

В.С. Анищенко, В.В. Астахов,
Т.Е. Вадивасова, А.Б. Нейман,
Г.И. Стрелкова, Л. Шиманский-Гайер

**Нелинейные эффекты
в хаотических
и стохастических системах**

под редакцией профессора В.С. Анищенко

Нашим учителям и друзьям:

Werner Ebeling, Ю.Л. Климонтович
и Frank Moss

Предисловие редактора перевода

Читателю предлагается доработанный и расширенный перевод книги V.S. Anishchenko, V.V. Astakhov, A.B. Neiman, T.E. Vadivasova, L. Schimansky-Geier *Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems*, опубликованной в 2002 году издательством Springer. Книга посвящена современным проблемам нелинейной динамики хаотических и стохастических систем и ориентирована как на молодых ученых, так и специалистов в области исследования нелинейных колебаний и волн. Настоящее издание в своей основе соответствует оригиналу. При переводе авторами внесены в текст некоторые уточнения и исправлены опечатки в ряде формул. Во вторую главу книги добавлены три новых раздела: "Корреляционный анализ режимов детерминированного и зашумленного хаоса", "Эффекты синхронизации в цепочках связанных осцилляторов" и "Синхронизация в живых системах". Включение этих разделов естественным образом вписывается в материал второй главы и отражает наиболее интересные результаты авторов, полученные после выхода английского издания.

Мы надеемся, что книга будет с интересом воспринята широкой аудиторией читателей, интересующихся современными проблемами теории нелинейных колебаний и волн, динамическим хаосом, теорией синхронизации и индуцированными внешним шумом явлениями. Мы будем благодарны за любые замечания, которые можно направлять в адрес издательства.

Профессор В.С. Анищенко

VIII Предисловие редактора перевода

Предисловие

Эта книга посвящена классическим основам и современным результатам нелинейной динамики детерминированных и стохастических систем. Значительное внимание в ней уделяется индуцированным шумом переходам и влиянию флуктуаций на характеристики нелинейных динамических систем в различных колебательных режимах.

С одной стороны существует обширная литература по нелинейной динамике и хаосу, представленная замечательными книгами; с другой стороны, имеется немало великолепных монографий и учебников по статистической физике неравновесных и стохастических процессов. В данной же книге предпринята попытка сочетать подход нелинейной динамики, основанный на детерминированных эволюционных уравнениях, с подходом статистической физики, базирующемся на стохастических или кинетических уравнениях. Данная работа нацелена главным образом на то, чтобы показать, какую важную роль играет шум в формировании свойств динамических режимов функционирования нелинейных диссипативных систем.

В рамках этой книги освещается определенный, ограниченный круг вопросов, относящихся к интересной, продолжающей развиваться области нелинейной динамики. В настоящее время существует огромное количество разноплановых задач, связанных с детерминированными и стохастическими динамическими системами. С целью обстоятельного и полного представления материала при написании этой книги мы руководствовались следующими тремя критериями: во-первых, динамическая модель должна быть минимальной, т. е. оптимально прозрачной в физическом и математическом смыслах; во-вторых, модель должна быть простейшей, но вместе с тем четко демонстрировать наиболее важные стороны рассматриваемого явления; наконец, в-третьих, основное внимание

уделяется тем моделям и явлениям, исследуя которые, авторы накопили за последние годы определенный опыт.

Книга состоит из трех глав. Первая глава служит кратким введением и содержит фундаментальные положения теории нелинейных детерминированных и стохастических систем и классической теории синхронизации периодических колебаний. Сюда вошли все основные понятия и определения, необходимые для того, чтобы изучать последующие главы, не обращаясь к специальной литературе.

Вторая глава посвящена детерминированному хаосу. В ней мы рассматриваем различные сценарии возникновения хаоса, включая проблему разрушения двух- и трехчастотного квазипериодического движения. Кроме того, в этой главе обсуждаются различные аспекты синхронизации и управления хаосом, а также методы реконструкции аттракторов и динамических систем по экспериментальным временным рядам.

В третьей главе особое внимание уделяется стохастическим системам, динамика которых в значительной мере определяется влиянием шума. Здесь обсуждаются некоторые явления нелинейного характера, такие как стохастический резонанс в динамической системе под воздействием гармонических и сложных сигналов и шума, стохастическая синхронизация и стохастический рэчет, представляющие собой индуцированный шумом упорядоченный и направленный перенос броуновских частиц, движущихся в бистабильных и периодических потенциалах. Особое внимание уделено роли шума в динамике возбудимых систем и сред.

Книга ориентирована на широкий круг читателей, интересующихся естественными науками. Первая глава будет полезна студентам и аспирантам, изучающим физику, химию, биологию и экономику, а также преподавателям этих предметов, проявляющих интерес к современным проблемам нелинейной динамики. Специалисты по нелинейной динамике могут использовать этот раздел в качестве расширенного справочного пособия. Вторая и третья главы предназначены для специалистов в области математического моделирования сложной динамики нелинейных систем, в том числе в присутствии шума.

Мы постарались составить книгу таким образом, чтобы любая из трех глав могла быть воспринята читателем преимущественно независимо от других. В частности, к каждой главе прилагается

отдельный список литературы. Такое решение продиктовано желанием сделать книгу еще более полезной для читателя. Однако представленную нами библиографию, без сомнения, нельзя назвать исчерпывающей, поскольку существует огромное количество публикаций, посвященных вопросам, рассматриваемым в данной книге.

Эта книга явилась результатом продолжительного сотрудничества лаборатории нелинейной динамики Саратовского государственного университета с исследовательской группой по изучению прикладных стохастических процессов в Гамболдтском университете в Берлине, а также с центром нейродинамики в Университете Миссури в Сент-Луисе.

Мы выражаем глубокую благодарность W. Ebeling, Ю. Л. Климонтовичу и Ф. Мосс за поддержку, обмен научной информацией и постоянный интерес к нашей работе. Мы также благодарны за плодотворные дискуссии C. van den Broek, P. Hänggi, J. Kurths, A. Longtin, A. Pikovski и Ю. М. Романовскому. Книга приобрела много ценного благодаря участию наших соавторов по предыдущим работам. Мы признательны А. Баланову, R. Bartussek, V. Bucholtz, И. Дикштейну, J. A. Freund, J. Garcia-Ojalvo, M. Hasler, Н. Янсон, Т. Kapitaniak, И. Хованову, M. Kostur, П. С. Ланде, В. Lindner, P. McClintock, E. Mosekilde, А. Павлову, Т. Pöschel, Д. Постнову, P. Reimann, R. Rozenfeld, P. Ruzszynsky, А. Шабунину, Б. Шульгину, U. Siewert, А. Сильченко, О. Сосновцевой, А. Заикину и С. Zülicke за совместные работы, частые плодотворные дискуссии, ценные замечания и критику, позволившие нам глубже проникнуть в изучаемые проблемы.

Мы благодарим редактора этой серии Н. Накен за полезные советы по рукописи, а также P. Talkner, J. Freund и В. Lindner за полезные замечания при правке корректуры.

Особую благодарность хотелось бы выразить Галине Стрелковой за огромную работу по подготовке рукописи и перевод многих разделов этой книги на английский язык, а также А. Климшину за оказание технической помощи.

Кроме того, В. Анищенко, Т. Вадивасова и В. Астахов благодарят Американский Фонд гражданских исследований и развития (CRDF, грант REC-006) и Российский Фонд Фундаментальных Исследований (гранты N 00-02-17512, N 99-02-17732). В. С. Анищенко также благодарит за поддержку Международный Фонд им. Алек-

XII Предисловие

сандра фон Гумбольдта. А. Нейман выражает благодарность Институту Фитцера и физическому отделению Военно-морского управления США. Л. Шиманский-Гайер благодарит за оказание поддержки Deutsche Forschungsgemeinschaft (Sfb 555 и GK 268).

В. Анищенко

А. Нейман

Т. Вадивасова

В. Астахов

Л. Шиманский-Гайер

Саратов, Берлин, Сент-Луис, сентябрь, 2001

Оглавление

1. Основы динамического и статистического описания эволюционных процессов	1
1.1 Динамические системы	1
1.1.1 Введение	1
1.1.2 Динамическая система и ее математическая модель	2
1.1.3 Устойчивость (линейное приближение)	10
1.1.4 Бифуркации динамических систем, катастрофы	22
1.1.5 Аттракторы динамических систем. Детерминированный хаос	37
1.1.6 Заключение	48
1.2 Флуктуации в динамических системах	49
1.2.1 Введение	49
1.2.2 Основные концепции теории случайных процессов	51
1.2.3 Шум в динамических системах	63
1.2.4 Уравнение Фоккера–Планка	72
1.2.5 Стохастические осцилляторы	83
1.2.6 Задача о выходе из ограниченной области	92
1.2.7 Заключение	105
1.3 Синхронизация периодических систем	105
1.3.1 Введение	105
1.3.2 Синхронизация генератора Ван дер Поля	107
1.3.3 Синхронизация в присутствии шума. Эффективная синхронизация	119
1.3.4 Фазовое описание	124
1.3.5 Заключение	130
Литература	132

2. Хаотические и сложные колебания динамических систем	139
2.1 Бифуркационные механизмы перехода к хаосу	139
2.1.1 Введение	139
2.1.2 Переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода. Универсальность Фейгенбаума	140
2.1.3 Жёсткие переходы к хаосу. Кризис и перемежаемость	150
2.1.4 Переход к хаосу через разрушение двухчастотных колебаний	155
2.1.5 Переход к хаосу через трёхмерный тор. Хаос на трёхмерном торе. Хаотические нестранные аттракторы	165
2.1.6 Переход к хаосу через разрушение эргодического тора. Странные нехаотические аттракторы	169
2.1.7 Заключение	177
2.2 Корреляционный анализ режимов детерминированного и зашумленного хаоса	178
2.2.1 Введение	178
2.2.2 Гармонический шум и телеграфный сигнал ...	179
2.2.3 Корреляционно-спектральный анализ спирального хаоса	182
2.2.4 Автокорреляционные функции и спектры мощности в режиме винтового хаоса	188
2.2.5 Корреляционно-спектральные характеристики хаотических автоколебаний переключательного типа в режиме квазигиперболического аттрактора Лоренца	189
2.2.6 Заключение	194
2.3 Синхронизация хаоса	194
2.3.1 Введение	194
2.3.2 Классический подход к синхронизации хаоса ..	197
2.3.3 Особенности взаимодействия осцилляторов с фейгенбаумовским сценарием развития хаоса. Фазовая мультистабильность в области синхронизации	208

2.3.4	Бифуркационные механизмы разрушения полной и частичной синхронизации хаоса	215
2.3.5	Заключение	221
2.4	Эффекты синхронизации в цепочках связанных ге- нераторов	221
2.4.1	Введение	221
2.4.2	Образование частотных кластеров в неоднородных цепочках генераторов	223
2.4.3	Влияние шума на режимы кластерной синхронизации в цепочке квазигармонических генераторов	225
2.4.4	Вынужденная синхронизация цепочки хаотических автоколебательных систем	230
2.4.5	Синхронизация и мультистабильность в кольце генераторов с удвоениями периода	235
2.4.6	Заключение	244
2.5	Синхронизация в живых системах	245
2.5.1	Введение	245
2.5.2	Стохастическая синхронизация электрорецепторов веслоноса	245
2.5.3	Синхронизация кардиоритма	254
2.5.4	Заключение	259
2.6	Управление хаосом	260
2.6.1	Введение	260
2.6.2	Управляемая противофазная синхронизация хаоса в связанных кубических отображениях	263
2.6.3	Управление и синхронизация хаоса в системе взаимно связанных осцилляторов	273
2.6.4	Управляемая синхронизация хаоса методом периодических параметрических возмущений	280
2.6.5	Стабилизация пространственно-однородных движений посредством параметрического воздействия	285
2.6.6	Управление хаосом в решетках связанных отображений	289
2.6.7	Заключение	299
2.7	Реконструкция динамических систем	301
2.7.1	Введение	301

2.7.2	Реконструкция аттракторов по временным рядам	303
2.7.3	Глобальная реконструкция ДС	315
2.7.4	Реконструкция по данным биологических экспериментов	323
2.7.5	Метод реконструкции в приложении к задаче защиты передаваемой информации	329
2.7.6	Заключение	335
Литература		337
3.	Стохастическая динамика	349
3.1	Стохастический резонанс	349
3.1.1	Введение	349
3.1.2	Физические основы эффекта СР	351
3.1.3	Характеристики эффекта СР	355
3.1.4	Отклик на слабый сигнал. Теоретические подходы	357
3.1.5	Теория двух состояний	359
3.1.6	Усиленный массивом стохастический резонанс	367
3.1.7	Удвоенный стохастический резонанс в системах с индуцированным фазовым переходом	380
3.1.8	Стохастический резонанс для сигналов сложного спектрального состава	387
3.1.9	Стохастический резонанс в хаотических системах с сосуществующими аттракторами	396
3.1.10	Физический эксперимент	402
3.1.11	Заключение	405
3.2	Синхронизация стохастических систем	406
3.2.1	Введение	406
3.2.2	Синхронизация и стохастический резонанс	408
3.2.3	Внешняя стохастическая синхронизация триггера Шмитта	418
3.2.4	Взаимная стохастическая синхронизация связанных бистабильных систем	422
3.2.5	Внешняя и взаимная синхронизация переключений в хаотических системах	425
3.2.6	Стохастическая синхронизация ансамблей стохастических резонаторов	431

3.2.7	Стохастическая синхронизация как индуцированный шумом порядок	438
3.2.8	Заключение	442
3.3	Конструктивная роль шума в возбудимых системах .	442
3.3.1	Когерентный резонанс вблизи бифуркаций периодических решений динамической системы .	443
3.3.2	Когерентный резонанс в возбудимой динамике	446
3.3.3	Усиленная шумом синхронизация связанных возбуждаемых систем	459
3.3.4	Заключение	465
3.4	Индукцированный шумом транспорт	466
3.4.1	Введение	466
3.4.2	Мигающие и качающиеся рэтчет потенциалы..	468
3.4.3	Адиабатическое приближение	472
3.4.4	Передемпфированный коррелированный рэтчет	476
3.4.5	Сортировка частиц в рэтчет потенциале под действием цветного шума.....	479
3.4.6	Двумерный рэтчет	486
3.4.7	Дискретный рэтчет	490
3.4.8	Среды с пилообразной зависимостью потенциала	500
3.4.9	Формирование пространственных структур с помощью рэтчет потенциала	504
3.4.10	Заключение	510
	Литература	511

1. Основы динамического и статистического описания эволюционных процессов

1.1 Динамические системы

1.1.1 Введение

Основы динамического (или детерминированного) описания эволюционных процессов базируются на понятии *динамической системы* (ДС). ДС можно представлять как объект любой природы, состояние которого изменяется во времени в соответствии с некоторым динамическим законом, то есть, как результат действия *детерминированного* оператора эволюции. Таким образом, понятие ДС является следствием определенной идеализации, при которой пренебрегают влиянием случайных возмущений, неизбежно присутствующих в любой реальной системе.

Теория ДС является самостоятельной областью научных исследований. В данном разделе рассматриваются только те представления теории ДС, которые используются в последующих главах этой книги. Главное внимание уделяется анализу устойчивости решений обыкновенных дифференциальных уравнений в линейном приближении. Обсуждаются локальные и нелокальные бифуркации типичных предельных множеств, приводится классификация аттракторов ДС.

Структура хаотических аттракторов определяет свойства режимов хаотических колебаний ДС. Известно, что основой классических представлений о динамическом хаосе в диссипативных системах является понятие грубого гиперболического (странного) аттрактор. Помимо гиперболических аттракторов, мы рассматриваем более подробно негиперболические аттракторы (квазиаттракторы). Этот вид хаотических аттракторов в большей степени отражает свойства детерминированного хаоса в реальных системах и должен использоваться как математический образ экспериментально наблюдаемого хаоса.

1.1.2 Динамическая система и ее математическая модель

Каждой ДС соответствует некоторая *математическая модель*. Последняя считается заданной, если определено *состояние системы* в виде набора некоторых величин или функций, и определен *оператор эволюции*, задающий соответствие между начальным состоянием системы и единственным состоянием в каждый последующий момент времени. Оператор эволюции может быть задан с помощью дифференциальных, интегральных или интегродифференциальных уравнений, отображений последования, а также в форме матриц, графов, и т.д. Форма математической модели изучаемой ДС зависит от выбора метода описания.

В зависимости от степени приближения и от конкретно изучаемой задачи, одной и той же реальной физической системе могут быть поставлены в соответствие принципиально различные математические модели, например, маятник с трением и без трения. Кроме того, с качественной точки зрения, могут рассматриваться ДС, для которых не всегда возможно определить математическую модель (например, сердечно-сосудистая система живого организма).

Классификация ДС основана на способе задания мгновенного состояния, на свойствах оператора эволюции и методах его описания. Состояние системы определяется набором некоторых величин $x_j, j = 1, 2, \dots, N$, или функций $x_j(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \mathbf{R}^M$. Величины x_j , называемые *динамическими переменными*, непосредственно связаны с наблюдаемыми количественными характеристиками ДС и в реальных системах могут быть измерены (ток, напряжение, скорость, температура, концентрация вещества, численность популяции, и т.д.). Множество всех теоретически возможных состояний системы называется ее *фазовым пространством*. Если x_j являются переменными, а не функциями, и число их конечно, то фазовое пространство системы \mathbf{R}^N имеет конечную размерность. Системы с конечномерным фазовым пространством называются системами с *сосредоточенными параметрами*, потому что их параметры не являются функциями пространственных координат. Такие системы описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями или отображениями последования.

Однако, имеется широкий класс систем с бесконечномерным фазовым пространством. Если динамические переменные x_j системы являются функциями некоторых переменных $r_k, k = 1, 2, \dots, M$,

то размерность фазового пространства системы бесконечна. Как правило, r_k представляют собой пространственные координаты, и, таким образом, параметры системы зависят от точки пространства. Такие системы называются системами с *распределенными параметрами* или просто *распределенными* системами. Они часто описываются дифференциальными уравнениями в частных производных или интегральными уравнениями. Еще один пример системы с бесконечномерным фазовым пространством – система, оператор эволюции которой включает задержку во времени T_d . В этом случае мгновенное состояние системы определяется набором функций $x_j(t)$, $t \in [0, T_d]$.

Можно классифицировать ДС в зависимости от свойств оператора эволюции. Если оператор эволюции удовлетворяет принципу суперпозиции, то соответствующая система является *линейной*, в противном случае система *нелинейна*. Если состояние системы и оператор эволюции определены в любой момент времени, то говорят о системе с *непрерывным временем*. Если состояние системы определено только в отдельные (дискретные) моменты времени, мы имеем систему с *дискретным временем* (*отображение последования* или *каскад*). Для каскадов оператор эволюции обычно определяется с помощью *функции последования* или *отображения последования*. Если оператор эволюции не зависит от времени явным образом, то соответствующая система *автономна*, то есть не подвержена действию каких-либо аддитивных или мультипликативных внешних сил; в противном случае мы имеем дело с *неавтономной* системой. Различают два важных класса ДС: *консервативные* и *неконсервативные*. Для консервативной системы объем фазового пространства сохраняется при действии оператора эволюции. Для неконсервативной системы элемент объема обычно уменьшается с течением времени. Сжатие фазового объема свидетельствует о потере энергии в системе. Системы с потерями, в которых энергия уменьшается с течением времени, называются *диссипативными*. Рост элемента фазового объема системы означает подкачку энергии в систему. Такая система называется системой с отрицательной диссипацией.

Среди широкого класса ДС особое место занимают системы, в которых происходят колебания, то есть, полностью или частично повторяющиеся процессы. Колебательные системы, как и в общем ДС, подразделяются на *линейные* и *нелинейные*, *сосредоточенные*

и *распределенные, консервативные и диссипативные, автономные и неавтономные*. Специальный класс составляют так называемые *автоколебательные системы*.

Автономные нелинейные диссипативные системы, в которых существуют незатухающие колебания, независимые в определенных пределах от начальных условий, называются *автоколебательными*. Соответственно колебания в таких ДС получили название *автоколебаний*. Математическим образом автоколебаний служит аттрактор ДС, не являющийся точкой устойчивого равновесия (см. раздел 1.1.5). Энергия, теряемая при диссипации в автоколебательной системе, компенсируется из внешнего источника. Особенностью автоколебаний является то, что их характеристики (амплитуда, частота колебаний, их форма, и т.д.) не зависят от свойств источника энергии и не меняются при изменениях (по крайней мере малых) начальных условий [1].

Фазовые портреты динамических систем. Метод анализа колебаний ДС с помощью графического представления в фазовом пространстве был введен в теорию колебаний Л.И. Мандельштамом и А.А. Андроновым [1]. С тех пор этот метод стал общепринятым для изучения различных колебательных явлений. Он приобрел еще большее значение, когда были обнаружены колебания сложного вида, т.е. динамический хаос. Анализ фазовых портретов сложных колебательных процессов позволяет судить о топологической структуре хаотического предельного множества, а также выдвигать правдоподобные гипотезы и предположения, которые могут оказаться ценными при дальнейших исследованиях [2, 3].

Пусть изучаемая ДС описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\dot{x}_j = f_j(x_1, x_2, \dots, x_N), \quad (1.1)$$

где $j = 1, 2, \dots, N$, или в векторной форме

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad (1.2)$$

где \mathbf{x} – вектор с компонентами x_j , индекс j принимает значения $j = 1, 2, \dots, N$, а $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ – вектор-функция с компонентами $f_j(\mathbf{x})$. Набор N динамических переменных x_j или N -мерный вектор \mathbf{x} определяет состояние системы, которому ставится в соответствие точка в пространстве состояний \mathbf{R}^N . Эта точка называется *изображающей* или *фазовой* точкой, а само пространство состояний \mathbf{R}^N

называется *фазовым пространством* ДС. Движение фазовой точки соответствует эволюции состояния системы с течением времени. Траектория фазовой точки, стартовая из некоторого начального состояния $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$ и отслеживаемая при $t \rightarrow \pm\infty$, представляет собой *фазовую траекторию*. Иногда используется сходное понятие интегральной кривой. Интегральные кривые описываются уравнениями $dx_j/dx_k = \Phi(x_1, x_2, \dots, x_N)$, $j = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, N$, где x_k – одна (любая) из динамических переменных. В большинстве случаев интегральные кривые и фазовые траектории совпадают. Однако интегральные кривые, проходящие через особые точки, состоят из нескольких фазовых траекторий.

Правая часть (1.2) задает векторное поле скоростей $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ в фазовом пространстве системы. Точки фазового пространства, для которых $f_j(\mathbf{x}) = 0$, $j = 1, 2, \dots, N$, остаются неизменными с течением времени и называются *неподвижными точками*, *особыми точками* или *состояниями равновесия* ДС. Множество характерных фазовых траекторий в фазовом пространстве образует *фазовый портрет* ДС.

Кроме размерности фазового пространства часто используется понятие *числа степеней свободы* ДС. Под числом степеней свободы в теоретической механике понимается число независимых координат и импульсов, характеризующих движение n материальных точек. Движение каждой материальной точки подчиняется второму закону Ньютона и описывается уравнением движения второго порядка. Следовательно число степеней свободы n связано с размерностью ДС N соотношением $2n = N$. Очевидно, для произвольной ДС (1.1) число степеней свободы может быть нецелым (кратным 0.5).

Рассмотрим гармонический осциллятор

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (1.3)$$

Его фазовый портрет показан на рис. 1.1а и представляет собой семейство концентрических эллипсов (в случае $\omega_0 = 1$ – окружностей) на плоскости $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ с центром в начале координат:

$$\frac{\omega_0^2 x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} = H(x_1, x_2) = \text{const}. \quad (1.4)$$

Каждому значению полной энергии $H(x_1, x_2)$ соответствует свой собственный эллипс. В начале координат расположено состояние

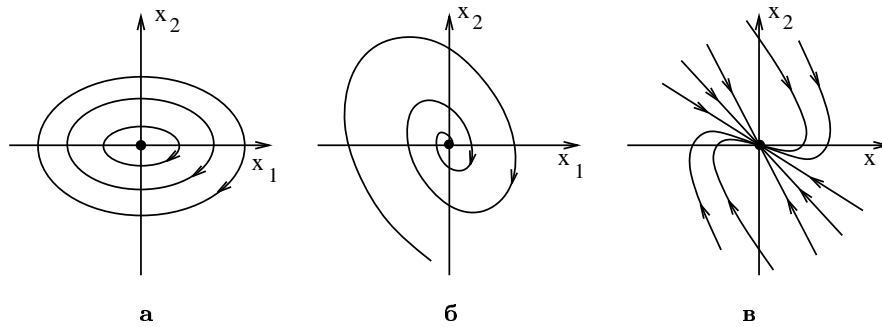


Рис. 1.1. Фазовые портреты линейных осцилляторов: (а) без трения, (б) с малым трением и (в) с сильным трением

равновесия, называемое *центром*. Если к линейному осциллятору добавить трение, то фазовые траектории, стартующие из любой точки фазовой плоскости, будут приближаться к состоянию равновесия в пределе $t \rightarrow \infty$. При слабой диссипации фазовые траектории представляют собой спирали, закручивающиеся к началу координат (рис. 1.1б), а решения уравнений осциллятора с трением соответствуют затухающим колебаниям. В этом случае состояние равновесия в нуле координат называется *устойчивым фокусом*. С увеличением коэффициента трения решения станут апериодическими. Соответствующий фазовый портрет показан на рис. 1.1в. В начале координат имеется состояние равновесия, называемое *устойчивым узлом*.

Фазовый портрет для нелинейного консервативного осциллятора, описываемого уравнением

$$\ddot{x} + \frac{dU(x)}{dx} = 0,$$

качественно нетрудно построить с помощью потенциальной функции $U(x)$. Пример такого построения приводится на рис. 1.2. Минимумам потенциальной функции соответствуют положения равновесия типа центр. В потенциальной яме, существующей вблизи каждого центра, семейство замкнутых кривых упорядочено в соответствии со значениями интеграла энергии $H(x, \dot{x})$. В непосредственной окрестности центра эти кривые имеют эллиптическую форму, которая постепенно деформируется при удалении от центра. Максимумам $U(x)$ соответствуют положения равновесия, называемые *седлами*. Седла неустойчивы по отношению к произвольным возмущениям. Фазовые траектории, входящие в седло Q (рис. 1.2) при

$t \rightarrow \pm\infty$, называются устойчивыми и неустойчивыми *сепаратрисами седла* Q . Пара траекторий, приближающихся к седлу в прямом времени, образует его *устойчивое многообразие* W_Q^s , а пара траекторий, стремящихся к седлу в обратном времени, составляют его *неустойчивое многообразие* W_Q^u . Сепаратрисы делят фазовое пространство на области с принципиально различным характером фазовых траекторий. В некоторых случаях сепаратрисы могут замыкаться, образуя сепаратрисные петли (контуры) (рис. 1.2).

Фазовые портреты неавтономных систем имеют некоторые особенности. Одна из них состоит в следующем. Фазовые траектории неавтономной системы при изменении времени t от $-\infty$ до $+\infty$ не остаются в пределах ограниченной области фазового пространства, поскольку t в данном случае является одной из фазовых координат. В случае периодического внешнего воздействия можно построить фазовый портрет, сведя неавтономную систему к автономной. Для этого нужно ввести фазу воздействия $\Psi = \omega_{ex}t$ и добавить к уравнениям ДС еще одно уравнение: $\dot{\Psi} = \omega_{ex}$. Однако, если пред-

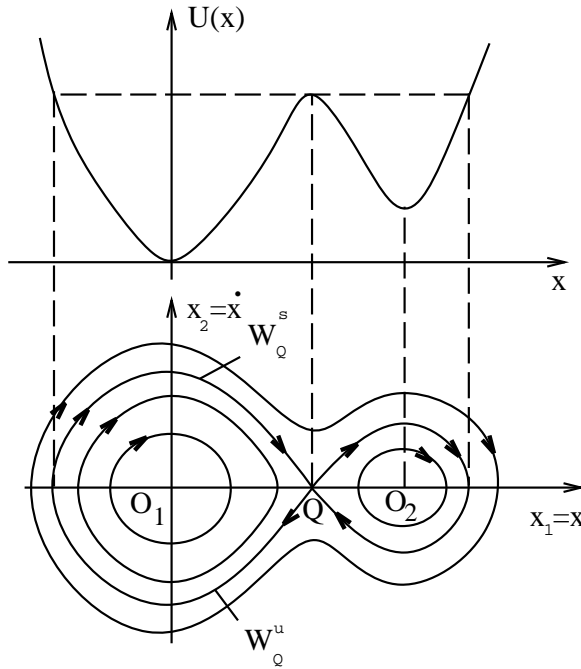


Рис. 1.2. Качественное построение фазового портрета нелинейного консервативного осциллятора с помощью потенциальной функции $U(x)$

полагать, что Ψ определена на всей действительной оси, то новая переменная ничего не дает, и фазовые траектории остаются неограниченными как и прежде. Можно перейти к ограниченным фазовым траекториям, если положить, что $\Psi \in [0, 2\pi]$, и ввести цилиндрическое фазовое пространство (вообще говоря многомерное). На рис. 1.3 показаны фазовые траектории неавтономной системы, лежащие на цилиндре (в целях наглядности приведена только одна динамическая переменная x).

Рассмотрим осциллятор Ван дер Поля

$$\ddot{x} - (\alpha - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (1.5)$$

Для $\alpha > 0$ и $t \rightarrow \infty$ в автоколебательной системе (1.5) не зависимо от выбора начальных условий устанавливаются периодические колебания. Этим колебаниям в фазовом пространстве соответствует замкнутая изолированная кривая, называемая *предельным циклом Андронова–Пуанкаре* [1]. Все фазовые траектории (1.5), выходящие из различных точек фазовой плоскости, при $t \rightarrow \infty$ стремятся к предельному циклу. Единственное исключение составляет состояние равновесия в начале координат. При малых α предельный цикл по форме близок к эллипсу, а состоянию равновесия в начале координат отвечает *неустойчивый фокус*. Соответствующий фазовый портрет и форма колебаний $x(t)$ показаны на рис. 1.4а. При увеличении α предельный цикл искажается, и характер состояния равновесия меняется. При $\alpha > 2\omega_0$ неустойчивый фокус превращается

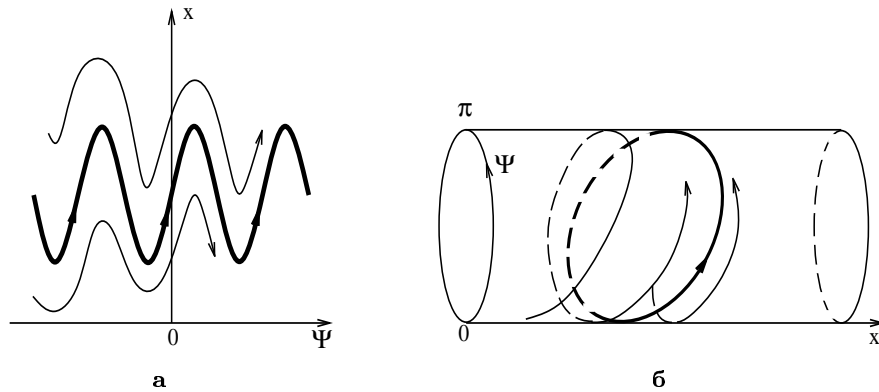


Рис. 1.3. Фазовые портреты неавтономной системы $\dot{x} = f(x) + B \sin \omega_{\text{ext}} t$: (а) для $\Psi = \omega_{\text{ext}} t$, определенной на интервале $(-\infty, +\infty)$, и (б) для $\Psi \in [0, 2\pi]$

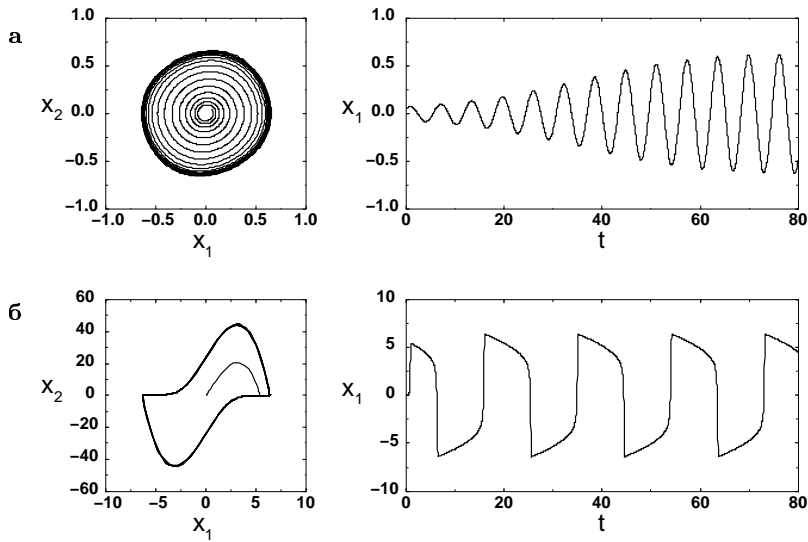


Рис. 1.4. Фазовые портреты и форма колебаний для осциллятора Ван дер Поля (1.5) с $\omega_0 = 1$; (а) для $\alpha = 0.1$ и (б) для $\alpha = 10$. $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$

в неустойчивый узел, а продолжительность переходного процесса значительно уменьшается (рис. 1.4б).

