, полученные для системы двух связанных осцилляторов Рёссlera с небольшой частотной расстройкой:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -y_1 - z_1 + \gamma(x_2 - x_1), \\ \dot{y}_1 &= x_1 + \alpha y_1, \\ \dot{z}_1 &= \beta + z_1(x_1 - \mu), \\ \dot{x}_2 &= -(1 - \Delta)y_2 - z_2 + \gamma(x_1 - x_2), \\ \dot{y}_2 &= (1 - \Delta)x_2 + \alpha y_2, \\ \dot{z}_2 &= \beta + z_2(x_2 - \mu), \end{aligned} \quad (4.23)$$

где Δ – параметр, задающий расстройку парциальных автогенераторов; γ – параметр связи.

Как можно видеть из графиков, представленных на рис. 4.17, различные характеристики по-разному реагируют на пересечение границ l_1 и l_2 и,

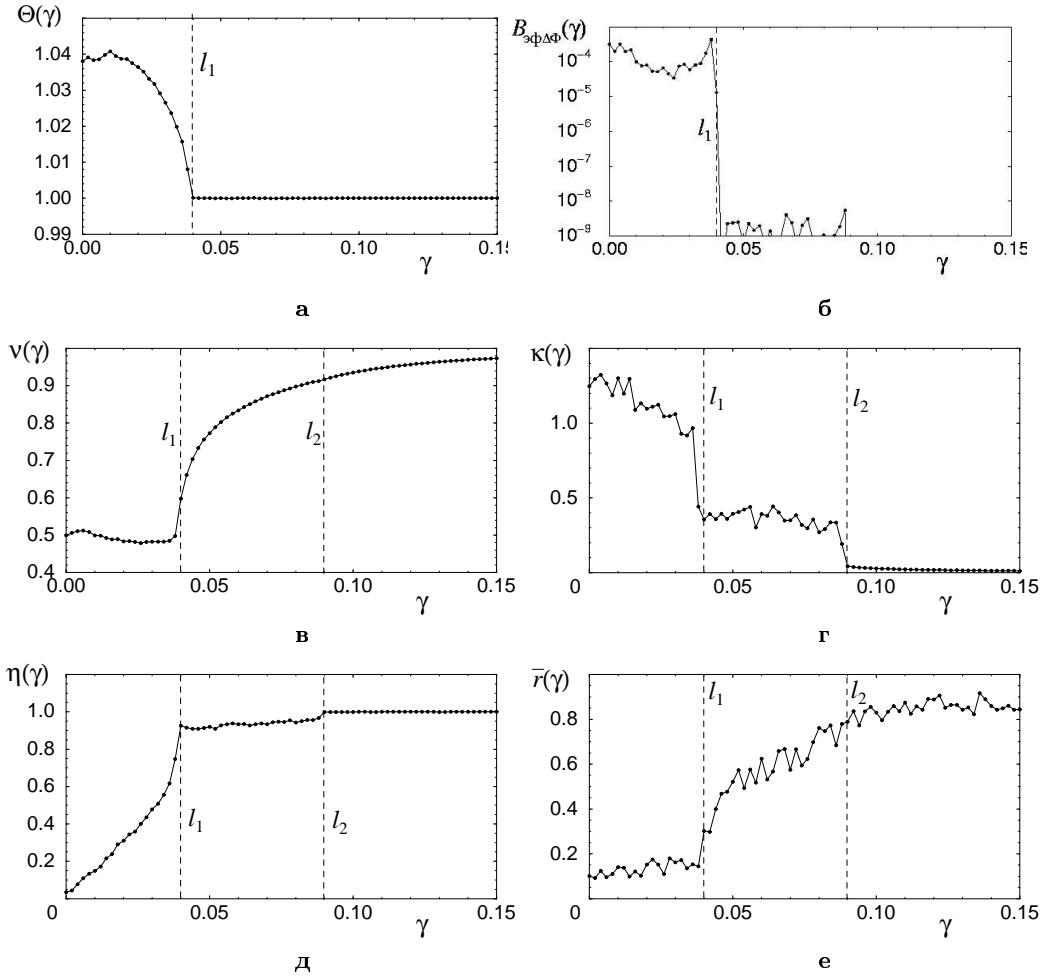


Рис. 4.17. Зависимость различных количественных характеристик степени синхронности взаимодействующих хаотических генераторов от параметра связи γ для модели (4.23) при $\alpha = \beta = 0.2$; $\mu = 6.5$; $\Delta = 0.02$: (а) отношение средних частот $\Theta = \Omega_2/\Omega_1$; (б) коэффициент эффективной диффузии $B_{\Phi\Delta\Phi}$ мгновенной разности фаз; (в) величина ν , задаваемая выражением (4.18); (г) минимальное значение функции подобия κ ; (д) минимальное значение коэффициента взаимной корреляции η ; (е) среднее значение коэффициента когерентности \bar{r} . Пунктирными линиями l_1 , l_2 отмечены границы фазовой и lag-синхронизации, соответственно

соответственно, должны применяться с учетом того, какой именно эффект синхронизации изучается. Кроме выше рассмотренных, применяются и другие характеристики степени синхронизации, например, основанные на расчете взаимной или условной информации [114].

4.7 Выводы

Эффекты, рассмотренные в данной главе, позволяют утверждать, что способность к синхронизации в той или иной мере присуща всем автоколебательным системам, как бы ни была сложна их динамика. Однако, как именно проявится фундаментальное свойство синхронизации, какие именно эффекты, связанные с синхронизацией, возможно наблюдать для той или иной системы, зависит от характеристик хаотического аттрактора. Наиболее последовательно классическая теория синхронизации применима к автогенераторам в режиме спирального аттрактора. Для них возможна частотно-фазовая синхронизация. По своим спектрально - корреляционным характеристикам такие хаотические автогенераторы подобны периодическим генераторам, находящимся под действием шума [115, 116]. В то же время, в отличие от зашумленных генераторов, частотно фазовая синхронизация в детерминированном режиме спирального хаоса является строгой (т.е. мгновенная фаза остается захваченной сколь угодно долго и эффективная диффузия разности фаз в области синхронизации строго равна нулю).

Для других типов хаотических аттракторов (винтового аттрактора, аттрактора Лоренца, двойной спирали Чуа и иных аттракторов переключательного типа) строгая частотно-фазовая синхронизация не наблюдается, но возможны другие эффекты, такие как частичная фазовая синхронизация, синхронизация переключений, полная или обобщенная синхронизация. Исследование каждого из эффектов синхронизации хаоса требует своих методов проведения численных и натурных экспериментов и своих, наиболее подходящих для рассматриваемого случая средств диагностики и характеристик степени синхронизации.

5. Синхронизация стохастических колебаний

5.1 Введение

Одним из актуальных направлений в области нелинейной динамики, как уже упоминалось, является обобщение классических представлений о синхронизации периодических автоколебаний на случай более сложных колебательных процессов. Исследования в этом направлении привели к разработке представлений о синхронизации квазипериодических и даже хаотических автоколебаний, описанных в предыдущих разделах. Вне рассмотрения остались лишь случайные или стохастические колебания. Возникает вопрос: возможно ли конструктивно рассмотреть задачу о синхронизации стохастических колебаний? Что понимать в этом случае под эффектом синхронизации случайных колебательных процессов? Как связать классические представления теории синхронизации с процессами, происходящими в стохастических системах, характеризующимися непрерывным широкополосным спектром мощности? Ответы на поставленные вопросы в общем случае пока не получены, однако для определенного класса стохастических систем их можно обоснованно представить.

Центральной идеей синхронизации является концепция установления во взаимодействующих подсистемах равенства (или кратности) характерных временных масштабов (частот), обусловленного именно взаимодействием. Это равенство (или кратность) должно сохраняться в некоторой конечной области изменения управляющих параметров, которая представляет собой область синхронизации. Если мы хотим поставить и решить задачу синхронизации стохастических колебаний, необходимо выбрать такие системы, для которых можно обоснованно ввести понятие характерного времени (частоты), описывающего стохастический колебательный процесс. Если это возможно и характерное время (частота) определены, то имеет смысл постановка и решение задачи о вынужденной или взаимной синхронизации именно указанных характерных временных (частотных) масштабов стохастических колебаний, то есть задачи стохастической синхронизации.

Рассмотрим примеры нескольких стохастических систем, для которых можно корректно определить характерные времена или частоты и попытаться рассмотреть эффект синхронизации.

Модель передемпированного бистабильного осциллятора под действием шума. Рассмотрим модель передемпированного бистабильного осциллятора, которая описывает движение броуновской частицы в пределе большого трения в двухямном потенциале $U_0(x) = -x^2/2 + x^4/4$ под действием белого шума $\xi(t)$ интенсивности D [117, 118]:

$$\dot{x} = x - x^3 + \sqrt{2D}\xi(t). \quad (5.1)$$

Система (5.1) моделирует случайный процесс, для которого можно ввести в рассмотрение два временных масштаба. Один обусловлен случайными блужданиями частицы в окрестности одного или другого состояния равновесия и характеризует внутрияямную (или локальную) динамику. Для достаточно высоких потенциальных барьеров (или глубоких потенциальных ям) этот временной масштаб практически не зависит от интенсивности шума.

Нас будет интересовать второй масштаб времени, который характеризует среднее время перехода частицы через потенциальный барьер (глобальная динамика). Ему отвечает средняя частота переходов через потенциальный барьер – частота Крамерса. Отметим, что процесс переходов через потенциальный барьер характеризует индуцированные шумом колебания и в отсутствие шума не имеет места. Рисунок 5.1,а иллюстрирует временную зависимость $x(t)$, полученную интегрированием стохастического уравнения (5.1). Четко видны случайные колебания в окрестности равновесий $x_0 = \pm 1$ (локальная динамика) и случайные переключения, связанные с переходами через барьер (глобальная динамика).

Внутрияямная (локальная) динамика не является для нас существенной. Во многих задачах используется метод двух состояний для фильтрации внутрияямных колебаний. Нахождению частицы в окрестности минимума потенциала $x_0(t) = -1$ ставится в соответствие значение $x(t) = -1$, а минимума $x_0(t) = +1$ – значение $x(t) = +1$. После такой фильтрации сигнал $x^0(t)$ преобразуется в случайный телеграфный процесс, показанный на рис. 5.1,б.

Отфильтрованный процесс, как видно из рис. 5.1,б, представляет собой случайную последовательность испульсов и может быть охарактеризован некоторой средней частотой переключений. Для осциллятора (5.1) эта частота была рассчитана Крамерсом и носит его имя. Частота Крамерса зависит от интенсивности шума и энергии потенциального барьера [119]:

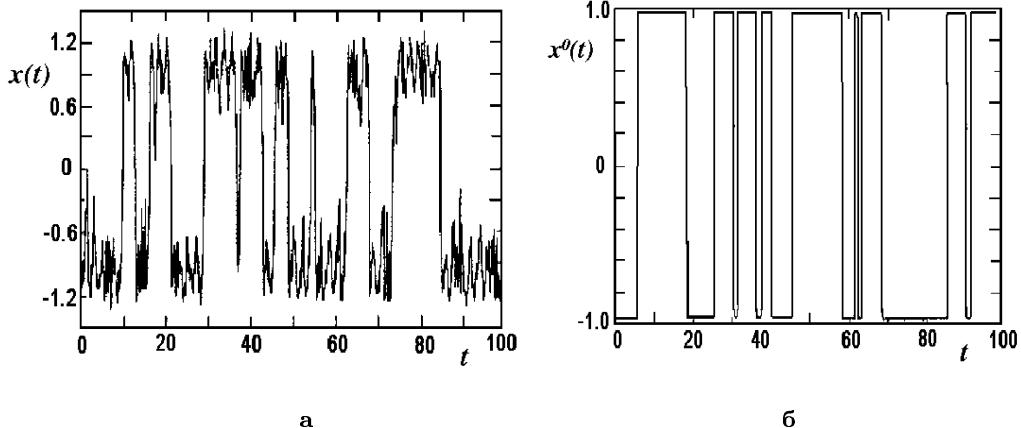


Рис. 5.1. Решение уравнения (5.1) $x(t)$ для $D = 0.05$ (**а**); сигнал $x^0(t)$, отфильтрованный методом двух состояний (**б**)

$$r = \frac{1}{\langle T \rangle} = \nu \exp[-\Delta U_0/D], \quad (5.2)$$

где ν – некоторая константа, $\langle T \rangle$ – среднее время пребывания частицы в окрестности одного из состояний равновесия, ΔU_0 – потенциальный барьер, D – интенсивность шума. Как видно из выражения (5.2), частота Крамерса при фиксировании ΔU_0 управляетяется шумом и монотонно возрастает с ростом интенсивности D .

Отметим важное обстоятельство. Несмотря на то, что частота переключений имеет простой и понятный физический смысл, спектр процесса $x(t)$ является сплошным типа Лоренциана и не содержит явных выбросов на частоте Крамерса. Причина понятна: процесс $x(t)$ – истинно случайный, следовательно, и последовательность времен пребывания T_1, T_2, \dots, T_n – также случайна. Частота Крамерса вводится как среднее по ансамблю значение $r = 1/\langle T \rangle$ и не выделяется в спектре колебаний как ярко выраженная спектральная линия.

Рассмотрим второй класс систем, который во многом сходен с переключениями в бистабильном осцилляторе, но имеет некоторые специфические особенности. Обратимся к простой одномерной нелинейной дискретной системе [120, 121]:

$$x_{n+1} = (\alpha x_n - x_n^3) \exp(-x_n^2/b) + \sqrt{(2D)}\xi(n), \quad (5.3)$$

где α – управляющий параметр, D – интенсивности случайного процесса $\xi(n)$. Экспоненциальный множитель $\exp(-x_n^2)/b$ введен в систему с целью избежать ухода решения в бесконечность и является несущественным.

Система (5.3) в отсутствие шума имеет хаотический аттрактор, структура которого зависит от параметра α . На рис. 5.2,а,б приведены плотности распределения $p(x)$ системы (5.3) для двух характерных значений параметра α . При значении параметра $\alpha < \alpha^* = 2.839\dots$ в системе существуют два хаотических аттрактора, разделенных седловой точкой $x_n^0 = 0$. При достижении параметром α критического значения α^* реализуется кризис и аттракторы объединяются в единый (рис. 5.2,б). Существование двух симметричных хаотических аттракторов в определенном смысле дает возможность обобщения эффектов, рассмотренных выше для бистабильного осциллятора. Действительно, воздействуя шумом на систему, возможно индуцировать переходы от одного аттрактора на другой и обратно. Различия с процессами в системе (5.1) будут связаны исключительно с локальной динамикой. Эти различия несущественны и их роль практически будет отсутствовать, если использовать фильтрацию процесса методом двух состояний.

Интерес представляет случай кризиса аттракторов (рис. 5.2,б). В отсутствие шума система (5.3) будет генерировать хаотический (непериодический) процесс $x(t)$, при котором траектория будет последовательно посещать две области единого аттрактора: $x < 0$ и $x > 0$. Этот процесс

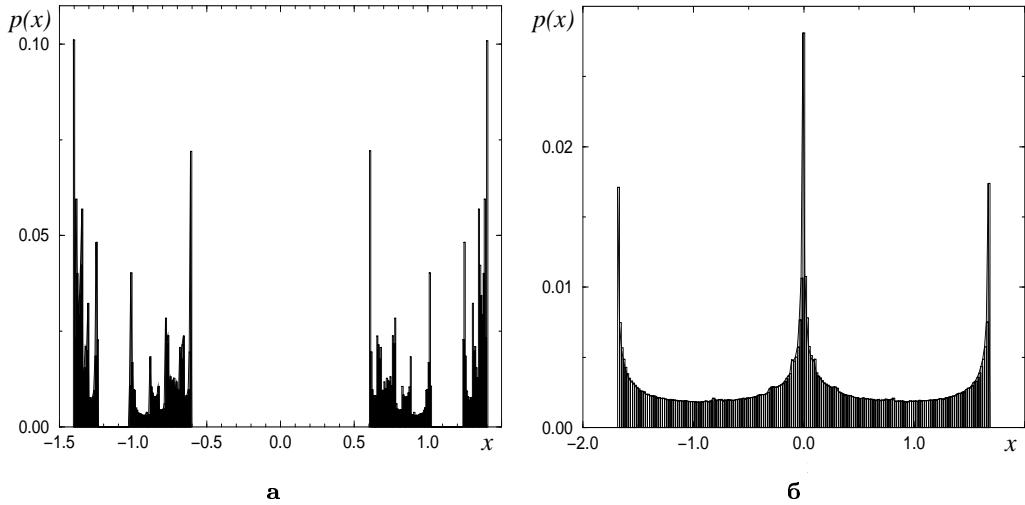


Рис. 5.2. Стационарная плотность распределения вероятности траекторий на аттракторах отображения (5.3) при $A = D = 0$ и $b = 10$ для следующих значений параметра α : 2.5 (а) и 2.84 (б)

будет нерегулярным и ему можно однозначно поставить в соответствие среднюю частоту переключений. Как показали эксперименты, эта частота характеризует систему в отсутствие шума и может управляться изменением параметра α .

В настоящем разделе представлены результаты анализа эффекта синхронизации средней частоты переключений в системах, относящихся к описанным двум классам систем с переключениями, индуцированными внешним шумом и осуществляемыми в хаотических системах без внешних шумов.

5.2 Внешняя синхронизация процесса переключений в бистабильном осцилляторе под действием шума и периодического сигнала

Обратимся к модели передемпфированного осциллятора (5.1), в который введем гармоническое воздействие амплитуды A и частоты Ω [47, 122]:

$$\dot{x} = \alpha x - \beta x^3 + \sqrt{2D} \xi(t) + A \cos(\Omega t + \varphi_0). \quad (5.4)$$

Коэффициенты α и β введены в систему с целью обеспечить возможность управления величиной потенциального барьера. Система (5.4) не имеет собственной детерминированной частоты, ее спектр (в отсутствие модуляции) представляет собой лоренциан, т.е. является сплошным. В то же время система характеризуется управляемым шумом временным масштабом – средним временем выхода из потенциальной ямы, которому в частотной области отвечает средняя частота переключений. Периодический сигнал амплитуды A по отношению к бистабильному осциллятору представляет собой как бы внешние "часы" с частотой Ω и начальной фазой φ_0 . (Далее производилось усреднение по равномерно распределенной фазе φ_0 .)

Будем полагать, что в стохастическом дифференциальном уравнении (СДУ) (5.4) $\alpha, \beta > 0$, $\varphi_0 = 0$ и амплитуда модуляции A является малой, так что в отсутствие шума процессы переключений не происходят. Более того, полагаем, что частота модуляции мала по сравнению со скоростью релаксации внутри ям.

Введем в рассмотрение аналитический сигнал $w(t) = x(t) + iy(t)$, где $y(t)$ – преобразование Гильберта исходного процесса $x(t)$:

$$y(t) = H[x] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x(t - \tau) - x(t + \tau)}{\tau} d\tau. \quad (5.5)$$

Мгновенные амплитуда и фаза процесса определяются соответственно как абсолютное значение и аргумент комплексной функции $w(t)$:

$$w(t) = R(t) \exp[i\Phi(t)]. \quad (5.6)$$

Применяя концепцию аналитического сигнала к (5.4), получим следующее СДУ для аналитического сигнала $w(t)$:

$$\dot{w} = \alpha w - \frac{\beta}{4} (3R^2 w + w^3) + \psi(t) + A \exp(i\Omega t), \quad (5.7)$$

где $\psi(t) = \xi(t) + i\eta(t)$ – аналитический шум, $\eta(t)$ – преобразование Гильберта от $\xi(t)$. Из уравнения (5.7) легко записать СДУ для мгновенных амплитуды и фазы:

$$\begin{aligned} \dot{R} &= \alpha R - \frac{\beta}{2} R^3 [1 + \cos^2(\phi + \Omega t)] + A \cos \phi + \xi_1(t), \\ \dot{\phi} &= -\Omega - \frac{A}{R} \sin \phi - \frac{\beta}{4} R^2 \sin[2(\phi + \Omega t)] + \frac{1}{R} \xi_2(t), \end{aligned} \quad (5.8)$$

где $\phi(t) = \Phi(t) - \Omega t$ есть мгновенная разность фаз. Источники шума $\xi_{1,2}(t)$ определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \xi_1(t) &= \xi(t) \cos \Phi + \eta(t) \sin \Phi, \\ \xi_2(t) &= \eta(t) \cos \Phi - \xi(t) \sin \Phi. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Второе уравнение в (5.8), описывающее эволюцию разности фаз, сходно по структуре с соответствующим уравнением для синхронизованного генератора Ван дер Поля с шумом. Отличие заключается в том, что в этом уравнении, естественно, отсутствует член, отражающий наличие расстройки по частоте. Вместо него присутствует только член Ω . Это является еще одним фактором, свидетельствующим об отсутствии детерминированного временного масштаба в системе.

Фазовая синхронизация процессов переключения периодическим сигналом. Зависимость разности фаз от времени, вычисленная в рамках концепции аналитического сигнала, представлена на рис. 5.3,а для различных значений интенсивности шума. Наклон кривых дает разность между мгновенной частотой процесса x и Ω . Видно, что существует оптимальный уровень шума, при котором разность фаз равна нулю. Кроме этого, для данной интенсивности шума и заданной амплитуды воздействия фаза оказывается захваченной в течение времени наблюдения.

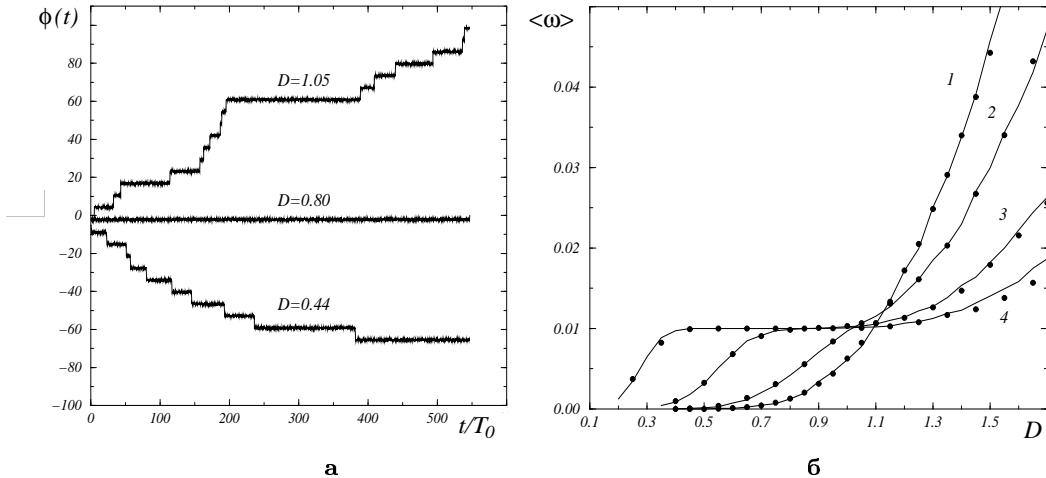


Рис. 5.3. (а) Зависимость мгновенной разности фаз ϕ от времени для указанных значений интенсивности шума и для $A = 3$; (б) средняя частота (сплошная линия) и средняя частота переключений (\bullet) как функции интенсивности шума для различных значений амплитуды воздействия: 1 – $A = 0$, 2 – $A = 1$, 3 – $A = 2$, and 4 – $A = 3$. Значения остальных параметров: $\alpha = 5$, $\beta = 1$ и $\Omega = 0.01$

Отклонения от оптимального уровня шума приводят к разности фаз и появлению сбоев фаз, что ведет к постоянному отличному от нуля наклону зависимостей $\Phi(t)$. Зависимости средних частот, определяемых по формуле $\langle \omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{d\Phi(t)}{dt} dt$, от интенсивности шума приведены на рис. 5.3, б для различных значений амплитуды сигнала A . Представленные результаты наглядно свидетельствуют об эффекте захвата средней частоты выходного сигнала $\langle \omega \rangle$ при некотором оптимальном уровне шума. Этот эффект был впервые установлен в работе [48] для случая стохастического триггера Шмитта.