Фазовые портреты трехмерных систем не столь наглядны. В этом случае разумно рассматривать сечение фазовых траекторий некоторой плоскостью или поверхностью, выбранной таким образом, чтобы все траектории пересекали эту поверхность под ненулевым углом. На секущей поверхности возникает множество точек, соответствующих различным фазовым траекториям исходной системы, которые могут дать нам представление о структуре фазового портрета ДС. Обычно рассматриваются точки пересечения поверхности траекториями, идущими в одном выбранном направ-

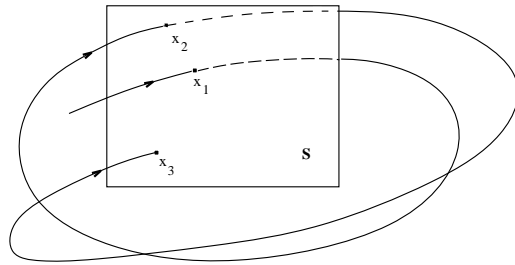


Рис. 1.5. Сечение Пуанкаре

лении, как показано на рис. 1.5. Оператор эволюции однозначным (но не взаимно-однозначным) образом определяет отображение секущей поверхности в себя, называемое *отображением возврата* или *отображением Пуанкаре* [4]. Отображение Пуанкаре уменьшает размерность исследуемого множества до $N - 1$, что делает фазовый портрет системы более наглядным. Конечные последовательности точек (периодические орбиты или циклы отображения) соответствуют замкнутым кривым (предельным циклам) исходной системы, а бесконечные последовательности точек соответствуют апериодическим траекториям.

1.1.3 Устойчивость (линейное приближение)

Задача анализа устойчивости конкретного режима функционирования системы — одна из наиболее важных в теории ДС. Режиму эволюции ДС из некоторого заданного начального состояния соответствует траектория в фазовом пространстве. Таким образом необходимо исследовать устойчивость той или иной фазовой траектории по отношению к малым возмущениям. Существует несколько различных определений устойчивости, а именно: устойчивость по Ляпунову, асимптотическая устойчивость, орбитальная устойчивость и устойчивость по Пуассону [2, 5, 6]. Исследуемая фазовая траектория $\mathbf{x}^*(t)$ является *устойчивой по Ляпунову*, если для любого произвольно малого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любой траектории $\mathbf{x}(t)$, для которой $\|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}^*(t_0)\| < \delta$, для всех $t > t_0$ выполняется неравенство $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)\| < \varepsilon$. Знак $\|\dots\|$ обозначает норму в \mathbf{R}^N . Таким образом, малое начальное возмущение устойчивых по Ляпунову фазовых траекторий не возрастает с течением времени. Если малое возмущение δ со временем уменьшается, то есть, $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, то траектория обладает более сильной устойчивостью, а именно, *асимптотической устойчивостью*. Любая асимптотически устойчивая фазовая траектория устойчива по Ляпунову. Обратное утверждение в общем случае не верно.

Определение *орбитальной устойчивости* несколько отличается от определения устойчивости по Ляпунову. В последнем случае расстояние между точками исследуемой и возмущенной фазовых траекторий рассматривается в один и тот же момент времени. Орбитальная устойчивость характеризует минимальное расстояние между фазовой точкой возмущенной траектории в данный мо-

мент времени t и орбитой Γ^* , соответствующей исследуемому движению. Траектория, устойчивая по Ляпунову, всегда орбитально устойчива. Обратное утверждение в общем случае не справедливо.

Самым слабым требованием является требование *устойчивости* фазовой траектории $\mathbf{x}^*(t)$ по Пуассону. Устойчивость по Пуассону предполагает, что фазовая траектория не покидает ограниченной области фазового пространства при $t \rightarrow \infty$. Проводя бесконечно длительное время внутри этой области, фазовая траектория неизбежно возвращается в сколь угодно малую окрестность начальной точки. Времена возврата могут соответствовать периоду или квазипериоду регулярного движения или представлять случайную последовательность в режиме динамического хаоса.

Свойства устойчивости фазовых траекторий, принадлежащих предельным множествам (например, аттракторам), имеют особую важность при исследовании динамики систем. Изменение характера устойчивости того или другого предельного множества во многих случаях приводит к смене режима функционирования системы.

Предельные множества динамической системы. Пусть состояние системы задается вектором \mathbf{x}_0 в момент времени t_0 и вектором $\mathbf{x}(t) = T_{\Delta t}\mathbf{x}_0$ в момент t , где $T_{\Delta t}$ — оператор эволюции на интервале $\Delta t = t - t_0$. Предположим, что в фазовом пространстве ДС существуют два множества: V и $L \in V$, где V — совокупность всех точек \mathbf{x}_0 фазового пространства, для которых $\mathbf{x}(t) \in L$ при $t \rightarrow +\infty$ или $t \rightarrow -\infty$. В этом случае будем называть L *предельным множеством* ДС.

Рассмотрим возможные типы предельных множеств диссипативной ДС, которые могут существовать в ограниченной области фазового пространства.

Если все точки $\mathbf{x}_0 \in V$ стремятся к L в пределе $t \rightarrow +\infty$, то предельное множество L является *притягивающим* и называется *аттрактором*. Соответственно, V — бассейн притяжения аттрактора. Если точки V стремятся к L в пределе $t \rightarrow -\infty$, то множество L является *отталкивающим* и называется *репеллером*. Множество V может состоять из двух подмножеств, W^s и W^u , причем точки, принадлежащие W^s , стремятся к L в прямом времени, в то время как точки, принадлежащие W^u , приближаются к L в обратном времени. В этом случае L называется *седловым предельным множеством* или просто *седлом*. Множества W^s и W^u являются, соответственно, устойчивым и неустойчивым многообразиями седла.

При инверсии времен, $t \rightarrow -t$, регулярные аттракторы системы становятся репеллерами, и наоборот, репеллеры преобразуются в аттракторы, а многообразия седловых предельных множеств меняются ролями [7].

Самым простым предельным множеством ДС является состояние равновесия. Оно может быть аттрактором (устойчивый фокус, устойчивый узел), репеллером (неустойчивый фокус, неустойчивый узел) или седлом (простое седло или седло-фокус, который может существовать в фазовом пространстве размерности $N \geq 3$). Точка типа центр не является ни аттрактором, ни репеллером, ни седлом, поскольку отсутствует какое-либо множество точек, приближающихся к центру при движении в прямом или обратном времени. Центр – это особый случай предельного множества, для которого $V = L$.

Предельное множество в виде замкнутой кривой, *предельный цикл*, также может быть аттрактором, репеллером или седлом. Подобным же образом классифицируются тороидальные предельные множества, соответствующие квазипериодическим колебаниям, и хаотические предельные множества.

Линейный анализ устойчивости — основные концепции.

Устойчивость по Ляпунову и асимптотическая устойчивость определяются эволюцией во времени малых возмущений траектории, а именно тем, будут ли эти возмущения уменьшаться, расти или останутся ограниченными с течением времени. Малость рассматриваемых возмущений позволяет линеаризовать оператор эволюции вблизи изучаемой траектории и провести анализ ее устойчивости в линейном приближении.

Рассмотрим автономную ДС вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}), \quad (1.6)$$

где $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^N$, и $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{R}^m$ — вектор параметров. Проанализируем устойчивость частного решения $\mathbf{x}^0(t)$. Введем малое возмущение $\mathbf{y} = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^0(t)$, для которого можно записать уравнение

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}^0 + \mathbf{y}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}^0). \quad (1.7)$$

Раскладывая $\mathbf{F}(\mathbf{x}^0 + \mathbf{y})$ в ряд в окрестности \mathbf{x}^0 и принимая во внимание тот факт, что возмущение является малым, приходим к следующему линеаризованному уравнению относительно \mathbf{y} :

$$\dot{\mathbf{y}} = \hat{A}(t)\mathbf{y}, \quad (1.8)$$

где \hat{A} — матрица с элементами

$$a_{j,k} = \left. \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \right|_{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}^0(t)}, \quad j, k = 1, 2, \dots, N, \quad (1.9)$$

называемая *матрицей линеаризации* системы в окрестности решения $\mathbf{x}^0(t)$, а f_j — компоненты функции \mathbf{F} . Матрица \hat{A} характеризуется собственными векторами \mathbf{e}_i и собственными значениями ρ_i :

$$\hat{A}\mathbf{e}_i = \rho_i\mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (1.10)$$

Собственные значения ρ_i являются корнями характеристического уравнения

$$\text{Det} [\hat{A} - \rho\hat{E}] = 0, \quad (1.11)$$

где \hat{E} — единичная матрица. Начальное возмущение, заданное в момент времени t^* , меняется вдоль i -го собственного вектора следующим образом:

$$\mathbf{y}^i(t) = \mathbf{y}^i(t^*) \exp [(t - t^*)\rho_i]. \quad (1.12)$$

Увеличение или уменьшение величины возмущения $\|\mathbf{y}^i(t)\|$ определяется знаком вещественной части ρ_i . В общем случае \hat{A} является матрицей, элементы которой зависят от времени, и, следовательно, ее собственные значения и собственные векторы тоже меняются с течением времени. При изменении t^* показатель экспоненты ρ_i принимает различные значения. Следовательно возможна ситуация, когда малое возмущение $\mathbf{y}(t) = \sum_{i=1}^N \mathbf{y}^i(t)$ экспоненциально растет в одних точках изучаемой траектории $\mathbf{x}^0(t)$ и уменьшается в других.

Рассмотрим эволюцию компоненты малого возмущения $\mathbf{y}^i(t)$, направленной вдоль i -го собственного вектора матрицы \hat{A} . Устойчивость траектории вдоль собственного вектора $\mathbf{e}_i(t)$ определяется *характеристическим показателем Ляпунова* λ_i ,

$$\lambda_i = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t - t_0} \ln \left\| \frac{\mathbf{y}^i(t)}{\mathbf{y}^i(t_0)} \right\|, \quad (1.13)$$

где черта сверху означает верхний предел. Если траектория $\mathbf{x}^0(t)$ принадлежит N -мерному фазовому пространству, линеаризованная матрица имеет размерность $N \times N$ и, таким образом, N собственных векторов. В этом случае устойчивость траектории определяется набором из N показателей Ляпунова. Набор из N чисел,

расположенных в убывающем порядке, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$, образует так называемый *спектр характеристических показателей Ляпунова (спектр ЛХП)* фазовой траектории $\mathbf{x}^0(t)$.

Выясним, как показатели Ляпунова связаны с собственными значениями матрицы линеаризации $\rho_i(t)$. Рассмотрим (1.12) в начальный момент времени $t^* = t_0$, предполагая, что интервал $\Delta t = t - t_0$ мал. Перейдем в точку $\mathbf{x}(t_0 + \Delta t)$ и в качестве начального возмущения возьмем

$$\mathbf{y}^i(t_0 + \Delta t) = \mathbf{y}^i(t_0) \exp [\rho_i(t_0) \Delta t].$$

Будем полагать, что поскольку Δt мало, направление собственных векторов \mathbf{e}_i почти не меняется в течение этого интервала времени, и можно считать, что вектор $\mathbf{y}^i(t_0 + \Delta t)$ направлен вдоль i -го собственного вектора. Полагаем, что начальное возмущение $\mathbf{y}^i(t_0)$ настолько мало, что оно остается малым и в последующие моменты времени. Перемещаясь по кривой $\mathbf{x}^0(t)$ с малым шагом Δt , получаем каждый раз приближенное выражение, описывающее эволюцию малого возмущения в направлении i -го собственного вектора:

$$\mathbf{y}^i(t) \approx \mathbf{y}^i(t_0) \exp \left[\sum_k \rho_i(t_k) \Delta t \right]. \quad (1.14)$$

Переходя к пределу $\|\mathbf{y}^i(t_0)\| \rightarrow 0$ и $\Delta t \rightarrow 0$, получаем строгое равенство

$$\mathbf{y}^i(t) = \mathbf{y}^i(t_0) \exp \left[\int_{t_0}^t \rho_i(t') dt' \right]. \quad (1.15)$$

При подстановке (1.15) в (1.13) получаем

$$\lambda_i = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t \operatorname{Re} \rho_i(t') dt'. \quad (1.16)$$

Таким образом, i -ый показатель Ляпунова λ_i можно понимать как усредненную вдоль изучаемой траектории вещественную часть собственного значения ρ_i матрицы линеаризации $\hat{A}(t)$. Он показывает, что происходит с соответствующей компонентой начального возмущения в среднем вдоль траектории. Дивергенция потока и, следовательно, эволюция фазового объема определяется суммой показателей Ляпунова. Можно показывать, что

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t \operatorname{div} \mathbf{F}(t') dt'. \quad (1.17)$$

Если траектория $\mathbf{x}^0(t)$ устойчива по Ляпунову, то произвольное начальное возмущение $\mathbf{y}(t_0)$, в среднем, вдоль траектории не растет. Для этого необходимо и достаточно, чтобы спектр ЛХП не содержал положительных показателей. Если произвольная ограниченная траектория $\mathbf{x}^0(t)$ автономной системы (1.6) не является состоянием равновесия или сепаратрисой седла, то по крайней мере один из показателей Ляпунова всегда равен нулю [6, 8]. Действительно, малое возмущение в среднем остается неизменным вдоль направления, касательного к траектории. Элемент фазового объема должен сжиматься для фазовых траекторий, расположенных на аттракторе. В этом случае усредненная дивергенция фазового потока $\mathbf{F}(\mathbf{x}(t))$ диссипативной ДС отрицательна, и сумма показателей Ляпунова удовлетворяет следующему неравенству:

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i < 0. \tag{1.18}$$

Устойчивость состояний равновесия. Если частное решение $\mathbf{x}^0(t)$ системы (1.6) является состоянием равновесия, то есть $\mathbf{F}(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}$, то матрица линеаризации \hat{A} рассчитывается только в одной точке фазового пространства, и, следовательно, является

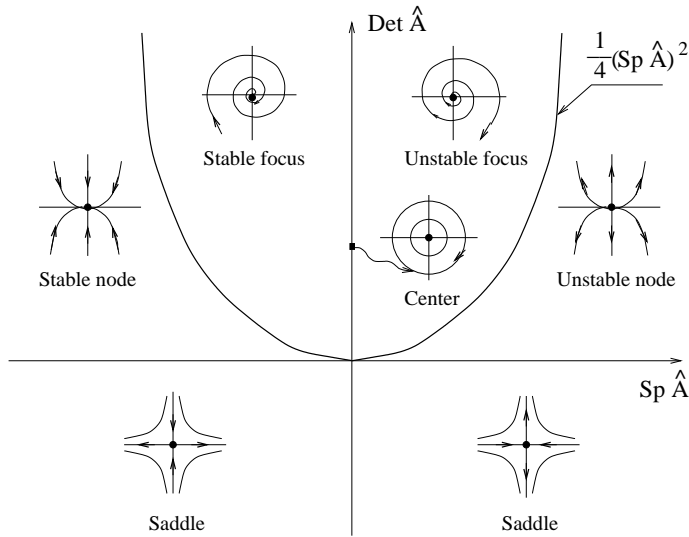


Рис. 1.6. Диаграмма состояний равновесия на плоскости (фазовые портреты показаны в преобразованных координатах [1])

матрицей с постоянными элементами $a_{i,j}$. Собственные векторы и собственные значения матрицы \hat{A} постоянны во времени, а показатели Ляпунова равны вещественным частям собственных значений: $\lambda_i = \text{Re}\rho_i$. Сигнатура спектра ЛХП показывает, является ли состояние равновесия устойчивым или нет. Для анализа поведения фазовых траекторий в локальной окрестности состояния равновесия необходимо знать также и мнимые части собственных значений матрицы линеаризации. На фазовой плоскости (случай $N = 2$) положение равновесия характеризуется двумя собственными значениями матрицы \hat{A} : ρ_1 и ρ_2 . Возможны следующие случаи: 1) ρ_1 и ρ_2 являются вещественными отрицательными числами. В этом случае состояние равновесия представляет собой устойчивый узел. 2) ρ_1 и ρ_2 — вещественные положительные числа. Состояние равновесия является неустойчивым узлом. 3) ρ_1 и ρ_2 — вещественные числа, но с различными знаками. Состояние равновесия в этом случае — седло. 4) ρ_1 и ρ_2 — комплексно-сопряженные числа с $\text{Re}\rho_{1,2} < 0$. Состояние равновесия — устойчивый фокус. 5) ρ_1 и ρ_2 — комплексно-сопряженные с $\text{Re}\rho_{1,2} > 0$. Состояние равновесия — неустойчивый фокус. 6) ρ_1 и ρ_2 — чисто мнимые числа: $\rho_{1,2} = \pm i\omega$. Состояние равновесия в этом случае является центром. На рис. 1.6 показана диаграмма состояний равновесия, существующих на фазовой плоскости при различных значениях детерминанта и следа матрицы \hat{A} (соответственно, $\text{Det}\hat{A} = \rho_1\rho_2$ и $\text{Sp}\hat{A} = \rho_1 + \rho_2$).

Помимо вышеупомянутых состояний равновесия, в пространстве с размерностью $N \geq 3$ возможны и другие типы состояний равновесия, например, неустойчивое по Ляпунову состояние равновесия, называемое седло-фокусом. На рис. 1.7 показаны два варианта состояния равновесия седло-фокусного типа, реализуемые в \mathbf{R}^3 . Они различаются размерностями их устойчивых и неустойчивых многообразий.

Зная показатели Ляпунова, нетрудно определить, к какому типу предельных множеств принадлежит исследуемое состояние равновесия. Положение равновесия является аттрактором, если оно асимптотически устойчиво во всех направлениях, т.е. его спектр ЛХП состоит только из отрицательных показателей (устойчивый узел или фокус). Если состояние равновесия неустойчиво во всех направлениях, то оно является репеллером (неустойчивый узел или фокус). Если спектр ЛХП включает как положительные, так и отрицательные показатели, то состояние равновесия принадлежит к

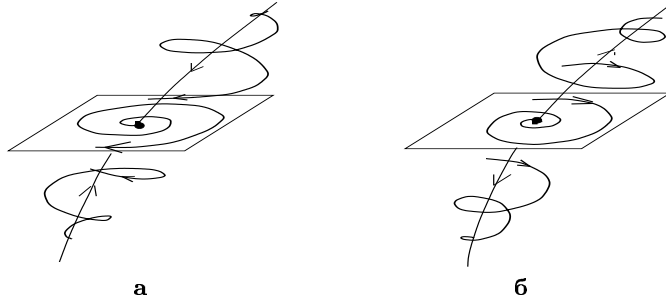


Рис. 1.7. Седло-фокусы в трехмерном фазовом пространстве: (а) ρ_1 – вещественно и отрицательно, $\rho_{2,3}$ – комплексно-сопряженные $\text{Re}\rho_{2,3} > 0$; (б) ρ_1 – вещественно и положительно, $\rho_{2,3}$ – комплексно-сопряженные $\text{Re}\rho_{2,3} < 0$

седловому типу (простое седло или седло-фокус). Кроме того, число показателей $\lambda_i \geq 0$ и $\lambda_j \leq 0$ определяет размерность неустойчивого и устойчивого многообразий.

Устойчивость периодических решений. Любое периодическое решение $\mathbf{x}^0(t)$ системы (1.6) удовлетворяет условию

$$\mathbf{x}^0(t) = \mathbf{x}^0(t + T), \tag{1.19}$$

где T – период решения. Матрица линеаризации $\hat{A}(t)$, вычисляемая в точках траектории, соответствующей периодическому решению $\mathbf{x}^0(t)$, также является периодической:

$$\hat{A}(t) = \hat{A}(t + T). \tag{1.20}$$

В этом случае уравнение для возмущений (1.8) представляет собой линейное уравнение с периодическими коэффициентами. Устойчивость периодического решения можно оценить, определив, как малое возмущение $\mathbf{y}(t_0)$ меняется за период T . Его эволюция может быть представлена следующим образом [9]:

$$\mathbf{y}(t_0 + T) = \hat{M}_T \mathbf{y}(t_0), \tag{1.21}$$

где \hat{M}_T – постоянная матрица, называемая *матрицей монодромии*. Собственные значения матрицы монодромии, то есть корни характеристического уравнения

$$\text{Det}[\hat{M}_T - \mu \hat{E}] = 0, \tag{1.22}$$

называются *мультипликаторами* периодического решения $\mathbf{x}^0(t)$. Мультипликаторы определяют устойчивость периодического решения. Действительно, действие оператора монодромии (1.21) за период T сводится к следующему: компоненты разложения первоначального возмущения по собственным векторам матрицы $\hat{A}(t_0)$, умножаются на соответствующие мультипликаторы μ_i . Таким образом, для того, чтобы периодическое решение $\mathbf{x}^0(t)$ было устойчиво по Ляпунову, необходимо и достаточно, чтобы его мультипликаторы удовлетворяли требованию $|\mu_i| \leq 1, i = 1, 2, \dots, N$. По крайней мере один из мультипликаторов всегда равен $+1$. Как собственные значения матрицы монодромии, мультипликаторы удовлетворяют условиям:

$$\sum_{i=1}^N \mu_i = \text{Sp} \hat{M}_T, \quad \prod_{i=1}^N \mu_i = \text{Det} \hat{M}_T. \quad (1.23)$$

Мультипликаторы связаны с показателями Ляпунова для периодического решения следующим образом:

$$\lambda_i = \frac{1}{T} \ln |\mu_i|. \quad (1.24)$$

Нулевой показатель в спектре ЛХП предельного цикла соответствует мультипликатору, равному единице. Предельный цикл является аттрактором, если все другие показатели отрицательны. Если спектр ЛХП включает показатели различного знака, то предельный цикл является седловым. Размерность неустойчивого многообразия седлового цикла равна числу неотрицательных показателей в спектре ЛХП, а размерность его устойчивого многообразия равно числу показателей, для которых $\lambda_i \leq 0$. Если все $\lambda_i > 0$, то предельный цикл является абсолютно неустойчивым (репеллером).

Устойчивость квазипериодических решений. Пусть частное решение $\mathbf{x}^0(t)$ системы (1.6) соответствует квазипериодическим колебаниям с k независимыми частотами $\omega_j, j = 1, 2, \dots, k$. Т.е. справедливо следующее:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^0(t) &= \mathbf{x}^0(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_k(t)) \\ &= \mathbf{x}^0(\varphi_1(t) + 2\pi m, \varphi_2(t) + 2\pi m, \dots, \varphi_k(t) + 2\pi m), \end{aligned} \quad (1.25)$$

где m — произвольное целое число, $\varphi_j(t) = \omega_j t, j = 1, 2, \dots, k$. Устойчивость квазипериодического решения характеризуется спектром ЛХП. Матрица линеаризации $\hat{A}(t)$ является квазипериодической, поэтому показатели Ляпунова строго определены только в

пределе $t \rightarrow \infty$. В случае *эргодических* квазипериодических колебаний, периодичности решения по всем аргументам φ_j соответствует наличие k нулевых показателей в спектре ЛХП. Если все другие показатели – отрицательные, то k -мерная тороидальная гиперповерхность (мы будем использовать для простоты термин “ k -мерный тор”), на которой лежит исследуемая квазипериодическая траектория, является аттрактором. Если все отличные от нуля показатели положительны, то k -мерный тор будет репеллером. Тор является седловым, если спектр ЛХП траекторий на торе помимо нулевых показателей содержит как положительные, так и отрицательные показатели ¹.

Устойчивость хаотических решений. Хаотическая траектория, независимо от того, принадлежит ли она хаотическому аттрактору, хаотическому репеллеру или седлу, всегда имеет хотя бы одно направление неустойчивости. Поэтому спектр ЛХП хаотического решения всегда имеет по крайней мере один положительный показатель Ляпунова. Неустойчивость фазовых траекторий на хаотическом аттракторе и притягивающий характер предельного множества, не противоречат друг другу. Фазовые траектории, стартующие из близких начальных точек в бассейне притяжения, стремятся на аттрактор, и в то же время экспоненциально расходятся на нем. Следовательно, хаотические траектории на аттракторе неустойчивы по Ляпунову, но устойчивы по Пуассону.

Для хаотических аттракторов типична сложная геометрическая структура, в связи с чем они были названы странными. Примером странного аттрактора может служить предельное множество, возникающее в так называемом *отображении подковы (отображении Смейла)* [10]. Единичный квадрат сжимается по одному направлению и растягивается по другому, при этом площадь уменьшается. Полученная лента изгибается в форме подковы и снова вкладывается в первоначальный квадрат, как показано на рис. 1.8. Такая процедура повторяется много раз. В предделе формируется множество с нулевой площадью, которое не является счетным множеством точек или линий. Оно имеет *Канторову структуру* в своем сечении и характеризуется дробной размерностью Хаусдорфа.

Устойчивость фазовых траекторий в системах с дискретным временем. Пусть система с дискретным временем описыва-

¹ Эту ситуацию следует отличать от хаотической динамики на k -мерном торе, которая может иметь место при $k \geq 3$.

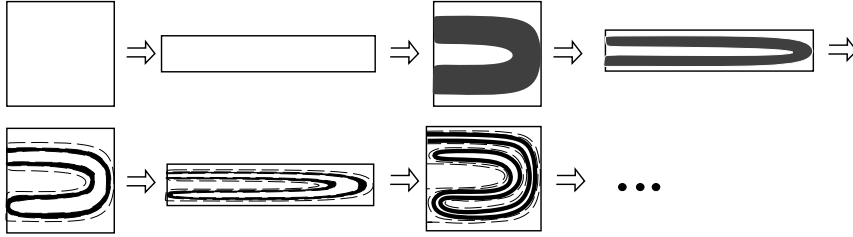


Рис. 1.8. Формирование странного аттрактора в отображении подковы

ется отображением

$$\mathbf{x}(n + 1) = \mathbf{P}(\mathbf{x}(n), \boldsymbol{\alpha}), \tag{1.26}$$

где $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^N$ — вектор состояния, n — дискретная переменная времени, $\mathbf{P}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha})$ — вектор-функция с компонентами $P_j, j = 1, 2, \dots, N$, и $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{R}^m$ — вектор параметров системы. Проанализируем устойчивость произвольного решения $\mathbf{x}^0(n)$. Рассматривая малое возмущение $\mathbf{y}(n) = \mathbf{x}(n) - \mathbf{x}^0(n)$ и линеаризуя отображение вблизи решения $\mathbf{x}^0(n)$, получаем линейное уравнение для возмущения:

$$\mathbf{y}(n + 1) = \hat{M}(n)\mathbf{y}(n), \tag{1.27}$$

Где $\hat{M}(n)$ — линеаризованная матрица с элементами

$$m_{j,k} = \left. \frac{\partial P_j(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha})}{\partial x_k} \right|_{\mathbf{x} \in \mathbf{x}^0(n)}. \tag{1.28}$$

Из (1.27) следует, что начальное возмущение эволюционирует согласно закону

$$\mathbf{y}(n + 1) = \hat{M}(n)\hat{M}(n - 1) \dots \hat{M}(1)\mathbf{y}(1). \tag{1.29}$$

По аналогии с дифференциальными системами введем показатели Ляпунова для решения $\mathbf{x}^0(n)$:

$$\lambda_i = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left\| \frac{\mathbf{y}^i(n)}{\mathbf{y}^i(1)} \right\|. \tag{1.30}$$

Принимая во внимание тот факт, что

$$\hat{M}(n)\mathbf{y}^i(n) = \mu_i(n)\mathbf{y}^i(n), \tag{1.31}$$

где μ_i — собственное значение матрицы $\hat{M}(n)$, соответствующее i -му собственному вектору, и из (1.29) и (1.30) получаем

$$\lambda_i = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln |\mu_i(k)|. \quad (1.32)$$

Устойчивость неподвижных точек и предельных циклов отображения характеризуется мультипликаторами. Последовательность состояний $\mathbf{x}_1^0, \mathbf{x}_2^0, \dots, \mathbf{x}_l^0$ называется *циклом периода l* отображения, или просто *l -циклом*, если выполнено следующее условие:

$$\mathbf{x}_1^0 = \mathbf{P}^l(\mathbf{x}_1^0). \quad (1.33)$$

Если $l = 1$, то есть,

$$\mathbf{x}^0 = \mathbf{P}(\mathbf{x}^0), \quad (1.34)$$

состояние \mathbf{x}^0 называется *неподвижной точкой* отображения или *циклом периода 1*. Матрица линеаризации \hat{M} для периодического решения $\mathbf{x}^0(n)$ тоже является периодической, то есть, $\hat{M}(n+l) = \hat{M}(n)$. Компонента возмущения $\mathbf{y}^i(1)$ за период l меняется следующим образом:

$$\mathbf{y}^i(l+1) = \hat{M}(l)\hat{M}(l-1)\dots\hat{M}(1)\mathbf{y}^i(1) = \hat{M}_l\mathbf{y}^i(1). \quad (1.35)$$

Матрица \hat{M}_l не зависит от выбора начальной точки и является аналогом матрицы монодромии в дифференциальной системе. Собственные значения μ_i^l матрицы \hat{M}_l называются *мультипликаторами l -цикла* отображения. Они показывают, как изменяются проекции вектора возмущения на собственные векторы линеаризованной матрицы \hat{M} за период l . Мультипликаторы μ_i^l связаны с показателями Ляпунова соотношением

$$\lambda_i = \frac{1}{l} \ln |\mu_i^l|. \quad (1.36)$$

l -цикл отображения асимптотически устойчив, если его мультипликаторы удовлетворяют условию $|\mu_i^l| < 1$, $i = 1, 2, \dots, N$. Таким образом, спектр ЛХП содержит только отрицательные значения.

Если отображение с размерностью фазового пространства $N-1$ является отображением последования в сечении Пуанкаре некоторой N -мерной дифференциальной системы, то оно обладает следующим свойством: множество собственных значений μ_i^l , $i =$

$1, 2, \dots, (N - 1)$ матрицы \hat{M}_l для l -цикла, дополненное мультипликатором $\mu_N^l = 1$, полностью совпадает с множеством собственных значений матрицы монодромии соответствующего предельного цикла исходной дифференциальной системы. На этом основании устойчивость периодических решений в дифференциальных системах может быть количественно описана мультипликаторами соответствующих циклов в отображении Пуанкаре.

1.1.4 Бифуркации динамических систем, катастрофы

При математическом моделировании большинства практических задач в нелинейной динамике наиболее часто используются дифференциальные уравнения и отображения, зависящие от ряда параметров. Изменение параметров системы может привести к качественному преобразованию фазового портрета системы, называемому *бифуркацией* [2, 7, 8, 11]. Под качественным изменением фазового портрета подразумевается его структурная перестройка, нарушающая *топологическую эквивалентность*. Значение параметра, при котором происходит бифуркация, называется *бифуркационным значением* или *точкой бифуркации*. Помимо фазового пространства, ДС характеризуется также пространством параметров. Определенный набор значений параметров $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_M$ образует радиус-вектор α в этом пространстве. В многомерном пространстве параметров системы бифуркационным значениям могут соответствовать определенные множества, представляющие собой точки, линии, поверхности, и т.д. Бифуркации характеризуются некоторым количеством условий, налагаемых на параметры системы. Число таких условий называется *корузмерностью* бифуркации. Например, корузмерность 1 означает, что имеется только одно бифуркационное условие.

Различают *локальные* и *нелокальные бифуркации* ДС. *Локальные бифуркации* связаны с локальной окрестностью траектории на предельном множестве. Они отражают изменение устойчивости как отдельных траекторий, так и всего предельного множества целиком, и могут свидетельствовать об исчезновении исследуемого предельного множества в результате его слияния с другим предельным множеством. Все перечисленные выше явления могут быть обнаружены в рамках линейного анализа устойчивости. Например, смена знака одного из ляпуновских показателей траектории на предельном множестве свидетельствует о локальной бифуркации

предельного множества. *Нелокальные бифуркации* [12] связаны с поведением многообразий предельных седловых множеств, в частности, с образованием сепаратрисных петель, гомоклинических и гетероклинических кривых, а также с возникновением касания аттрактора и сепаратрисной кривой или поверхности. Перечисленные эффекты не могут быть обнаружены в рамках линейного приближения. В такой ситуации необходимо учитывать нелинейные свойства изучаемой системы.

Бифуркации могут происходить с любыми предельными множествами, но наибольший интерес представляют бифуркации аттракторов, поскольку они приводят к изменениям экспериментально наблюдаемых режимов. Бифуркации аттракторов обычно подразделяются на *внутренние (мягкие)* бифуркации и *кризисы (жесткие)* бифуркации [7, 13]. *Внутренние бифуркации* связаны с топологическими изменениями самих притягивающих предельных множеств, но не затрагивают их бассейнов притяжения. *Кризисы* аттракторов сопровождаются качественной перестройкой границ бассейнов притяжения.

Концепция *грубости (структурной устойчивости)* ДС тесно связана с бифуркациями. ДС называется *грубой* или *структурно устойчивой*, если малые гладкие возмущения оператора эволюции приводят к топологически эквивалентным решениям [1]. Бифуркацию ДС можно представлять как переход системы от одного структурно устойчивого состояния к другому через структурно неустойчивое состояние в точке бифуркации.

Анализ бифуркаций ДС при изменении параметров системы позволяет построить *бифуркационную диаграмму* системы. *Бифуркационная диаграмма* представляет собой набор точек, линий и поверхностей в пространстве параметров, которые соответствуют различным бифуркациям предельных множеств системы. Если при некоторых значениях параметров существуют несколько предельных множеств, то бифуркационная диаграмма является "многолистной". Сосуществование большого (даже бесконечного) числа предельных множеств типично для систем со сложной динамикой. В этом случае точки бифуркаций могут быть всюду плотны в пространстве параметров. При таких условиях построение полной бифуркационной диаграммы системы становится невозможным, поэтому имеет смысл рассматривать только отдельные ее листы и фрагменты. Помимо бифуркационных диаграмм в пространстве

параметров, для наглядного представления часто используются так называемые *фазо-параметрические диаграммы*. При построении такой диаграммы значения управляющего параметра откладываются по оси абсцисс, а ось ординат соответствует одной из динамических переменных, или некоторой величине, связанной с состоянием ДС.