Рисунок 5.3, б иллюстрирует как наличие порога синхронизации, так и расширение области синхронизации с ростом амплитуды модуляции. В отсутствие воздействия ($A = 0$) средняя частота монотонно растет в соответствии с законом Крамерса. При значении $A \geq 1$ на графике зависимости $\langle \omega \rangle$ от D появляется слабо заметный изгиб; при $A = 2$ становится четко заметной "полочка", где $\langle \omega \rangle$ не зависит от D . Дальнейший рост амплитуды $A = 3$ ведет к расширению зоны синхронизации.

Как показывалось выше, совпадение частот сопровождается по крайней мере малым числом сбоев фаз. Поэтому наряду с захватом средней частоты флукутации разности фаз становятся минимальными. В соответствии с введенным определением можно сказать, что случайный процесс

переключений $x(t)$ эффективно синхронизован с внешней периодической силой.

Рассчитаем коэффициент эффективной диффузии:

$$D_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\langle \phi^2(t) \rangle - \langle \phi(t) \rangle^2]. \quad (5.10)$$

D_{eff} отвечает за качество синхронизации: чем меньше коэффициент эффективной диффузии, тем больше продолжительность интервалов времени захвата фаз. Результаты численных вычислений представлены на рис. 5.4. Как видно из графиков, с ростом амплитуды воздействия зависимости D_{eff} от интенсивности шума все более четко демонстрируют наличие минимума. Количественные значения D_{eff} в области синхронизации свидетельствуют о том, что эффект захвата частоты и фазы имеет место на временах, превышающих период внешней силы более чем в 10^3 раз. Таким образом, наличие вынужденной эффективной синхронизации на основном тоне установлено для бистабильного осциллятора. Этот эффект проявляется в захвате средней частоты переключений внешним гармоническим сигналом и минимизации коэффициента диффузии. Важно отметить, что добавление шума в систему приводит к упорядочиванию ее фазовой динамики: увеличение интенсивности шума вызывает уменьшение диффузии разности фаз.

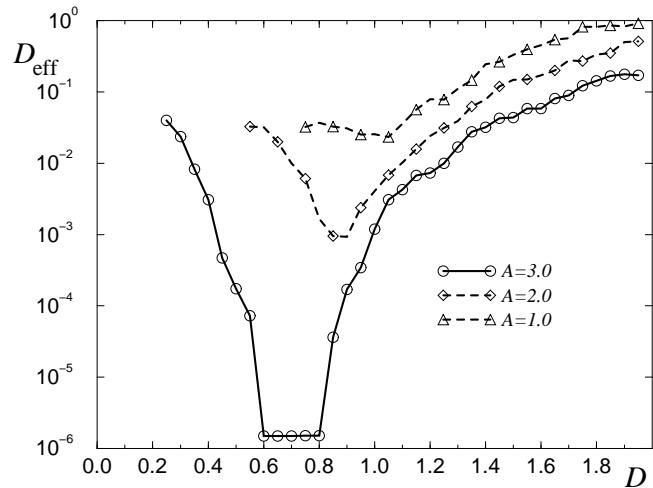


Рис. 5.4. Коэффициент эффективной диффузии как функция интенсивности шума для различных значений амплитуды воздействия (параметры: $\alpha = 5$, $\beta = 1$, $\Omega_0 = 0.01$)

5.3 Внешняя стохастическая синхронизация триггера Шмитта

Рассмотрим результаты экспериментального исследования индуцированной шумом синхронизации в стохастическом триггере Шмитта под действием слабого периодического сигнала. Тригер Шмитта представляет собой достаточно простое электронное устройство с заданным порогом срабатывания K . Если сигнал превышает пороговое значение $x(t) \geq K$, триггер переходит в состояние $x(t) \equiv 1$. При $x(t) \leq -K$, триггер переключается в состояние $x(t) \equiv -1$. Таким образом, под действием внешнего шумового сигнала, мгновенные значения которого будут случайным образом превышать по модулю порог срабатывания, сигнал на выходе триггера будет представлять собой случайный телеграфный процесс, представленный на рис. 5.1,б. Математическую модель динамики триггера под действием шума и гармонического сигнала можно представить следующим образом:

$$x(t) = \text{sgn}[Kx(t) - D\xi(t) - A \sin(\Omega t)], \quad (5.11)$$

где K – порог срабатывания триггера, D – интенсивность шума $\xi(t)$, A и Ω – амплитуда и частота внешней гармонической силы.

Результаты экспериментальных измерений и численные расчеты средней частоты переключений в триггере Шмитта приведены в работе [48]. На триггер Шмитта с порогом срабатывания $\Delta U = 150$ мВ подавался шумовой сигнал с частотой среза $f_c = 100$ кГц и периодический сигнал с частотой $f_0 = 100$ Гц.

По выходному сигналу, представляющему собой телеграфный процесс и оцифровываемому в компьютере, измерялась средняя частота переключений $\langle f \rangle = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \frac{\pi}{t_{k+1} - t_k}$. Результаты измерений показаны на рис. 5.5,а. При слабом сигнале зависимость средней частоты от интенсивности шума следует закону Аррениуса, экспоненциально возрастая с ростом интенсивности шума. С увеличением амплитуды сигнала эта зависимость становится качественно иной: появляется область значений интенсивности шума, в которой средняя частота практически не меняется с ростом шума и в пределах погрешности эксперимента остается равной частоте сигнала. Наблюдается эффект захвата средней частоты переключений.

Повторяя измерения средней частоты для разных значений амплитуды и частоты сигнала, можно получить области синхронизации на плоскости параметров “интенсивность шума – амплитуда сигнала”, в которых

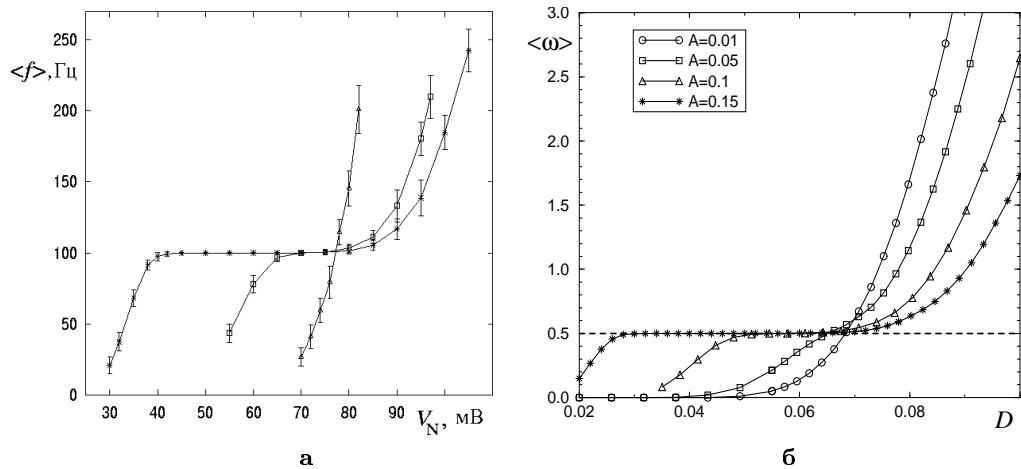


Рис. 5.5. Зависимости средней частоты выходного сигнала триггера Шмитта от интенсивности шума для амплитуд сигнала $A = 0$ мВ (\triangle), $A = 60$ мВ (\square), $A = 100$ мВ ($*$), полученные в физическом эксперименте (а) и численным моделированием системы (5.11) (б). Порог срабатывания триггера $K = 0.2$, частота сигнала $\Omega = 0.5$

средняя частота равна частоте сигнала. Области синхронизации, напоминающие языки Арнольда, показаны на рис. 5.6. Как видно из рисунка, существует пороговое значение амплитуды сигнала A_{th} , начиная с которого наблюдается эффект захвата средней частоты. При достижении порога периодический сигнал начинает эффективно управлять стохастической

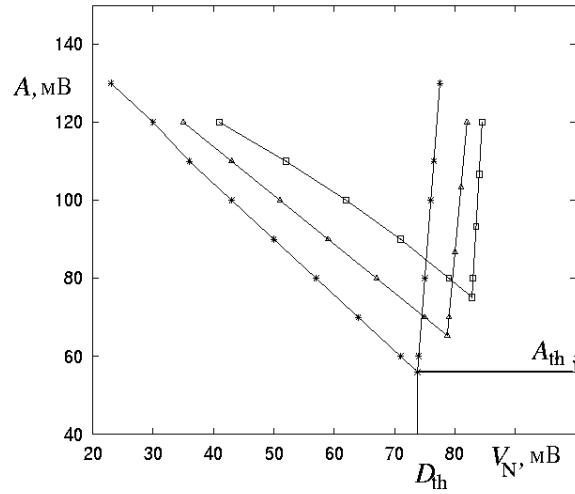


Рис. 5.6. Области синхронизации для триггера Шмитта (эксперимент) для разных частот сигнала: $f_0 = 100$ Гц ($*$), $f_0 = 250$ Гц (\triangle), $f_0 = 500$ Гц (\square)

динамикой переходов. С ростом частоты сигнала эффект синхронизации ухудшается: во-первых, сужаются области синхронизации, во-вторых, увеличиваются пороговые значения амплитуды сигнала (см. рис. 5.6).

На рис. 5.7 показана плотность вероятности времен пребывания $p(t)$ триггера в одном из метастабильных состояний при различных уровнях шума. При слабом шуме ($V_N = 35$ мВ) $p(t)$ содержит несколько пиков на временах, кратных половине периода сигнала. В области синхронизации ($V_N = 70$ мВ) среднее время нахождения триггера в одном из состояний совпадает с половиной периода и плотность вероятности времен нахождения содержит ярко выраженный пик при $t = T_0/2$. При большом шуме ($V_N = 115$ мВ), вне области синхронизации, среднее время, необходимое для переключения, много меньше половины периода. За период система успевает многократно переключаться из одного состояния в другое и появляется пик, соответствующий малым временам переключений. Пик, со-

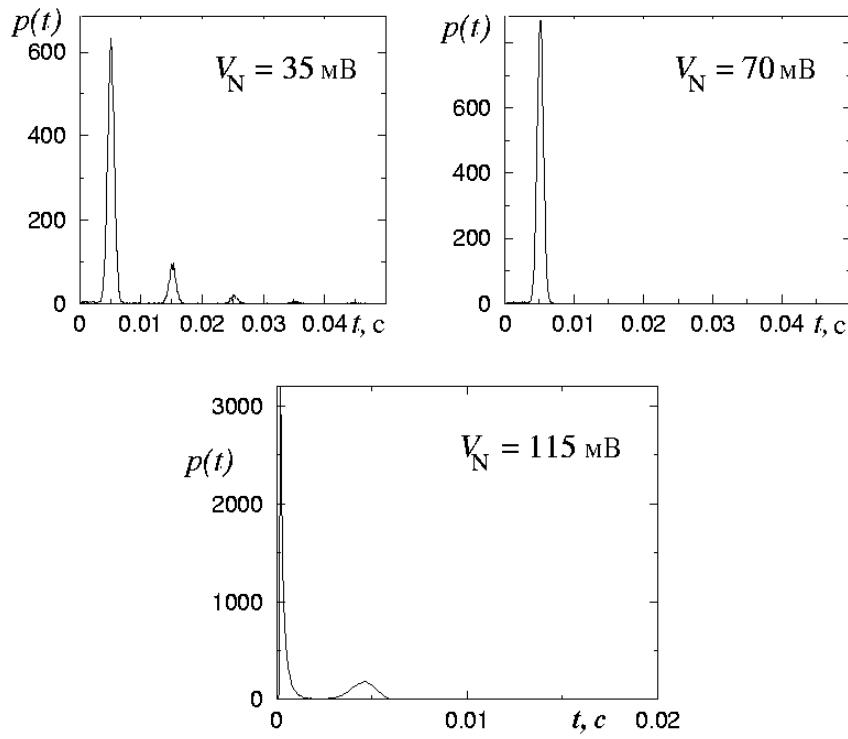


Рис. 5.7. Плотность вероятности времен пребывания триггера Шмитта в одном из состояний; амплитуда сигнала $A = 100$ мВ, частота сигнала $f_0 = 100$ Гц

ответствующий половине периода сигнала, размывается и когерентность выходного сигнала разрушается.

Проведем сравнение полученных экспериментальных результатов с данными численного моделирования. С этой целью воспользуемся уравнением модели (5.11), задав следующие значения параметров: $K = 0.2$, $\xi(t)$ выберем в виде экспоненциально коррелированного шума с временем корреляции $\tau_c = 10^{-2}$ и интенсивностью D , описываемый процессом Орнштейна – Уленбека.

Результаты расчетов средней частоты как функции интенсивности шума, проведенных по уравнению (5.11), показаны на рис. 5.5,б и демонстрируют поведение, идентичное измеренному в эксперименте (рис. 5.5,а). На рис. 5.8,а показана эволюция мгновенной разности фаз ϕ триггера и входного сигнала для случая $A = 0.1$. При оптимальном уровне шума ($D = 0.06$) разность фаз остается постоянной в течение времени наблюдения. Вне области синхронизации ($D = 0.04$, $D = 0.08$) скачки фазы гораздо более частые, что приводит к быстрой диффузии фазы и, следовательно, к отсутствию синхронизации.

В случае малой амплитуды сигнала ($A \leq A_{\text{th}}$) явление захвата средней частоты отсутствует. Результаты расчета мгновенной разности фаз свидетельствуют также об отсутствии фазовой синхронизации: наблюдается значительная диффузия фазы и временная реализация мгновенной разности фаз представляет собой пример случайного блуждания [122].

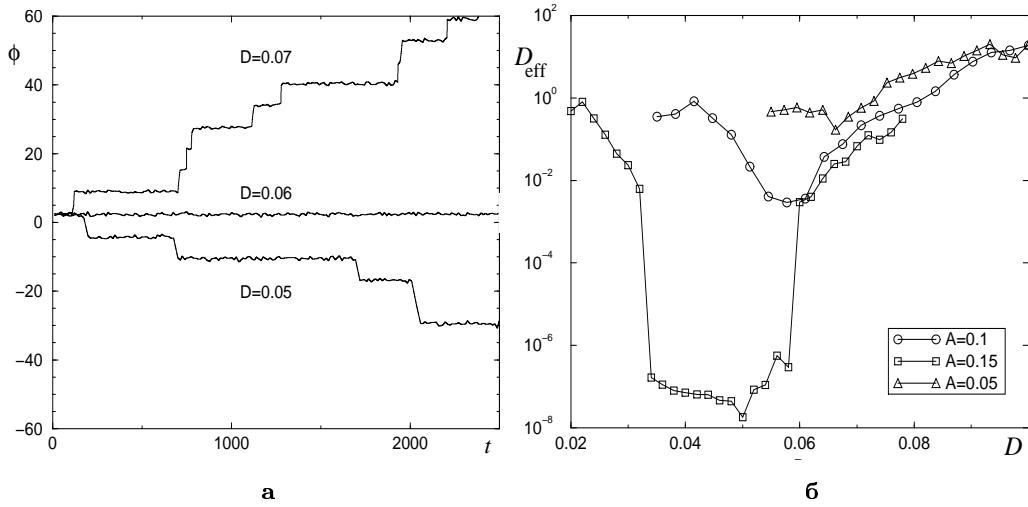


Рис. 5.8. (а) Временная эволюция разности фаз при $A = 0.1$, $\Omega = 0.5$ для различных значений интенсивности шума; (б) зависимость коэффициента диффузии D_{eff} триггера Шмитта при $K = 0.2$, $\Omega = 0.5$ для разных значений амплитуды сигнала

Результаты расчета коэффициента диффузии разности фаз показаны на рис. 5.8,б. Зависимость $D_{\text{eff}}(D)$ характеризуется минимумом, что является следствием эффекта стохастической синхронизации.

Полученные данные свидетельствуют о том, что внешний периодический сигнал достаточной амплитуды синхронизирует стохастическую динамику переходов. Это явление сопровождается захватом мгновенной разности фаз и средней частоты.

5.4 Внешняя и взаимная стохастическая синхронизация процессов переключений в хаотических системах

Как было отмечено во введении, определенный класс хаотических систем в результате кризиса реализует режим непериодических переключений между выделенными подмножествами хаотического аттрактора. В силу нелинейности системы частота этих переключений контролируется не внешним шумом, а управляющим параметром. Как показали исследования, в таких системах возможно реализовать режим фазовой стохастической синхронизации. Для иллюстрации рассмотрим внешнюю и взаимную синхронизацию процессов переключений в ряде систем с детерминированной хаотической динамикой [49, 123].

Внешняя синхронизация. Обратимся к отображению

$$x_{n+1} = (ax_n - x_n^3) \exp(-x_n^2/b) + A \sin(\Omega n) \quad (5.12)$$

в режиме перемежаемости "хаос – хаос" при $a > a^* = 2.839\dots$. Рассмотрим динамику системы в отсутствие внешнего шума для достаточно больших значений амплитуды внешней силы A . При этом процесс переключений принципиально нелинеен, его статистика будет существенно зависеть от параметра a . Используя метод двух состояний, вычислим эволюцию плотности времен пребывания $p(\tau)$ в отдельно взятой потенциальной яме при вариации параметра a . Результаты представлены на рис. 5.9 и качественно повторяют данные, полученные для триггера Шмитта (рис. 5.7). При оптимальном значении $a = 8.34$ распределение имеет единственный гауссообразный пик с максимумом при $\tau = 0.5$, что соответствует равенству средней частоты переключений между хаотическими аттракторами частоте внешней силы.

Эффект захвата средней частоты переключений внешним сигналом для различных значений параметра A иллюстрирует рис. 5.10,а. С

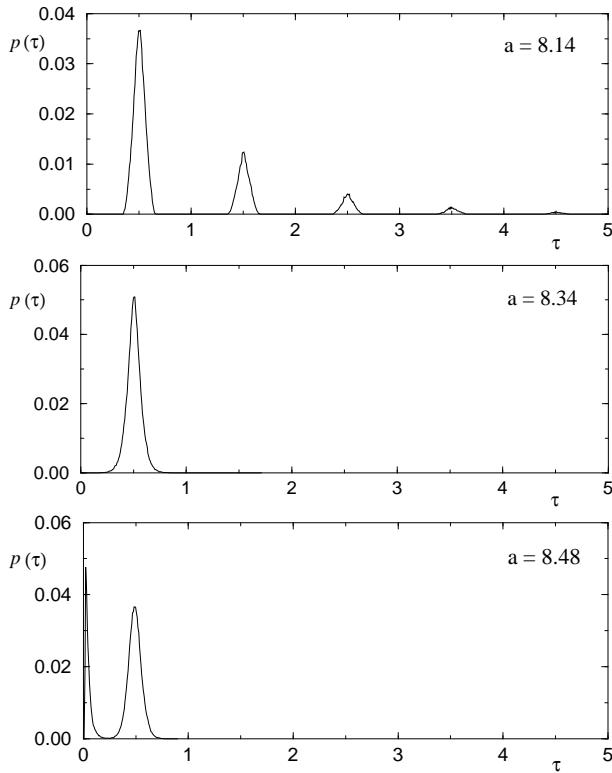


Рис. 5.9. Плотность вероятности времен пребывания в одной из потенциальных ям для отображения (5.12) для трех различных значений управляющего параметра a . Зависимости напоминают соответствующие графики для триггера Шмитта (см. рис. 5.7). τ измеряется в единицах периода внешней силы

ростом амплитуды сигнала воздействия область синхронизации увеличивается, как и следовало ожидать. Из рис. 5.10,б видно, что данная область представляет собой типичную зону синхронизации, как и в случае триггера Шмитта (рис. 5.5). Как видно из рис. 5.10,б, имеет место порог синхронизации. Таким образом, эффект внешней синхронизации частоты переключений в детерминированной хаотической системе уверенно регистрируется и оказывается качественно эквивалентным эффекту индуцированной шумом стохастической синхронизации.

Эффект захвата средней частоты переключений является универсальным и проявляет себя в широком классе динамических систем с режимом перемежаемости. Исследуем в качестве примера нелинейную систему Чуа, реализующую режим динамической перемежаемости [124]. Цепь Чуа описывается системой уравнений:

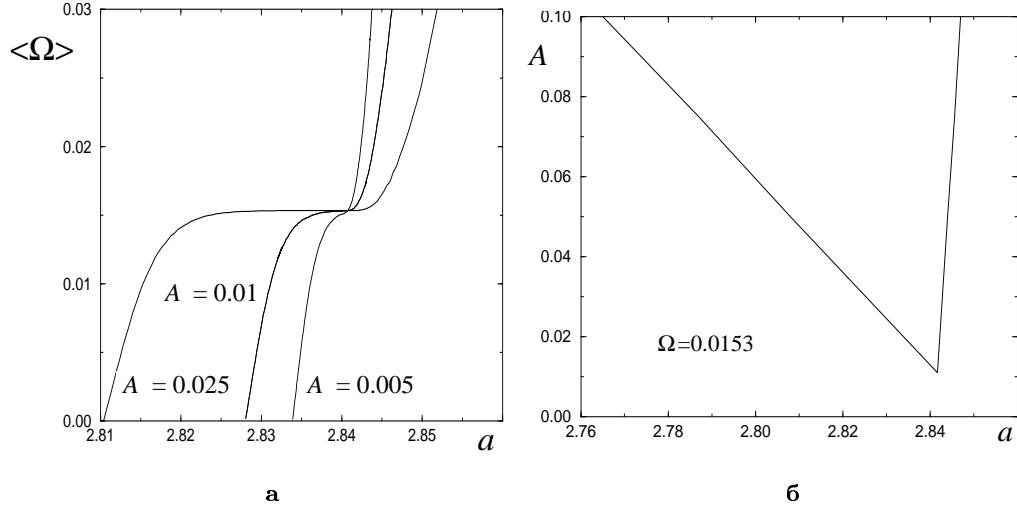


Рис. 5.10. (а) Средняя частота переключений в зависимости от параметра a для разных значений амплитуды сигнала, (б) область синхронизации частоты переключений для отображения (5.12)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha[y - h(x)], \\ \dot{y} &= x - y + z, \\ \dot{z} &= -\beta y + F(t), \end{aligned} \quad (5.13)$$

где $h(x) = m_1x + 0.5(m_0 - m_1)(|x+1| - |x-1|)$ – кусочно-линейная характеристика системы, параметры которой фиксированы: $m_0 = -1/7$, $m_1 = 2/7$; $F(t) = A \cos(\Omega t)$ – внешняя периодическая сила.