Резкие изменения состояния системы, вызванные гладкими возмущениями оператора эволюции, в частности, малыми вариациями параметров, называются *катастрофами*. Таким образом, кризисы и катастрофы – очень близкие, возможно, тождественные понятия. Теория катастроф [14, 15], вобравшая в себя идеи теории особенностей Уитни [16], была разработана топологом Р. Тома [15], который показал, что существует незначительное число элементарных катастроф, с помощью которых можно локально описать поведение системы. Существенный вклад в развитие теории катастроф был внесен В.И. Арнольдом [7, 17].

Рассмотрим основные локальные бифуркации состояний равновесия.

Седло-узловая бифуркация коразмерности один. Бифуркация коразмерности один может быть описана с использованием только одного управляющего параметра α . Предположим, что при $\alpha < \alpha^*$ система имеет два состояния равновесия: устойчивый узел Q и седло S , показанные на Рис. 1.9а. При $\alpha = \alpha^*$ узел и седло сливаются, образуя негрубое состояние равновесия, называемое *седло-узлом* (Рис. 1.9б). Оно исчезает при $\alpha > \alpha^*$ (Рис. 1.9в). Поскольку аттрактор (узел) в результате бифуркации исчезает, границы бассейнов притяжения качественно меняются. Следовательно, данная бифуркация является кризисом. Простейшей модельной системой для анализа такой бифуркации служит уравнение первого порядка

$$\dot{x} = \alpha - x^2. \quad (1.37)$$

Считается, что оно описывает поведение точки на неустойчивом многообразии седла, а устойчивое направление исключается из рассмотрения. В такой одномерной модели седлу соответствует неустойчивое состояние равновесия. $x_{1,2}^0 = \pm\sqrt{\alpha}$ – координаты состояний равновесия, а $\rho_{1,2} = \mp 2\sqrt{\alpha}$ – собственные значения матрицы линеаризации в точках равновесия. Таким образом, x_1^0 – устойчивое, а x_2^0 – неустойчивое состояния равновесия. При $\alpha = 0$,

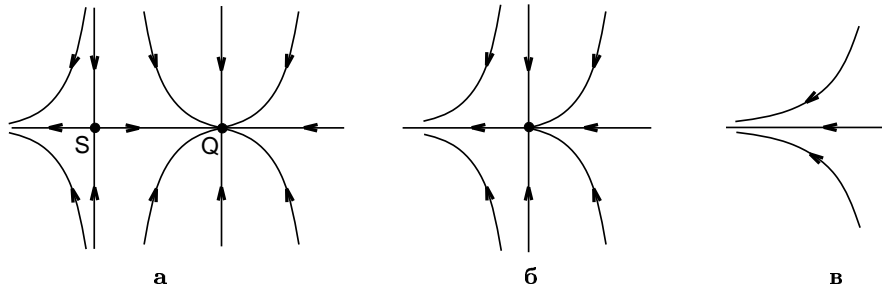


Рис. 1.9. Качественная иллюстрация седло–узловой бифуркации коразмерности один

$x_1^0 = x_2^0 = 0$, и собственное значение в этой точке равно нулю. Единственное бифуркационное условие есть: $\rho(\alpha) = 0$.

Бифуркация коразмерности два — трехкратное равновесие. Эта бифуркация состоит в слиянии трех состояний равновесия: двух узлов Q_1, Q_2 и седла Q_0 , расположенного между ними. В результате остается один устойчивый узел в точке Q_0 (иллюстрация на рис. 1.10). Коразмерность бифуркации равна двум, и для ее рассмотрения требуется изменять два параметра. Модельная система для такой бифуркации может быть записана в виде

$$\dot{x} = \alpha_1 + \alpha_2 x + x^3. \tag{1.38}$$

Анализ состояний равновесия показывает, что при $\alpha_2 > 0$ вне зависимости от значения $\alpha_1 > 0$ у системы имеется единственное состояние равновесия Q_0 с собственным значением $\rho_{Q_0} < 0$, т.е.

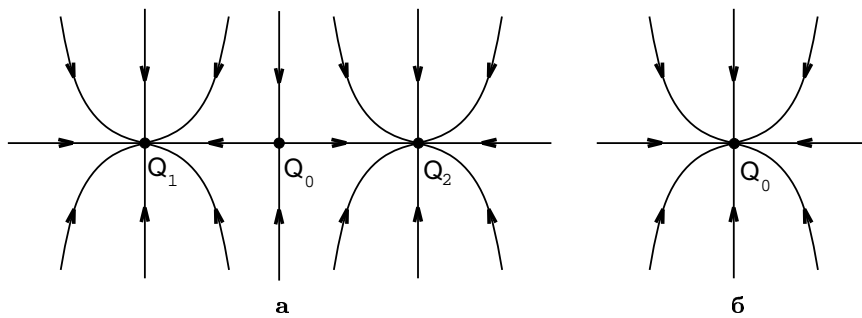


Рис. 1.10. Иллюстрация бифуркации "трехкратное равновесие". (а) Два устойчивых узла и седло до бифуркации и (б) один устойчивый узел после бифуркации

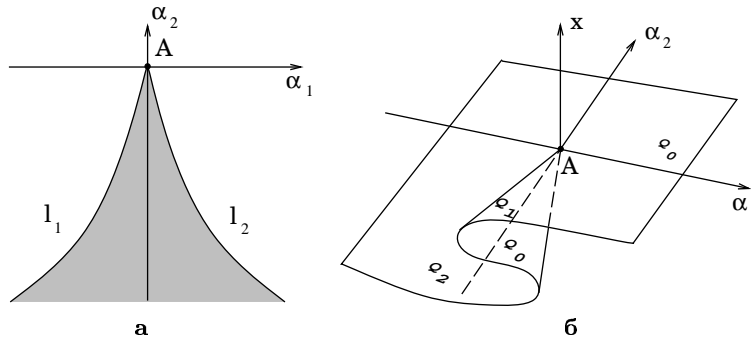


Рис. 1.11. Иллюстрация бифуркации трехкратного равновесия; (а) бифуркационная диаграмма и (б) фазо-параметрическая диаграмма

оно является асимптотически устойчивым. При $\alpha_2 < 0$ существует область значений параметра α_1 (заштрихованная область на бифуркационной диаграмме, изображенной на рис. 1.11а), в которой система имеет три состояния равновесия, Q_0, Q_1 и Q_2 . Одно из них, Q_0 , является неустойчивым с $\rho_{Q_0} > 0$, а два других, Q_1 и Q_2 , устойчивы с $\rho_{Q_{1,2}} \leq 0$. Область бистабильности на бифуркационной диаграмме (рис. 1.11) ограничена линиями l_1 и l_2 , которые соответствуют седло-узловым бифуркациям узлов $Q_{1,2}$ с седлом Q_0 . Линии l_1 и l_2 сходятся к точке A ($\alpha_1 = \alpha_2 = 0$), называемой *точкой сборки* или *каслом*. В этой точке одновременно выполняются два бифуркационных условия: $\rho_{Q_1}(\alpha_1, \alpha_2) = 0$ и $\rho_{Q_2}(\alpha_1, \alpha_2) = 0$. Поэтому бифуркация трехкратного равновесия имеет коразмерность два. В фазо-параметрическом пространстве системы (1.38) имеет место структура, называемая *сборкой* (рис. 1.11б). В области сборки верхний и нижний листы бифуркационной диаграммы соответствуют устойчивым состояниям равновесия, а центральный — неустойчивому.

Бифуркация Андронова–Хопфа. В ДС с размерностью $N \geq 2$ возможна такая ситуация, когда пара комплексно-сопряженных собственных значений положения равновесия типа "устойчивый фокус" пересекает мнимую ось. Это означает, что выполнено бифуркационное условие $\text{Re}\rho_{1,2} = 0$. Пусть при этом $\text{Im}\rho_{1,2} \neq 0$. Этот случай отвечает *бифуркации Андронова–Хопфа* [1, 18], иначе называемой *бифуркацией рождения (исчезновения) предельного цикла*. Такая бифуркация была впервые исследована А.А. Андроновым для случая $N = 2$ и затем обобщена Е. Хопфом на системы

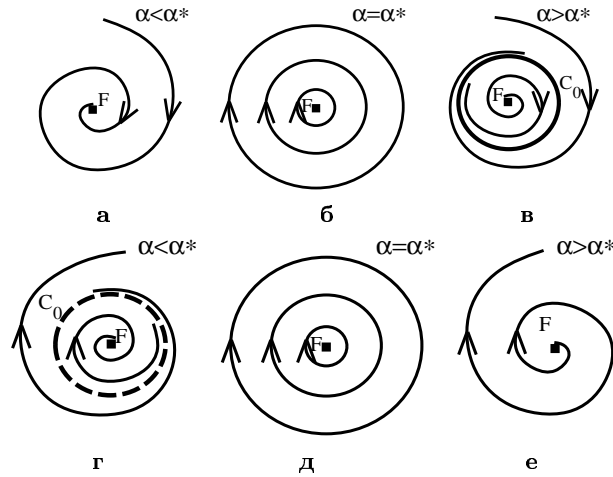


Рис. 1.12. (а–в) Суперкритическая и (г–е) субкритическая бифуркация Андронова–Хопфа

с произвольным числом измерений N . Существуют два различных вида бифуркаций Андронова–Хопфа: *суперкритическая* или *мягкая* бифуркация, и *субкритическая* или *жесткая* бифуркация. Суперкритическая бифуркация является внутренней, а субкритическая бифуркация соответствует кризису аттрактора. Бифуркация Андронова–Хопфа определяется единственным бифуркационным условием и поэтому имеет коразмерность один.

Суперкритическая бифуркация Андронова–Хопфа проиллюстрирована на рис. 1.12а–в и состоит в следующем. При $\alpha < \alpha^*$ существует устойчивый фокус F , который в точке бифуркации $\alpha = \alpha^*$ превращается в центр и имеет пару чисто мнимых собственных значений $\rho_{1,2} = \pm j\omega_0$. При $\alpha > \alpha^*$ фокус F становится неустойчивым ($\text{Re}\rho_{1,2} > 0$), и вблизи него рождается устойчивый предельный цикл C_0 .

Субкритическая бифуркация Андронова–Хопфа происходит, когда при $\alpha = \alpha^*$ неустойчивый (в общем случае для $N > 2$ седловой) предельный цикл C_0 "стягивается" в точку фокуса F , который был устойчивым при $\alpha < \alpha^*$. В результате цикл исчезает, а фокус становится неустойчивым (рис. 1.12г–е).

Модельная система для бифуркации Андронова–Хопфа имеет следующий вид:

$$\dot{a} = (\alpha + j\omega_0)a + L_1 a|a|^2, \quad \omega_0 \neq 0, \quad L_1 \neq 0, \quad (1.39)$$

где a — мгновенная комплексная амплитуда. Величина L_1 называется *первой ляпуновской величиной* состояния равновесия. Если $L_1 < 0$, бифуркация является суперкритической. Если $L_1 > 0$, то бифуркация — субкритическая². Для вещественной мгновенной амплитуды и мгновенной фазы колебаний из (1.39) получаем:

$$\dot{A} = \alpha A + L_1 A^3, \quad \dot{\Phi} = \omega_0, \quad (1.40)$$

где $A = |a|$ и $\Phi = \text{Arg}(a)$. Из уравнения для стационарной амплитуды $\alpha A + L_1 A^3 = 0$ получаем значения, соответствующие фокусу ($A_F = 0$) и предельному циклу ($A_0 = \sqrt{-\alpha/L_1}$). Предельный цикл существует при условии, что $\alpha/L_1 < 0$. Величина ω_0 определяет его период $T = 2\pi/\omega_0$. Анализ линеаризованного уравнения для возмущения амплитуды позволяет найти собственные значения для решений $A = A_F$ и $A = A_0$: $\rho_{F,0} = \alpha + 3L_1 A_{F,0}^2$. Отсюда видно, что для $L_1 < 0$ цикл существует и устойчив при $\alpha > 0$, а фокус устойчив при $\alpha < 0$ и неустойчив при $\alpha > 0$. В случае $L_1 > 0$ при $\alpha < 0$ существуют неустойчивый цикл и устойчивый фокус, тогда как при $\alpha > 0$ — только неустойчивый фокус.

Бифуркации предельных циклов. Рассмотрим локальные бифуркации коразмерности один невырожденного предельного цикла, у которого имеется только один равный единице мультипликатор. Отбросим единичный мультипликатор и расположим оставшиеся мультипликаторы в порядке убывания абсолютных значений. В этом случае бифуркации предельного цикла связаны с одним действительным или двумя комплексно-сопряженными старшими мультипликаторами $\mu_{1,2}$. Поскольку бифуркация коразмерности один предполагает только одно бифуркационное условие, соответствующее равенству $|\mu_1| = 1$, то возможны лишь три различных типа бифуркаций: $\mu_1(\alpha^*) = +1$, $\mu_1(\alpha^*) = -1$, и $\mu_{1,2}(\alpha^*) = \exp(\pm j\varphi)$, где α^* — бифуркационное значение параметра. Для анализа бифуркаций предельного цикла, целесообразно использовать сечение Пуанкаре. Неподвижные точки в отображении последования характеризуются теми же самыми мультипликаторами, что и исходный предельный цикл, а переход к сечению делает анализ более удобным [2].

² Характер бифуркации в особом (вырожденном) случае $L_1 = 0$ нуждается в дополнительном анализе с учетом высших степеней a .

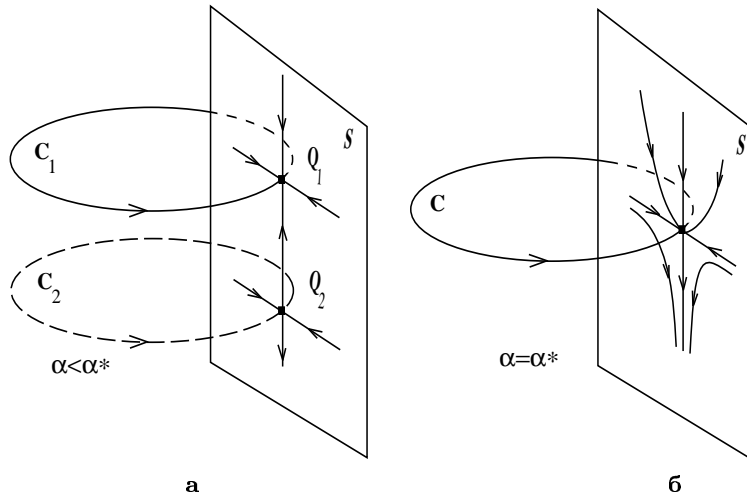


Рис. 1.13. Седло–узловая бифуркация предельных циклов

Седло–узловая бифуркация. При достижении параметром α бифуркационного значения $\alpha = \alpha^*$ мультипликатор μ_1 устойчивого цикла становится равным $+1$. Рисунок 1.13 иллюстрирует эту бифуркацию для случая трехмерного фазового пространства ($N = 3$). При $\alpha < \alpha^*$ существуют два предельных цикла: устойчивый цикл C_1 и седловой цикл C_2 (рис. 1.13а). Им отвечают устойчивая Q_1 и неустойчивая Q_2 неподвижные точки в сечении Пуанкаре. Условие $\mu_1 = 1$ определяет бифуркацию, подобную седло–узловой бифуркации состояний равновесия, рассмотренной выше. В бифуркационной точке $\alpha = \alpha^*$ происходит слияние циклов C_1 и C_2 , в результате чего возникает негрубая замкнутая траектория C типа седло–узел (см. рис. 1.13б), которая исчезает при $\alpha > \alpha^*$. Изменение параметра α в обратном направлении приводит к рождению пары циклов C_1 и C_2 из сгущения фазовых траекторий.

Бифуркация удвоения периода. В бифуркационной точке $\alpha = \alpha^*$ мультипликатор $\mu_1(\alpha^*)$ становится равным -1 , причем $d\mu/d\alpha|_{\alpha^*} \neq 0$. Бифуркация, определяемая таким условием, называется *бифуркацией удвоения периода*. Эта бифуркация может быть суперкритической (внутренней) или субкритической (кризисом). Суперкритическая бифуркация удвоения происходит следующим образом: пусть при $\alpha < \alpha^*$ существует устойчивый предельный цикл C_0 с периодом T_0 . При $\alpha > \alpha^*$ цикл C_0 становится седловым, и в его окрестности рождается устойчивый предельный цикл

C с периодом T , близким к удвоенному T_0 ($T \approx 2T_0$). Фазовые траектории C_0 и C , а также их сечение Пуанкаре вблизи точки бифуркации, изображены на рис. 1.14а. Рисунок 1.14б показывает, как меняется форма колебаний одной из динамических переменных при прохождении точки бифуркации.

Когда происходит субкритическая бифуркация удвоения периода, устойчивый цикл C_0 и седловой цикл C с удвоенным периодом, существующий при $\alpha < \alpha^*$, сливаются в точке бифуркации, после чего в фазовом пространстве остается только цикл C_0 , ставший седловым.

Бифуркация рождения (исчезновения) двумерного тора (бифуркация Неймарка). Эта бифуркация происходит, когда пара комплексно-сопряженных мультипликаторов предельного цикла выходит на единичную окружность. В бифуркационной точке $\alpha = \alpha^*$ имеет место следующее соотношение: $\mu_{1,2}(\alpha^*) = \exp(\pm j\varphi)$, где $\varphi \in [0, 2\pi]$, и $\varphi(\alpha^*) \neq 0, \pi/2, \pi/3$ (исключены так называемые *сильные резонансы*). Данная бифуркация также может быть суперкритической (внутренней) и субкритической (кризисом). В зависимости от характера бифуркации могут возникать различные ситуации. В случае суперкритической бифуркации из устойчивого предельного цикла C_0 рождается устойчивый двумерный ($2D$) тор T^2 . Цикл C_0 в результате бифуркации теряет устойчивость и становится седловым. Субкритическая бифуркация имеет место, когда неустойчивый (седловой) тор T^2 "стягивается" к устойчивому циклу C_0 , который в этот момент теряет устойчивость. Рождение тора из предельного цикла изображено на рис. 1.15а. Вблизи точки

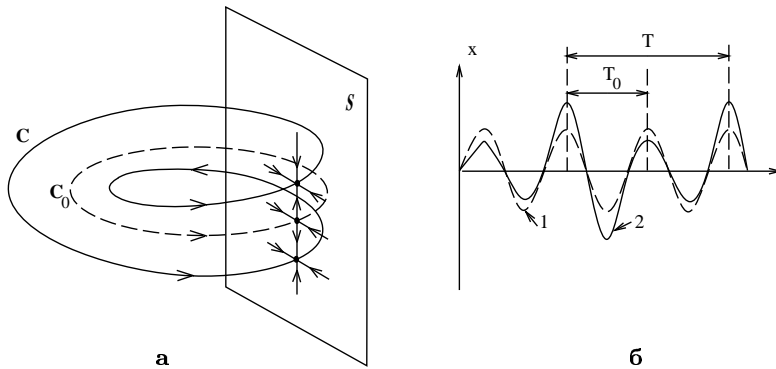


Рис. 1.14. Суперкритическая бифуркация удвоения периода. (а) Циклы C_0 и C и их сечение Пуанкаре; (б) форма колебаний до (кривая 1) и после (кривая 2) бифуркации

бифуркации $\alpha = \alpha^*$ вектор малого возмущения \mathbf{y} цикла C_0 вращается вдоль траектории C_0 . В то же время, величина возмущения остается неизменной, так как выполняется условие $|\mu_{1,2}(\alpha^*)| = 1$. Таким образом, изображающая точка в сечении Пуанкаре движется вдоль замкнутой кривой L , называемой *инвариантной окружностью*. Величина $\theta(\alpha) = \varphi/2\pi$ называется *числом вращения* на торе T^2 (или на соответствующей инвариантной окружности). Если число вращения $\theta(\alpha^*)$ принимает иррациональное значение, любая траектория C на торе незамкнута, и возникший тор является *эргодическим* (рис. 1.15б). Если $\theta(\alpha^*) = p/q$, где p и q — любые положительные целые числа, то говорят, что на торе имеет место резонанс порядка p/q . Траектория замыкается, образуя предельный цикл, лежащий на поверхности тора. Пример резонанса на торе показан на рис. 1.15в.

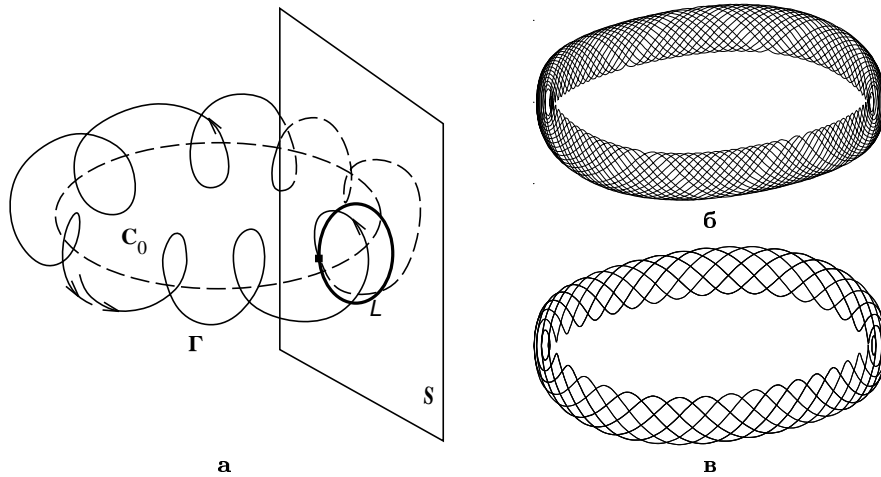


Рис. 1.15. Бифуркация рождения тора из предельного цикла C_0 : (а) траектория Γ на торе в окрестности неустойчивого цикла C_0 , (б) эргодический тор, и (в) резонанс на торе

Бифуркации нарушения симметрии. Бифуркации предельных циклов, задаваемые условиями $\mu_1(\alpha^*) = \pm 1$ и $\mu_{1,2}(\alpha^*) = \exp(\pm j\varphi)$, могут привести к ситуации, когда предельный цикл теряет свою симметрию. Такие бифуркации типичны, например, для систем, состоящих из двух или более идентичных подсистем. Свойство симметрии связано с существованием в фазовом пространстве системы некоторого инвариантного многообразия U . В качестве

примера рассмотрим случай двух связанных идентичных подсистем:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) + \gamma \mathbf{g}(\mathbf{y}, \mathbf{x}), \\ \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{F}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\alpha}) + \gamma \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}),\end{aligned}\tag{1.41}$$

где $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^N$ — векторы состояния подсистем, $\boldsymbol{\alpha}$ — вектор параметров, γ — параметр связи. Функция \mathbf{g} задает связь между подсистемами, причем $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$. В этом случае подпространство $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ есть инвариантное симметричное многообразие. Пусть устойчивый предельный цикл расположен в U , т.е. является симметричным. Если какой-либо мультипликатор симметричного цикла, соответствующий собственному вектору, не лежащему в U , принимает бифуркационное значение, то имеет место бифуркация нарушения симметрии. В результате возникает несимметричный аттрактор, то есть аттрактор, не расположенный в U . Говорят, что в результате бифуркации аттрактор теряет симметрию. Бифуркации нарушения симметрии, определенные условиями $\mu_1(\alpha^*) = -1$ и $\mu_{1,2}(\alpha^*) = \exp(\pm j\varphi)$ очень похожи на аналогичные бифуркации в системе без симметрии. Бифуркация, определенная условием $\mu_1(\alpha^*) = +1$, представляет особый случай. В результате этой бифуркации симметричный цикл $C_0 \in U$ продолжает существовать, но становится седловым. Это приводит к рождению двух устойчивых циклов с тем же самым периодом. Они не лежат в U , но взаимно симметричны. Такая бифуркация известна под названием *бифуркация вил*. Рисунок 1.16 изображает фазовые портреты после бифуркации вил. Фазо-параметрическая диаграмма этой бифуркации представлена на ис. 1.16б, где по оси ординат отложена разность соответствующих переменных $(x_1^s - y_1^s)$ в некотором сечении циклов.

Мы рассмотрели локальные бифуркации состояний равновесия и предельных циклов. Различные бифуркации происходят также и с более сложными множествами (торами, хаотическими аттракторами). Однако, их изучение зачастую основано на экспериментальных результатах. Теория бифуркаций квазипериодических и хаотических аттракторов еще не завершена и находится в состоянии развития.

Нелокальные бифуркации. Гомоклинические траектории и структуры. Нелокальные бифуркации связаны с поведением устойчивых и неустойчивых многообразий седловых предельных

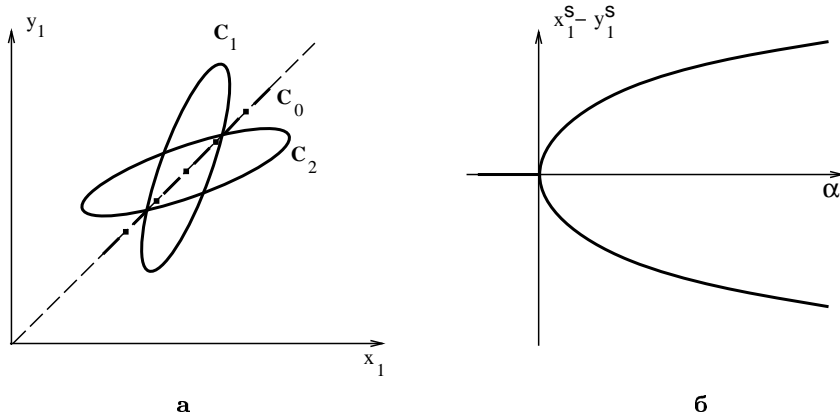


Рис. 1.16. Бифуркация виля в системе с симметрией: (а) проекция предельных циклов после бифуркации и (б) качественная иллюстрация фазо-параметрической диаграммы

множеств в фазовом пространстве. Сами по себе эти бифуркации не являются причиной топологических изменений седловых предельных множеств, но могут существенно влиять на динамику системы. Рассмотрим основные нелокальные бифуркации [2, 11].

Петля сепаратрисы седлового состояния равновесия. Эта бифуркация в простейшей форме может быть реализована уже на фазовой плоскости. Рассмотрим седловое состояние равновесия Q , устойчивая W_Q^S и неустойчивая W_Q^u сепаратрисы которого сближаются при увеличении параметра α и касаются друг друга при $\alpha = \alpha^*$. В момент касания рождается особая двоякоасимптотическая фазовая траектория Γ_0 , называемая *петлей сепаратрисы седла* (рис. 1.17а). Выполнение условия касания соответствует бифуркационному многообразию коразмерности один в пространстве параметров. Сепаратрисная петля в диссипативной системе является негрубой структурой и разрушается при $\alpha \neq \alpha^*$. Что будет происходить после ее разрушения, зависит от поведения сепаратрис после их расщепления и от *седловой величины* σ_Q состояния равновесия в точке бифуркации. Седловая величина определяется как $\sigma_Q(\alpha) = \rho_1(\alpha) + \rho_2(\alpha)$, где $\rho_{1,2}$ — собственные значения матрицы линеаризации в точке Q . Если $\sigma_Q(\alpha^*) < 0$, то при разрушении петли в направлении A , как показано на рис. 1.17а, из нее рождается единственный устойчивый цикл C (рис. 1.17б). При разрушении петли в направлении B рождения цикла не происхо-

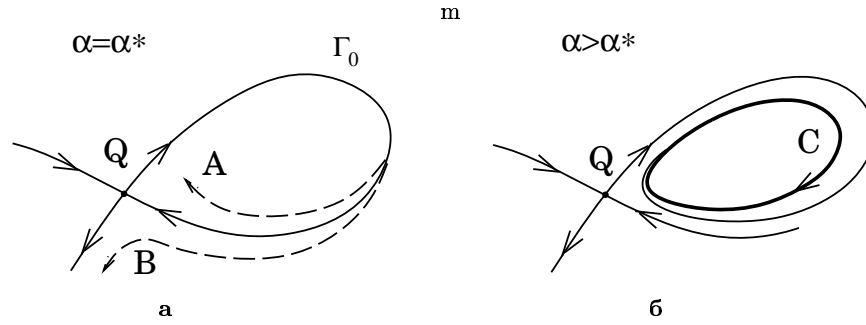


Рис. 1.17. Бифуркация образования петли сепаратрисы. Поведение сепаратрис (а) в бифуркационной точке; (б) после бифуркации

дит. Если $\sigma_Q(\alpha^*) > 0$, то петля Γ_0 называется *неустойчивой*, и при разрушении Γ_0 может родиться неустойчивый предельный цикл.

Бифуркация образования сепаратрисной петли, рассматриваемая при движении по параметру в обратном направлении, может интерпретироваться как кризис предельного цикла C , связанный с касанием седла Q . В момент касания возникает петля Γ_0 . При приближении к точке бифуркации, период цикла стремится к бесконечности, а мультипликаторы обращаются в нуль [19].

Более сложный вариант нелокальной бифуркации подобного типа возможен в фазовом пространстве с размерностью $N \geq 3$. Рассмотрим его для $N = 3$. Пусть Q является седло-фокусом с одномерным неустойчивым и двумерным устойчивым многообразиями. Он характеризуется так называемой *первой седловой величиной* $\sigma_1(\alpha) = \text{Re}\rho_{1,2}(\alpha) + \rho_3(\alpha)$, где $\rho_{1,2} = \text{Re}\rho_{1,2} \pm j\text{Im}\rho_{1,2}$ и ρ_3 — собственные значения линеаризованной матрицы в точке Q . Пусть при $\alpha = \alpha^*$ существует *петля сепаратрисы седло-фокуса* Γ_0 , (рис. 1.18), и $\sigma_1(\alpha^*) \neq 0$. При сделанных предположениях, справедлива теорема Л.П. Шильникова [20], которая утверждает следующее:

- $\sigma_1(\alpha^*) < 0$ (случай безопасной петли). Если петля разрушается по направлению A , как показано на рис. 1.18, из нее рождается устойчивый цикл Γ . При разрушении петли по направлению B ничего не происходит.
- $\sigma_1(\alpha^*) > 0$ (опасная петля). В момент существования петли Γ_0 , и затем, при ее разрушении в направлении A или B , в окрестности петли образуется сложная структура фазовых траекторий. Эта структура состоит из счетного множества периодических аттракторов, репеллеров и седел, а также из подмножества хаотических

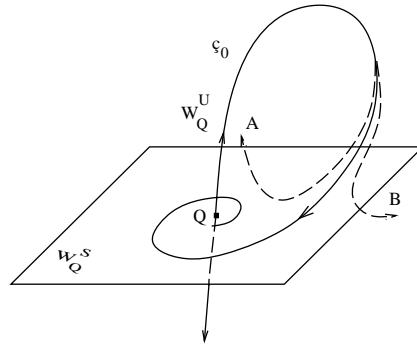


Рис. 1.18. Петля сепаратрисы седло–фокуса и возможные способы ее разрушения

траекторий, называемого *нетривиальным гиперболическим подмножеством*. Такая структура связана с возникновением в сечении Пуанкаре вблизи петли множества отображений типа подковы Смейла.

Если изучаемая система имеет седло–фокус с одномерным устойчивым и двумерным неустойчивым многообразиями, теорема Шильникова может быть применена при использовании замены t на $-t$.

Петля сепаратрисы седло–узла. Эта бифуркация также возможна уже для $N = 2$. Предположим, что при $\alpha < \alpha^*$ на фазовой плоскости существуют два состояния равновесия: седло Q_1 и устойчивый узел Q_2 . Кроме того, в результате замыкания неустойчивых сепаратрис седла на устойчивый узел образуется петля сепаратрисы седла, как показано на рис. 1.19а. В точке $\alpha = \alpha^*$ происходит седло–узловая бифуркация состояний равновесия и возникает негрубое состояние равновесия типа седло–узел. При этом седло–узел имеет двоякоасимптотическую гомоклиническую траекторию Γ_0 , то есть сепаратрисную петлю (рис. 1.19б). Когда $\alpha > \alpha^*$, седло–узел исчезает и из петли возникает предельный цикл C (рис. 1.19в).

Эта бифуркация, при рассмотрении ее в обратном порядке, является бифуркацией исчезновения цикла C . Она приводит к возникновению на цикле седло–узловой точки. При $\alpha \rightarrow \alpha^*$ период цикла возрастает до бесконечности, а мультипликаторы цикла стремятся к нулю.

Бифуркация, описанная выше, сохраняет границы притягивающей области (бассейна притяжения) и, таким образом, является внутренней бифуркацией.

Возникновение гомоклинической траектории седлового предельного цикла. Такая бифуркация возможна только при $N \geq 3$. Пусть $N = 3$. В этом случае могут существовать седловые предельные циклы с двумерными устойчивыми W^s и двумерными неустойчивыми W^u многообразиями. В секущей плоскости такому циклу соответствует седловая неподвижная точка. Эта неподвижная точка имеет одномерные устойчивое и неустойчивое многообразия. Предположим, что с ростом параметра α многообразия цикла сближаются, и при $\alpha = \alpha^*$ происходит их касание. Бифуркация коразмерности один состоит в появлении негрубой двоякоасимптотической кривой Γ_0 , называемой *гомоклинической кривой Пуанкаре*. При $\alpha > \alpha^*$, многообразия W^s и W^u пересекаются, при этом возникают две грубые гомоклинических кривых Γ_1^0 и Γ_2^0 . В секущей плоскости каждой гомоклинической кривой соответствует бесконечная двоякоасимптотическая последовательность точек пересечения сепаратрис Q_n , $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (рис. 1.20). При приближении к седлу точки Q_n уплотняются, но стремятся к седлу только в пределе $n \rightarrow \pm\infty$.

В [21, 22] показано, что около гомоклинической кривой седлового цикла возникает сложное множество траекторий. Это множество, называемое *гомоклинической структурой*, подобно множеству траекторий, возникающему в окрестности опасной петли сепаратрисы седло–фокуса и тоже связано с образованием в локальной окрестности петли отображений типа подковы. В окрестности гомоклинической кривой всюду плотны устойчивые, неустойчивые и седловые периодические орбиты. Кроме того, гомоклиническая структура включает подмножество хаотических траекторий, которое, при соответствующих условиях, может стать притягивающим.

Подобная структура характерна и для окрестности *гетероклинических траекторий*, которые появляются, когда неустойчивое

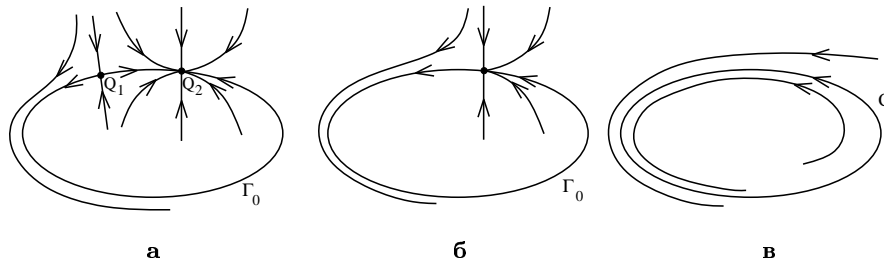


Рис. 1.19. Бифуркация возникновения петли сепаратрисы седло–узла

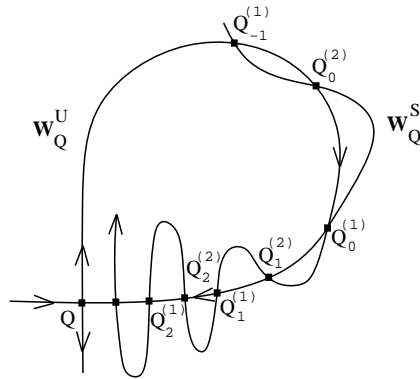


Рис. 1.20. Гомоклиническое пересечение многообразий седлового цикла (представление в секущей плоскости)

многообразие одного седлового цикла касается, а затем пересекает устойчивое многообразие другого седлового цикла.

1.1.5 Аттракторы динамических систем. Детерминированный хаос

Известно, что в диссипативной системе элемент фазового объема сжимается в процессе эволюции во времени. Предельное множество фазовых траекторий ДС всегда имеет нулевой объем. В частности, предельное множество может быть точкой, линией, поверхностью, или совокупностью поверхностей, которые образуют канторову структуру в сечении Пуанкаре.

Хаотические процессы в детерминированных нелинейных диссипативных системах – одна из фундаментальных проблем современного естествознания, являющаяся предметом пристального внимания исследователей [2, 23–27].

Образ динамического хаоса долгое время был связан со *странными аттракторами* [28]. Позднее пришло понимание, что хаотические автоколебания могут быть существенно разными по своим свойствам. Этим обуславливаются различия в структуре соответствующих аттракторов. Оказалось, что странный аттрактор является образом некоторого "идеального" хаоса, удовлетворяющего ряду строгих математических требований. Режим странного аттрактора в смысле строгого математического определения не реализуется в реальных системах. То, что мы обычно наблюдаем в экспери-

ментах, соответствует режиму так называемого *квазигиперболического* аттрактора или *негиперболического* аттрактора [11, 29]. Отличительной особенностью странных, квазигиперболических и негиперболических хаотических аттракторов является *экспоненциальная неустойчивость* фазовых траекторий и фрактальная (нецелая) размерность. Экспоненциальная неустойчивость служит критерием хаотического поведения системы во времени. Дробная размерность свидетельствует о том, что аттрактор — сложный геометрический объект.

Эволюция во времени состояний системы с конечным числом степеней свободы описывается некоторой системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i = f_i(x_1, \dots, x_N, \alpha_1, \dots, \alpha_k) \quad (1.42)$$

либо отображений последования

$$x_{n+1}^i = f_i(x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^N, \alpha_1, \dots, \alpha_k),$$

$$i = 1, 2, \dots, N,$$

где $x_i(t)$ (или x_n^i) — переменные, однозначно определяющие состояние системы (его фазовые координаты) и α_l — параметры системы, $f_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha})$ являются, в общем случае, нелинейными функциями.

В дальнейшем будут рассматриваться только автоколебательные режимы ДС (1.42). Последнее означает, что система демонстрирует установившиеся колебания, чьи характеристики не зависят от выбора начального состояния в пределах некоторой области фазового пространства. Режим устойчивого состояния равновесия будет рассматриваться, как предельный случай автоколебательного режима.

Рассмотрим фазовое пространство \mathbf{R}^N системы (1.42), зафиксировав значения всех параметров α_l . Пусть имеется некоторая конечная (или бесконечная) область G_1 , принадлежащая \mathbf{R}^N , которая включает подобласть G_0 . Области G_1 и G_0 удовлетворяют следующим условиям [7, 30–32]:

- Для любых начальных условий $x_i(0)$ (или x_0^i) из области G_1 при $t \rightarrow \infty$ (или $n \rightarrow \infty$) все фазовые траектории рано или поздно достигают области G_0 .

- Область G_0 представляет собой минимальное компактное подмножество в фазовом пространстве системы.
- Если фазовая траектория принадлежит области G_0 в момент времени $t = t_1$ ($n = n_1$), то она будет принадлежать G_0 всегда, т.е. для любого $t \geq t_1$ ($n > n_1$) фазовая траектория будет находиться в G_0 .

Если эти условия выполнены, то область G_0 называется *аттрактором* ДС (1.42). G_1 называется *областью (или бассейном) притяжения* аттрактора G_0 .

Регулярные аттракторы. До открытия детерминированного хаоса было известно всего три типа устойчивых установившихся решений ДС (1.42): состояние равновесия, устойчивое периодическое решение и устойчивое квазипериодическое решение. Соответствующими аттракторами дифференциальной системы в этих случаях являются: точка, предельный цикл и предельный n -мерный тор. Спектр ЛХП фазовой траектории на регулярном аттракторе содержит только нулевые и отрицательные показатели.

Непериодические решения системы (1.42) могут соответствовать хаотическим аттракторам сложной геометрической структуры, которые имеют по крайней мере один положительный ляпуновский показатель и, как следствие, дробную размерность, которую можно оценить, например, по формуле Каплана–Йорка [33]:

$$D_L = j + \frac{\sum_{i=1}^j \lambda_i}{|\lambda_{j+1}|}, \quad (1.43)$$

где j — наибольшее целое число, для которого $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_j \geq 0$. Размерность D_L , вычисляемая по формуле (1.43), соответствует одному из определений фрактальной размерности множества и называется *ляпуновской размерностью*. Ляпуновская размерность служит оценкой снизу для метрической размерности аттрактора [35]. Если применить (1.43) к трем указанным типам аттракторов, то получим $D_L = 0$ для состояния равновесия, $D_L = 1$ для предельного цикла и $D_L = n$ для n -мерного тора. Во всех случаях фрактальная размерность D_L равна метрической размерности аттракторов. То, что траектории на аттракторе асимптотически устойчивы, а размерность D_L принимает целое значение, строго совпадающее с метрической размерностью, позволяет назвать указанные типы аттракторов регулярными. Нарушение одного из сформулированных условий исключает аттрактор из класса регулярных.

В 1971 г. Рюэль и Такенс строго доказали существование аperiodических решений системы (1.42). Они также ввели понятие странного аттрактора как образа детерминированного хаоса [28]. С тех пор явление детерминированного хаоса и понятие странного аттрактора во многих работах практически однозначно связывают друг с другом. Однако при более детальном рассмотрении это оказывается не всегда справедливым и требует пояснений.

Грубые гиперболические аттракторы. Доказательство существования странного аттрактора было дано при жестком требовании, что ДС (1.42) является грубой и гиперболической [11, 28, 31, 34]. Система с гиперболическим (странным) аттрактором является грубой и гиперболической, если все ее фазовые траектории являются седловыми и сохраняют свои свойства при малых возмущениях. Любая точка, как образ траектории в сечении Пуанкаре, в гиперболической системе всегда является седлом. Грубость означает, что при малом возмущении правых частей (1.42), например, при небольшом изменении параметров системы, все траектории на аттракторе остаются седловыми.

Гиперболические аттракторы должны удовлетворять следующим условиям [31]:

- гиперболический аттрактор состоит из континуума “неустойчивых листов” или кривых, всюду плотных в аттракторе, вдоль которых близкие траектории экспоненциально расходятся;
- в окрестности любой точки гиперболический аттрактор имеет одну и ту же геометрию, определяемую произведением канторова множества на интервал;
- гиперболический аттрактор имеет окрестность в виде расщепленных устойчивых слоев, вдоль которых близкие траектории сходятся к аттрактору.

Грубость означает, что эти свойства не меняются при возмущениях.

Неустойчивые многообразия W^u седловых траекторий не могут покинуть области аттрактора. Они концентрируются в области G_0 и должны пересекаться с устойчивыми многообразиями W^s , вдоль которых траектории приближаются к аттрактору. Это ведет к появлению гомоклинических точек (поверхностей) и формированию гомоклинических структур, которые должны быть грубыми в грубых гиперболических системах. Качественная картина грубого пересечения W^s и W^u изображена на рис. 1.21а. Случай, показан-

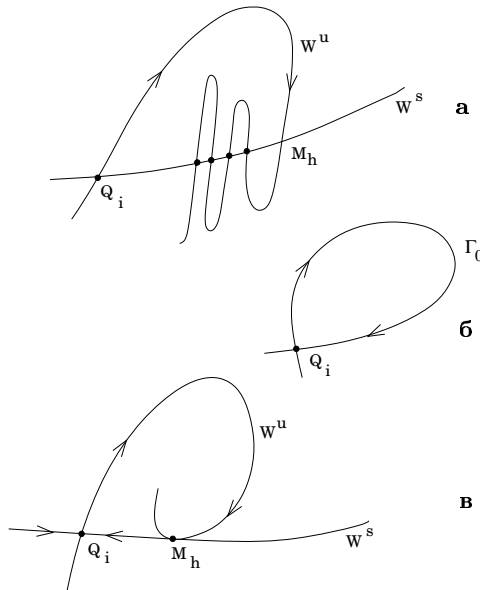


Рис. 1.21. Возможные случаи пересечения устойчивой и неустойчивой сепаратрис седловой точки Q_i в сечении Пуанкаре

ные на рис. 1.21б и рис. 1.21в, исключаются, так как они соответствуют негрубым ситуациям: замыканию многообразий с образованием петли (рис. 1.21б) и касанию устойчивого и неустойчивого многообразий (рис. 1.21в). Если нелокальные свойства многообразий приводят к негрубым ситуациям, изображенным на рис. 1.21б и рис. 1.21в, то при возмущении ДС возможны бифуркации [11]. Однако, в грубых гиперболических системах никаких бифуркаций происходить не должно.

Странный (согласно Рюэлю–Такенсу) аттрактор является всегда грубым гиперболическим предельным множеством. Главная особенность, которая отличает странные хаотические аттракторы от регулярных, — экспоненциальная неустойчивость фазовых траекторий на аттракторе. В этом случае спектр ЛХП содержит, по крайней мере, один положительный показатель. Фрактальная размерность аттрактора дифференциальной системы всегда больше двух и, в общем случае, не является целым числом. Минимальная размерность фазового пространства, в которое может быть "вложен" странный аттрактор равна 3.

В математике известны по крайней мере два примера грубых гиперболических аттракторов. Это аттрактор Смейла-Вильямса [36]

и аттрактор Плыкина [37]. К сожалению, до сих пор режим грубого гиперболического хаоса в реальных системах не был найден. "Истинно"странный аттрактор — это идеальная, но все же пока недостижимая модель детерминированного хаоса.

Квазигиперболические аттракторы. Аттракторы типа Лоренца. Условия гиперболичности, отмеченные выше, не выполняются для реальных ДС. Тем не менее, существуют ДС, аттракторы которых очень близки по структуре и свойствам к гиперболическим. Такие аттракторы являются хаотическими, не включают устойчивых регулярных траекторий и сохраняют эти свойства при малых возмущениях. Теоретически, квазигиперболические аттракторы не являются структурно устойчивыми. Для них нарушается по крайней мере одно из трех условий грубой гиперболичности, сформулированных выше. Однако изменения в структуре аттрактора при этом настолько незначительны, что они не отражаются в экспериментально измеряемых характеристиках.

Следуя определению, данному в [31], назовем почти гиперболические аттракторы *квазигиперболическими*. Известны квазигиперболические аттракторы Лози, Белых и аттракторы типа Лоренца.

Негиперболические аттракторы. Эти аттракторы наиболее типичны и соответствуют экспериментально наблюдаемому хаосу [11]. Системы с негиперболическими аттракторами демонстрируют режимы детерминированного хаоса, которые характеризуются экспоненциальной неустойчивостью фазовых траекторий и фрактальной структурой аттрактора. С этой точки зрения, характеристики негиперболических аттракторов идентичны основным характеристикам грубых гиперболических и квазигиперболических аттракторов. Однако, есть очень существенная разница. Отличительная особенность негиперболических аттракторов состоит в сосуществовании счетного множества различных хаотических и регулярных притягивающих подмножеств в ограниченной области фазового пространства системы при фиксированных значениях ее параметров. Эта совокупность всех сосуществующих предельных подмножеств траекторий в ограниченной области G_0 , в которую попадают все или почти все траектории из области G_1 , называется *негиперболическим аттрактором* или *квазиаттрактором* ДС. Следовательно, негиперболические аттракторы имеют очень сложную структуру вложенных бассейнов притяжения. Но сложность негиперболических аттракторов этим не ограничивается. При из-

менении параметров системы в любой ограниченной области значений в системе с квазиаттрактором происходит множество различных бифуркаций как регулярных, так и хаотических предельных множеств. Когда параметры системы меняются в некотором конечном диапазоне, как регулярные, так и хаотические аттрактора претерпевают целые каскады различных бифуркаций.

ДС с негиперболическими аттракторами структурно неустойчивы. Фундаментальная причина негиперболичности квазиаттрактора состоит в существовании структурно неустойчивых гомоклинических траекторий, показанных на рис. 1.21б и рис. 1.21в. Для такой ситуации Ньюхаусом были получены следующие строгие результаты [22]:

Теорема 1 (Ньюхауса). *В любой окрестности C^r -гладкого ($r \geq 2$) двумерного диффеоморфизма, имеющего седловую неподвижную точку со структурно неустойчивой гомоклинической траекторией, существуют области, где всюду плотны системы со структурно неустойчивыми гомоклиническими траекториями.*

Эти области называются *областями Ньюхауса*. При изменении управляющего параметра в структурно неустойчивой ДС, наблюдается счетное множество областей Ньюхауса.

Теорема 2 (Ньюхауса). *Любой сколь угодно малый интервал $(-\alpha_0, \alpha_0)$ изменения некоторого параметра $|\alpha_0| > 0$ системы содержит счетное множество областей Ньюхауса,*

где $\alpha_0 = 0$ соответствует случаю гомоклинического касания.

Эти результаты особенно важны для решения многих проблем нелинейной динамики. Отметим, что результаты Ньюхауса обобщены на многомерный случай в [38].

Один из методов экспериментального обнаружения негиперболического аттрактора состоит в вычислении углов между устойчивым и неустойчивым многообразиями вдоль хаотической траектории [39]. Если эти углы всюду отличны от нуля, аттрактор является гиперболическим или квазигиперболическим. Нулевые углы появляются, если имеются гомоклинические касания между многообразиями вдоль траектории. В этом случае ДС структурно неустойчи-

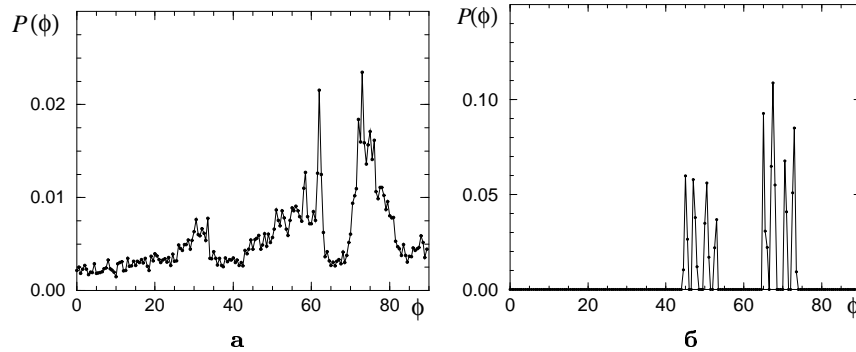


Рис. 1.22. Распределение вероятностей значений угла ϕ между устойчивым и неустойчивым многообразиями хаотической траектории на аттракторе Хенона для $a = 1.179$ и $b = 0.3$ (а) и на аттракторе Лози для $a = 1.7$ и $b = 0.3$ (б)

ва, и наблюдаемый режим соответствует негиперболическому аттрактору.

Рассмотрим, хорошо известное отображение Хенона [40]

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + y_n, \quad y_{n+1} = bx_n. \quad (1.44)$$

Это отображение диссипативно при $0 < b < 1$ и реализует режим негиперболического аттрактора.

Проследив за эволюцией угла φ между многообразиями вдоль хаотической траектории диффеоморфизма (1.44), можно вычислить вероятностное распределение углов $P(\varphi)$. Численные результаты представлены на рис. 1.22а и свидетельствуют, что вероятность близких к нулю значений угла ϕ действительно отлична от нуля, т.е. имеются касания между многообразиями.

Возникновение гомоклинических касаний в отображении Хенона вызвано присутствием квадратичной нелинейности ax_n^2 . Заменяя это слагаемое в (1.44) на $a|x_n|$, мы получаем отображение Лози [41]:

$$x_{n+1} = 1 - a|x_n| + y_n, \quad y_{n+1} = bx_n. \quad (1.45)$$

Результаты вычисления углов для аттрактора Лози показаны на рис. 1.22б и ясно указывают на отсутствие касания. Таким образом, аттрактор Лози является квазигиперболическим.

При изменении управляющих параметров можно наблюдать переход от одного типа аттрактора к другому. При таком переходе грубый гиперболический (или квазигиперболический) аттрак-

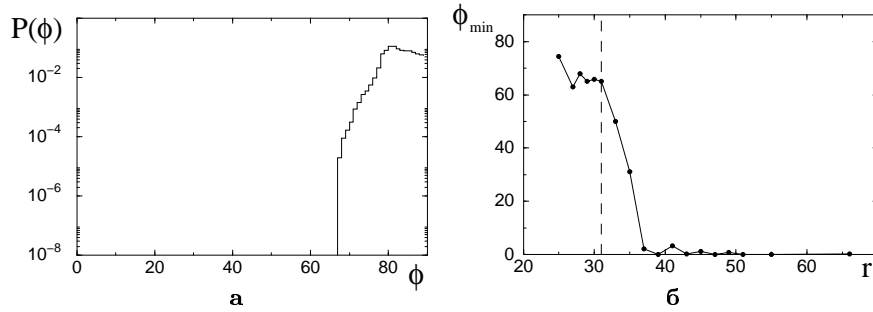


Рис. 1.23. (а) Распределение вероятностей углов ϕ между устойчивым и неустойчивым многообразиями для аттрактора Лоренца и (б) ϕ_{\min} как функция параметра r для $\sigma = 10$ и $b = 8/3$

тор может трансформироваться в негиперболический. Этот переход действительно реализуется в классической модели Лоренца.

Уравнения Лоренца были получены из уравнений Навье-Стокса для конвективного потока жидкости и имеют вид [42]

$$\dot{x} = -\sigma(x - y), \quad \dot{y} = rx - y - xz, \quad \dot{z} = xy - bz, \quad (1.46)$$

где σ , b и r — управляющие параметры. Уравнениями типа (1.46) описываются некоторые модели лазеров, дисковое динамо и другие системы [43, 44].

Известно, что для стандартных значений параметров, $\sigma = 10$, $b = 8/3$ и $r = 27$, аттрактор Лоренца является квазигиперболическим. Однако, при увеличении r появляются неглубокие гомоклинические орбиты и квазигиперболический аттрактор Лоренца преобразуется в негиперболический аттрактор [2]. Рисунок 1.23а показывает распределение вероятностей углов ϕ между устойчивым и неустойчивым многообразиями для квазигиперболического аттрактора Лоренца. Вероятность нулевых значений угла равна нулю, т.е. касание между многообразиями отсутствует. При увеличении параметра r ($r > 30$) происходит переход к негиперболическому аттрактору, что отражено на рис. 1.23б [45].

Странные нехаотические и хаотические нестранные аттракторы. Хаотические аттракторы, описанные выше, характеризуются двумя фундаментальными свойствами: имеют сложную геометрическую структуру и демонстрируют экспоненциальную неустойчивость индивидуальных траекторий. Именно эти свойства

используются исследователями в качестве критерия для диагностики режимов детерминированного хаоса.

Однако, как уже упоминалось, хаотическое поведение в смысле перемешивания может не сопровождаться “странностью” аттрактора и наоборот, странные аттракторы с фрактальной геометрической структурой могут быть нехаотическими из-за отсутствия экспоненциальной неустойчивости фазовых траекторий. С другой стороны, имеются примеры перемешивающих диссипативных систем, аттракторы которых не являются странными в смысле их геометрической структуры, т. е. они имеют целочисленную размерность [29, 46].

Другими словами, существуют примеры конкретных диссипативных ДС, аттрактор которых характеризуется следующими свойствами:

- аттрактор обладает регулярной геометрической структурой и целой метрической размерностью, но индивидуальные фазовые траектории на аттракторе экспоненциально неустойчивы;
- аттрактор имеет сложную геометрическую структуру, но траектории на нем устойчивы по Ляпунову. Перемешивание отсутствует.

Первый тип называется *хаотическим нестранным аттрактором* (ХНА). Второй известен как *странный нехаотический аттрактор* (СНА).

В качестве примера ДС с ХНА рассмотрим модифицированное отображение Арнольда [35]. Это отображение представляет собой известное отображение Арнольда, дополненное нелинейным периодическим слагаемым в первом уравнении:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + y_n + \delta \cos 2\pi y_n, & \text{mod } 1, \\ y_{n+1} &= x_n + 2y_n, & \text{mod } 1. \end{aligned} \quad (1.47)$$

При $\delta < 1/2\pi$, отображение (1.47) является диффеоморфизмом на торе. Другими словами, оно взаимнооднозначно отображает единичный квадрат в плоскости (x_n, y_n) (развертку поверхности тора) в себя. Вычислив якобиан J , легко показать, что отображение (1.47) диссипативно.

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 1 - 2\pi\delta \sin 2\pi y_n \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \delta < \frac{1}{2\pi}. \quad (1.48)$$

Среднее по времени значение $|J| < 1$. При этом спектр ЛХП содержит положительный показатель, что свидетельствует о наличии перемешивания.

Несмотря на уменьшение фазового объема, движение изображающей точки при итерациях отображения является эргодическим. В пределе $n \rightarrow \infty$ точка посетит любой элемент единичного квадрата. Метрическая размерность аттрактора (емкость по Колмогорову) равна двум. Точки отображения фазовой траектории заполняют единичный квадрат неравномерно, однако их плотность нигде не обращается в ноль. Таким образом, аттрактором отображения (1.47) является весь единичный квадрат. В этом смысле аттрактор Арнольда не является странным, поскольку это не фрактальное множество.

Фазовый портрет траектории на аттракторе Арнольда показан на рис. 1.24. Хотя единичный квадрат фактически полностью покрыт точками, плотность их распределения явно неоднородна. Количественной мерой этой неоднородности является величина информационной размерности $1 < D_I < 2$. Например, для $\delta = 0.05$ $D_I \simeq 1.96$, а для $\delta = 0.10$, $D_I \simeq 1.84$. Кроме того, как уже говорилось, емкость аттрактора $D_C = 2$ (строгий результат Я. Синая). Вследствие неоднородности распределения точек на аттракторе, значения всех вероятностно-метрических размерностей аттрактора Арнольда будут лежать в интервале $1 \leq D \leq 2$. Вероятностно-метрические размерности учитывают не только геометрические свойства аттрактора, но также свойства вероятностной меры на нем.

Рассмотрим противоположную ситуацию: система демонстрирует сложный аperiodический колебательный режим, являющийся асимптотически устойчивым (без перемешивания), и при этом аттрактор не является регулярным с точки зрения его геометрической структуры. Такой аттрактор получил название странного нехаотического аттрактора (СНА). Странные нехаотические аттракторы типичны для ДС с квазипериодическим воздействием.

Впервые СНА был обнаружен и исследован в следующем отображении [46]:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 2\lambda \tanh(x_n) \cos 2\pi\varphi_n, \\ \varphi_{n+1} &= \omega + \varphi_n, \quad \text{mod } 1, \end{aligned} \tag{1.49}$$



Рис. 1.24. Хаотический неинвариантный аттрактор отображения Арнольда (1.47) для $\delta = 0.15$

где параметр ω обычно полагается равным так называемому *золотому сечению*: $\omega = 0.5(\sqrt{5} - 1)$. В [46] аналитически показано, что при $\lambda > 1$ аттрактор отображения (1.49) представляет собой СНА (Рис. 1.25). СНА наблюдался также во многих других системах, находящихся под квазипериодическим воздействием, например, в отображении окружности, логистическом отображении, отображении Хенона, и т.д. [47, 48].

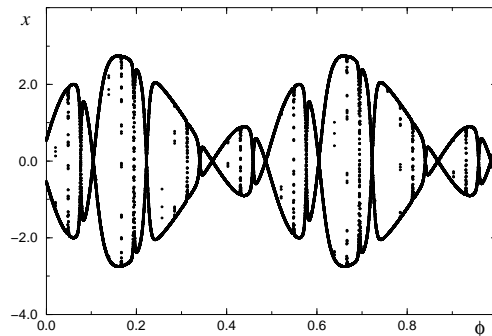


Рис. 1.25. Странный нехаотический аттрактор в отображении (1.49) при $\lambda = 1.5$

1.1.6 Заключение

В данном разделе были рассмотрены некоторые вопросы теории динамических систем, являющиеся очень важными для изучения

бифуркационных механизмов возникновения хаоса, особенностей структуры и свойств нерегулярных аттракторов. Возникновению сложной динамики ДС всегда предшествуют мягкие или жесткие бифуркации регулярных режимов. Важно определить, какие виды хаотических аттракторов реализуются в системе. Глубокое понимание бифуркационных явлений в системе становится еще более необходимым, если принять во внимание влияние флуктуаций. Известно, что в диссипативных системах неизбежно присутствует шум. Динамика таких систем может быть более адекватно описана, если рассматривать их как стохастические. При этом возникает ряд вопросов. Например: насколько существенно влияние шума на свойства системы? Что означает бифуркация стохастической системы? Как структура хаотического аттрактора меняется в присутствии шума? Иногда шум не влияет на основные динамические свойства системы. Однако в некоторых случаях шум приводит к появлению принципиально новых режимов функционирования системы (индуцированные шумом переходы).

1.2 Флуктуации в динамических системах

1.2.1 Введение

Чисто детерминистическое описание ДС является неполным, поскольку в любой реальной диссипативной системе неизбежно присутствует шум [49–51]. Переменные, описывающие состояние ДС в присутствии шума, будут случайными величинами. Их изменение во времени представляет собой стохастический (случайный) процесс. Наблюдаемая реализация такого процесса зависит от случайного выбора. Таким образом, исследование системы предполагает изучение свойств ансамбля реализаций и требует вероятностного подхода.

Причины, по которым должна учитываться стохастичность, очень разнообразны. С одной стороны, переменные ДС как правило описывают свойства системы, состоящей из большого числа микрочастиц. Поэтому переменные на макроуровне постоянно испытывают тепловые флуктуации. К шуму в системе неизбежно приводит конечное число макропеременных, учитываемых при математическом моделировании ДС, а также квантовый характер микрочастиц. Шум, связанный с указанными причинами, обычно

называют *внутренним*, поскольку он неотъемлемо присутствует в системе [52].

С другой стороны, ДС описывает реальный процесс только на некотором определенном уровне. Обычно проводят разграничение между системой и окружающей ее средой. В этом случае взаимодействие маломерной системы с окружающей средой описывается с помощью *внешнего* шума, воздействующего на систему [53].

В настоящее время в рамках статистической физики активно используется учет случайных источников при описании ДС. Включение случайных источников приводит к флуктуациям переменных относительно их средних значений и к возникновению диссипативных сил, противодействующих этим отклонениям. Их общее проявление сформулировано во флуктуационно–диссипационных соотношениях различного вида, связывающих характерные временные масштабы диссипативных и флуктуационных сил [54]. Однако, по сравнению с выдающимися достижениями и успехами статистической физики на мезо– и макроскопических уровнях, микроскопическое описание флуктуационных сил все еще основывается на априорном представлении вероятностных концепций [55]. В частности, необходимо ввести такие концепции для описания крупномасштабного осреднения, для процессов декорреляции мод и событий, а также для достижения термодинамического предела. На каждом таком шаге происходит потеря точных данных и выполняется их замена в соответствии со сделанными вероятностными предположениями [56–60].

Множество исследований последних лет было посвящено стохастическим неравновесным системам. Устойчивые неравновесные состояния всегда возникают в результате воздействий внешней среды, которые могут флуктуировать. Внешние силы и потоки препятствуют диссипативной флуктуирующей системе достичь положения равновесия. Но из-за большого разнообразия возможных ситуаций, даже на мезо– и макроскопических уровнях в настоящее время общая теория неравновесных систем отсутствует. Тем не менее, многие неравновесные системы имеют много общего при интенсивном взаимодействии с окружающей средой. В большей части работ рассматриваются простейшие модели, в которых внешние возмущения действуют как независимые силы. Считается, что поведение флуктуирующей неравновесной ДС управляется такими дополнительными параметрами как интенсивность или време-

на корреляции источников внешних возмущений. Изменения параметров случайных воздействий могут значительно менять отклик ДС на эти воздействия. Последнее обстоятельство нашло свое отражение в большом количестве работ, посвященных исследованию *индуцированных шумом* переходов в неравновесных ДС [53, 61–71].

В данном разделе будут сформулированы только самые основные концепции стохастических ДС. Подчеркнем, что эта глава адресована читателям, заинтересованным в применении теории стохастических процессов к анализу ДС. Большинство математических выкладок может быть соответствующим образом представлено в рамках теории вероятностных распределений и инвариантных мер, что выходит за рамки этой книги. Читатель, интересующийся строгим обоснованием теории стохастических процессов, может воспользоваться приведенным нами достаточно большим списком математической литературы [72–79].

1.2.2 Основные концепции теории случайных процессов

Фазовая траектория детерминированной ДС однозначно определяется начальным состоянием. В случае стохастического поведения состояние $x(t)$ системы отображается во времени не единственным образом. Соответствующая математическая модель может быть задана с помощью *стохастических дифференциальных уравнений*, явно учитывающих случайные источники

$$\dot{x}_\xi = f(x_\xi, \xi(t)). \quad (1.50)$$

Здесь $\xi(t)$ представляет собой последовательность случайных чисел, сгенерированных по некоторому правилу. В результате оператор эволюции во времени оказывается случайным: отображение $x_\xi(t) \rightarrow x_\xi(t + dt)$ зависит от конкретного выбора $\xi(t)$, и, следовательно, $x_\xi(t)$ является стохастическим (случайным) процессом.

Из-за наличия случайных сил $\xi(t)$, возмущающих систему, измерения фазовых траекторий при одном и том же начальном состоянии системы, будут давать различные результаты $x_\xi(t)$, представляющие собой различные реализации случайного процесса. По этой причине, как и в статистической физике, для описания поведения системы вместо одной единственной фазовой траектории необходимо рассматривать *статистический ансамбль* из большого числа (N) различных траекторий. Ансамбль траекторий, в свою

очередь, определяется ансамблем реализаций случайных источников, возмущающих систему $\xi_j(t)$, $j = 1, 2, \dots, N$. При $N \rightarrow \infty$ статистический ансамбль реализаций определяет *стохастический процесс*.

Альтернативное определение случайного процесса $x_\xi(t)$ может быть сделано в терминах вероятностных распределений или плотности вероятности. В этом случае измеряются реализации процесса для случайных величин x_1, x_2, \dots, x_n в моменты времени t_1, t_2, \dots, t_n , что дает совместную плотность вероятности $p(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n)$ их возникновения.

При таком подходе описание эволюции системы основано на детерминированных уравнениях, определяющих не мгновенные состояния системы, а их вероятностные характеристики, т.е. уравнениях динамики вероятностного распределения $P(x_\xi(t) < X)$ или плотности вероятности $p(x, t)$. Для задач с непрерывным временем изменение плотности вероятности определяется некоторым оператором эволюции,

$$\frac{\partial}{\partial t} p = \mathbf{L} p, \quad (1.51)$$

который является линейным относительно плотности вероятности. Оператор \mathbf{L} содержит информацию о поведении системы и может допускать интегрирование в обратном времени. В дальнейшем, основное внимание будет уделяться подклассу систем, для которых оператор L "не помнит предшествующих состояний", но может зависеть от времени (т.е. в системе протекает марковский процесс).

Два определения стохастического процесса: в терминах статистического ансамбля реализаций стохастических уравнений с одной стороны, и иерархии совместных плотностей вероятности, с другой стороны, определяют два альтернативных подхода к анализу стохастических систем.

Оба способа описания (1.51) и (1.50) могут быть получены в рамках приближенной концепции многокомпонентных систем, применяемой в статистической физики. Наглядные примеры, приводимые в учебниках, — это движение броуновской частицы [80, 81] и процессы в лазерах [82–85].