Как показано в работе [120], процесс переключений в хаотической бистабильной системе (5.13) может быть индуцирован шумом либо иметь чисто динамическую природу. Применим метод двух состояний. Зафиксируем значение параметра $\beta = 14.286$. Динамика системы (5.13) будет зависеть от величины параметра α , а также от амплитуды A и частоты Ω внешнего сигнала. В отсутствие воздействия ($A = 0$) режим перемежаемости реализуется в системе (5.13) при $\alpha \approx 8.8$. Для $\alpha > 8.8$ средняя частота переключений (аналог частоты Крамерса) монотонно возрастает с увеличением α . Выберем значение амплитуды $A = 0.1$, когда реакция системы на внешнее воздействие принципиально нелинейна.

На рис. 5.11 представлены результаты расчета плотности распределения времен возврата $p(\tau)$ для различных значений параметра α [125]. Наблюдается удивительное сходство с данными, приведенными на рис. 5.7 для триггера Шмитта и на рис. 5.9. При определенном значении параметра $\alpha = 8.8325$ распределение $p(\tau)$ имеет практически единственный гаус-

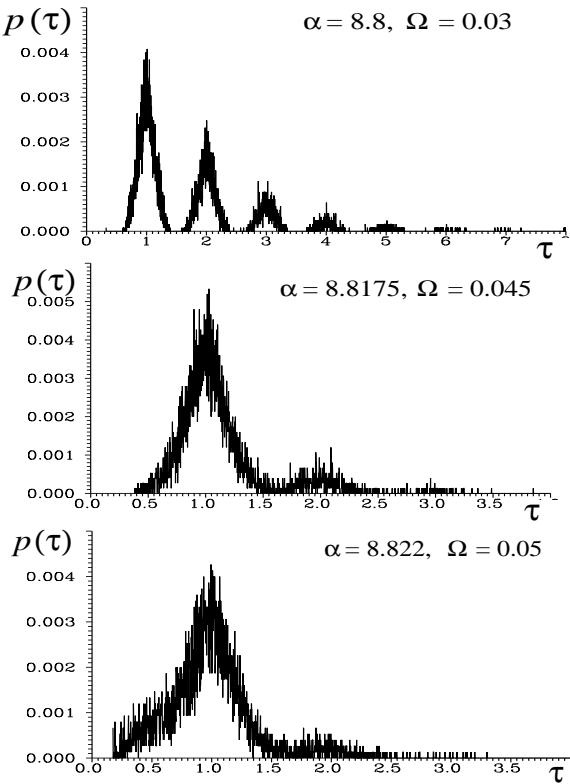


Рис. 5.11. Плотность распределения времен возврата в системе Чуа (5.13) для различных значений параметра α и частоты внешнего сигнала Ω . Время τ измеряется в единицах периода внешнего воздействия $T = 2\pi/\Omega$

сообразный пик с максимумом вблизи $\tau = 1$, что соответствует равенству средней частоты переключений и частоты внешней силы. Регистрируется эффект вынужденной синхронизации, проявляющийся в захвате средней частоты переключений периодическим сигналом.

На рис. 5.12 представлены области синхронизации, полученные в результате физического эксперимента, которые качественно напоминают "языки Арнольда", как и в случае триггера Шмитта (рис. 5.6). Отличия состоят лишь в том, что с ростом частоты сигнала уровень порога синхронизации здесь практически не изменяется, а ширина областей синхронизации увеличивается. Эти отличия обусловлены нелинейными свойствами исследуемой системы (5.13) и не касаются самой сущности наблюдаемого эффекта. Более детальные расчеты свидетельствуют о том, что эффекту синхронизации средней частоты переключений в системах (5.12) и (5.13) отвечает эффект фазовой синхронизации, полностью эквивалентный рас-

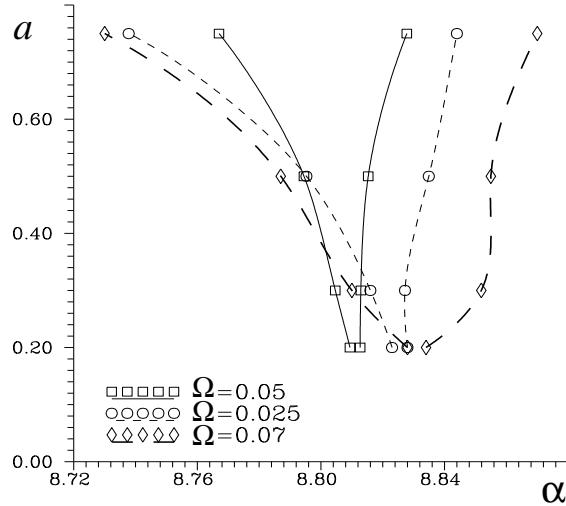


Рис. 5.12. Области синхронизации на плоскости параметров "амплитуда внешнего сигнала – управляющий параметр" для системы (5.13) для трех значений частоты внешнего сигнала Ω

смотренным случаям триггера Шмитта и передемпфированного осциллятора.

Взаимная синхронизация. В качестве примера взаимной синхронизации процессов переключений рассмотрим динамику системы двух связанных моделей Лоренца [126]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sigma(y_1 - x - 1) + \gamma(x_2 - x_1), \\ \dot{y}_1 &= r_1x_1 - x_1z_1 - y_1, \\ \dot{z}_1 &= x_1y_1 - z_1b, \\ \dot{x}_2 &= \sigma(y_2 - x_2) + \gamma(x_1 - x_2), \\ \dot{y}_2 &= r_2x - 2 - x_2z_2 - y_2, \\ \dot{z}_2 &= x_2y_2 - z_2b. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Выберем значения параметров $\sigma = 10$, $r_1 = 28.8$, $r_2 = 28$, $b = 8/3$, соответствующие случаю, когда в каждой из подсистем существует аттрактор Лоренца [127]. Этот аттрактор в парциальной системе можно рассматривать как обобщенный бистабильный осциллятор, в котором имеет место нерегулярный процесс переключений со средней частотой, контролируемой управляющим параметром r [128]. Введение связи ($\gamma > 0$) должно вызывать изменения средних частот переключений в каждой из подсистем и приводить к эффекту взаимной синхронизации.

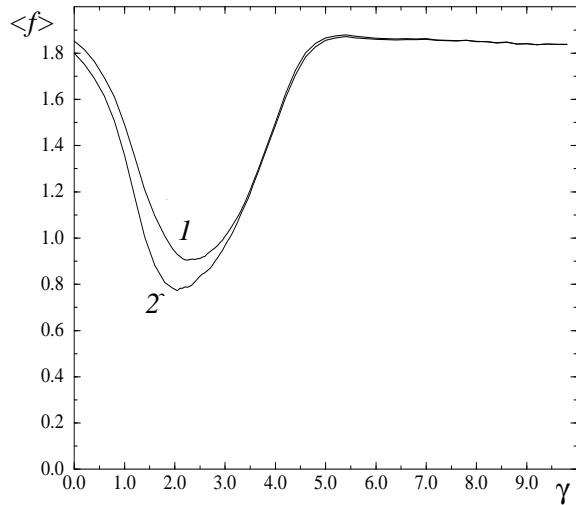


Рис. 5.13. Средние частоты переключений $\langle f_1 \rangle$ (1) и $\langle f_2 \rangle$ (2) для двух связанных неидентичных моделей Лоренца (5.14) в зависимости от степени связи. Параметры: $\sigma = 10$, $r_1 = 28.8$, $r_2 = 28$, $b = 8/3$

Как показали расчеты, проведенные в приближении динамики двух состояний, при значениях коэффициента связи $\gamma > 5$ средние частоты переключений $\langle f_1 \rangle$ и $\langle f_2 \rangle$ практически совпадают (рис. 5.13). Более того, численное моделирование динамики мгновенной разности фаз процессов $x_1(t)$ и $x_2(t)$ подтвердило эффект взаимной синхронизации: при $\gamma > 5$ разность фаз близка к нулю на временах, существенно превышающих среднее время переключений [126]. Таким образом, при сильной связи между двумя хаотическими бистабильными осцилляторами имеет место эффект взаимной синхронизации частот переключений.

5.5 Стохастическая синхронизация как индуцированный шумом порядок

Одной из важных характеристик эффекта синхронизации является повышение степени упорядочивания сигнала в результате синхронизации. Действительно, уже на качественном уровне можно оценить, например, эффект захвата частоты при синхронизации периодических автоколебаний внешним гармоническим сигналом. До наступления эффекта синхронизации в системе наблюдаются двухчастотные колебания, образом которых является двумерный тор. В режиме синхронизации реализуется ре-

жим устойчивых периодических колебаний, которому отвечает предельный цикл. Предельный цикл имеет метрическую размерность равную единице, а тор – двойке. Степени упорядоченности в данном случае можно поставить в соответствие уменьшение размерности предельного множества в фазовом пространстве системы, которое обусловлено эффектом синхронизации. Этот же эффект имеет место и при синхронизации квазипериодических и хаотических автоколебаний. Стохастическая синхронизация также должна приводить к увеличению степени упорядоченности режима колебаний. Для подтверждения такого вывода обратимся к энтропии как наиболее общей характеристике степени случайности процесса. Действительно, стохастическая синхронизация имеет место, как было показано выше, для случайных процессов переключений. Если справедливо утверждение о повышении степени порядка при синхронизации, то энтропия процесса при отсутствии эффекта стохастической синхронизации должна быть больше по величине энтропии процесса в режиме синхронизации. Энтропия как мера степени случайности процесса должна уменьшаться в результате эффекта синхронизации. Покажем, что это действительно так.

Мерой, описывающей передачу случайного сигнала через бистабильную систему, может служить спектр условных энтропий Шеннона. Иерархия условных энтропий Шеннона характеризует корреляции всех высших порядков и в пределе служит мерой упорядоченности процесса.

Анализ в терминах теории информации требует введения символьного алфавита, соответствующего стохастической динамике системы. Для бистабильных стохастических систем естественным является бинарный алфавит, состоящий из двух символов, например, "0" и "1", которые отвечают нахождению системы слева или справа от барьера. Пусть $\mathbf{i}_n = i_1, \dots, i_n$ – двоичная подпоследовательность или слово, состоящее из n букв. Обозначим относительную частоту повторения этого слова в данной последовательности (т.е. вероятность) через $p(\mathbf{i}_n)$. Если последовательность содержит периодическую компоненту, то временные корреляции будут отражаться в высокой структурированности функции распределения слов длины n . Аналогом здесь служит распределение времен пребывания.

Для количественной оценки степени упорядоченности этих структур используется энтропия Шеннона [129], применяемая к распределению слов длины n (n -слов):

$$H_n = - \sum_{(\mathbf{i}_n) \in \{0,1\}^n} p(\mathbf{i}_n) \log_2 p(\mathbf{i}_n). \quad (5.15)$$

H_n называются n -блоковыми энтропиями и интерпретируются как средняя информация, необходимая для предсказания появления слова (i_1, \dots, i_n) длины n .

Условные, или динамические [130, 131], энтропии вводятся для $n = 1, 2, \dots$ как

$$h_n = H_{n+1} - H_n = \left\langle - \sum_{i_{n+1}} p(i_{n+1} | \mathbf{i}_n) \log_2 p(i_{n+1} | \mathbf{i}_n) \right\rangle_{(\mathbf{i}_n)}, \quad (5.16)$$

где $\langle \rangle$ обозначает усреднение по предыстории \mathbf{i}_n . Это определение дополняется “начальным условием”: $h_0 = H_1$. В формуле (5.16) $p(i_{n+1} | \mathbf{i}_n)$ обозначает вероятность наблюдения символа i_{n+1} при условии наблюдения предшествующей последовательности n символов \mathbf{i}_n . Динамические энтропии h_n интерпретируются как средняя информация, необходимая для предсказания символа i_{n+1} (или информация, полученная после его наблюдения) при известной предыстории \mathbf{i}_n (другими словами, h_n характеризует неопределенность в предсказании следующего символа в последовательности \mathbf{i}_n). Корреляции между символами обычно уменьшают это количество информации. Предел h_n при $n \rightarrow \infty$

$$h = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n, \quad (5.17)$$

называется энтропией источника [132]. Энтропия источника определяет минимальное количество информации, необходимое для предсказания следующего символа в последовательности при наличии знания всей предыстории.