Распределения вероятностей и плотности вероятности. Распределение вероятностей характеризует относительную долю реализаций, для которых значение x_ξ в момент времени t меньше, чем

некоторое фиксированное значение x :

$$P_x(x_\xi(t) < x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \theta(x - x_{\xi_i}(t)) = \langle \theta(x - x_\xi(t)) \rangle. \quad (1.52)$$

Скобки $\langle \cdot \rangle$ означают среднее значение по ансамблю $N \rightarrow \infty$ различных реализаций $\xi_i(t)$, θ – функция Хэвисайда. В зависимости от x значение функции распределения (1.52) меняется от 0 до 1. Плотность вероятности $p(x, t)$ процесса $x_\xi(t)$ характеризует относительное количество реализаций, в момент времени t попадающих в интервал $[x, x + dx)$: $p_x(x, t) dx = P_x(x \leq x_\xi(t) < x + dx)$. Плотность вероятности нетрудно получить, взяв производную от (1.52) по x , т.е.,

$$p_x(x, t) = \frac{d}{dx} P_x(x_\xi(t) < x) = \langle \delta(x - x_\xi(t)) \rangle, \quad (1.53)$$

где $\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака.

Перечислим некоторые свойства плотности вероятности. Условие нормировки задается как $\int_X p_x(x, t) dx = 1$, где X – множество возможных значений x . Если $y = f(x)$, то можно представить $y = \int f(x') \delta(x - x') dx'$ и усредняя результат получить выражение для среднего значения функции f от x : $\langle f(x) \rangle = \langle y(t) \rangle = \int f(x') p_x(x', t) dx'$.

Плотность вероятности y есть

$$\begin{aligned} p_y(y, t) &= \langle \delta(y - y_\xi(t)) \rangle = \langle \delta(y - f(x_\xi(t))) \rangle \\ &= \int_X \delta(y - f(x)) p_x(x, t) dx. \end{aligned} \quad (1.54)$$

Если для y существует однозначная обратная функция, т.е., $x = f^{-1}(y) = g(y)$, тогда δ -функцию можно проинтегрировать и получить

$$p_y(y, t) = p_x(x, t) \frac{1}{\left| \frac{df(x)}{dx} \right|}, \quad (1.55)$$

где в правой части равенства всюду требуется подставить $x = g(y)$. Полученное соотношение легко обобщается на случай многомерного (векторного) случайного процесса $\mathbf{x}_\xi(t)$. Для этого производную в последнем уравнении (1.55) необходимо заменить на якобиан соответствующего преобразования переменных.

Совместная и условная вероятности. Рассмотрим произвольный набор последовательно упорядоченных моментов времени t_i , $i = 1, 2, \dots, n$, т. е., $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$. Полная информация о случайном процессе $x_\xi(t)$ содержится в бесконечной последовательности n -мерных совместных плотностей вероятности:

$$p_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) = \langle \delta(x_1 - x_\xi(t_1)) \dots \delta(x_n - x_\xi(t_n)) \rangle, \quad (1.56)$$

где $n = 2, 3, 4, \dots$. Другой важной характеристикой случайного процесса служит условная плотность вероятности:

$$p_n(x_n, t_n | x_1, t_1; \dots; x_{n-1}, t_{n-1}) = \langle \delta(x_n - x_\xi(t_n)) \rangle_{x_\xi(t_1)=x_1; \dots; x_\xi(t_{n-1})=x_{n-1}}, \quad (1.57)$$

определяющая в момент t_n плотность вероятности процесса x_ξ с известной предысторией, т.е. с заданными значениями x_ξ в предшествующие моменты времени t_i , $i = 1, \dots, n-1$. Отсюда сразу же получаем соотношение

$$\begin{aligned} p_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) & \quad (1.58) \\ & = p_n(x_n, t_n | x_1, t_1; \dots; x_{n-1}, t_{n-1}) p_{n-1}(x_1, t_1; \dots; x_{n-1}, t_{n-1}). \end{aligned}$$

Марковские процессы. На практике вычислить полный набор n -мерных плотностей вероятности невозможно. К счастью, можно выделить особый класс случайных процессов, которые допускают упрощенное описание. Это — марковские случайные процессы, для которых будущее определяется состоянием только в настоящий момент времени. Процесс называется марковским, если условная плотность вероятности сводится к плотности вероятности перехода между состояниями в два последовательных момента времени и не зависит от состояний в предшествующие моменты времени, т. е.,

$$p_n(x_n, t_n | x_1, t_1; \dots; x_{n-1}, t_{n-1}) = p_2(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}). \quad (1.59)$$

Для марковских процессов плотность вероятности перехода играет центральную роль, поскольку справедливо следующее соотношение

$$p_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) = p_2(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}) \dots p_2(x_2, t_2 | x_1, t_1) p(x_1, t_1), \quad (1.60)$$

где $p(x_1, t_1)$ определяется согласно (1.53). Знание плотности вероятности перехода и распределения вероятностей в начальный момент

времени дает, таким образом, полную информацию о случайном процессе.

Для марковских процессов может быть сформулировано важное соотношение, которому должны удовлетворять плотности вероятности перехода между состояниями в три последовательные момента времени $t_1 < t_2 < t_3$. Интегрируя p_3 по всем возможным в момент времени t_2 состояниям, получаем

$$p_2(x_1, t_1; x_3, t_3) = \int_X dx_2 p_3(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3). \quad (1.61)$$

Представляя p_2 и p_3 согласно (1.60), получаем уравнение

$$p_2(x_3, t_3 | x_1, t_1) = \int_X dx_2 p_2(x_3, t_3 | x_2, t_2) p_2(x_2, t_2 | x_1, t_1), \quad (1.62)$$

которое называется *уравнением Чепмена–Колмогорова* и является основным эволюционным уравнением для марковских процессов. В пределе малых интервалов времени можно перейти от (1.62) к дифференциальной форме записи, как это будет показано в разделе 1.2.4 для класса диффузионных процессов.

Можно переписать (1.62) в специальном виде, различая вероятность перейти из данного состояния в другие состояния и вероятность остаться в данном состоянии [52]. Введем формально частоту скачков между различными состояниями x и Δx в момент времени t как

$$W(x \rightarrow x + \Delta x, t) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} p_2(x + \Delta x, t + dt | x, t). \quad (1.63)$$

Для малого интервала времени dt полная плотность вероятности перехода может быть представлена как

$$p_2(x, t + dt | x + \Delta x, t) = \left(1 - dt \int dx' W(x + \Delta x \rightarrow x', t) \right) \delta(\Delta x) + W(x + \Delta x \rightarrow x, t) dt + \mathcal{O}(dt^2), \quad (1.64)$$

где первое слагаемое представляет собой вероятность того, что система останется в состоянии x и $\Delta x = 0$. Подстановка этого соотношения в интеграл (1.62) после вычисления предела $dt \rightarrow 0$ дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} p_2(x, t | x_1, t_1) & \quad (1.65) \\ & = \int dx' (W(x' \rightarrow x, t) p_2(x', t | x_1, t_1) - W(x \rightarrow x', t) p_2(x, t | x_1, t_1)). \end{aligned}$$

Это уравнение называется управляющим уравнением. Оно может быть записано и для безусловной плотности вероятности $p(x, t)$. Для этого достаточно проинтегрировать левую и правую части (1.65) по всем начальным состояниям x_1 . Аналогичное уравнение справедливо для вероятностей состояний марковского процесса с дискретным множеством состояний (интеграл, соответственно, заменяется на сумму). В последнем случае оно иногда называется уравнением Паули. Управляющее уравнение описывает эволюцию во времени вероятностных характеристик состояния x в балансной форме: через соотношение “убыли” и “прибыли” вероятностей. Определение частоты скачков (1.63) требует привлечения дополнительных предположений, исходящих из физической модели.

Стационарность. Стохастический процесс называется строго стационарным, если совместные плотности вероятности p_n зависят только от разностей между последовательными моментами времени. Замена $t_i \rightarrow t_i + \tau$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$ не влияет на плотность вероятности. Можно сказать, что случайный процесс не зависит от выбора начального момента времени t_0 .

Как результат, для плотности вероятности перехода можно непосредственно получить

$$p_2(x_2, t + \tau | x_1, t) = p_2(x_2, \tau | x_1). \quad (1.66)$$

Она зависит от разности $\tau = t_2 - t_1$ и, следовательно, однородна во времени.

Простейшей, но важной характеристикой стационарного процесса является его предельная стационарная плотность вероятности. Если система эргодична, процесс теряет зависимость от начального состояния x_0 , и плотность вероятности перехода в пределе $\tau \rightarrow \infty$ стремится к стационарной плотности вероятности

$$p^s(x) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} p_2(x, \tau | x_0). \quad (1.67)$$

Мы будем понимать стационарность в широком смысле. В этом случае требуется, чтобы первый момент $\langle x_\xi(t) \rangle$ не зависел от времени, а автокорреляционная функция зависела только от разности моментов времени. Требование стационарности в широком смысле является в общем случае менее жестким, чем требование строгой стационарности, если не считать того, что стационарность в широком смысле обычно предполагает ограниченность вторых моментов.

Асимптотически периодические случайные процессы характеризуются предельной плотностью вероятности, которая изменяется периодически во времени: $p(x, t - t_0) = p(x, t + T - t_0)$. Следовательно, эти процессы инвариантны относительно сдвига во времени на период. Обычно таким образом описываются случайные процессы в системах с периодическим воздействием. Процесс такого типа может быть сведен к стационарному. В случае гармонического воздействия, производится интегрирование по начальной фазе $\varphi_0 = 2\pi t_0/T$ вынуждающей силы в предположении, что она имеет равномерное распределение в интервале $[0, 2\pi]$. Усреднение по периоду T исключает явную зависимость от времени в течение одного периода.

Моменты случайного процесса. Некоторые случайные процессы могут быть охарактеризованы зависимостями их моментов от времени. Число моментов, которых достаточно для задания случайного процесса, определяет число независимых параметров процесса. Хорошо известно, например, что гауссовы процессы характеризуются только первым и вторым моментами или кумулянтами, в то время как все более высокие кумулянты обращаются в нуль. В случае экспоненциального или пуассоновского процесса все более высокие моменты выражаются через момент первого порядка (математическое ожидание). Описание процесса с использованием лишь двух первых моментов составляет предмет корреляционной теории случайных процессов [86].

Условный первый момент плотности вероятности перехода дается выражением

$$\langle x_\xi(t) \rangle_{x_\xi(t_0)=x_0} = \int dx x p_2(x, t|x_0, t_0). \quad (1.68)$$

В асимптотическом пределе $t_0 \rightarrow -\infty$

$$\langle x_\xi(t) \rangle_{\text{asy}} = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \langle x_\xi(t) \rangle_{x_\xi(t_0)=x_0} \quad (1.69)$$

он теряет свою зависимость от начального состояния, если плотность вероятности перехода сходится в пределе к $p_2(x, t|x_0, t_0) \rightarrow p(x, t)$. Для стационарных процессов этот предел не зависит от времени, поэтому, без потери общности, будем предполагать $\langle x \rangle_{\text{asy}} = 0$.

Важной характеристикой является второй момент, определяемый для двух различных моментов времени. Задав начальное состояние как $x_\xi(t_0) = x_0$, можно записать

$$\langle x_\xi(t) x_\xi(t+\tau) \rangle_{x_\xi(t_0)=x_0} = \int dx_1 dx_2 x_1 x_2 p_2(x_2, t+\tau|x_1, t) p_2(x_1, t|x_0, t_0). \quad (1.70)$$

Этот момент называется ковариационной функцией случайного процесса $x(t)$.³ Он может быть выражен через условный первый момент как

$$\int dx_2 \langle x_\xi(t+\tau) \rangle_{x_\xi(t)=x_1} x_1 p_2(x_1, t|x_0, t_0). \quad (1.71)$$

Если $t_0 \rightarrow -\infty$, ковариационная функция стремится к своему асимптотическому пределу:

$$\langle x_\xi(t) x_\xi(t+\tau) \rangle_{\text{asy}} = \int dx_1 dx_2 x_1 x_2 p_2(x_1, t, x_2, t+\tau). \quad (1.72)$$

При $\tau = 0$ предел ковариационной функции равняется второму моменту $\langle x^2(t) \rangle$. С другой стороны, во многих случаях при $\tau \rightarrow \infty$ ковариационная функция (1.72) раскладывается на множители:

$$\langle x_\xi(t) x_\xi(t+\tau) \rangle_{\text{asy}} = \langle x_\xi(t+\tau) \rangle_{\text{asy}} \langle x_\xi(t) \rangle_{\text{asy}}. \quad (1.73)$$

Для стационарных процессов асимптотические значения не зависят явно от времени и поэтому стационарная ковариационная функция оказывается функцией только разности моментов времени τ :

$$c_{x,x}(\tau) = \int dx_1 dx_2 x_1 x_2 p_2(x_1, \tau|x_2) p(x_2). \quad (1.74)$$

Стационарный процесс инвариантен относительно сдвигов во времени $t \rightarrow t - \tau$, откуда следует, что $c_{x,x}$ — четная функция аргумента τ : $c_{x,x}(\tau) = c_{x,x}(-\tau)$.

Корреляционная функция (которая, в соответствии с предположением о нулевом среднем значении, совпадает с ковариационной) определяет важную количественную характеристику случайного процесса, называемую временем корреляции. Время корреляции может быть введено несколькими способами, но наиболее часто используется следующее определение:

³ Если рассматривать отклонения значений случайного процесса от среднего значения в различные моменты времени, то получим соответствующий смешанный момент второго порядка, называемый корреляционной (или автокорреляционной) функцией. В предположении нулевого среднего значения ковариационная и корреляционная функции совпадают. Существует несоответствие в употреблении данных терминов в русской и зарубежной научной литературе: начальный смешанный момент второго порядка (ковариация) по-английски будет — correlation, а центральный момент (корреляция) — covariance.

$$\tau_c = \frac{1}{c_{x,x}(0)} \int_0^\infty dt |c_{x,x}(t)|. \quad (1.75)$$

Можно непосредственно обобщить понятие ковариационных функций на случай многомерного случайного процесса. Для простоты рассмотрим случайный процесс с двумя компонентами $\{x(t), y(t)\}$. Взаимные ковариации могут быть введены аналогичным образом с помощью совместной плотности вероятности $p_{x,y}(x, t; y, t + \tau)$. Для стационарных процессов получаем: $c_{x,y}(\tau) = c_{y,x}(-\tau)$. Абсолютное значение ковариационной функции удовлетворяет условию $|c_{x,y}(\tau)|^2 \leq \langle x^2 \rangle \langle y^2 \rangle$, известному как неравенство Коши–Шварца. В частности, для автоковариационной функции оно дает $|c_{x,x}| \leq \langle x^2 \rangle$.

Фурье–преобразование ковариационной функции. Важной характеристикой является Фурье–преобразование ковариационной функции:

$$G_{x,x}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau c_{x,x}(\tau) e^{-i\omega\tau} = 2 \int_0^{\infty} d\tau c_{x,x}(\tau) \cos(\omega\tau), \quad (1.76)$$

где $G_{x,x} \geq 0$. Для многомерных стохастических процессов можно ввести Фурье–преобразование взаимной ковариационной функции:

$$G_{x,y}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau c_{x,y}(\tau) \exp -i\omega\tau. \quad (1.77)$$

Оба выражения существуют, если ковариационные функции абсолютно интегрируемы вместе с соответствующими Фурье–образами. Из них легко получить следующие полезные выражения:

$$G_{x,x}(\omega = 0) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau c_{x,x}(\tau), \quad (1.78)$$

$$c_{x,x}(\tau = 0) = \langle x^2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega G_{x,x}(\omega).$$

Производные и интегралы. Производная для любой заданной реализации $x(t)$ стохастического процесса определяется как для обычной функции:

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{x(t + \varepsilon) - x(t)}{\varepsilon} \right). \quad (1.79)$$

Однако, существование предела, а следовательно и производной, на ансамбле реализаций может пониматься в различных смыслах. Мы ограничимся определением среднеквадратического предела, и, следовательно, производной, основанным на существовании предела

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\langle \left| \frac{x(t+\varepsilon) - x(t)}{\varepsilon} - \dot{x}(t) \right|^2 \right\rangle = 0. \quad (1.80)$$

Необходимым условием сходимости является существование смешанной второй производной ковариационной функции $c_{x,x}(t_1, t_2)$ по t_1 и t_2 или существования второй производной $c_{x,x}(\tau)$ в случае стационарного процесса. Поскольку ковариационная функция для производной $\dot{x}_\xi(t)$ есть

$$\langle \dot{x}(t_1)\dot{x}(t_2) \rangle = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \langle x(t_1)x(t_2) \rangle, \quad (1.81)$$

то для спектральных плотностей стационарных процессов x_ξ и \dot{x}_ξ справедливо следующее соотношение: $G_{\dot{x},\dot{x}}(\omega) = \omega^2 G_{x,x}(\omega)$. Подобные выражения существуют также для взаимной ковариационной функции: $\langle x(t_1)\dot{x}(t_2) \rangle = \frac{\partial}{\partial t_2} \langle x(t_1)x(t_2) \rangle$; и взаимной спектральной плотности $G_{x,\dot{x}}(\omega) = i\omega G_{x,x}(\omega)$.

Интегралы также определяются в смысле среднеквадратического предела. Пусть T_n есть разбиение интервала $T = [t_0, t]$, которое становится всюду плотным в пределе $n \rightarrow \infty$ в T . Тогда интеграл от случайного процесса, умноженного на зависящую от времени детерминированную функцию, представляет собой случайный процесс, определяемый как

$$I_\xi^f(t, t_0) = \int_{t_0}^t ds f(s) x_\xi(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} q.m. \sum_{k=0}^{n-1} f(t_{k,n}) x_\xi(t_{k,n}) (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}), \quad (1.82)$$

где $t_0^{(n)} = t_0$, $t_n^{(n)} = t$ и $t_k^{(n)} \leq t_{k,n} \leq t_{k+1}^{(n)}$. Обозначение *q.m.* в (1.82) соответствует пределу в среднеквадратическом смысле. В случае кусочно-непрерывной функции $x_\xi(t)$ конкретный выбор разбиения T_n не имеет значения. Для существования интеграла необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие сходимости

$$\left\langle \left(I_\xi^f(t, t_0) \right)^2 \right\rangle = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t ds_1 ds_2 f(s_1) f(s_2) \langle x_\xi(s_1)x_\xi(s_2) \rangle. \quad (1.83)$$

При более строгом подходе $x_\xi(t_{k,n}) \left(t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)} \right)$ заменяется на приращения $\Delta I_{t_k} = I_\xi^{f=1}(t_{k+1}, t_k)$, которые можно рассматривать как случайные процессы с определенными свойствами. Такая формулировка позволяет рассматривать стохастические интегралы, даже если приращения независимы, и, следовательно, процесс $I_\xi^{f=1}(t, t_0)$ – недифференцируемый. Сходимость стохастического интеграла с гладкой $f(t)$ для случая $t_{k,n} = t_k^{(n)}$ была показана Ито [87], а сам соответствующий интеграл получил название стохастического интеграла Ито

$$I_\xi^f(t, t_0) = \int_{t_0}^t dI_s f(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} q.m. \sum_{k=0}^{n-1} \Delta I_{t_k^{(n)}} f(t_k^{(n)}). \quad (1.84)$$

Более детальное рассмотрение данного вопроса необходимо, если функция f является случайной и зависит от ξ , как в случае мультипликативного шума.

Фурье–преобразование случайных процессов. Спектр мощности. Использование спектрального разложения $x_\xi(t)$ широко применяется на практике. Спектральный анализ, важность которого в линейном приближении очевидна, не может быть непосредственно распространен на реализации случайного процесса $x_\xi(t)$, представляющие собой незатухающие флуктуации. Фурье–преобразование от таких функций в обычном смысле не существует, а соответствующие интегралы на ансамбле реализаций не сходятся в среднеквадратическом смысле.

Формально, Фурье–преобразование существует только для усредненных значений. Однако, оно во многих случаях все же может быть найдено, если его интерпретировать с помощью операционного алгоритма, выполняемого в несколько шагов. На ансамбле гладких реализаций процесса $x_\xi(t)$ можно определить $x_\xi^T(t) = x_\xi(t)$ при $|t| \leq T$ и $x_\xi^T(t) = 0$ в остальных случаях. Далее находим

$$x_\xi^T(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} dt x_\xi(t) \exp(-i\omega t). \quad (1.85)$$

Предел $T \rightarrow \infty$ этого выражения формально дает спектральное разложение процесса и может быть подставлен в выражения, усредняемые по ансамблю реализаций, если соответствующие интегралы существуют.

В частности, рассмотрим мощность процесса $x_\xi(t)$ в интервале $[\omega, \omega + \Delta\omega)$ положительных значений частоты $\omega \geq 0$. С учетом соотношения $\Delta\omega = 2\pi/T$ она определяется как

$$P_\xi^T(\omega) = \frac{2}{T} |x_\xi^T(\omega)|^2, \quad (1.86)$$

и является случайной величиной даже в пределе $T \rightarrow \infty$. Усреднение по ансамблю реализаций дает

$$P^T(\omega) = \langle P_\xi^T(\omega) \rangle = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt_1 \int_{-T/2}^{T/2} dt_2 \langle x_\xi(t_1) x_\xi(t_2) \rangle \exp(-i\omega(t_1 - t_2)). \quad (1.87)$$

Даже если $P^T(\omega)$ существует, случайная функция $P_\xi^T(\omega)$ не обязательно сходится в среднеквадратичном смысле при $T \rightarrow \infty$. На больших временах для произвольного значения частоты она может все еще оставаться случайной величиной с конечной дисперсией [88].

Для стационарных процессов (достаточно стационарности в широком смысле) двойной интеграл в (1.87) может быть упрощен и сведен к следующему выражению

$$P^T(\omega) = 2 \int_{-T}^T d\tau \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) c_{xx}(\tau) \exp(-i\omega\tau). \quad (1.88)$$

В пределе больших времен введенный интервал частот $\Delta\omega$ стремится к нулю и $P^T(\omega)$ представляет собой среднюю плотность мощности, называемую спектральной плотностью мощности процесса $x_\xi(t)$:

$$P(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} P^T(\omega) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau c_{x,x}(\tau) \exp(-i\omega\tau). \quad (1.89)$$

Видно, что спектральная плотность мощности стационарного случайного процесса представляет собой удвоенное Фурье-преобразование ковариационной функции: $P(\omega) = 2G_{x,x}(\omega)$. Данное утверждение составляет содержание теоремы Винера-Хинчина. Далее, будем называть $G_{x,x}(\omega)$ спектром мощности или просто спектром случайного процесса $x_\xi(t)$, опуская умножение на 2. Подчеркнем, что при выполнении (1.86) информация о фазе процесса теряется.

1.2.3 Шум в динамических системах

Уравнения Ланжевена. Поль Ланжевен ввел в рассмотрение стохастические дифференциальные уравнения, добавив случайную силу в уравнение движения броуновской частицы. Ланжевен предположил равенство нулю среднего значения и корреляции между положением частицы и случайной силой в один момент времени. В этих предположениях он рассмотрел ансамбль систем и получил обыкновенные дифференциальные уравнения для средних величин. В пределе сильного трения результаты интегрирования выявили диффузионное поведение частицы, т. е., линейное увеличение среднего квадрата смещения частицы с течением времени. Базируясь на равномерном распределении энергии, Ланжевен вывел флуктуационно–диссипационные соотношения, связывающие диффузию с коэффициентом трения Стокса, полученные Эйнштейном тремя годами раньше на основе кинетического уравнения для плотности вероятности броуновских частиц.

Пусть $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]$ является вектором, составленным из переменных, задающих состояние динамической системы. В самом общем виде уравнение Ланжевена для каждой из компонент процесса может быть записано следующим образом:

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_1, \dots, x_n, t) + g_i(x_1, \dots, x_n, \xi_1(t) \dots \xi_m(t), t). \quad (1.90)$$

В этом уравнении выделяются две различные части, задаваемые в общем случае нелинейными функциями: детерминированная часть $f(\mathbf{x}, t) = [f_1(\mathbf{x}, t), \dots, f_n(\mathbf{x}, t)]$ и стохастическая часть $g(\mathbf{x}, \xi, t) = [g_1(\mathbf{x}, \xi, t), \dots, g_n(\mathbf{x}, \xi, t)]$, причем $g_i(\mathbf{x}, \xi = 0, t) = 0$. Многомерный случайный процесс $\xi(t) = [\xi_1(t), \dots, \xi_m(t)]$ представляет собой совокупность случайных сил (шумов), воздействующих на систему. В дальнейшем будем предполагать, что $\langle \xi_i(t) \rangle = 0$.

В случае *внутреннего шума*, который присутствует в системе, находящейся в термодинамическом равновесии, интенсивности источников шума удовлетворяют особым флуктуационно–диссипационным соотношениям, включающим противодействующие флуктуациям диссипативные силы. Например, хорошо известное соотношение Эйнштейна связывает интенсивность случайной силы с коэффициентом трения Стокса, входящим в детерминированную часть $f(x)$ (1.90). Точно так же интенсивность шума в радиотехнической цепи согласно теореме Найквиста связана с таким параметром цепи как активное сопротивление. Ситуация упрощается в

случае *внешнего шума*, который возникает вне системы: две части уравнений Ланжевена могут рассматриваться как независимые, и характеристики случайных сил становятся дополнительными независимыми параметрами системы [55, 56].

В этой книге будут рассмотрены ситуации, для которых шум входит в уравнение Ланжевена линейно, что значительно упрощает описание:

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x, t) + \sum_{j=1}^m g_{i,j}(x, t) \xi_j(t). \quad (1.91)$$

Кроме того, если для данного j все коэффициенты $g_{i,j} = \text{const}$, то говорят об *аддитивном шуме*, так как интенсивность воздействия ξ_j на все переменные состояния $x_i(t)$ не зависит от мгновенных значений $x_i(t)$. Противоположная ситуация, когда $g_{i,j}$ зависит от переменных состояния системы, называется *мультипликативным шумом*.

Характеристики шума. Существует много возможных способов ввести случайные функции $\xi(t)$ с различными свойствами. При самом общем подходе различают дискретные процессы, которые могут принимать только дискретное множество значений, и непрерывные процессы, который определены на непрерывном множестве значений. Другая характерная черта — множество моментов времени, на котором задана случайная функция $\xi(t)$. Состояние системы может изменяться либо непрерывно во времени, либо скачками в дискретные моменты времени.

Гауссовы процессы. Они представляют большой подкласс случайных процессов. Совместная плотность вероятности дается распределением Гаусса

$$p_n(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n) = \quad (1.92)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \text{Det}[R(t_i, t_j)]}} \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n b_{i,j}(x_i - a(t_i))(x_j - a(t_j)) \right),$$

где

$$a(t_i) = \langle x(t_i) \rangle \quad (1.93)$$

есть среднее значение, в общем случае зависящее от времени, а $R(t_i, t_j)$ — корреляционная матрица. Элементы матрицы

$$R_{i,j} = \langle (x(t_i) - a(t_i))(x(t_j) - a(t_j)) \rangle = \langle x(t_i)x(t_j) \rangle - a(t_i)a(t_j), \quad (1.94)$$

а $b_{i,j}$ – элементы обратной матрицы R^{-1} . Таким образом, для определения гауссова процесса необходимо знать только два первых момента случайного процесса.

Винеровский процесс. Броуновское движение можно моделировать гауссовским процессом. Если W_i есть случайная величина, определяющая положение броуновской частицы в момент времени t_i , ее многомерное распределение, зависящее от единственного параметра D имеет вид

$$p_n(W_1, t_1, \dots, W_n, t_n) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{4\pi D \cdot (t_i - t_{i-1})}} \exp\left(-\frac{1}{4D} \frac{(W_i - W_{i-1})^2}{t_i - t_{i-1}}\right), \quad (1.95)$$

где $W_0 = 0$ и $t_0 = 0$. Такой процесс $W(t)$ называется в честь Норберта Винера *винеровским процессом*. Он генерирует ансамбль не дифференцируемых, но с вероятностью 1 непрерывных траекторий. Очевидно, что данный процесс является марковским, так как сомножители с $i \geq 2$ в произведении (1.95) являются вероятностями перехода между двумя последовательными состояниями:

$$p(W_i, t_i | W_{i-1}, t_{i-1}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D (t_i - t_{i-1})}} \exp\left(-\frac{(W_i - W_{i-1})^2}{4D (t_i - t_{i-1})}\right). \quad (1.96)$$

Они не зависят от предыстории и удовлетворяют уравнению Чепмена–Колмогорова (1.62).

Винеровский процесс не является стационарным, ни в широком ни в строгом смысле. При заданном начальном условии $p(W_0, t_0 = 0) = \delta(W_0)$, для $t \geq 0$ можно найти плотность вероятности:

$$p_1(W, t) = \int dW_0 p(W, t | W_0, t_0) \delta(W_0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{W^2}{4Dt}\right), \quad (1.97)$$

которая явно зависит от времени. Первый момент винеровского процесса с заданным начальным условием тождественно равен нулю: $\langle W(t) \rangle = 0$, но второй момент растет линейно с течением времени:

$$\langle W(t_1)W(t_2) \rangle = 2D \min(t_1, t_2), \quad (1.98)$$

так что для $t_1 = t_2 = t$: $\langle W(t)^2 \rangle = 2Dt$. Таким образом, введенный параметр D определяет скорость роста дисперсии. В случае

броуновского движения эта скорость совпадает с коэффициентом диффузии.

Важное заключение может быть сделано для приращений $\Delta W_{t_1, t_2} = W(t_2) - W(t_1)$; $t_2 > t_1$. Как следует из соотношения (1.96), приращения имеют равные нулю средние значения

$$\langle \Delta W_{t_1, t_2} \rangle = 0. \quad (1.99)$$

Кроме того, приращения удовлетворяют условию стационарности

$$\langle (\Delta W_{t_1, t_2})^2 \rangle = 2D(t_2 - t_1). \quad (1.100)$$

Очень важным является свойство статистической независимости приращений на неперекрывающихся интервалах времени:

$$\langle \Delta W_{t_1, t_2} \Delta W_{t_2, t_3} \rangle = 0 \quad ; \quad t_3 > t_2 > t_1. \quad (1.101)$$

Последовательные приращения формируют стационарный марковский процесс, поскольку (1.96) является точным решением уравнения Чепмена–Колмогорова, и, следовательно, $\Delta W_{t_1, t_2} = \Delta W_{t_2 - t_1}$. В дифференциальной форме при $t_{i+1} - t_i \rightarrow 0$, это уравнение приобретает вид диффузионного уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial t} p(\Delta W, t | \Delta W_0, t_0) = D \frac{\partial^2}{\partial \Delta W^2} p(\Delta W, t | \Delta W_0, t_0). \quad (1.102)$$

Белый гауссовский шум. Винеровский процесс может быть представлен как сумма последовательных независимых приращений:

$$W(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta W_{t_{k+1} - t_k}, \quad (1.103)$$

которая при $t_n = t$ и $t_0 = 0$ является частным случаем интеграла Ито (1.84). Возникает вопрос, какими должны быть свойства процесса $\xi(t)$, чтобы можно было представить винеровский процесс в виде стохастического интеграла (1.82)

$$W(t) = \int_0^t ds \xi(s) \quad ? \quad (1.104)$$

Формально, в этом случае $\xi(t)$ является производной по времени от винеровского процесса $\Delta W / \Delta t$. Однако, эта производная не существует в среднеквадратическом пределе при $\Delta t \rightarrow 0$, так как гауссово распределение $\Delta W / \Delta t$ расходится. Интеграл от $\xi(t)$ по времени имеет смысл только в том случае, если его заменять суммами

по приращениям, как в (1.84) и (1.103), и использовать свойства приращений, описанные выше.

Тем не менее, использование $\xi(t)$ с указанными свойствами в уравнении Ланжевена довольно обычно в физической литературе. Вычисления, производимые для стационарных в широком смысле процессов, определяют свойства, которыми должен обладать процесс $\xi(t)$. Это процесс, имеющий гауссово распределение с равным нулю средним значением. Корреляционная (ковариационная) функция (1.98) винеровского процесса может быть получена, если предположить, что ковариационная функция процесса $\xi(t)$ имеет вид $c_{\xi,\xi}(t_1 - t_2) = 2D\delta(t_1 - t_2)$. Следовательно, значения процесса $\xi(t)$, определяемого (1.104), не коррелируют в различные моменты времени, что соответствует независимости приращений. Спектр мощности $G_{\xi\xi}(\omega)$ постоянен на всех частотах: $G_{\xi\xi}(\omega) = 2D$. По этой причине процесс $\xi(t)$ называют *белым шумом*.

Белый шум не имеет каких-либо физических аналогов. Действительно, проинтегрированная по всем частотам мощность белого шума бесконечно велика. В связи с этим при моделировании реальных процессов белым шумом возникают определенные математические сложности, но имеется и огромное преимущество. Только в том случае, когда случайный источник в уравнении Ланжевена (1.90) является белым шумом, результирующий процесс $x(t)$ будет марковским. Это важное упрощение теряется для любых источников шума, отличающихся от модели белого шума.

Возможное физическое обоснование для использования белого шума основано на разделении масштабов времени случайных возмущений и чисто детерминированной динамики. В пределе, если время корреляции шума τ_c пренебрежимо мало по сравнению с временем релаксации τ_r детерминированной системы, приходим к модели с воздействием в виде белого шума.

Единственный параметр, характеризующий гауссов белый шум — это его интенсивность D . Ее значение зависит от выбранного масштаба времени. Преобразование $t' = at$ дает $\xi(t') = \frac{1}{\sqrt{a}}\xi(t)$. Для ковариационной функции в новом временном масштабе нетрудно найти $c_{\xi,\xi}(t'_1 - t'_2) = 2(D/a)\delta(t'_1 - t'_2)$. Следовательно, величина интенсивности шума обратно пропорциональна масштабу времени.

Везде далее будем обозначать гауссов белый шум как $\xi(t)$ и считать, что $\langle \xi(t)\xi(t + \tau) \rangle = \delta(\tau)$ и, соответственно, для приращения винеровского процесса будем полагать $\langle \Delta W_{\Delta t}^2 \rangle = \Delta t$. Интенсив-

ность белого гауссова шума, а также значение дисперсии приращения могут быть введены в явном виде, как мультипликативный множитель перед $\xi(t)$ или $\Delta W_{\Delta t}$.

Пуассоновский процесс. Пусть случайная функция $N(t)$ определяет, сколько раз некоторое случайное событие произойдет на интервале времени $[0, t]$, причем $N(0) = 0$. Ясно, что процесс $N(t)$ характеризуется дискретным множеством значений, причем значение всегда возрастает во времени. Вероятность обнаружить состояние N в момент времени t дается распределением Пуассона:

$$P_N(t) = \frac{(\gamma t)^N}{N!} \exp(-\gamma t), \quad (1.105)$$

где $t \geq 0$. Такой процесс $N(t)$ называется *пуассоновским*. Все его свойства определяются только значением γ . Пуассоновский процесс очевидно не является гауссовским. Его первый момент, а также все более высокие моменты, выражаются через γ . Рассмотрим среднее и второй момент:

$$\langle N(t) \rangle = \gamma t, \quad \langle (N(t) - \langle N(t) \rangle)(N(t') - \langle N(t') \rangle) \rangle = \gamma \min(t, t'). \quad (1.106)$$

Распределение Пуассона (1.105) является решением управляющего уравнения

$$\dot{P}_N(t) = -\gamma P_N(t) + \gamma P_{N-1}(t); \quad N \geq 1, \quad \dot{P}_0(t) = -\gamma P_0(t), \quad (1.107)$$

описывающего одношаговый процесс (“процесс рождения“) $N \rightarrow N + 1$ с вероятностью перехода в единицу времени $W(N \rightarrow N + 1) = \gamma$. Управляющее уравнение представляет собой дифференциальную форму уравнения Чепмена–Колмогорова для дискретного множества состояний. Оно описывает эволюцию во времени вероятностей состояний. Важно отметить, что для получения $P_N(t + \Delta t)$ нужно знать только $P_N(t)$. Следовательно, пуассоновский процесс $N(t)$ является марковским.

Подобно винеровскому процессу, процесс Пуассона имеет независимые приращения. Приращение $\Delta N(t) > 0$ для шага $N_0 \rightarrow N_0 + \Delta N(t)$ в интервале $[t_0, t)$ не зависит от предыстории. Можно показать, что для вероятности перехода из состояния $\Delta N_0 = 0$ при $t = t_0$ в состояние $\Delta N(t)$ при $t > t_0$ также справедливо распределение Пуассона. Это распределение с $\gamma = \text{const.}$ определяет теперь стационарный марковский процесс $\Delta N(t)$ с

$$P(\Delta N, t | \Delta N_0 = 0, t_0) = \frac{[\gamma(t - t_0)]^{\Delta N}}{\Delta N!} \exp[-\gamma(t - t_0)], \quad \Delta N \geq 0. \quad (1.108)$$

Можно рассматривать задачу, связанную со временем жизни в различных состояниях. Как долго процесс остается в определенном состоянии $N = N_0$, если он находился там при t_0 ? Для пуассоновского процесса ответ дается легко. Из (1.106) с $\langle N \rangle = 1$ тут же получаем, что $\langle t \rangle = \gamma^{-1}$. Действительно, вероятность того, что за период времени $[0, \tau]$ не происходит никакого скачка равна $P_0(\tau)$. Следовательно,

$$D(\tau) = 1 - P_0(\tau) \quad (1.109)$$

есть вероятность того, что процесс будет оставаться в состоянии N_0 на данном интервале времени. Для вероятности скачка, который произойдет в интервале $[\tau, \tau + \Delta\tau]$, получаем

$$dD(\tau) = -\frac{dP_0}{d\tau} d\tau = \gamma \exp(-\gamma\tau) d\tau = w_N(\tau) d\tau. \quad (1.110)$$

Усреднение дает

$$\langle t \rangle = \int_0^{\infty} \tau \gamma \exp(-\gamma\tau) d\tau = \int_0^{\infty} \tau w_N(\tau) d\tau = \frac{1}{\gamma}. \quad (1.111)$$

В (1.110) была введена функция $w_N(\tau)$, называемая плотностью вероятности времен пребывания (ожидания). Она является мощным инструментом описания стохастических процессов и широко используется в литературе для решения различных проблем [89, 90].

Дробовой белый шум. Подобно винеровскому процессу представим пуассоновский процесс с помощью интеграла:

$$N(t) = \int_0^t ds \xi_{SN}(s). \quad (1.112)$$

Подынтегральная функция ξ_{SN} представляет собой случайный процесс, называемый *дробовым шумом*, и не являющийся гауссовым. Дробовой шум представляет собой последовательность δ -импульсов, возникающих в случайные моменты времени t_i :

$$\xi_{SN}(t) = \sum_i \delta(t - t_i). \quad (1.113)$$

Моменты времени t_i имеют пуассоновское распределение по i . Каждый дельта-образный пик соответствует скачку значения $N(t)$ на величину $\Delta N = 1$. Такое представление было введено В. Шоттки для описания импульсов, наводимых отдельными электронами, эмитируемыми катодами в вакуумных лампах. При усреднении $\xi_{\text{SN}}(t)$ получаем отличное от нуля значение $\langle \xi_{\text{SN}}(t) \rangle = \gamma > 0$. Иногда удобнее бывает рассматривать флуктуации относительно среднего $\xi_{\text{SN}}(t) - \gamma = \eta_{\text{SN}}(\tau)$, представляющие собой белый шум с нулевым средним значением. Из-за независимости приращений ΔN , последовательность δ -пиков в моменты времени t_i должна характеризоваться независимыми значениями в различные моменты времени. Этот факт соответствует следующему равенству, получаемому для второго момента:

$$\langle (\xi_{\text{SN}}(t_1) - \gamma) (\xi_{\text{SN}}(t_2) - \gamma) \rangle = \gamma \delta(t_1 - t_2). \quad (1.114)$$

Таким образом, пуассоновский дробовой шум, также называемый процессом Кемпбелла, является белым шумом.

Цветной шум: процесс Орнштейна–Уленбека. Как уже отмечалось, белый шум является математической абстракцией. Именно поэтому так важно изучить влияние конечных времен корреляции случайных сил на управляемую шумом динамическую систему. Чтобы избежать проблем, возникающих с немарковскими процессами, можно представить цветной источник шума (т.е. шум с конечной корреляцией) как результат фильтрации нормально распределенного белого шума. В простейшем случае фильтр является линейным (подобно RC или RCL цепочкам, слово "фильтр" очевидно заимствовано из радиотехники).

Простой фильтр низких частот описывается следующим уравнением Ланжевена:

$$\dot{y}(t) = -\frac{1}{\tau_c} y + \frac{\sqrt{2D}}{\tau_c} \xi(t), \quad (1.115)$$

с гауссовым белым шумом $\xi(t)$, имеющим нулевое среднее значение и $\langle \xi(t) \xi(t + \tau) \rangle = \delta(\tau)$. Процесс $y(t)$, задаваемый уравнением (1.115), называется *процессом Орнштейна–Уленбека*. Легко проверить, что процесс Орнштейна–Уленбека в асимптотическом пределе является стационарным гауссовым процессом со стационарной плотностью вероятности

$$P(y) = \sqrt{\frac{\tau_c}{2\pi D}} \exp\left(-\frac{\tau_c}{2D} y^2\right), \quad (1.116)$$

с автоковариационной функцией

$$c_{yy}(\tau) = \frac{D}{\tau_c} \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_c}\right), \quad (1.117)$$

и спектром мощности

$$S_{yy} = \frac{2D}{1 + \omega^2 \tau_c^2}. \quad (1.118)$$

Во многих публикациях процесс Орнштейна–Уленбека используется в качестве источника цветного шума, воздействующего на динамическую систему. Было показано, что в отличие от белого шума, процесс Орнштейна–Уленбека может значительно влиять как на стационарное вероятностное распределение, так и на поведение системы во времени [63].

Цветной шум: марковский дихотомический или случайный телеграфный процесс. Дискретным аналогом процесса Орнштейна–Уленбека с экспоненциальным затуханием корреляционной функции в (1.117) является *дихотомический марковский процесс* I_t . Он представляет собой последовательность переключений между двумя постоянными состояниями Δ и Δ' . Переходы между состояниями характеризуются экспоненциальным распределением времени ожидания (1.110) со средними значениями времени ожидания τ_Δ для перехода $\Delta \rightarrow \Delta'$ и $\tau_{\Delta'}$ для $\Delta' \rightarrow \Delta$. В этом случае процесс I_t является марковским и вероятности перехода удовлетворяют управляющему уравнению

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P(\Delta, t | I_0, t_0) &= -\frac{1}{\tau_\Delta} P(\Delta, t | I_0, t_0) + \frac{1}{\tau_{\Delta'}} P(\Delta', t | I_0, t_0), \\ \frac{d}{dt} P(\Delta', t | I_0, t_0) &= \frac{1}{\tau_\Delta} P(\Delta, t | I_0, t_0) - \frac{1}{\tau_{\Delta'}} P(\Delta', t | I_0, t_0) \end{aligned} \quad (1.119)$$

с начальным состоянием I_0 . Откуда сразу же легко получить стационарное распределение $P^0(I) = P(i, t \rightarrow \infty | I_0, t_0)$:

$$P^0(\Delta) = \frac{\tau_{\Delta'}}{\tau_{\Delta'} + \tau_\Delta}, \quad P^0(\Delta') = \frac{\tau_\Delta}{\tau_{\Delta'} + \tau_\Delta}. \quad (1.120)$$

Обозначив τ_c время корреляции, определенное соотношением

$$\frac{1}{\tau_c} = \frac{1}{\tau_\Delta} + \frac{1}{\tau_{\Delta'}}, \quad (1.121)$$

нетрудно записать зависящее от времени решение (1.119) в виде:

$$P(\Delta, t | \Delta, t = 0) = \frac{\tau_c}{2} \left[\frac{1}{\tau_\Delta} + \frac{1}{\tau_{\Delta'}} \exp\left(-\frac{t}{\tau_c}\right) \right] \quad (1.122)$$

$$P(\Delta', t | \Delta, t = 0) = \frac{\tau_c}{2} \frac{1}{\tau_{\Delta'}} \left[1 \exp\left(-\frac{t}{\tau_c}\right) \right]. \quad (1.123)$$

Если I_0 характеризуется исходным стационарным распределением (1.120), получаем стационарный процесс со следующими средними значениями и корреляционной функцией:

$$\langle I_t \rangle = \frac{\Delta\tau_\Delta + \Delta'\tau_{\Delta'}}{\tau_\Delta + \tau_{\Delta'}}, \quad \langle (I_{t_1} - \langle I_{t_1} \rangle) (I_{t_2} - \langle I_{t_2} \rangle) \rangle = \frac{D}{\tau_c} \exp\left(-\frac{|t_1 - t_2|}{\tau_c}\right), \quad (1.124)$$

где

$$D = \frac{\tau_c^3}{\tau_\Delta \tau_{\Delta'}} (\Delta - \Delta')^2. \quad (1.125)$$

В пределе $\Delta'\tau_{\Delta'} = -\Delta\tau_\Delta = \text{const}$ получаем дробовой белый шум $\eta_{\text{SN}}(t)$ с нулевым средним значением. В этом случае пребывание I_t в состоянии $\Delta < 0$ в среднем в течении времени τ_Δ чередуется с дельта-выбросами с весовыми множителями $|\tau_\Delta \Delta|$. Интенсивность такого дробового шума

$$D = \tau_\Delta \Delta^2. \quad (1.126)$$

В пределе стремящихся к нулю весовых множителей $|\tau_\Delta \Delta|$ можно перейти от дробового шума к гауссовому белому шуму с постоянной интенсивностью D . Действительно, при $\tau_\Delta \rightarrow 0$, $\Delta \rightarrow -\infty$ с $D = \text{const}$ получаем последовательность быстрых переключений между положительными и отрицательными бесконечными значениями с нулевым весом, которая характеризуется требуемой корреляционной функцией. Кумулянты, порядок которых выше второго, определяются выражениями $D (\tau_\Delta)^{(n-2)}$ и стремятся к нулю. Следовательно, в пределе процесс является гауссовым. Следуя Ван ден Броку, можно охарактеризовать величину $\gamma = \Delta\tau_\Delta$ как параметр “негауссовости” процесса [91].

1.2.4 Уравнение Фоккера–Планка

Дифференциальная форма уравнения Чепмена–Колмогорова. Альтернативный подход к описанию марковских процессов

основан на уравнениях эволюции для плотности вероятности перехода $p(x, t|x_0, t_0)$, что гарантирует полное знание марковской динамики. Рассмотрим вывод дифференциальных операторов для плотности вероятности перехода.

Поскольку $p(x, t|x_0, t_0)$ зависит от двух пар переменных $(x, t$ и $x_0, t_0)$, то в общем случае можно рассматривать две разных эволюционных задачи для плотности вероятности перехода, связанные с двумя сопряженными операторами эволюции. Первая задача — прямая, соответствует эволюции состояния x в прямом времени $t > t_0$, при фиксированном начальном состоянии x_0 в момент t_0 . Аналогично, обратная задача эволюции рассматривает в качестве переменных начальное состояние x_0 при заданных x, t . Использование того или другого оператора эволюции зависит от конкретной физической проблемы. Например, обратная задача возникает при исследовании интервала времени $t - t_0$, в течении которого траектория случайного процесса, исходящая из заданной начальной точки x_0 , достигает некоторого фиксированного значения x .

Оба дифференциальных оператора эволюции выводятся из уравнения Чепмена - Колмогорова. Сам вывод изложен во многих книгах, посвященных случайным процессам (см., например, [80]). Дифференциальная форма прямой задачи имеет вид

$$\frac{\partial p(x, t|x_0, t_0)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} K_n(x, t) p(x, t|x_0, t_0), \quad (1.127)$$

где кинетические коэффициенты $K_n(x, t)$ определяются как скорости изменения условных средних значений

$$\begin{aligned} K_n(x, t) &= \frac{1}{n!} \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} \int [x' - x]^n p(x', t + dt|x, t) dx' \quad (1.128) \\ &= \frac{1}{n!} \lim_{dt \rightarrow 0} \left. \frac{\langle dx^n \rangle}{dt} \right|_{x(t)=x} \end{aligned}$$

Уравнение (1.127) известно как разложение Крамерса–Мойала уравнения Чепмена–Колмогорова и справедливо для любых марковских процессов с заданными коэффициентами (1.128). Расширение Крамерса–Мойала для обратной задачи имеет вид

$$-\frac{\partial p(x, t|x_0, t_0)}{\partial t_0} = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(x_0, t_0) \frac{\partial^n p(x, t|x_0, t_0)}{\partial x_0^n}. \quad (1.129)$$

Операторы эволюции в (1.127) и (1.129) связаны друг с другом и значительно упрощаются для так называемых *диффузионных* процессов. Для этих процессов только два коэффициента (1.128) с $n = 1$ и $n = 2$ отличны от нуля, в то время как остальные $K_n = 0$ для $n > 2$ [81]. В этом случае уравнения (1.127) и (1.129) называются *прямым и обратным уравнениями Фоккера–Планка (или Фоккера–Планка–Колмогорова)*. Таким образом, прямое уравнение Фоккера–Планка (УФП) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(x, t|x_0, t_0)}{\partial t} &= \mathbf{L}_x^F p(x, t|x_0, t_0) \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} K_1(x, t) p(x, t|x_0, t_0) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} K_2(x, t) p(x, t|x_0, t_0), \end{aligned} \quad (1.130)$$

И, аналогично, обратное уравнение —

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p(x, t|x_0, t_0)}{\partial t_0} &= \mathbf{L}_{x_0}^B p(x, t|x_0, t_0) \\ &= K_1(x_0, t_0) \frac{\partial p(x, t|x_0, t_0)}{\partial x_0} + K_2(x_0, t_0) \frac{\partial^2 p(x, t|x_0, t_0)}{\partial x_0^2}. \end{aligned} \quad (1.131)$$

Можно непосредственно обобщить полученные уравнения на случай многих динамических переменных x_1, \dots, x_n . Для $p(x_1, \dots, x_n, t|x_{1,0}, \dots, x_{n,0}, t_0)$ и соответствующих условных средних легко получить

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} K_1^i(x_1, \dots, x_n, t) p + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} K_2^{i,j}(x_1, \dots, x_n, t) p. \quad (1.132)$$

$$K_1^i(x_1, \dots, x_n, t) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\langle dx_i \rangle}{dt} \Big|_{x_1(t)=x_1, \dots, x_n(t)=x_n}, \quad (1.133)$$

$$K_2^{i,j}(x_1, \dots, x_n, t) = \frac{1}{2} \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\langle dx_i dx_j \rangle}{dt} \Big|_{x_1(t)=x_1, \dots, x_n(t)=x_n}, \quad (1.134)$$

Аналогично можно записать уравнение для обратной задачи.

Связь уравнения Фоккера–Планка с уравнением Ланжевена. Кинетические коэффициенты могут быть получены из соответствующего уравнения Ланжевена. Для переменной состояния $x(t)$ из уравнения Ланжевена нужно определить приращение dx на малом интервале времени dt в линейном приближении по dt , поскольку все высшие степени дают вклад порядка $\mathcal{O}(dt^2)$, который

обращаются в нуль при определении кинетических коэффициентов. Таким образом можно найти искомую связь между уравнением Ланжевена и УФП.

Приводимые ниже рассуждения покажут, что приращение dx , можно представить в виде интеграла Ито (1.84). Такое представление предполагает, что функции случайного процесса x определяющие приращения dx в моменты времени t считаются заданными. Поэтому, как собственно и требуется, они будут независимы и, следовательно, не будут коррелировать с фактическим приращением dW_{dt} источника шума в момент времени t . Если, кроме того, при рассмотрении конкретного процесса существуют соответствующие средние значения, то представление стохастического интеграла Ито в виде суммы приращений математически оправдано.

Для всех x в моменты времени $s > t$ сделанное утверждение не справедливо, и должны приниматься во внимание корреляции между $x(s)$ и приращением dW_{dt} в момент времени t . Причина этого состоит в разрывном характере приращений dW_{dt} , образующих типичную траекторию $W(t)$, которая в любой момент времени является негладкой функцией. В результате предельный переход от суммы к интегралу при $dt \rightarrow 0$ оказывается не единственным, а зависит от выбора s внутри интервала $[t; t + dt]$, для которого рассматривается $x(s)$. Как уже подчеркивалось, если $s = t$, то вкладов от корреляций нет. Напротив, при $s = t + dt$ надо учитывать корреляции, приводящие к дополнительному слагаемому в приращении dx , имеющему порядок малости $\mathcal{O}(dt)$.

Таким образом, любой другой выбор s , отличный от $s = t$ нуждается в дальнейших пояснениях. Рассмотрим вкратце, как при произвольном s можно вернуться назад к формулировке Ито. Начнем со стохастического дифференциального уравнения

$$\dot{x} = f(x, t) + \sqrt{2D} g(x, t) \xi(t) \tag{1.135}$$

для одномерной переменной $x(t)$ и белого гауссова шума $\xi(t)$ с $\langle \xi(t) \rangle = 0$ и $\langle \xi(t) \xi(t + \tau) \rangle = \delta(\tau)$. Приращение на малом интервале времени dt есть

$$dx_t = x(t+dt) - x(t) = f(x(s), s)dt + g(x(s), s)\sqrt{2D}dW_{dt}, \tag{1.136}$$

где dW_{dt} — приращение соответствующего винеровского процесса с $\langle dW_{dt}^2 \rangle = dt$ в момент времени t на интервале dt .

Явная зависимость функций f и g от времени приводит к риманову интегралу. Однако, приращение dx_t в случае типичной траектории $x(s)$ зависит от конкретного выбора разбиения интервала $[t, t + dt]$. Это происходит из-за негладкого поведения белого шума $\xi(t)$ и, как результат, недифференцируемости винеровского процесса с приращениями dW_t . Пусть $q \in [0, 1]$ – некоторая константа. Рассмотрим момент времени $s = t + qdt$. Подставляя в (1.136) и в разложения для f и g получаем

$$dx_t = f_t dt + q \frac{\partial f}{\partial x_t} dx_t dt + g_t \sqrt{2D} dW_{dt} + q \frac{\partial g}{\partial x_t} dx_t \sqrt{2D} dW_{dt}, \quad (1.137)$$

где все функции берутся в момент времени t . Однако, приращение dx_t все еще зависит от случайной величины dW_{dt} . После подстановки dx_t , в правую часть (1.137) и исключения слагаемых третьего порядка малости получаем

$$dx_t = f_t dt + g_t \sqrt{2D} dW_{dt} + q \frac{\partial g}{\partial x_t} g_t 2D dW_{dt}^2 + \left(q \frac{\partial f}{\partial x_t} g_t dt + f_t g_t + q \frac{\partial g}{\partial x_t} f_t \right) \sqrt{2D} dW_{dt} dt. \quad (1.138)$$

Стратонович [92] показал, что кроме первых двух слагаемых дополнительный вклад дает выражение $2DdW_{dt}^2$. Это слагаемое более высокого порядка, уточняющее значение dx_t . В пределе $dt \rightarrow 0$ его можно заменить математическим ожиданием $2D dt$, так как среднее значение и второй момент отклонения случайной величины $2DdW_{dt}^2$ от $2Ddt$ обращаются в нуль. Оба момента, полученные из последнего слагаемого в (1.138) в пределе $dt \rightarrow 0$, также дают нули. С точностью до $\mathcal{O}(dt)$ получаем

$$dx_t = f(x, t) dt + 2D dt q \frac{\partial g(x, t)}{\partial x} g(x, t) + \sqrt{2D} g(x, t) dW_{dt}. \quad (1.139)$$

Из этого соотношения следуют несколько важных утверждений. Во-первых, приращение не зависит от значений процесса $x(t')$ в предшествующие моменты времени $t' < t$. Таким образом, процесс в системе, управляемой белым шумом, являются марковскими. Во-вторых, приращение линейно относительно dW_{dt} и поэтому изменяется во времени как dW_{dt} . Например, можно поставить вопрос о числе пересечений процессом $x(t)$ заданной границы x_0 , при начальном состоянии в окрестности x_0 . В пределе $dt \rightarrow 0$, линейная

зависимость от dW_{dt} гарантирует неограниченный рост числа пересечений границы.

Приращение в (1.139) понимается в смысле приращения Ито dx . Суммируя приращения от 0 до t , получаем стохастический интеграл Ито, определенный соотношением (1.84) с указанным выбором разбиения [93]:

$$x(t) = x(0) + \int_0^t ds \left(f(x, s) + 2Dq \frac{\partial g(x, s)}{\partial x} g(x, s) \right) + \sqrt{2D} \int_0^t dW_s g(x, s). \quad (1.140)$$

Поскольку процесс W_t является непрерывным, то отсюда следует непрерывность также и для $x(t)$.

Из (1.140) сразу же можно получить кинетические коэффициенты УФП, являющиеся условными моментами $x(t)$, отнесенными к единице времени. Они выражаются в виде

$$K_1(x, t) = \frac{d\langle x \rangle}{dt} = f(x, t) + 2Dq \frac{\partial g(x, t)}{\partial x} g(x, t) \quad (1.141)$$

и

$$K_2(x, t) = \frac{1}{2} \frac{d\langle x^2 \rangle}{dt} = Dg^2(x, t). \quad (1.142)$$

Коэффициент более высокого порядка с учетом свойств винеровского процесса (1.101) оказываются тождественно равными нулю [92]. Следовательно, процесс, заданный уравнением Ланжевена (1.90) с гауссовым белым шумом, является марковским диффузионным процессом.

Таким образом, УФП для плотности вероятности перехода $p_2 = p_2(x, t|x_0, t_0)$, соответствующее уравнению Ланжевена (1.135), имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} p_2 = - \frac{\partial}{\partial x} \left(f(x, t) + 2Dq \frac{\partial g(x, t)}{\partial x} g(x, t) \right) p_2 + D \frac{\partial^2}{\partial x^2} g^2(x, t) p_2. \quad (1.143)$$

Аналогично можно получить кинетические коэффициенты в многомерном случае

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n) + \sum_{j=1}^m g_{i,j}(x_1, \dots, x_n) \xi_j(t), \quad (1.144)$$

где имеется m источников белого шума с нулевыми средними значениями и корреляциями в виде

$$\langle \xi_i(t) \xi_j(t + \tau) \rangle = 2 D_{i,j} \delta(\tau). \quad (1.145)$$

Используя выражения для условных моментов приращений dx_i можно получить кинетические коэффициенты

$$K_1^i = f_i + 2q \sum_{j,k,l} D_{j,l} \frac{\partial g_{i,j}}{\partial x_k} g_{k,l}, \quad (1.146)$$

$$K_2^{i,j} = \sum_{k,l} D_{k,l} g_{i,k} g_{j,l}. \quad (1.147)$$

Подставляя кинетические коэффициенты в (1.132), получаем оператор эволюции в прямом времени, который полностью определяет стохастическое поведение многомерного процесса.

Этот тип оператора эволюции, учитывающий дрейф и диффузию, впервые был введен Фоккером для описания движения броуновской частицы в фазовом пространстве, а позже, в более общем виде, Планком. Для случая одной переменной основной вклад был сделан сначала Рэлеем, а затем Смолуховским. Клейн и Крамерс получили вид оператора для движения броуновских частиц под воздействием внешних сил. Первые математические обоснования восходят к Колмогорову. Все перечисленные имена могут встречаться в названии (1.132) для различных случаев. Список ранних работ можно найти в [94] и [81, 95].

Отметим, что последнее слагаемое в (1.140) всегда определяется как интеграл Ито (1.84). Соответственно, соотношение между кинетическими коэффициентами и уравнением Ланжевена в случае мультипликативного шума зависит от выбора разбиения, т. е., от константы q . Какого-то универсального подхода к выбору этого параметра не существует. Этот выбор зависит от того, как происходит предельный переход к белому шуму при $dt \rightarrow 0$.

В дальнейшем мы увидим, что выбор $q = 1/2$ соответствует предположению о том, что белый шум вводится как предельный случай цветного шума со стремящимися к нулю корреляциями. Такой выбор q при рассмотрении стохастических интегралов Ито соответствует исчислению Стратоновича. Он обладает тем преимуществом, что соотношение между условными моментами и уравнением Ланжевена инвариантно относительно преобразования переменных [75, 93]. Для всех других значений q закон преобразования должен измениться, в том числе для случая $q = 0$. Недавно Климонтовичем было показано [59], что случай $q = 1$ согласуется с результатами статистической физики для равновесного состояния. В

математической литературе предпочтение отдается случаю $q = 0$, который называется исчислением Ито [75, 79]. В этом случае приращение dx_t зависит только от случайных изменений dW_t в момент t . Такой подход оправдан, если непрерывный процесс $x(t)$ является моделью некоторого дискретнозначного процесса, и предел белого шума заранее понимается как непрерывное приближение.

В дальнейшем будет использоваться исчисление Стратоновича с $q = 1/2$.

Вывод УФП из модели дихотомического процесса. Рассмотрим ДС под воздействием марковского дихотомического шума I_t , являющегося симметричным процессом с двумя состояниями, $I_t = \pm\Delta$. Переходы между обоими состояниями характеризуются средним временем $1/\gamma$. Уравнение Ланжевена в одномерном случае имеет вид

$$\dot{x} = f(x) + g(x) I_t. \quad (1.148)$$

Пока $I_t = \text{const.}$ в одном из возможных состояний, кинетические коэффициенты равны

$$K_1(x, \pm\Delta) = f(x) \pm g(x) \Delta, \quad K_2 = 0. \quad (1.149)$$

Учет переключений значений I_t ведет к балансу вероятности $p_\Delta(x)$ и, соответственно, $p_{-\Delta}(x)$

$$\frac{\partial}{\partial t} p_{\pm\Delta}(x) = -\frac{\partial}{\partial x} (f(x) \pm \Delta g(x)) p_{\pm\Delta}(x) + \gamma p_{\mp\Delta}(x) - \gamma p_{\pm\Delta}(x). \quad (1.150)$$

Так как эти уравнения линейны по $p_{\pm\Delta}$, то можно получить уравнение, связывающее суммарную вероятность $p(x, t) = p_\Delta(x, t) + p_{-\Delta}(x, t)$ и разность вероятностей $Q(x, t) = p_\Delta(x, t) - p_{-\Delta}(x, t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} (f p(x, t) + \Delta g(x) Q(x, t)). \quad (1.151)$$

Выражение для Q при заданном p было получено в [53, 96]:

$$Q(x, t) = -\Delta \int_{-\infty}^t ds \exp \left[-\left(2\gamma + \frac{\partial}{\partial x} f \right) (t-s) \right] \frac{\partial}{\partial x} g(x) p(x, s). \quad (1.152)$$

Здесь предполагается выполнение условия $Q(-\infty) = 0$ и то, что производная $\frac{\partial}{\partial x}$ относится как к $g(x)$ так и к $p(x, s)$. При подстановке (1.152) в (1.151) получаем замкнутое описание. В пределе

белого гауссова шума экспонента в (1.152) становится δ -функцией, и оператор эволюции для марковского процесса принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} f(x) p(x, t) + D \frac{\partial}{\partial x} \left(g(x) \frac{\partial}{\partial x} g(x) p(x, t) \right), \quad (1.153)$$

с $D = \Delta^2/(2\gamma)$ (см. 1.126).

На основании полученного уравнения можно определить величину q , задающую способ разбиения при вычислении стохастического интеграла. Чтобы рассматривать гауссов белый шум как предел цветного шума, необходимо выбрать $q = 1/2$ [53, 75], что приводит к соответствию между (1.143) и (1.153).

Стационарная плотность вероятности для задачи (1.148) может быть легко получена, если в (1.150) положить $\partial p/\partial t = 0$:

$$p^s(x) = N \frac{g(x)}{\Delta^2 g^2(x) - f^2(x)} \exp \left(-2\gamma \int^x dx' \frac{f}{f^2 - \Delta^2 g^2} \right). \quad (1.154)$$

Одномерные марковские диффузионные системы. Хотя УФП линейно относительно плотности вероятности перехода, нелинейность системы приводит к зависимости кинетических коэффициентов от параметров состояния. Это обстоятельство усложняет в большинстве случаев аналитическое рассмотрение. Фактически, только некоторые модельные системы допускают точные аналитические решения УФП. Даже в одномерном случае, точное аналитическое нестационарное решение УФП, возможно получить только для линейных систем.

Главная информация, которую можно извлечь из УФП, это выражение для стационарной плотности вероятности $p^s(x)$, получаемой в предположении $\partial p_2/\partial t = 0$. Для нахождения стационарного решения УФП удобно ввести поток вероятности

$$j(x, t) = f(x) p(x, t|x_0, t_0) - D g(x) \frac{\partial}{\partial x} (g(x) p(x, t|x_0, t_0)), \quad (1.155)$$

который позволяет представить УФП в форме уравнения непрерывности. В одномерном случае и для аддитивного шума (при выборе $g = 1$ в (1.153)), проинтегрировав уравнение непрерывности один раз, получаем выражение для постоянного потока вероятности

$$j^s = f(x) p^s - D \frac{\partial}{\partial x} p^s(x) = \text{const}. \quad (1.156)$$

Очень интересный случай, когда $j^s \neq 0$, будет затронут в разделах 1.2.6, 1.3.4 и главе 3.4. Здесь же рассмотрим ситуацию, когда граничные условия позволяют положить $j^s = 0$, что справедливо, если плотность вероятности и ее производные обращаются в ноль в некотором состоянии (например, при $x \rightarrow \infty$) или в случае периодических систем без смещения. Тогда стационарная плотность легко может быть получена и имеет вид

$$p^s(x) = N \exp\left(-\frac{1}{D} U(x)\right). \quad (1.157)$$

В этом распределении, подобном распределению Больцмана, $U(x) = -\int^x dx' f(x')$ называют потенциалом, а N является нормировочной константой

$$N^{-1} = \int_X dx' \exp\left(-\frac{1}{D} U(x')\right), \quad (1.158)$$

где X — множество возможных значений процесса $x(t)$. Экстремумы x_e стационарной плотности, определяемые из условия $dp^s/dx = 0$, совпадают с положениями равновесия соответствующей детерминированной системы, определяемыми корнями уравнения $f(x_0) = 0$. Устойчивые состояния с $f'(x_0) < 0$ соответствуют максимумам p^s , а неустойчивые $f'(x_0) > 0$ — минимумам.

Решение, подобное распределению Больцмана

$$p^s(x_1, \dots, x_n) = N \exp\left(-\frac{1}{D} U(x_1, \dots, x_n)\right), \quad (1.159)$$

получается также для многомерного процесса в случае так называемой градиентной динамики с симметричным шумом. Этот случай также допускает решения с обращающимся в нуль потоком вероятности. Соответствующая стохастическая система может быть представлена в виде

$$\dot{x}_i = -\frac{\partial}{\partial x_i} U(x_1, \dots, x_n) + \sqrt{2D} \xi_i(t), \quad (1.160)$$

где все источники гауссова белого шума независимы. Неподвижные точки по-прежнему соответствуют экстремумам плотности вероятности состояний. Обширный класс передемпфированных систем типа реакция — диффузия в приближении дискретного описания по пространственной переменной, находящихся под воздействием

аддитивного белого шума, относится к данному виду. Другие задачи, которые могут быть решены при обращении в нуль потока вероятности, представлены в [85]. Там приводится полученное для указанного случая условие интегрируемости, которое связывает кинетические коэффициенты (1.133) и (1.134).