Применим подход, основанный на вычислении информационных мер, к данным, полученным из эксперимента с триггером Шмитта (см. раздел 5.3). Двоичные случайные последовательности, генерируемые триггером, записывались с помощью аналого-цифрового преобразователя в компьютер. Одновременно записывались последовательности на входе (сигнал и сигнал + шум), также представленные, в зависимости от знака, в виде нулей и единиц. Во всех экспериментах длина последовательностей равнялась $15000 \Delta t$, где Δt – шаг выборки. Оптимальный шаг выборки, установленный в ходе вычисления энтропийных характеристик, соответствовал 12 точкам на периоде колебаний сигнала: $\Delta t = T_0/12 \approx 8.33 \cdot 10^{-4}$ сек. Мы выбрали режим синхронизации стохастических переключений триггера и захвата средней частоты переключений, который имеет место при амплитуде сигнала $A = 100$ мВ.

Разумно предположить, что последовательность, генерируемая триггером Шмитта, будет максимально упорядочена в режиме стохастической

синхронизации, поэтому можно ожидать следующее поведение энтропии источника: при очень слабом шуме, когда переключения триггера крайне редки, последовательность будет характеризоваться большой степенью избыточности и энтропия будет низка; с ростом шума энтропия должна нарастать, затем убывать, достигая минимума в режиме стохастической синхронизации. Далее энтропия вновь нарастает, так как шум полностью контролирует динамику системы, разрушая режим синхронизации.

Описанная картина полностью подтверждается вычислениями, проведенными по экспериментальным данным [133, 134]. Все энтропийные меры рассчитывались усреднением по 20 реализациям длины $1500\Delta t$. Результаты (рис. 5.14) показывают хорошо выраженный минимум при предполагаемой интенсивности шума. Таким образом, с увеличением интенсивности шума предсказуемость выходной последовательности увеличивается. На выходе обычных линейных фильтров этот важный результат не может наблюдаться в принципе.

Увеличение предсказуемости предполагает повышение степени порядка в выходной последовательности. В режиме стохастической синхронизации энтропии отражают рост периодической части выходного сигнала, тогда при оптимальном уровне шума мы можем говорить об *индукционном шумом порядке* во времени. Упорядоченное состояние означает, что максимальное количество переключений имеет место за время, равное по-

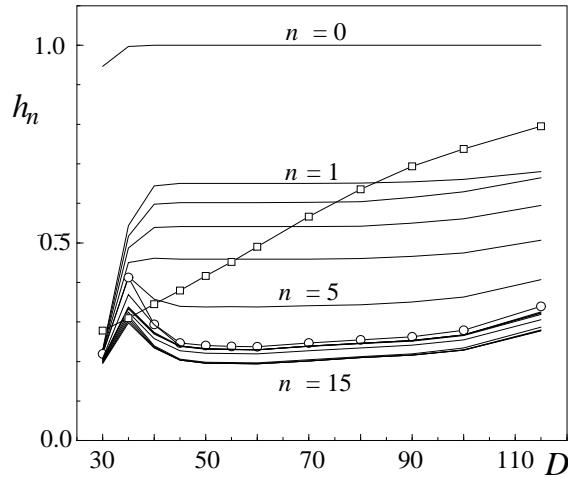


Рис. 5.14. Зависимость динамических энтропий h_n ($n = 0, 1, \dots, 15$) от амплитуды шума. Символами \square показана $h_6(D)$ на входе триггера, а символами \circ – на выходе

ловине периода сигнала, т.е. выход характеризуется более длительными корреляциями со входом.

Отметим, что минимум на графике зависимости энтропии источника от интенсивности шума наблюдается лишь для достаточно больших амплитуд периодического сигнала, когда имеет место явление синхронизации стохастических переключений триггера. В случае слабого сигнала, когда отклик стохастической системы на сигнал является практически линейным, энтропия монотонно возрастает с увеличением шума и в пределе большого шума стремится к 1.

5.6 Выводы

Результаты исследований, описанные в настоящем разделе, свидетельствуют о том, что классические представления о синхронизации колебаний могут быть обобщены и применены к стохастическим процессам. Существенным является требование наличия у стохастических колебаний некоторого характерного времени. Для случайных процессов в бистабильных системах таким является среднее время пребывания или средняя частота переключений. Как было показано, несмотря на случайный характер процесса переключений, среднестатистическая частота может быть синхронизована. При этом реализуются эффекты как внешней, так и взаимной фазовой синхронизации. Эффект стохастической синхронизации проявляется в захвате средней частоты, реализуется в конечной области значений параметров и характеризуется возрастанием степени упорядоченности процесса колебаний в области синхронизации. Стохастическая синхронизация является принципиально нелинейным эффектом, наблюдается лишь при конечных значениях амплитуд сигнала воздействия или при достаточно сильной связи и допускает описание на основе обобщенных представлений теории фазовой синхронизации.

Эффект стохастической синхронизации не является некоторой математической экзотикой. Доказательством могут служить не только результаты физического эксперимента, представленные в настоящем разделе. Эффект стохастической синхронизации является одним из определяющих в понимании процессов усиления и оптимизации отношения сигнал/шум, реализующихся в режиме стохастического резонанса. Показано, что максимальное усиление сигнала в условиях стохастического резонанса при конечных амплитудах воздействующего сигнала имеет место, если реализуется эффект стохастической синхронизации.

Заключение

В книге последовательно изложены результаты исследований одного из важнейших явлений природы – эффекта синхронизации колебаний. Несмотря на достаточно общий характер этого явления, которое проявляется себя в широком классе задач современного естествознания, эффекты синхронизации традиционно и наиболее полно с точки зрения аналитической теории и теории бифуркаций включают в раздел теории нелинейных колебаний. В связи с этим настоящая книга может рассматриваться как учебное пособие для студентов университетов по специальностям, предусматривающим изучение теории колебаний.

Основная цель, которую старались достичь авторы, состояла в детальном изложении классической теории синхронизации периодических автоколебаний и применение этой теории к рассмотрению эффектов синхронизации более сложных колебательных режимов. Учитывая тот факт, что основные результаты по теории синхронизации периодических колебаний были получены в первой половине 20-го столетия и оригинальные статьи того времени сейчас труднодоступны, в настоящей книге подробно решается задача о внешней синхронизации предельного цикла в генераторе Ван дер Поля по результатам классических работ. Рассматривается синхронизация на основе укороченных уравнений, уравнения фазового приближения и дается сопоставление с численным анализом синхронизации с использованием полных уравнений генератора с внешним периодическим воздействием. Приводится теория Стратоновича о влиянии внешнего аддитивного шума на эффект синхронизации предельного цикла в генераторе Ван дер Поля.

Насколько известно авторам, систематическое изложение классической теории синхронизации с привлечением возможностей современного компьютерного моделирования (главы 1–2 книги) проводится впервые и представляет собой учебно-методическую ценность. С другой стороны, весь последующий материал книги во многом базируется на результатах классической теории и иллюстрирует пределы возможностей ее применимости.

В качестве первого примера в главе 3 представлены результаты по анализу синхронизации квазипериодических колебаний с двумя независимыми частотами. Показано, что если говорить об одной из двух базовых частот квазипериодических колебаний, то классическая теория полностью описывает эффект синхронизации в виде захвата частоты. Но применительно к резонансному предельному циклу на двумерном торе использование классической теории характеризуется некоторыми особенностями, заключающимися в следующем:

1. В общем случае резонансный цикл на двумерном торе невозможно синхронизировать внешним гармоническим сигналом. Под воздействием внешнего сигнала в общем случае резонанс на двумерном торе разрушается, колебания становятся квазипериодическими с тремя независимыми частотами (см. области B на рис. 3.4, 3.6, 3.11 и 3.13). Далее имеет место захват одной из базовых частот автономной системы (3.2) и затем – второй.
2. Для резонансов $\Theta = p : q$ ($p = 1, q \geq 3$) при малых значениях коэффициента связи между генераторами внешнее воздействие синхронизирует как правило одну частоту из базовых частот системы (3.2), f_1 или f_2 . Однако, путем увеличения степени связи можно добиться эффектов захвата вначале одной, а затем и второй базовой частоты (рис. 3.13).
3. В общем случае для синхронизации резонансного цикла на двумерном торе всегда достаточно использовать в качестве внешнего синхронизирующего воздействия квазипериодический двухчастотный сигнал с близким значением числа вращения. В этом случае будет иметь место эффект захвата числа вращения.

Следующим примером усложнения синхронизуемых колебаний является задача о синхронизации хаоса, описанная в главе 4. Проблема синхронизации хаоса в последние годы особенно сильно привлекала внимание исследователей. Были обнаружены и исследованы основные эффекты синхронизации хаоса: полная синхронизация, частотно-фазовая синхронизация и подавление хаотических автоколебаний. В целом более или менее стали ясны бифуркационные механизмы этих эффектов. Разработаны методы численного анализа синхронизации хаоса, предложены всевозможные количественные характеристики степени синхронизации. Однако у исследователей до сих пор нет единого подхода к наблюдаемым явлениям. Из-за множества различных критериев и определений теряется понимание того факта, что все наблюдаемые эффекты представляют собой различные стороны одного и того же явления синхронизации ха-

оса и тесно взаимосвязаны между собой. В главе 4 мы показываем, что наиболее конструктивно идеи классической теории синхронизации можно использовать применительно к режимам так называемого "фазокогерентного" хаоса (или к аттракторам спирального типа). Пределы применимости и трактовки эффекта синхронизации здесь ограничены корректностью введения определения мгновенной фазы и, соответственно, частоты колебаний. Если фаза введена обоснованно, то частота спектральной линии автоколебаний в спектре спирального аттрактора соответствует усредненному значению производной от мгновенной фазы, совпадает с базовой частотой спектра хаотического аттрактора и демонстрирует эффект захвата частоты внешним сигналом в соответствии с выводами классической теории. Если ввести корректное определение мгновенной фазы хаотических автоколебаний невозможно, то связь эффекта синхронизации с классическими представлениями утрачивается и приходится использовать другие представления.

Наконец, в главе 5 рассматриваются примеры синхронизации стохастических колебаний. Выявлено два класса стохастических колебательных процессов, для которых есть возможность выделения физически обоснованных характерных времен (частот). Эти частоты характеризуют процессы переключения системы между двумя метастабильными состояниями. Для таких процессов можно ввести понятие мгновенной фазы колебаний и реализовать эффект синхронизации в виде эффекта захвата средних значений мгновенной фазы и частоты колебаний. С этой точки зрения имеет место взаимосвязь с классической теорией синхронизации периодических колебаний.

Следует отметить, что реализованная в настоящей книге попытка авторов рассмотреть явление синхронизации сложных колебательных процессов с позиций классической теории вовсе не исключает принципиально иных подходов к исследованию этой проблемы, которые интенсивно развиваются в последние годы. Надеемся, что описанию новых подходов и результатов анализа синхронизации на их основе будут посвящены новые интересные книги.

Авторы будут благодарны читателям за возможные замечания и уточнения, которые просим направлять в адрес издательства.