Мультипликативный шум требует определенной модификации соответствия между состояниями равновесия и экстремумами стационарной плотности вероятности. При $q = 1/2$ стационарное решение отвечает случаю обращения потока j^s в ноль, что дает

$$p^s(x) = N \frac{1}{|g(x)|} \exp\left(\frac{1}{D} \int^x dx' \frac{f(x')}{g^2(x')}\right). \quad (1.161)$$

Это решение также представляет собой предел белого гауссова шума для (1.154). Экстремумы x_e функции $p^s(x)$ теперь зависят от рассматриваемой мультипликативной части $g(x)$, удовлетворяющей условиям [97]

$$h(x_e, D) = f(x_e) - D g(x_e) \frac{\partial g(x_e)}{\partial x_e} = 0. \quad (1.162)$$

Таким образом, интенсивность шума D оказывается новым параметром системы. Стационарная плотность вероятности имеет максимум для $h'(x_e) < 0$ и минимум для $h'(x_e) > 0$. Множество точек в пространстве параметров, для которых $h'(x_e) = 0$, соответствует структурно неустойчивым ситуациям. Такие ситуации называются P -бифуркациями, если знак $f'(x_0)$ меняется в параметрическом пространстве в окрестности x_e [79]. Благодаря P -бифуркациям нарушается соответствие между аттракторами детерминированной динамической системы и максимумами стационарной плотности вероятности. Для возникновения новых максимумов в связи с P -бифуркациями, вызванными изменением интенсивности шума D , Хорстхемке и Лефеве [53] ввели понятие *индуцированных шумом переходов*. В книге [53] исследовались несколько примеров и моделей, и были получены выражения для величины критического шума D_c . Там же было сделано обобщение концепции индуцированных шумом состояний на ситуации с дихотомический шумом (см. (1.150) и на случай, когда белый шум в уравнении Ланжевена заменен на процесс Орнштейна–Уленбека (1.115) [63, 98].

Из (1.162) очевидно, что индуцированные шумом состояния появляются вблизи бифуркаций детерминированной динамической

системы. Если $\Delta a = a - a_c$ — расстояние от точки бифуркации для $\dot{x} = f(x, a)$, то критическая интенсивность $D_c \propto \Delta a$. Следовательно, в предположении малых D появление индуцированных шумом максимумов распределения в общем случае ограничивается окрестностью критических точек детерминированных динамических систем.

Концепция индуцированных шумом переходов неоднократно подвергалась критике [99,100], в связи с тем, что стационарное среднее $\langle x \rangle^s = x_m$, являющееся решением уравнения

$$K_1(x_m) = f(x_m) + D g(x_m) \frac{\partial g(x_m)}{\partial x_m} = 0, \quad (1.163)$$

отличается по своему значению от корней (1.162). Шум действует противоположным образом, что выражается различной величиной второго слагаемого в (1.163). Таким образом, стационарный первый момент не отражает индуцированного шумом перехода, определенного в соответствии с максимумами стационарной плотности вероятности. Кроме того, имеется много других измеряемых величин, служащих для характеристики влияния мультипликативного шума, таких, например, как моменты высших порядков или стохастические показатели Ляпунова [79, 99, 100].

1.2.5 Стохастические осцилляторы

В этом разделе изучаются двумерные колебательные системы, находящиеся под воздействием аддитивного шума. Типичные явления, наблюдающиеся в таких системах, — это бистабильность и мультистабильность, возбудимость и автоколебания [101]. Попробуем подытожить основные черты влияния аддитивного шума на указанные явления, рассматривая простейшие модели. Имеются в виду классические модели механики, электроники, химии и биологии. Обсуждаться будут, главным образом, стационарные решения УФП, в то время как динамические свойства мы оставим для следующей главы и остальной части книги.

Начнем с механической системы, описываемой следующими уравнениями Ланжевена:

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = -\gamma(x, v)v - \frac{\partial}{\partial x}U(x) + \sqrt{2D}\xi(t), \quad (1.164)$$

где x и v есть, соответственно, координата и скорость частицы, движущейся в потенциале $U(x)$ с трением $\gamma(x, v)$. В случае $\gamma = \text{const}$.

говорят о консервативном осцилляторе с нелинейным потенциалом, в который введены потери. Второй тип механического осциллятора предполагает, что потери являются нелинейными и могут обращаться в ноль. Такие системы будем называть диссипативными нелинейными системами и полагать U квадратичным потенциалом, как это делается в большинстве случаев [59, 101]. УФП для плотности вероятности перехода $p_2 = p_2(x, v, t|x_0, v_0, t_0)$ имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} p_2 + v \frac{\partial}{\partial x} p_2 - \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial}{\partial v} p_2 = \frac{\partial}{\partial v} \gamma(x, v) v p_2 + D \frac{\partial^2}{\partial v^2} p_2. \quad (1.165)$$

В стационарном пределе p_2 стремится к стационарной плотности: $p_2 \rightarrow p^s(x, v)$ с $\partial p^s / \partial t = 0$ и не зависит от начального состояния.

Мгновенная амплитуда и мгновенная фаза случайного процесса Аналитический подход, позволяющий добиться успеха в исследовании нелинейных осцилляторов с квадратичным потенциалом и слабой диссипацией, был развит Боголюбовым, Крыловым и Митропольским (БКМ) [102]. Они предложили искать решения детерминированной задачи с помощью перехода к амплитудно-фазовому описанию. В режиме малой диссипации можно предполагать, что к быстрому движению $\Phi_0 = \omega_0 t$, где ω_0 — собственная частота осциллятора, добавляется медленное изменение амплитуды колебаний A и фазы φ : $\Phi = \Phi_0 + \varphi$.

Аналогичный подход может быть применен и ко многим стохастическим осцилляторам [103–108]. Рассмотрим гармонический потенциал $U(x) = \omega_0^2 x^2 / 2$ и следующее преобразование переменных:

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad v = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \varphi). \quad (1.166)$$

Уравнения Ланжевена для амплитуды A и сдвига фазы φ имеют вид:

$$\dot{A} = \frac{\sin(\omega_0 t + \varphi)}{\omega_0} \gamma(x, v) v + y_A, \quad \dot{\varphi} = \frac{\cos(\omega_0 t + \varphi)}{A\omega_0} \gamma(x, v) v + y_\varphi, \quad (1.167)$$

где $y_A(t)$ и $y_\varphi(t)$ — новые источники шума:

$$y_A = -\frac{\sin(\omega_0 t + \varphi)}{\omega_0} \sqrt{2D} \xi(t), \quad y_\varphi = -\frac{\cos(\omega_0 t + \varphi)}{A\omega_0} \sqrt{2D} \xi(t). \quad (1.168)$$

Первое слагаемое в обоих уравнениях в (1.167) можно усреднить за период $T = 2\pi/\omega_0$ считая A и φ постоянными (т.к. их изменения за время T малы). Эта процедура соответствует первому приближению в разложении $f_A(a, \varphi)$ и $f_\varphi(a, \varphi)$ в рамках теории БКМ. Шум в (1.167) является мультипликативным. Источники y_A и y_φ дают следующие первые кинетические коэффициенты (1.146):

$$K_1^A \propto D \frac{\cos^2(\omega_0 t + \varphi)}{\omega_0^2}, \quad K_1^\varphi \propto -D \frac{\cos(\omega_0 t + \varphi) \sin(\omega_0 t + \varphi)}{A^2 \omega_0^2}. \quad (1.169)$$

После усреднения за период T в K_1^A остается, только одно отличное от нуля слагаемое, равное $D/(2\omega_0^2)$. Второй момент может быть вычислен в соответствии с (1.147). В результате усреднения за период взаимные корреляции обращаются в нуль, т. е., $K_2^{A,\varphi} = 0$. Следовательно, источники шума для амплитуды и сдвига фазы являются независимыми источниками гауссова белого шума с интенсивностями

$$K_2^{A,A} = \frac{D}{2\omega_0^2}, \quad K_2^{\varphi,\varphi} = \frac{D}{2\omega_0^2 A^2}. \quad (1.170)$$

Таким образом, УФП в амплитудно-фазовых переменных, записанное относительно плотности вероятности перехода $p_2(A, \varphi, t | A_0, \varphi_0, t_0)$, имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} p_2 = -\frac{\partial}{\partial A} \left(f_A + \frac{D}{2\omega_0^2} \right) p_2 - \frac{\partial}{\partial \varphi} f_\varphi p_2 + \frac{D}{2\omega_0^2} \frac{\partial^2 p_2}{\partial A^2} + \frac{D}{2\omega_0^2 A^2} \frac{\partial^2 p_2}{\partial \varphi^2}. \quad (1.171)$$

Стационарное решение этого уравнения в случае $\gamma = \text{const}$ и гармонического потенциала с частотой ω_0 представляет собой распределение Релея:

$$p^s(A, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \frac{A}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right), \quad (1.172)$$

где $\sigma^2 = D/\omega_0^2 \gamma$.

Энергетическое представление. Одним из интегралов движения, имеющих широкое применение в теоретической механике, является механическая энергия. Поэтому, в другой форме записи УФП в качестве переменной используется энергия [109]. Такое представление предпочтительно в случае медленного изменения энергии [81].

Пусть трение является линейным, так что $\gamma = \text{const}$. Тогда скорость можно выразить через энергию

$$v(x, E) = \pm \sqrt{2[E - U(x)]}, \quad (1.173)$$

используя определение механической энергии. В результате получим уравнения Ланжевена

$$\dot{x} = v(x, E), \quad \dot{E} = -\gamma v^2(x, E) + \sqrt{2D} v(x, E) \xi(t), \quad (1.174)$$

где v может быть выражена согласно (1.173). Уравнение для энергии содержит мультипликативный шум, $y_{E,x} = \sqrt{2D} v(x, E) \xi(t)$, являющийся в данном представлении источником флуктуаций. Используя интерпретацию Стратоновича, находим, что кинетические коэффициенты равны

$$K_1^x = v(x, E), \quad K_1^E = -\gamma v^2(x, E) + D, \quad K_2^{E,E} = D v^2(x, E). \quad (1.175)$$

Таким образом, УФП для плотности вероятности перехода $p_2 = p_2(x, E, t|x_0, E_0, t_0)$ в координатно-энергетическом представлении запишется как

$$\frac{\partial p_2}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} v(x, E) p_2 + \frac{\partial}{\partial E} (\gamma v^2(x, E) - D) p_2 + D \frac{\partial^2}{\partial E^2} v^2(x, E) p_2. \quad (1.176)$$

Его стационарное решение имеет вид

$$p^s(x, E) = \frac{N}{|v(x, E)|} \exp\left(-\frac{\gamma E}{D}\right). \quad (1.177)$$

Интегрирование по x в областях, где $E \geq U(x)$ приводит к исчезновению зависимости стационарной плотности вероятности от координаты:

$$p^s(E) \propto T(E) \exp\left(-\frac{\gamma E}{D}\right), \quad (1.178)$$

где $T(E)$ — период замкнутой траектории для данного значения энергии E . В частности, для функции Гамильтона, содержащей d квадратичных слагаемых, стационарная плотность вероятности равна

$$p^s(E) \propto E^{\frac{d}{2}-1} \exp\left(-\frac{\gamma E}{D}\right). \quad (1.179)$$

Обе последних формулы должны быть дополнены условием нормировки.

Стохастический бистабильный осциллятор. Одной из наиболее хорошо изученных нелинейных стохастических систем является бистабильный осциллятор [95]. Он представляет собой консервативный осциллятор с двумя устойчивыми состояниями равновесия в который добавлено трение. Без учета шума уравнения движения такого осциллятора имеют вид:

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad m \frac{dv}{dt} = -\gamma v - \frac{\partial U}{\partial x}, \quad (1.180)$$

где $U(x)$ — бистабильный потенциал. Без потери общности, рассмотрим симметричный двухямный потенциал

$$U(x) = -\frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{4}x^4, \quad (1.181)$$

который соответствует действию силы

$$f(x) = -\frac{\partial U(x)}{\partial x} = ax - bx^3. \quad (1.182)$$

Простой анализ дает два устойчивых состояния равновесия при

$$v_0 = 0, \quad x_{1,3} = \pm \sqrt{\frac{a}{b}}, \quad a, b > 0. \quad (1.183)$$

Их бассейны притяжения разделены двумя сепаратрисами, сходящимися в седловой точке

$$v_0 = 0, \quad x_2 = 0. \quad (1.184)$$

При слабом трении, если $\gamma < 8a$, устойчивые состояния равновесия характеризуются комплексными собственными значениями и, таким образом, являются устойчивыми фокусами. При $\gamma \rightarrow 0$ они превращаются в центры.

В случае сильного трения, когда $\gamma \rightarrow \infty$, или для легких частиц, соответственно $m \rightarrow 0$, траектории быстро стремятся к оси $v = 0$. В этом случае можно исключить $v(t)$ и ограничиться рассмотрением динамики только координаты $x(t)$:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{a}{\gamma}x - \frac{b}{\gamma}x^3. \quad (1.185)$$

За счет наличия трения ($\gamma > 0$) механическая система постоянно рассеивает свою энергию. Изменение механической энергии с течением времени описывается уравнением

$$\frac{d}{dt} E = \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} v^2 + U(x) \right) = -\gamma v^2 \leq 0, \quad (1.186)$$

Его решение обращается в ноль, когда достигается одно из устойчивых состояний равновесия. При этом скорость v , естественно, также обращается в ноль.

Бистабильный осциллятор — один из стандартных примеров описания сложного поведения в маломерных системах. Результаты, которые будут получены далее, с хорошим приближением могут применяться для бистабильных неравновесных систем типа электронных переключателей, оптических бистабильных систем, бистабильных нелинейных полупроводниковых устройств и бистабильных схем химических реакции [98, 110].

Добавим белый гауссов шум как случайную силу в уравнение для скорости:

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad m \frac{dv}{dt} = -\gamma v - \frac{\partial U(x)}{\partial x} + \sqrt{2D} \xi(t). \quad (1.187)$$

Соответствующее УФП, впервые полученное для рассматриваемой задачи Крамерсом и Клейном, имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} p_2(x, v, t | x_0, v_0, t_0) + v \frac{\partial p_2}{\partial x} - \frac{1}{m} \frac{\partial U(x)}{\partial x} \frac{\partial p_2}{\partial v} = \frac{\gamma}{m} \frac{\partial}{\partial v} v p_2 + \frac{D}{m^2} \frac{\partial^2 p_2}{\partial v^2}. \quad (1.188)$$

Стационарная плотность вероятности $p^s(x, v)$ описывает поведение на больших временах, после того, как стохастическая система достигнет равновесия во всем фазовом пространстве. Она может быть легко найдена. Предполагая, что $p^s = p^s(E(x, v))$, получаем единственное решение

$$p^s(x, v) = N^{-1} \exp \left(-\frac{\gamma m}{2D} v^2 - \frac{\gamma U(x)}{D} \right). \quad (1.189)$$

Если связать шум с температурой как $D = \gamma k_B T$ с помощью флуктуационно-диссипационной теоремы, то это распределение дает известное равновесное распределение Максвелла-Больцмана.

Отметим, что максимумы плотности вероятности совпадают с устойчивыми неподвижными точками. Принимая во внимание, что точка $x_2 = v_0 = 0$ соответствует седлу, получим, что плотность вероятности убывает вдоль оси v в обоих направлениях и, наоборот,

увеличивающуюся вдоль оси x . Случайные воздействия делают сепаратрису проницаемой. Траектории способны переходить из одной потенциальной ямы в другой и обратно. Таким образом, можно говорить об индуцированных шумом колебаниях между двумя аттракторами.

Первое представление о явлениях перехода можно получить, рассмотрев отношение вероятностей нахождения на потенциальном барьере, в седловой точке x_2 , к вероятности нахождения в одном из потенциальных минимумов. Это отношение дает закон Аррениуса, определяющий энергию активации $\Delta U = U(x = x_2) - U(x = x_1) > 0$,

$$\frac{p^s(x = x_2, v = v_0)}{p^s(x = x_1, v = v_0)} = \exp\left(-\frac{\gamma \Delta U}{D}\right). \quad (1.190)$$

Этот закон влияет на все характеристики, описывающие процессы перехода, связанные с масштабом времени.

Стохастические автоколебания. Шум в гармонических осцилляторах с диссипацией подкачивает энергию в систему и вызывает незатухающие колебания со средней энергией, пропорциональной интенсивности шума D . Второй и более высокие моменты энергии растут как степени D . Таким образом флуктуации энергии, нормированные на дисперсию, всегда остаются равными 1. Стационарная плотность вероятности в пространстве скоростей и координат является гауссовой.

Картина меняется в случае автоколебательных систем с решением типа предельного цикла. В качестве примера, рассмотрим стохастический осциллятор Ван дер Поля:

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = \varepsilon v(\alpha - \beta x^2 - \delta v^2) - \omega_0^2 x + \sqrt{2D} \xi(t), \quad (1.191)$$

где $\beta\delta > 0$. При $\varepsilon = 1$ и малых значениях α наблюдается мягкое возникновение предельного цикла с амплитудой $\propto \sqrt{\alpha}$. В обоих случаях для достаточно малых отклонений от точки бифуркации, т. е., $\varepsilon \cdot \alpha \ll 1$, соответственно, колебания происходят с постоянной частотой, ω_0 .

Если предположить, что шум является малым возмущением, то можно использовать приближенный метод БКМ, который для медленно меняющихся амплитуды и фазы дает

$$\dot{A} = \varepsilon \frac{A}{2} (\alpha - b A^2) + y_A, \quad \dot{\varphi} = y_\varphi, \quad (1.192)$$

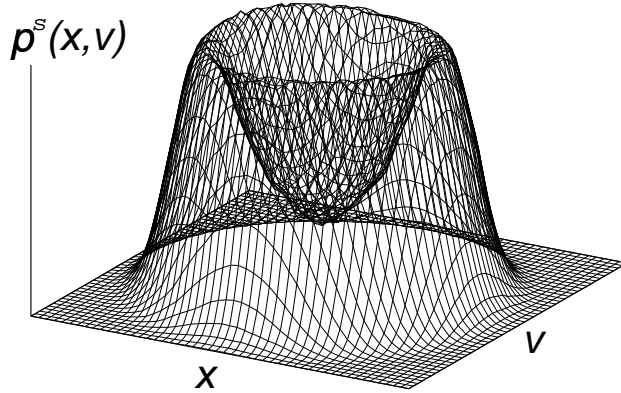


Рис. 1.26. Стационарная плотность вероятности $p^s(x, v)$ для стохастического автогенератора (1.191)

где $b = (\beta + 3\delta\omega_0^2)/4$, а источники шума y_A и y_ϕ в уравнениях для амплитуды и фазы даются выражениями (1.168). Решая соответствующее стационарное УФП, получаем,

$$p^s(A, \varphi) = N \exp \left[\frac{2\varepsilon\omega_0^2}{D} \left(\frac{\alpha}{2} A^2 - \frac{b}{4} A^4 \right) \right]. \quad (1.193)$$

После того как произошла бифуркация Андронова–Хопфа, стационарная плотность вероятности в фазовом пространстве приобретает кратеро-подобную форму, где максимальные значения соответствуют устойчивому предельному циклу (см. рис. 1.26).

Плотность вероятности (1.193) обладает максимумом при $\alpha, \varepsilon > 0$. С другой стороны, вблизи бифуркационной точки шум увеличивает только диффузионную компоненту изменения фазы. Отметим, что в случае канонических диссипативных систем, с $\gamma(x, v) = \gamma(E)$, если $\beta = \delta\omega_0^2$, то представленная стационарная плотность вероятности (1.193) является точным решением исходного УФП, преобразованного к переменным — амплитуда и фаза.

Интересно рассмотреть энергетическое представление. Плотность вероятности может быть легко записана для переменных “энергия – время”. Следовательно, с учетом соотношения

$$p_2(E, t|E_0, t_0) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty d\delta \left(E - \frac{A^2\omega_0^2}{2} \right) p_2(A, \varphi|A_0, \varphi_0), \quad (1.194)$$

УФП принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} p_2(E, t|E_0, t_0) = -\varepsilon \frac{\partial}{\partial E} 2 E \left(\alpha - \frac{b}{2\omega_0^2} E \right) p_2 + D \frac{\partial}{\partial E} E \frac{\partial}{\partial E} p_2. \quad (1.195)$$

Стационарное решение для плотности распределения энергии колебаний получаем в виде

$$p^s(E) = N \exp \left\{ \frac{2\varepsilon}{D} E \left(\alpha - \frac{bE}{\omega_0^2} \right) \right\}. \quad (1.196)$$

Оно отличается от канонической формы. Моменты энергии могут дать информацию о некоторых важных свойствах системы. В случае $\varepsilon < 0$ и $E_s = A_s^2 \omega_0^2 / 2 \rightarrow \infty$ получаем плотность вероятности канонического вида с первым моментом $D/(2|\varepsilon|\alpha)$ и высшими моментами $\langle E^n \rangle = n! \langle E \rangle^n$. В частности, относительные флуктуации энергии равны

$$\frac{\langle \Delta E^2 \rangle}{\langle E \rangle^2} = 1. \quad (1.197)$$

Вблизи точки бифуркации критические флуктуации энергии со стандартным отклонением

$$\frac{\langle \Delta E^2 \rangle}{\langle E \rangle^2} = \frac{\pi}{2} - 1 < 1 \quad (1.198)$$

оказываются независимыми от всех других параметров. В случае сильно нелинейного поведения плотность вероятности вблизи $E_s = \alpha \omega_0^2 / 2b$ имеет форму узкого гауссовского распределения

$$p^s(E) = N \exp \left\{ -\frac{2b\varepsilon}{D\omega_0^2} \left(E - \frac{\omega_0^2 \alpha}{2b} \right)^2 \right\} \quad (1.199)$$

с относительной дисперсией

$$\frac{\langle \Delta E^2 \rangle}{\langle E \rangle^2} = \frac{Db}{\varepsilon \omega_0^2 \alpha^2}. \quad (1.200)$$

Величина $\varepsilon \omega_0^2 \alpha^2 / Db$ может рассматриваться как параметр нелинейности. При его увеличении плотность вероятности значений энергии в окрестности притягивающего многообразия $E_s = \omega_0^2 \alpha / 2b$ становится бесконечно малой и в конечном счете при $D \rightarrow 0$ стягивается в δ -функцию. Такое поведение характерно для малого шума и развитой генерации.

1.2.6 Задача о выходе из ограниченной области

В общем случае можно утверждать, что помимо диффузии, влияние шума на ДС приводит к качественно новой задаче, связанной с выходом из бассейна притяжения аттрактора. За какое время и с какой вероятностью траектория покинет данный аттрактор и, соответственно, какова скорость выхода из области аттрактора — эти вопросы являются принципиальными в исследовании ряда стохастических явлений.

Впервые вопрос о выходе из ограниченной области был сформулирован в теории зародышеобразования [111, 112] и в теории химических реакций [109]. Образование зародышевой структуры подразумевает стохастический рост доли нового состояния до критического размера, что невозможно без флуктуаций. В энергетическом представлении критическая зародышевая структура формирует конфигурацию, подобную седловой точке, неустойчивую в направлениях меньшего и большего размеров капельки или пузыря. При превышении критического размера с большой вероятностью происходит рост “зародыша“. Точно так же в процессе химической реакции частице необходимо преодолеть потенциальный барьер, чтобы разорвать связь с другой частицей. Преодоление барьеров происходит во многих других процессах, среди которых можно упомянуть возбуждение нейронов, перенос по ионным каналам различного типа, расселение популяций, электронные и оптические реле.

Задача о достижении границы области притяжения аттрактора под воздействием случайных сил может быть рассмотрена на примере механических осцилляторов. Впервые это было сделано Крамерсом в его пионерской работе, вышедшей в 1940г. Крамерс рассчитал стационарный поток j^s через некоторые границы в фазовом пространстве x, v , обобщая попытки, сделанные ранее в теории формирования зародышевых структур, на случай двух переменных. Он определил *скорость r выхода на границу* как

$$r = \frac{j^s}{n_0}, \quad (1.201)$$

где n_0 обозначает плотность вероятности в окрестности аттрактора, выход из которого рассматривается. Крамерсу удалось получить скорости выхода за энергетический барьер ΔU в случаях слабого, среднего и сильного коэффициента диссипации γ .

Чуть ранее, в 1933 году, Понтрягин, Андронов и Витт [113] распространили метод первого достижения границы на задачи о выходе из заданной области. Они ввели распределение вероятностей

$$W_{\Omega}(t|x_0, t_0) = \int_{\Omega} dx p_2(x, t|x_0, t_0) \quad (1.202)$$

для времени t , прошедшего от начального момента t_0 , когда система находилась в заданном состоянии x_0 , до первого выхода на границу области Ω . Очевидно, что для стационарных процессов вероятность W_{Ω} , как и ее плотность $w_{\Omega} = dW_{\Omega}/dt$, зависят от $t - t_0$. Используя заданный оператор эволюции $p_2(x, t|x_0, t_0)$, Понтрягин с соавторами и, позднее, Вейс [114] сумели получить обыкновенные дифференциальные уравнения для моментов $\langle T_{\Omega}^n \rangle$ плотности вероятности $w_{\Omega}(t - t_0|x_0)$.

Оба метода дополняют друг друга, и их эквивалентность была доказана на примере многих задач [95, 115]. Недавно это было сделано для всего класса однородных случайных процессов [116]. Таким образом, справедливо соотношение

$$\langle T \rangle_{\Omega} \propto \frac{1}{r}. \quad (1.203)$$

В этом разделе будут даны пояснения к обоим методам. Определим бистабильный осциллятор, как это было сделано ранее (1.187), и будем интересоваться выходом из левой потенциальной ямы в окрестности x_1 . В методе, основанном на расчете потока, будем рассматривать систему в равновесии со средой, полагая $D = \gamma k_B T$ в силу флуктуационно-диссипационной теоремы. Такое предположение приводит к распределению Максвелла-Больцмана (1.189)

$$p^{\text{eq}} = N \exp \left(-\frac{v^2}{2k_B T} - \frac{U(x)}{k_B T} \right). \quad (1.204)$$

Скорость выхода в равновесном случае. Чтобы в первом приближении оценить скорость выхода, нужно предположить что в отсутствии дополнительных воздействий во всем фазовом пространстве устанавливается не зависящее от времени распределение $p^s(x, v)$. Даже в этом случае в системе имеется постоянный поток “частиц” слева направо при $v > 0$ через граничное значение $x = 0$, который компенсируется обратным потоком с отрицательными скоростями.

Этот стационарный поток частиц с положительными скоростями, направленный слева направо, может быть рассчитан следующим образом:

$$j^{\text{eq}} = \int_0^{\infty} dv v p^{\text{eq}}(x=0, v). \quad (1.205)$$

Скорость выхода из левого состояния k^{eq} определяется (1.201). Распределение вероятностей под интегралом

$$n_0 = \int_{-\infty}^0 dx \int_{-\infty}^{\infty} dv p^{\text{eq}}(x, v) \quad (1.206)$$

дает основной вклад в окрестности максимума в точке x_1 . Для тепловой энергии $k_B T$, малой по сравнению с разностью потенциалов ΔU в (1.190), плотность вероятности может быть аппроксимирована распределением Гаусса с максимумом в x_1 и хвостами от $-\infty$ до ∞ . Таким образом (1.206) можно аппроксимировать, положив

$$U(x) = U(x_1) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} \Big|_{x=x_1} (x - x_1)^2 + o((x - x_1)^3). \quad (1.207)$$

Задавая вторую производную потенциала в (1.207) как $\omega_0^2 = 2a$, можно вычислить интегралы в (1.205) и (1.206). В результате находим, что

$$r^{\text{eq}} = \frac{\omega_0}{2\pi} \exp\left(-\frac{\Delta U}{k_B T}\right). \quad (1.208)$$

Полученное выражение часто используется в качестве первого приближения. Оно следует из нескольких подходов, применяемых в статистической физике и известно в теории переходных состояний (ТПС) [95] как скорость выхода. Предэкспоненциальный множитель содержит информацию о покидаемом аттракторе, в то время как барьер между энергетическими состояниями проявляется только в множителе Аррениуса. В общем случае такая оценка слишком завышает вероятность перехода и может служить лишь ее верхней границей.

Райс [117] обобщил данный результат на случай произвольных гауссово-распределенных процессов с заданными спектрами или корреляционными функциями скорости и координаты, связанными как $c_{v,v}(\tau) = -d^2 c_{x,x}(\tau)/d\tau^2$. Он получил скорость перехода из нижнего уровня через потенциальный барьер ΔU в следующем виде:

$$r_{\text{Rice}}^{\text{eq}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c_{v,v}(0)}{c_{x,x}(0)}} \exp\left(-\frac{\Delta U}{c_{v,v}(0)}\right). \quad (1.209)$$

Значения корреляционных функций при $\tau = 0$ могут быть выражены интегралами от соответствующих спектров. В случае белого шума это выражение совпадает с (1.208).

Скорость выхода в неравновесном случае. Вопрос о том, как меняется скорость выхода, если механическая система не находится в полностью равновесном состоянии, впервые был поставлен Крамерсом [109]. Крамерс сумел найти решение для механической модели, явно зависящее от параметра γ , который является ответственным за процесс релаксации плотности вероятности.

С этой целью нужно предположить возможность разделения характерных масштабов времени различных процессов: первый масштаб связан с релаксацией плотности вероятности в окрестности ближайшего аттрактора; более длительный масштаб времени соответствует достижению границы, приводящему к переходу из бассейна первого аттрактора на второй аттрактор, который может существовать в фазовом пространстве. Наконец, третий масштаб времени связан с установлением равновесия между вероятностями пребывания на различных аттракторах.

Проблема выхода связана со вторым масштабом, т.е. с преодолением энергетического барьера, который удерживает траектории в бассейне притяжения аттрактора. Будем предполагать, что режим является квазистационарным. Математически это означает выбор специальных граничных условия для кинетического уравнения, записанного относительно плотности вероятности. Вблизи аттрактора плотность вероятности возрастает. Все реализации, преодолевшие энергетический барьер, поглощаются, а затем вновь возвращаются в бассейн притяжения. Следовательно, усредненные реализации перехода дают стационарный поток через границу бассейна притяжения до тех пор, пока не установится полное равновесие.

Крамерс рассмотрел три различных уровня диссипации: случай передемпфированного осциллятора; умеренные, по отношению к первому случаю, потери и случай слабого трения. Ограничимся здесь лишь первым случаем, когда $\gamma \gg \omega_b$, где ω_b^2 связана с кривизной потенциала на барьере как $\omega_b^2 = (1/m)|\partial^2 U(x)/\partial x^2|$. В случае (1.181) $x_b = x_2 = 0$, из этого следует, что $\omega_b^2 = a/m$. В дальнейшем будем рассматривать передемпфированное движение.

Превосходное изложение теории для случая слабого трения заинтересованный читатель найдет в [95].

В случае сильного трения мгновенные скорости резко (без инерции) меняют свои значения, что соответствует пренебрежению слагаемым dv/dt в уравнениях Ланжевена (1.187). Это приводит к СДУ первого порядка

$$\dot{x} = v = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial U(x)}{\partial x} + \sqrt{\frac{2k_B T}{\gamma}} \xi(t), \quad (1.210)$$

где снова использовано флуктуационно-диссипационное соотношение. Эволюция плотности вероятности $p_2(x, t|x_0, t_0)$ для одномерного марковского процесса следует из уравнения Смолуховского:

$$\frac{\partial p_2(x, t|x_0, t_0)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{\gamma} \frac{\partial U}{\partial x} p_2 \right) + \frac{k_B T}{\gamma} \frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2}. \quad (1.211)$$

Задача Коши для этого уравнения в случае ангармонического потенциала не может быть решена. Поэтому, найдем стационарное приближение p^s , описывающее выход с постоянным циркулирующим потоком j^s , как было описано ранее. Вероятность выхода будет сосредотачиваться в состояниях, расположенных выше барьера: $x = x_A > x_2 = 0$ (барьер является стоком для потока вероятности), и, соответственно, $p^s(x_A) = 0$. Поглощаемый поток вероятности j^s повторно испускается в устойчивой неподвижной точке x_1 . Для этой цели к (1.211) добавляется слагаемое с источником

$$0 = -\frac{d}{dx} \left(-\frac{1}{\gamma} \frac{\partial U}{\partial x} p^s \right) + \frac{k_B T}{\gamma} \frac{d^2 p^s}{dx^2} + j^s \delta(x - x_1). \quad (1.212)$$

Выходящий из x_1 поток вероятности снова поглощается и равновесная плотность устанавливается равной $p^s(x < x_1) = p^{eq}(x)$. Непрерывность при x_1 определяет второе необходимое граничное условие $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} p^s(x_1 + \varepsilon) = p^{eq}(x_1)$.