Литература

1. Х. Гюйгенс, *Три мемуара по механике* (Изд-во АН СССР, М., 1951).
2. А.А. Андронов, *Собрание трудов* (Изд-во АН СССР, Москва 1956).
3. К.Ф. Теодорчик, *Автоколебательные системы* (Гостехиздат, Москва 1952).
4. Т. Хаяси, *Нелинейные колебания в физических системах* (Мир, Москва 1968).
5. И.И. Блехман, *Синхронизация динамических систем* (Наука, Москва 1971).
6. Ю.М. Романовский, Н.В. Степанова, Д.С. Чернавский, *Математические модели в биофизике* (Наука, Москва 1975).
7. А.Г. Демьянченко, *Синхронизация генераторов гармонических колебаний* (Энергия, Москва 1976).
8. А.Т. Winfree, *The geometry of biological time* (Springer, New York 1980).
9. П.С. Ланда, *Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы* (Наука, Москва 1980).
10. И.И. Блехман, *Синхронизация в природе и технике* (Наука, Москва 1981).
11. Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations Waves and Turbulence* (Springer, Berlin 1984).
12. П.С. Ланда, *Нелинейные колебания и волны* (Наука, Москва 1997).
13. А. Пиковский, М. Розенблум, Ю. Куртс, *Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление* (Техносфера, Москва 2003).
14. В.С. Анищенко, В.В. Астахов, Т.Е. Вадивасова, А.Б. Нейман, Г.И. Стрелкова, Л. Шиманский-Гайер, *Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах* (Изд-во Института компьютерных исследований, Москва, Ижевск 2003).
15. E. Mosekilde, Yu. Maistrenko, D. Postnov, *Chaotic Synchronization. Applications to Living Systems* (World Scientific, Singapore 2002).
16. В. В. Матросов, В. Д. Шалфеев, *Динамический хаос в фазовых системах* (Изд-во ННГУ, Н.Новгород 2007).
17. B. Van-der-Poll, Theory of the amplitude of free and forced triod vibration // Radio Rev. 1920. Vol. 1. P. 701–710.
18. E.V. Appleton, The automatic synchronization of triode oscillator Proc. of the Cambridge Philosophical Society // Math. and Phys. Sciences. 1922. Vol. 21. P. 231–248.
19. А.А. Андронов, А.А. Витт, К математической теории захватывания// Журнал прикладной физики. 1930. Т. 7. С. 3–11.
20. А.Г. Майер, К теории связанных колебаний двух самовозбужденных генераторов// Уч. зап. ГГУ. 1935. Т. 2(5). С. 3–11.
21. В.И. Гапонов, Два связанных генератора с мягким возбуждением // ЖТФ. 1936. Т. 6, вып. 6. С. 801.
22. К.Ф. Теодорчик, К теории синхронизации релаксационных автоколебаний // ДАН СССР. 1943. Т. 40, вып. 2. С. 63–66.
23. Р.В. Хохлов, К теории захватывания при малой амплитуде внешней силы // ДАН СССР, 1954. Т. 97, вып. 3. С. 411–414.
24. И.И. Минакова, К.Ф. Теодорчик, К теории синхронизации автоколебаний произвольной формы ДАН СССР. 1956. Т. 106, вып. 4. С. 658–660.
25. В.Н. Парыгин, Взаимная синхронизация трех связанных автоколебательных генераторов в случае слабой связи// Радиотехника и электроника. 1956. Т. 1, вып. 2. С. 197–204.
26. Г.М. Уткин, Взаимная синхронизация генераторов на кратных частотах// Радиотехника и электроника. 1957. Т. 2, вып. 1. С. 44–56.
27. Р.Л. Стратонович, *Избранные вопросы теории флюктуаций в радиотехнике* (Сов. радио, Москва 1961).
28. А.Н. Малахов, *Флюктуации в автоколебательных системах* (Наука, Москва 1968).
29. И.Г. Акопян, П.С. Ланда, Синхронизация автоколебаний на обертонах при наличии шума// Радиотехника и электроника. 1962. Т. 7, вып. 8. С. 1285–1293.
30. И.К. Костин, Ю.М. Романовский, Флюктуации в системах многих связанных генераторов // Вестник МГУ. Сер. физ. и астр. 1972. Т. 13, вып. 6. С. 698–705.
31. И.К. Костин, Ю.М. Романовский, Взаимная синхронизация релаксационных генераторов в присутствии шума// Изв. вузов. Радиофизика. 1975. Т. 18, вып. 1. С. 36–42.

32. П.С. Ланда, Н.Д. Тарапкова, Синхронизация генератора при модуляции его собственной частоты // Радиотехника и электроника. 1976. Т. 21, вып. 2. С. 260–265.
33. В.Ф. Скупой, В.П. Копылов, О синхронизации ЧМ-автогенератора // Радиотехника и электроника. 1979. Т. 24, вып. 7. С. 1374–1379.
34. V. Anishchenko, S. Nikolaev, and J. Kurths, Winding number locking on a two-dimensional torus: Synchronization of quasiperiodic motions // Phys. Rev. E. 2006. Vol. 73. 056202.
35. В.С. Анищенко, С.М. Николаев, Экспериментальное исследование синхронизации двухчастотных квазипериодических колебаний// Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2007. Т. 15, вып. 6. С. 93–101.
36. H. Fujisaka, Y. Yamada, Stability theory of synchronized motions in coupled oscillatory systems // Progr. Theor. Phys. 1983. Vol. 69. P. 32–46.
37. A.S. Pikovsky, On the interaction of strange attractors // Z. Phys. B. 1984. Vol. 55. P. 149–154.
38. А.С. Пиковский, Синхронизация фазы стохастических автоколебаний периодическим внешним сигналом // Радиотехника и электроника. 1985. Т. 1. С. 1970–1974.
39. Ю.А. Кузнецов, П.С. Ланда, А.Ф. Ольховой, С.М. Перминов, Амплитудный порог синхронизации как мера хаоса в стохастических автоколебательных системах // ДАН СССР. 1985. Т. 281, вып. 2. С. 1164–1169.
40. В.С. Афрамович, Н.Н. Веричев, М.И. Рабинович, Стохастическая синхронизация колебаний в диссипативных системах // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29, вып. 9. С. 1050–1060.
41. L. Pecora, T. Carroll, Synchronization of chaotic systems // Phys. Rev. Lett. 1990. Vol. 64. P. 821–823.
42. В.С. Анищенко, Д.Э. Постнов, Эффект захвата базовой частоты хаотических автоколебаний. Синхронизация странных аттракторов // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 14, вып. 6. С. 569–573.
43. V.S. Anishchenko, T.E. Vadivasova, D.E. Postnov, M.A. Safonova, Synchronization of chaos // Int. J. of Bif. and Chaos. 1992. Vol. 2, no. 3. P. 633–644.
44. M.G. Rosenblum, A. Pikovsky, J. Kurths, Phase synchronization of chaotic oscillations // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 76(11). P. 1804–1807.
45. M.G. Rosenblum, A.S. Pikovsky, J. Kurths, From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78. P. 4193–4196.
46. N.F. Rulkov, M.M. Sushchik, L.S. Tsimring, H.D.I. Abarbanel, Generalized synchronization of chaos in unidirectionally coupled chaotic systems // Phys. Rev. E. 1995. Vol. 51. P. 980–995.
47. A.B. Neiman, Synchronizationlike phenomena in coupled stochastic bistable systems // Phys. Rev. E. 1994. Vol. 49. P.3484–3488.
48. B.V. Shulgin, A.B. Neiman, V.S. Anishchenko, Mean switching frequency locking in stochastic bistable systems driven by periodic force // Phys. Rev. Lett. 1995. Vol. 75. P. 4157–4160.
49. В.С. Анищенко, А.Б. Нейман, Ф. Месс, Л. Шиманский-Гайер, Стохастический резонанс: индуцированный шумом порядок // Успехи физич. наук, 1999. Т. 42, вып. 1. С. 7–36.
50. S.K. Han, T.G. Yim, D.E. Postnov, O.V. Sosnovtseva, Interacting coherence resonance oscillators // Phys. Rev. Lett. 1999. Vol. 83(9). P.1771–1774.
51. E. Doedel, R.C. Paffenroth, T.F. Fairgrieve, Y.A. Kuznetsov, B.E. Oldeman, B. Sandstede, and X. Wang, *AUTO2000: Continuation and bifurcation software for ordinary differential equations (with HOMCONT)* (Technical report, Concordia University 2002).
52. Дж. Гукенхаймер, Ф. Холмс, *Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей* (Институт компьютерных исследований, Москва-Ижевск 2002).
53. B. van der Pol, Forced oscillations in a circuit with non-linear resistance. (Reception with reactive triode) // Phil. Mag. 1927. Vol. 3. P. 64–80.
54. B. van der Pol, van der Mark, Frequency demultiplication// Nature. 1927. Vol. 120. P. 363–364.
55. A.A. Andronov, A.A. Vitt, Zur Theorie des Mitnehmens von van der Pol // Archiv fur Elektrotechnik. 1930. Vol. 24(1). P. 99–110. (Русский перевод в: А.А. Андронов. Собрание трудов. С. 70–84. Изд-во АН СССР, Москва 1956).
56. А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, Некоторые случаи зависимости предельных циклов от параметра // Уч. зап. Горьковского ун-та. 1939. Т. 6. С. 3–24.

57. M.L. Cartwright, J.E. Littlewood, On nonlinear differential equations of the second order, I: The equation $\ddot{y} - k(1 - y^2)\dot{y} + y = b\lambda k \cos(\lambda t + a)$, k large // J. Lond. Math. Soc. 1945. Vol. 20. P. 180–189.
58. P. Holmes, D.R. Rand, Bifurcations of the forced van der Pol oscillator // Quart. Appl. Math. 1978. Vol. 35. P. 495–509.
59. A.S. Pikovsky, M.G. Rosenblum, J. Kurths, Phase synchronization in regular and chaotic systems // Int. J. Bif. and Chaos. 2000. Vol. 10(1). P. 2291–2306.
60. A.S. Pikovsky, M.G. Rosenblum, J. Kurths, *Synchronization. A Universal Concept in Nonlinear Sciences* (Cambridge University Press, Cambridge 2001).
61. А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов, Н.М. Рыскин, *Нелинейные колебания: Учебное пособие для вузов* (Изд-во физ.-мат. лит., Москва 2002).
62. М.И. Рабинович, Д.И. Трубецков, *Введение в теорию колебаний и волн* (Наука, Москва 1984).
63. Д.В. Тураев, А.Л. Шильников, Л.П. Шильников, Некоторые математические проблемы классической синхронизации // В сб. *Нелинейные волны 2004* /Отв. ред. А.В. Гапонов-Грехов, В.И. Некоркин (ИПФ РАН, Нижний Новгород 2005).
64. А.Д. Вентцель, М.И. Фрейдлин, *Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений* (Наука, Москва 1979).
65. К.В. Гардинер, *Стохастические методы в естественных науках* (Мир, Москва 1986).
66. В.Хорстхемке, Р.Лефевр *Индукционные шумом переходы* (Мир, Москва 1987).
67. P. Hänggi, H. Thomas, Stochastic processes: time evolution, symmetries and linear response // Phys. Rep. 1982. Vol. 88. P. 209–319.
68. L. Arnold, *Random dynamical systems* (Springer, Berlin 2003).
69. Л. Понтрягин, А. Андronov, А. Витт, О статистическом рассмотрении динамических систем // ЖЭТФ. 1933. Т. 3, вып. 3. С. 165–180.
70. В.И. Тихонов, М.А. Миронов, *Марковские процессы* (Сов. радио, Москва 1977).
71. С.М. Рытов, *Введение в статистическую радиофизику* (Наука, Москва 1966).
72. В.С. Анищенко, С.М. Николаев, J. Kurths, Механизмы синхронизации резонансного предельного цикла на двумерном торе // Нелинейная динамика. 2008. Т. 4. вып. 1. С. 39–56.
73. В.С. Анищенко, С.М. Николаев, Генератор квазипериодических колебаний. Бифуркация удвоения двумерного тора // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31, вып. 19. С. 88–94.
74. V. Anishchenko, S. Nikolaev, J. Kurths, Peculiarities of synchronization of a resonant limit cycle on a two-dimensional torus // Phys. Rev. E. 2007. Vol. 76. 046216.
75. П.С. Ланда, Ю.С. Рендель, В.Ф. Шер, Синхронизация колебаний в системе Лоренца // Изв. вузов. Сер. Радиофизика. 1989. Т. 32, вып. 9. С. 1172–1174.
76. G. Dykman, P. Landa, Yu. Neimark, Synchronization of chaotic oscillations by external force // Chaos, Solitons and Fractals. 1992. Vol. 1(4). P. 339–345.
77. A. Pikovsky, P. Grassberger, Symmetry breaking bifurcation for coupled chaotic attractors // J. Phys. A: Math. Gen. 1991. Vol. 24. P. 4587–4597.
78. А.Р. Волковский, Н.Ф. Рульков, Экспериментальное исследование бифуркаций на пороге стохастической синхронизации // Письма в ЖТФ. 1989. Т. 15, вып. 7. С. 5–10.
79. A. Pikovsky, M. Rosenblum, G. Osipov, J. Kurths, Phase synchronization of chaotic oscillators by external driving // Physica D. 1997. Vol. 104. P. 219–238.
80. В.С. Анищенко, Т.Е. Вадивасова, Д.Э. Постнов, М.А. Сафонова, Вынужденная и взаимная синхронизация хаоса // Радиотехника и электроника. 1991. Т. 36, вып. 2. С. 338–351.
81. A. Arneodo, P. Collet, C. Tresser, Possible new strange attractors with spiral structure // Commun. Math. Phys. 1981. Vol. 79. P. 573–579.
82. L.D. Farmer, Spectral broadening of period-doubling bifurcation sequences// Phys. Rev. Lett. 1981. Vol. 47(5). P. 179–182.
83. В.С. Анищенко, *Сложные колебания в простых системах* (Наука, Москва 1990).
84. L. Kocarev, U. Parlitz, Generalized synchronization, predictability, and equivalence of unidirectionally coupled dynamical systems // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 76(11). P. 1816–1819.
85. K. Pyragas, Weak and strong synchronization of chaos // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 54(5). P. R4508–R4511.
86. O.E. Rössler, An equation for continuous chaos // Phys. Lett. A. 1976. Vol. 57. P. 397–398.

87. V.S. Anishchenko, T.E. Vadivasova, G.I. Strelkova, Instantaneous phase method in studing chaotic and stochastic oscillations and its limitations // *Fluct. and Noise Lett.* 2004. Vol. 4(1). P. L219–L227.
88. Т.Е. Вадивасова, В.С. Анищенко, Взаимосвязь частотных и фазовых характеристик хаоса. Два критерия синхронизации // Радиотехника и электроника. 2004. Т. 49, вып. 1. С. 1–7.
89. G.V. Osipov, B. Hu, C. Zhou, M.V. Ivanchenko, J. Kurths, Tree types of transitions to phase synchronization in coupled chaotic oscillations // *Phys. Rev. Lett.* 2003. Vol. 91(2). P. 024101.
90. V.S. Anishchenko, T.E. Vadivasova, D.E. Postnov, O.V. Sosnovtseva, C.W. Wu, L.O. Chua, Dynamics of the nonautonomous Chua's circuit // *Int. J. of Bif. and Chaos*. 1995. Vol. 5(6). P. 1525–1540.
91. V.S. Anishchenko, V.V. Astakhov, T.E. Vadivasova, O.V. Sosnovtseva, C.W. Wu, L.O. Chua, Dynamics of two coupled Chua's circuits // *Int. J. of Bif. and Chaos*. 1995. Vol. 5(6). P. 1677–1699.
92. A. Pikovsky, G. Osipov, M. Rosenblum, M. Zaks, J. Kurths, Attractor- repeller collision and eyelet intermittency at the transition to phase synchronization // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 79. P. 47–50.
93. E. Rosa, E. Ott, M.H. Hess, Transition to phase synchronization of chaos // *Phys. Rev. Lett.* 1998. Vol. 80(8). P. 1642–1645.
94. А.С. Пиковский, Синхронизация и стохастизация ансамбля автогенераторов внешним шумом // Изв. вузов. Радиофизика. 1984. Т. 27, вып. 5. С. 576–581.
95. E. Sánchez, M.A. Matías, V. Pérez-Muñozuri, Analysis of synchronization of chaotic systems by noise: An experimental study // *Phys. Rev. E*. 1997. Vol. 56(4). P. 4068–4071.
96. D.S. Goldobin, A.S. Pikovsky, Synchronization and desynchronization of self-sustained oscillators by common noise // *Phys. Rev. E*. 2005. Vol. 71. P. 045201(R).
97. А.А. Короновский, О.И. Москаленко, Д.И. Трубецков, А.Е. Храмов, Обобщенная синхронизация и синхронизация, индуцированная шумом, единый тип поведения связанных хаотических систем // ДАН. 2006. Т. 407, вып. 6. С. 761–765.
98. А.Е. Храмов, А.А. Короновский, О.И. Москаленко, Are generalized synchronization and noise-induced synchronization identical types of synchronous behavior of chaotic oscillators? // *Phys. Lett. A*. 2006. Vol. 354(5-6). P. 423–427.
99. V.S. Anishchenko, *Dynamical chaos - Models and Experiments* (World Scientific, Singapore, 1995).
100. V.N. Belykh, N.N. Verichev, L.J. Kocarev, L.O. Chua, On chaotic synchronization in a linear array of Chua's circuits // *Int. J. of Bif. and Chaos*. 1993. Vol. 3(2). P. 579–589.
101. H. Fujisaka, T. Yamada, A new intermittency in coupled dynamical systems // *Progr. Theor. Phys.* 1985. Vol. 74(4). P. 918–921.
102. В.В. Астахов, Б.П. Безручко, В.И. Пономаренко, Е.П. Селезнев, Квазиоднородные стохастические движения и их разрушение в системе связанных нелинейных осцилляторов // Изв. вузов. Радиофизика. 1988. Т. 31, вып. 5. С. 627–630.
103. С.П. Кузнецов, Универсальность и подобие в поведении связанных систем Фейгенбаума // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28, вып. 8. С. 991–1007.
104. А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов, Критическая динамика решёток связанных отображений у порога хаоса // Изв. вузов. Радиофизика. 1991. Т. 34, вып. 10-12. С. 1079–1115.
105. V. Astakhov, M. Hasler, T. Kapitaniak, A. Shabunin, V. Anishchenko, The effect of parameter mismatch on the mechanism of chaos synchronization loss in coupled systems // *Phys. Rev. E*. 1998. Vol. 58(5). P. 5620–5628.
106. P. Ashwin, J. Boesu, I. Stewart, From attractor to chaotic saddle: tale of transverse instability // *Nonlinearity*. 1994. Vol. 9. P. 703–737.
107. E. Ott, J.C. Sommerer, Blowout bifurcation in chaotic dynamical systems // *Phys. Lett. A*. 1994. Vol. 188. P. 39–47.
108. M. Sushchik, N.F. Rulkov, H.D.I. Abarbanel, Robustness and stability of synchronized chaos: an illustrative model // *IEEE Trans. on Circuits and Systems. Fundamental Theory and Applications*. 1997. Vol. 44(10). P. 867–873.
109. V. Astakhov, A. Shabunin, T. Kapitaniak, V. Anishchenko, Loss of chaos synchronization through the sequence of bifurcations of saddle periodic orbits // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 79(6). P. 1014–1017.

110. M. Hasler, Y. Maistrenko, An introduction to the synchronization of chaotic systems: coupled skew tent maps // IEEE Trans. on Circuits and Systems. Fundamental Theory and Applications. 1997. Vol. 44(10). P. 856–866.
111. J. Milnor, On the concept of attractor // Commun. Math. Phys. 1985. Vol. 99. P. 177–195.
112. Y. Maistrenko, T. Kapitaniak, Different types of chaos synchronization in two coupled piecewise linear maps // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 54. P. 3285–3292.
113. A. Shabunin, V. Astakhov, J. Kurths, Quantitative analysis of chaotic synchronization by means of coherence // Phys. Rev. E. 2005. Vol. 72. P. 016218.
114. A. Shabunin, V. Demidov, V. Astakhov, V. Anishchenko, Information approach to quantify complete and phase synchronization of chaos // Phys. Rev. E. 2002. Vol. 65. P. 056215.
115. В.С. Анищенко, Т.Е. Вадивасова, Г.А. Окрокверцхов, Г.И. Стрелкова, Корреляционный анализ режимов детерминированного и зашумленного хаоса // Радиотехника и электроника. 2003. Т. 48, вып. 7. С. 824–835.
116. V.S. Anishchenko, G.A. Okrokvertshov, T.E. Vadivasova, Mixing and spectral-correlation properties of chaotic and stochastic systems: numerical and physical experiments // New J. of Physics. 2005. Vol. 7. P. 76–106.
117. R. Benzi, A. Sutera, A. Vulpiani, The mechanism of stochastic resonance // J Phys. A: Math. Gen., 1981. Vol. 14. P. L453–L457.
118. C. Nicolis, Stochastic aspects of climatic transitions-Response to a periodic forcing // Tellus, 1982. Vol. 34. P. 1–9.
119. H.A. Kramers, Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions // Physica, 1940. Vol. 7, No. 4. P. 284–304.
120. V.S. Anishchenko, A.B. Neiman, M.A. Safonova, Stochastic resonance in chaotic systems // J. Stat. Phys., 1993. Vol. 70. P. 183–196.
121. L. Gammaitoni, P. Hänggi, P. Jung, F. Marchesoni, Stochastic Resonance // Rev. Mod. Phys., 1998. Vol. 70. P. 223–287.
122. A. Neiman, A. Silchenko, V.S. Anishchenko, and L. Schimansky-Geier, Stochastic resonance: noise enhanced phase coherence // Phys. Rev. E, 1998. Vol. 58, No. 6. P. 7118–7125.
123. V.S. Anishchenko, A. Neiman, A. Silchenko, I.A. Khovanov, Phase Synchronization of Switchings in Stochastic and Chaotic Bistable Systems // Dynamics and Stability of Systems, 1999. Vol. 14(3). P. 211–231.
124. V.S. Anishchenko, *Dynamical Chaos – Models and Experiments* (World Scientific, Singapore 1995).
125. И.А. Хованов, В.С. Анищенко, Механизм стохастического резонанса в системе с перемежаемостью типа "хаос-хаос" // Письма в ЖТФ, 1996. Т. 22, вып. 10. С. 75–81.
126. V.S. Anishchenko, A.N. Silchenko, I.A. Khovanov, Synchronization of switchings processes in coupled Lorenz systems // Phys. Rev. E, 1998. Vol. 57. P. 316–322.
127. В.В. Быков, Л.П. Шильников, в сб. *Методы качественной теории и теория бифуркаций*, под ред. Л.П. Шильникова (Изд-во Горьк. ун-та, Горький 1989), с. 151–159.
128. В.С. Анищенко, А.Б. Нейман, Индуцированный шумом переход в модели Лоренца // Письма в ЖТФ. 1991. Т. 17. С. 510–513.
129. W.J.A. Sloane, A.D. Wyner (Eds.) *Claude Elwood Shannon: Collected Papers* (IEEE Press, New York, 1993).
130. W. Ebeling, G. Nicolis, World frequency and entropy of symbolic sequences : a dynamical perspective // Chaos, Solitons & Fractals, 1992. Vol. 2. P. 635–650.
131. W. Ebeling, J. Freund, K. Rateitschak, Entropy and extended memory in discrete chaotic dynamics // Int. J. Bif. Chaos, 1996. Vol. 6. P. 611.
132. А.Я. Хинчин, Об основных теоремах теории информации // Успехи матем. наук, 1956. Т. 11. С. 17–75.
133. A. Neiman, B. Shulgin, V.S. Anishchenko, W. Ebeling, L. Schimansky-Geier, and J. Freund, Dynamical Entropies Applied to Stochastic Resonance // Phys. Rev. Lett., 1996. Vol. 76. P. 4299.
134. L. Schimansky-Geier, J. Freund, A. Neiman, and B. Shulgin, Noise-induced order: stochastic resonance // Int. J. Bif. Chaos, 1998. Vol. 8. P. 869.