Таким образом, поток вероятности постоянно “перетекает” между состояниями x_1 и x_A и “обходит” состояние x_2 , которое характеризуется нулевой плотностью вероятности. Решение (1.212) представляет собой функцию Грина прямого оператора УФП. Первое интегрирование в интервале $[x_1, x_A]$ дает

$$-\frac{1}{\gamma} \frac{\partial U}{\partial x} p^s - \frac{k_B T}{\gamma} \frac{d}{dx} p^s = j^s \Theta(x - x_1). \quad (1.213)$$

Уравнение (1.213) может быть проинтегрировано второй раз, с использованием множителя $1/p^{\text{eq}}(x)$, что дает

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{p^{\text{s}}(x)}{p^{\text{eq}}(x)} \right) = -j^{\text{s}} \frac{1}{p^{\text{eq}}(x)} \frac{\gamma}{k_{\text{B}} T} \Theta(x - x_1). \quad (1.214)$$

В конечном счете

$$p^{\text{s}}(x) = -j^{\text{s}} \frac{\gamma}{k_{\text{B}} T} p^{\text{eq}}(x) \int_{x_1}^x dx' \frac{1}{p^{\text{eq}}(x')} \Theta(x' - x_1). \quad (1.215)$$

Применив сформулированные граничные условия для стационарной неравновесной плотности вероятности p^{s} , получаем соотношение для постоянного потока

$$1 = j^{\text{s}} \frac{\gamma}{k_{\text{B}} T} \int_{x_1}^{x_A} dx' \frac{1}{p^{\text{eq}}(x')}. \quad (1.216)$$

Далее, используя определение скорости выхода (1.201), находим следующее выражение, содержащее интегралы

$$r_{\text{K}} = \frac{k_{\text{B}} T}{\gamma \int_{-\infty}^0 dx' p^{\text{s}}(x')} \frac{1}{\int_{x_1}^{x_A} dx' (p^{\text{eq}}(x'))^{-1}}. \quad (1.217)$$

Два оставшихся интеграла можно оценить таким же образом, как и в ранее рассмотренном случае при получении k^{TP} . Первый интеграл дает основной вклад в окрестности $x = x_1$. В этой области p^{s} можно заменить равновесным распределением p^{eq} . В результате нормировочная константа сокращается. Далее, используем гауссово приближение для потенциала вблизи x_1 и распространяем интегрирование на всю область определения координаты x . В противоположность первому интегралу, функция под вторым интегралом принимает максимальное значение вблизи неустойчивой неподвижной точки $x_2 = 0$, в то время как другие области интегрирования дают пренебрежимо малый вклад. Поэтому вблизи x_2 можно использовать разложение (1.207) с $U(x) = U(x_{\text{b}}) - (m/2)\omega_{\text{b}}^2(x - x_{\text{b}})^2$. Снова заменяем верхний предел второго интеграла на $\pm\infty$. В конечном счете интеграл сводится к

$$r_{\text{K}} = \frac{\omega_{\text{b}}}{\gamma} \frac{\omega_0}{2\pi} \exp\left(-\frac{\Delta U}{k_{\text{B}} T}\right). \quad (1.218)$$

Таким образом, для сильного трения скорость выхода уменьшается как $\propto 1/\gamma$. Из условия $\gamma \gg \omega_{\text{b}}$ следует, что в произвольном случае скорость выхода всегда меньше, чем в случае полного равновесия.

Уравнение Понтрягина. В арсенале теории случайных процессов имеется несколько инструментов, позволяющих характеризовать поведение стохастической системы без явного вычисления зависимости плотности вероятности от времени [72, 76, 89]. Два наиболее популярных из них: вероятность первого достижения некоторой границы из заданного начального состояния и среднее время, необходимое для этого, будут рассмотрены ниже.

Пусть $x(t)$ — одномерный марковский диффузионный процесс, задаваемый или уравнением Ланжевена, или соответствующим УФП. Будем предполагать, что процесс является стационарным. Далее, пусть x_0 — начальное состояние в момент $t_0 = 0$, принадлежащее некоторому рассматриваемому интервалу: $x_0 \in (a, b)$. Тогда

$$P_{a,b}(t, x_0) = \int_a^b p_2(x, t|x_0) dx \quad (1.219)$$

есть вероятность того, что $x(t)$ все еще остается внутри области (a, b) в момент $t > 0$.

Теперь видоизменим задачу таким способом, чтобы можно было найти вероятность первого достижения границ области. Для этого требуется предположить, что траектории, достигшие границы, больше не возвращаются в рассматриваемую область. Простой способ учесть это — исключить их из рассмотрения, применяя специальные граничные условия. В случае марковских диффузионных процессов каждая траектория, которая покидает область, должна приблизиться или к значению $x = a$ или к значению $x = b$. Это следует из непрерывности типичных траекторий, о которой упоминалось ранее.

Такие траектории будут исключены, если потребовать, чтобы вероятность перехода из граничных точек назад в интервал строго равнялась нулю, т.е. можно записать

$$p_2(x, t|a) = p_2(x, t|b) = 0, \quad x \in (a, b). \quad (1.220)$$

Подставляя в (1.219) получаем

$$P_{a,b}(t, a) = P_{a,b}(t, b) = 0. \quad (1.221)$$

Граничные условия такого типа называются поглощающими.

Другое граничное условие соответствует отражению траекторий (“частиц”). Отражение означает, что поток вероятности $j(x, t)$ (1.155)

превращается в ноль на этой границе $j(x = a, t) = 0$, что дает условие для решения прямой задачи: нахождения плотности вероятности в точке x в момент времени $t > t_0$. Используя то обстоятельство, что прямой и обратный оператор УФП являются сопряженными

$$\begin{aligned} & \int dx p_2(y, t_y | x, t_x) \mathbf{L}_x^F p_2(x, t_x | x_0, t_0) \\ &= \int dx p_2(x, t_x | x_0, t_0) \mathbf{L}_x^B p_2(y, t_y | x, t_x), \end{aligned} \quad (1.222)$$

получаем условие отражения на границе для обратной задачи [95]. Действительно, проинтегрировав (1.222) от $-\infty$, где плотность и ее производная обращаются в нуль, до отражающей границы b , получаем равенство

$$p_2(y, t_y | x, t_x) j(x, t) = p_2(x, t_x | x_0, t_0) \frac{\partial}{\partial x} p_2(y, t_y, | x, t_x), \quad (1.223)$$

где x берется в точке a . Следовательно, $j(a, t) = 0$ требует обращения в нуль правой части равенства, если плотность в границе не обращается в нуль,

$$\left. \frac{\partial p_2(x, t | x_0, t_0)}{\partial x_0} \right|_{x_0=a} = 0. \quad (1.224)$$

Соответственно, после интегрирования получаем

$$\left. \frac{\partial P_{a,b}(t, x_0)}{\partial x_0} \right|_{x_0=a} = 0. \quad (1.225)$$

В дальнейшем обозначим через $P_{a,b}(t, x_0)$ вероятность того, что все достигшие поглощающей границы траектории, стартующие из точки x_0 , исключены из рассмотрения. Чтобы записать дифференциальное уравнение для $P_{a,b}$, предположим, что движение внутри области не изменилось из-за использования граничных условий [103] и описывается величиной условных моментов (1.128). Это будет справедливо, если траектории необходимо некоторое конечное время, чтобы достичь границ, т. е., вероятность оказаться вне интервала за бесконечно малый промежуток времени τ убывает быстрее, чем линейно

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} (1 - P_{a,b}(\tau, x_0)) = 0, \quad x_0 \neq a, b. \quad (1.226)$$

В этом случае можно использовать моменты приращений (1.136) процесса с соответствующими кинетическими коэффициентами (1.141) и (1.142) и считать, что они не меняются внутри рассматриваемого интервала. Следовательно, для решения задачи о первом достижении границы можно использовать прямое и обратное уравнения Колмогорова внутри интервала.

Применяя обратное уравнение (1.131) и интегрируя его по рассматриваемому интервалу, сразу же получаем

$$-\frac{\partial}{\partial t_0} P_{a,b} = \frac{\partial}{\partial t} P_{a,b}(t, x_0) = K_1(x_0) \frac{\partial}{\partial x_0} P_{a,b} + K_2(x_0) \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} P_{a,b}. \quad (1.227)$$

Замена переменной в производной по времени на t возможна в силу предполагаемой стационарности процесса (срав.(1.66)).

Уравнение (1.227) определяет оператор эволюции для вероятности пребывания внутри рассматриваемого интервала без контакта с границами. Оно было впервые получено Понтрягиным, Андроновым и Виттом в 1933 году [113]. Для решения конкретных физических задач к нему надо добавить граничные и начальные условия. Тогда уравнение (1.227) может быть решено относительно $P_{a,b}(t, x_0)$. Решение усредняется по начальным состояниям.

Вероятность выживания. При исследовании некоторых явлений требуется найти асимптотические решения (1.227). В качестве примера можно указать задачу о вероятности выживания. Если существует по крайней мере одна поглощающая граница, которую процесс может достигнуть за конечное время: $P_{a,b}(t \rightarrow \infty, x_0) = 0$, то с вероятностью равной единице, рассматриваемая область опустеет. Очевидно, функция

$$W_{a,b}(t, x_0) = 1 - P_{a,b}(t, x_0) \quad (1.228)$$

есть вероятность ухода из области в результате первого достижения поглощающей границы. Она удовлетворяет тому же самому эволюционному уравнению (1.227) с соответствующими граничными условиями, следующими из определения (1.221) и (1.225). При поглощающем состоянии вне области и при бесконечно долгом ожидании, оказаться вне области будет событием достоверным:

$$W_{a,b}(t \rightarrow \infty, x_0) = W_{a,b}^{\text{as}}(x_0) = 1 \quad (1.229)$$

для произвольного x_0 .

Можно поставить вопрос об асимптотической вероятности выхода из интервала в результате пересечения b при условии, что граница a ранее не была достигнута. Тогда граница b поглощает вероятность, т. е., $W_{a,b}^{\text{as}}(b) = 1$, но траектории, достигающие a , всегда останутся в пределах области, т.е., они не должны достичь b . В этом случае $W_{a,b}^{\text{as}}(a) = 0$. Асимптотическое решение, удовлетворяющее $\partial W_{a,b}^{\text{as}}(x_0)/\partial t = 0$, задается выражением

$$W_{a,b}^{\text{as}}(x_0) = \frac{\int_a^{x_0} dx \exp\left(-\int^x \frac{K_1}{K_2} dx'\right)}{\int_a^b dx \exp\left(-\int^x \frac{K_1}{K_2} dx'\right)}. \quad (1.230)$$

Очевидно полученная вероятность отличается от вероятности достоверного события из-за наличия сформулированных выше ограничений.

Плотность вероятности времени ожидания. Более детальную информацию можно получить, исследуя плотность вероятности значения t , соответствующего моменту первого выхода из исследуемой области. Она называется плотностью вероятности времени ожидания. Если $W_{a,b}(t, x_0)$ — распределение вероятностей того, что интервал $[a, b]$ будет впервые оставлен в течение периода времени от t_0 до t , то соответствующая плотность вероятности есть

$$w_{a,b}(x_0, t) \Delta t = \frac{\partial W_{a,b}(t, x_0)}{\partial t} \Delta t = -\frac{\partial P_{a,b}}{\partial t} \Delta t. \quad (1.231)$$

Отсюда мы сразу же получаем следующее уравнение для плотности вероятности времени ожидания:

$$\frac{\partial}{\partial t} w_{a,b} = K_1(x_0) \frac{\partial}{\partial x_0} w_{a,b} + K_2(x_0) \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} w_{a,b}, \quad (1.232)$$

со следующими начальными и граничными условиями

$$w_{a,b}(x_0, t = 0) = 0, \quad x_0 \in (a, b), \quad w_{a,b}(a, t) = w_{a,b}(b, t) = \delta(t), \quad (1.233)$$

в случае, если обе границы являются поглощающими. Если a является отражающей границей, соответствующее граничное условие заменяется на

$$\left. \frac{\partial w_{a,b}(x_0, t)}{\partial x_0} \right|_{(x_0=a)} = 0. \quad (1.234)$$

Моменты распределения времени ожидания. Первый момент распределения времени ожидания называется средним временем первого достижения границы. Он равен

$$T_{a,b}(x_0) = \int_0^{\infty} t w_{a,b}(x_0, t) dt. \quad (1.235)$$

Отсюда по определению следует

$$T_{a,b}(x_0) = \int_0^{\infty} P_{a,b}(t, x_0) dt. \quad (1.236)$$

Усреднение по распределению начальных состояний внутри $[a, b]$ дает

$$\langle T_{a,b} \rangle_{x_0} = \int_0^{\infty} P_{a,b}(t, x_0) P(x_0) dt dx_0. \quad (1.237)$$

Для $T_{a,b}(x_0)$ можно получить обыкновенное дифференциальное уравнение, если умножить на t и проинтегрировать (1.232) по времени. Интегрируя левую часть равенства, получаем

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} P_{a,b} dt = P_{a,b}(\infty, x_0) - P_{a,b}(0, x_0) = -1. \quad (1.238)$$

После интегрирования правой части, в конечном счете, находим

$$-1 = K_1(x_0) \frac{\partial}{\partial x_0} T_{a,b}(x_0) + K_2(x_0) \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} T_{a,b}(x_0). \quad (1.239)$$

Это уравнение [113] содержит решение задачи о том, за какое среднее время, в соответствии с граничными условиями, траектория покинет область $[a, b]$. Поглощение в одномерном случае подразумевает, что не требуется какого-либо времени, чтобы уйти за границу, если мы первоначально на ней находимся, т.е., если

$$T_{a,b}(a) = T_{a,b}(b) = 0. \quad (1.240)$$

В случае, когда $x = a$ является отражающей границей

$$\left. \frac{\partial T_{a,b}(x_0)}{\partial x_0} \right|_{x_0=a} = 0. \quad (1.241)$$

Интересно рассмотреть более высокие моменты для задачи о времени первого достижения границы [114]

$$T_{a,b}^{(n)} = - \int_0^{\infty} t^n \frac{\partial}{\partial T} W_{a,b}(t, x_0, t_0) dt. \quad (1.242)$$

Для этих моментов из (1.232) также можно вывести цепочку связанных дифференциальных уравнений. Обозначая $T_{a,b}^{(0)} = 1$ и $T_{a,b} = T_{a,b}^{(1)}$, получаем

$$-nT_{a,b}^{(n-1)} = K_1(x_0) \frac{\partial}{\partial x_0} T_{a,b}^{(n)}(x_0) + K_2(x_0) \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} T_{a,b}^{(n)}(x_0) \quad (1.243)$$

с граничными условиями, как для $T_{a,b}^{(1)}$.

Решение (1.243) имеет следующий вид. Обозначим

$$u_{a,b}^{(n)} = \frac{dT_{a,b}^{(n)}}{dx_0}, \quad (1.244)$$

как следует из (1.243) при $a < b$

$$u_{a,b}^{(n)}(x_0) = \exp(-\Phi(x_0)) \left(C_n - n \int_a^x \frac{T_{a,b}^{(n-1)}(x')}{K_2(x')} \exp(\Phi(x')) dx' \right), \quad (1.245)$$

где C_n — константы и

$$\Phi(x) = \int^x \frac{K_1(y)}{K_2(y)} dy. \quad (1.246)$$

Помимо этого, можно применять граничные условия и рассматривать частные случаи. В случае, если $x = a$ является отражающей границей, а b — поглощающей, $u_{a,b}^{(n)}(a) = 0$, $T_{a,b}^{(n)}(b) = 0$, и поэтому

$$T_{a,b}^{(n)}(x_0) = n \int_{x_0}^b \exp(-\Phi(x)) \left(\int_a^x \frac{T_{a,b}^{(n-1)}}{K_2(x')} \exp(\Phi(x')) dx' \right) dx. \quad (1.247)$$

В частности, для первого момента находим выражение

$$T_{a,b}^{(1)}(x_0) = \int_{x_0}^b dx \exp(-\Phi(x)) \left(\frac{\int_a^x dx' \exp(\Phi(x'))}{K_2(x')} \right). \quad (1.248)$$

Если a и b являются поглощающими границами, интегрирование (1.245) дает

$$T_{a,b}^{(n)}(x_0) = C_n \int_a^{x_0} \exp(-\Phi(x)) dx - n \int_a^{x_0} \exp(-\Phi(x)) \left(\int_a^x \frac{T_{a,b}^{(n-1)}}{K_2(x')} \exp(\Phi(x')) dx' \right) dx, \quad (1.249)$$

где C_n находятся из $T_{a,b}^{(n)}(b) = 0$.

Наиболее общая ситуация, связанная с задачей скорости выхода в передемпфированном осцилляторе, касается вероятности выхода из области $(-\infty, b)$. Это означает, что $x = b$ является поглощающей границей, а точка a сдвинута на бесконечность. Физически важная ситуация состоит в том, что вероятность равна нулю на $-\infty$, и ее производная также обращается в ноль. Поток вероятности в этом случае точно равен нулю. Такие условия при $x = \infty$ в физических задачах называются естественными граничными условиями.

Вычисление интегралов в (1.248) с кинетическими коэффициентами, заданными для бистабильного осциллятора, снова может быть выполнено с помощью локального гауссова приближения, если $\Delta U \gg k_B T$. Внутренний интеграл в (1.245) максимален вблизи аттрактора $x = x_1$. Напротив, первое подынтегральное выражение вносит значительный вклад только вблизи барьера. Если начальное состояние x_0 находится достаточно далеко от барьера x_2 , то в передемпфированном случае среднее время первого достижения границы является просто обратной величиной вероятности выхода (1.218),

$$T_{-\infty,b}(x_0) = Q(b) \frac{1}{r_K}, \quad (1.250)$$

где $Q(b)$ — множитель, учитывающий форму потенциальной ямы. Этот множитель резко возрастает от нуля до единицы, когда граничная точка b приближается к точке барьера x_2 и затем пересекает ее. При $b = x_2$, $Q = 1/2$.

Обобщение рассмотренных задач на случай более высоких размерностей может быть найдено в [118], а наиболее новые результаты отражены в [61–71, 95, 96, 116, 119–124]. Автоколебательные системы рассматриваются в [125].

1.2.7 Заключение

В данной главе рассмотрены элементы теории случайных процессов и ее применение к динамическим системам. Несмотря на тот факт, что основные концепции и приложения случайных процессов в физике восходят к началу 20-го столетия, использование стохастических методов все еще остается современной, быстро развивающейся и вызывающей большой интерес областью физики и нелинейной динамики.

В настоящее время большие надежды связывают с использованием стохастических методов в биофизике. Задачи, возникающие в этой области, неразрывно объединяют нелинейность, неравновесность, сигналы и шум (флуктуации). Некоторые из методов, развитых в статистической физике, оказываются очень полезными при рассмотрении биологических проблем. Но, наиболее важной, новой областью физических исследований является изучение и применение новых стохастических методов на качественно более высоком уровне. Заинтересованному читателю мы рекомендуем внимательно ознакомиться с содержанием главы 3.

1.3 Синхронизация периодических систем

1.3.1 Введение

Синхронизация нелинейных колебаний – одно из фундаментальных явлений природы. Его можно рассматривать как простейший пример самоорганизации взаимодействующих нелинейных систем. Под синхронизацией обычно понимают установление некоторых соотношений между характерными временами, частотами или фазами колебаний парциальных систем в результате их взаимодействия. Эффект синхронизации, открытый Гюйгенсом [126] ещё в XVII веке, был обнаружен в самых различных системах и нашел применение во многих областях техники, что отражено в ряде монографий [127–139]. Теория синхронизации получила быстрое раз-

витие и привлекла к себе особый интерес ученых в нашем столетии в связи с созданием электронных средств связи [140]. В настоящее время детально разработана ставшая классической теория синхронизации периодических автоколебаний [127–137, 140–150], рассмотрены случаи синхронизации квазипериодических колебаний [134], [151, 152] и колебаний в присутствии случайных воздействий [103, 134, 153–157]. В рамках классической теории различают *вынужденную синхронизацию*, т.е. синхронизацию автоколебаний внешним сигналом, и *взаимную синхронизацию*, наблюдающуюся при взаимном влиянии двух автоколебательных систем. В обоих случаях проявляются одни и те же эффекты, связанные с двумя классическими механизмами синхронизации: захватом собственных частот (и, соответственно, фаз) колебаний или же подавлением одной из двух независимых частот квазипериодических колебаний.

Если $\Phi(t)$ и ω_1 – соответственно фаза и частота одного квазигармонического автогенератора, а $\Psi(t)$ и ω_2 – фаза и частота другого, связанного с ним автогенератора, то условия синхронизации формулируются как

$$|m\Phi(t) - n\Psi(t)| = \text{const}, \quad mf_1 = nf_2, \quad (1.251)$$

где m и n – целые числа. Эти условия определяют эффект захвата частоты (фазы) и должны выполняться в некоторой области значений управляющих параметров, называемой областью синхронизации. В этом разделе в основном рассматривается простейший случай синхронизации 1:1 ($m = n = 1$).

Явление синхронизации привлекает особое внимание исследователей в разных областях науки. Например, использование синхронизации в инженерных задачах [135] имеет огромное значение и самое широкое распространение. Кроме того, эффекты, связанные с синхронизацией, были обнаружены в биологических системах [139]. В этой связи можно отметить поведение взаимодействующих клеток ткани [158], ансамблей нейронов [159–161] и, наконец, биологических популяций [162]. Более сложные эффекты синхронизации были недавно обнаружены в системе дыхания и кровообращения человека [163], а также в энцефаллограммах. Синхронизация регулярных, хаотических и стохастических колебаний была выявлена в ансамблях взаимодействующих осцилляторов [164–175] и распределенных средах [176–179].

В этом разделе описываются результаты классической теории синхронизации периодических колебаний. Используя как пример осциллятор Ван дер Поля, рассматриваются вынужденная и взаимная синхронизацию, включая анализ эффектов воздействия шума. Обобщение классической теории синхронизации на хаотические и стохастические колебания проделано и обсуждается в разделах 2.2 и 2.3, а также в главе 3.

1.3.2 Синхронизация генератора Ван дер Поля

Классическая теория. Модель Ван дер Поля является простейшим примером генератора томсоновского типа. Кроме того она описывает многие механические, электронные и биологические системы, в которых наблюдаются автоколебания. Генератор Ван дер Поля служит базовой моделью для исследования эффектов синхронизации, наблюдающихся как при действии внешней периодической силы (*вынужденная синхронизация*), так и при взаимодействии двух связанных генераторов (*взаимная синхронизация*) [127–129, 134, 137, 140].

Автономный генератор Ван дер Поля описывается дифференциальным уравнением второго порядка

$$\ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (1.252)$$

где ε — параметр, характеризующий степень нелинейности и соответствующий глубине обратной связи в электронной модели генератора, ω_0 — собственная частота генератора. При $-2\omega_0 < \varepsilon < 0$ система (1.252) обладает единственным устойчивым состоянием равновесия типа фокуса в начале координат с собственными значениями

$$s_{1,2} = \frac{\varepsilon}{2} \pm i\omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon}{2\omega_0}\right)^2}. \quad (1.253)$$

При $\varepsilon > 0$ единственным устойчивым предельным множеством системы является предельный цикл. Бассейн его притяжения — вся фазовая плоскость.

С физической точки зрения, устойчивый предельный цикл соответствует автоколебаниям. Характеристики автоколебательного режима, например, амплитуда и частота, не зависят от начальных условий и полностью определяются внутренними свойствами системы. При $0 < \varepsilon \ll 1$ период автоколебаний равен

$$T = \frac{2\pi}{|\operatorname{Im} s_{1,2}|}, \quad \operatorname{Im} s_{1,2} = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon}{2\omega_0}\right)^2}, \quad (1.254)$$

то есть, частота колебаний близка к собственной частоте ω_0 резонансной цепи генератора.

Для исследования синхронизации в систему (1.252) добавим гармоническую внешнюю силу и рассмотрим динамику периодически возбуждаемого генератора Ван дер Поля:

$$\ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = a \cos(\omega_1 t + \varphi_0), \quad (1.255)$$

где a и ω_1 , соответственно, амплитуда и частота внешней силы. Получить решение уравнения (1.255) с помощью компьютера не представляет труда. Однако, для понимания сути динамических явлений проведем приближенное аналитическое исследование, которое позволит глубже понять физический смысл эффекта синхронизации. Обсудим вначале понятие фазы колебаний. Термин “фаза колебаний” первоначально был введен для гармонических процессов типа $x(t) = A \exp(i\omega t) = A(\cos \omega t + i \sin \omega t)$. В полярной системе координат это колебание изображается как вращение вектора A с постоянной угловой скоростью ω . Фазе колебаний соответствует угол поворота вектора A во времени $\varphi = \omega t$. В диссипативных нелинейных системах колебания в общем случае не могут быть строго гармоническими. Как же поступить в такой ситуации? Ответ зависит от того, какую динамическую систему и какой тип автоколебаний мы исследуем.

Вернемся к системе (1.255). При малых $0 < \varepsilon \ll 1$ и $a = 0$ автоколебания в генераторе близки к гармоническим. Поэтому решение $x(t)$ неавтономной системы (1.255) можно искать в виде

$$x(t) = A(t) \cos(\omega_1 t + \varphi(t)), \quad \dot{x}(t) = -\omega_1 A(t) \sin(\omega_1 t + \varphi(t)), \quad (1.256)$$

где $A(t)$ – медленно меняющаяся во времени амплитуда колебаний, $\varphi(t)$ – медленно меняющаяся во времени фаза колебаний. Иначе говоря, мы вводим в рассмотрение понятие мгновенной амплитуды $A(t)$ и мгновенной фазы колебаний

$$\Phi(t) = \omega_1 t + \varphi(t). \quad (1.257)$$

“Медленная” фаза $\varphi(t) = \Phi(t) - \omega_1 t$ представляет собой мгновенную разность фаз между результирующим близким к гармоническому процессом $x(t)$ и внешним гармоническим сигналом. Условие медленного изменения фазы $\varphi(t)$ во времени означает, что

$\dot{\varphi}(t) \ll \omega_1$. Применяя классический метод усреднения, легко получить уравнения для мгновенной амплитуды $A(t)$ и мгновенной фазы $\varphi(t)$ [127–130, 134, 135, 142]:

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \frac{\varepsilon A}{2} \left(1 - \frac{A^2}{A_0^2} \right) - \mu \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= \Delta - \frac{\mu}{A} \cos \varphi, \end{aligned} \quad (1.258)$$

где $\mu = a/2\omega_1$ – нормированная амплитуда воздействия, $\Delta = (\omega_0^2 - \omega_1^2)/2\omega_1 \cong \omega_0 - \omega_1$ – расстройка между частотой автономного генератора и частотой внешнего сигнала в (1.255). A_0 – амплитуда колебаний автономной системы (невозмущенная амплитуда).

Система (1.258) называется *системой укороченных уравнений*. Состоянию равновесия системы (1.258) (неподвижной точке) будет отвечать периодическое решение исходной системы (1.255), а периодическому решению (1.258) – двухчастотное квазипериодическое решение уравнения (1.255).

Предположим, что система (1.258) имеет в качестве решения неподвижную точку $\dot{A} = 0$, $\dot{\varphi} = 0$. Условие $\dot{A} = 0$ означает постоянство во времени амплитуды колебаний, а условие $\dot{\varphi} = 0$ означает, что $\dot{\varphi} = \omega_1$, то есть частота вынужденных колебаний в системе (1.255) совпадает с частотой внешней силы. Если этот режим колебаний возможен и является устойчивым, то частота колебаний в неавтономном генераторе (1.255) изменится и окажется равной частоте внешней силы ω_1 . Генератор “подстроится” по частоте и реализуется эффект вынужденной синхронизации. Рассмотрим это явление с точки зрения перестройки структуры фазового портрета. Фазовое пространство системы (1.258) есть двумерный цилиндр. Приравнивая правые части (1.258) нулю, легко найти координаты состояний равновесия, изображенных на рис. 1.27а. Состояний равновесия три: устойчивый узел O_1 , седло O_2 и абсолютно неустойчивое состояние равновесия O_3 (репеллер). Наличие устойчивой точки O_1 отвечает режиму синхронизации ($A = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$). При увеличении расстройки состояния равновесия O_1 и O_2 начнут сближаться и при некотором критическом значении Δ произойдет их слияние и исчезновение в результате седло-узловой бифуркации. При этом рождается предельный цикл C_1 второго рода (охватывающий цилиндр), что отвечает выходу системы из области синхронизации и рождению квазипериодического режима колебаний в исходной системе (1.255) (см. рис. 1.27б). Область значений управ-

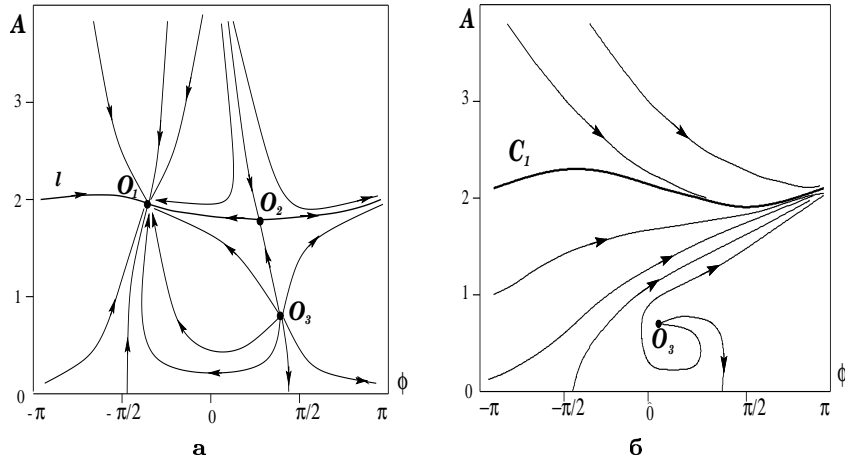


Рис. 1.27. Структура фазового пространства системы (1.258) для различных значений параметров: (а) $\varepsilon = 0.1, \mu = 0.042, \Delta = 0.02$; (б) $\varepsilon = 0.1, \mu = 0.042, \Delta = 0.032$

ляющих параметров системы (1.258), в которой неподвижная точка O_1 остается устойчивой, отвечает области синхронизации. Для определения границ области синхронизации необходимо записать линейные уравнения в вариациях для системы (1.258) в окрестности O_1 и найти бифуркационные линии потери устойчивости данного состояния равновесия. Эта задача может быть решена аналитически, результаты представлены на рис. 1.28.

Внутри области синхронизации (область I) состояние равновесия O_1 представляет собой устойчивый узел. На линиях l_a происходит седло-узловая бифуркация слияния и исчезновения состояний равновесия O_1 и O_2 . Линия l_c соответствует слиянию и исчезновению двух других состояний равновесия O_2 и O_3 . Выше линии l_c состояние равновесия O_1 существует и является устойчивым. Точки B и C на рис. 1.28, в которые входят линии l_a и l_c , представляют собой точки сборки (cusp), в которых сливаются все три состояния равновесия (бифуркация коразмерности 2 – трехкратное состояние равновесия). Выходу из области I через линии l_a отвечает бифуркация рождения предельного цикла второго рода (охватывающий цилиндр): в исходной системе (1.255) возникает режим двухчастотных колебаний.

Теперь рассмотрим, что происходит в области II выше бифуркационной линии l_c , где существует лишь одно состояние равновесия

O_1 (см. Рис. 1.29а). Зафиксируем значение параметров μ, ε и будем увеличивать параметр расстройки Δ . Состояние равновесия при некотором критическом значении Δ потеряет устойчивость в результате мягкой бифуркации Андронова-Хопфа. В окрестности O_1 родится устойчивый предельный цикл C_2 , (цикл первого рода, лежащий на поверхности цилиндра). Режим синхронизации разрушится и в исходной системе возникнут квазипериодические колебания (Рис. 1.29б). При дальнейшем увеличении расстройки мы будем наблюдать перестройку квазипериодического режима C_1 в C_2 (см. рис. 1.29в). Бифуркации Андронова-Хопфа состояния равновесия O_1 выше линии l_c отвечают линии l_b на рис. 1.28. Линии l_d соответствуют преобразованию C_2 в C_1 .

Таким образом, области синхронизации генератора Ван дер Поля на рис. 1.28 отвечает область I, ограниченная бифуркационными линиями l_a ниже точек B, C и область II между линиями l_b выше этих точек. Внутри области синхронизации в исходной системе (1.255) мы имеем устойчивый предельный цикл, частота которого совпадает с частотой внешней силы, т.е. выполняется условие $\omega_0/\omega_1 = 1$.

Обратимся вновь к рис. 1.28 и отметим следующую важную особенность области фазового захвата (область I). Как следует

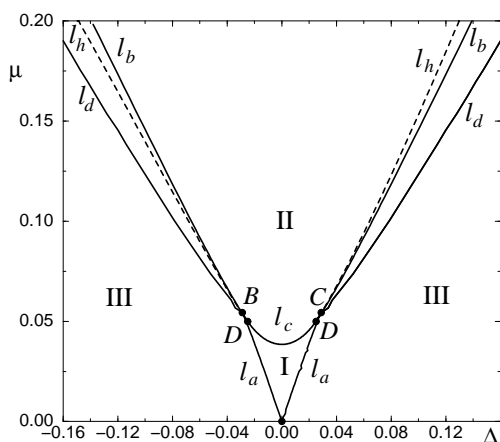


Рис. 1.28. Бифуркационная диаграмма для систем (1.255) и (1.258). Линии l_a и l_c соответствуют седло-узловой бифуркации в (1.258); l_b обозначает линию бифуркации Андронова-Хопфа в (1.258); l_d — линия перестройки C_1 в C_2 ; l_h — бифуркационная линия рождения тора из резонансного цикла в исходной системе (1.255)

из рис. 1.27а, неустойчивые сепаратрисы седла O_2 замыкаются на цилиндре на устойчивый узел O_1 . В системе имеет место инвариантная замкнутая кривая l , охватывающая цилиндр, на которой расположены седло и узел. Эта кривая является образом резонансного тора в системе (1.255). При слиянии седла и узла на линиях l_a резонансная кривая перестраивается в эргодическую инвариантную кривую (цикл C_1), являющуюся образом двумерного эргодического тора. Таким образом, при малых амплитудах воздействия синхронизации отвечает режим резонанса на двумерном торе (область I). На линии l_c тор разрушается (инвариантная кривая ис-

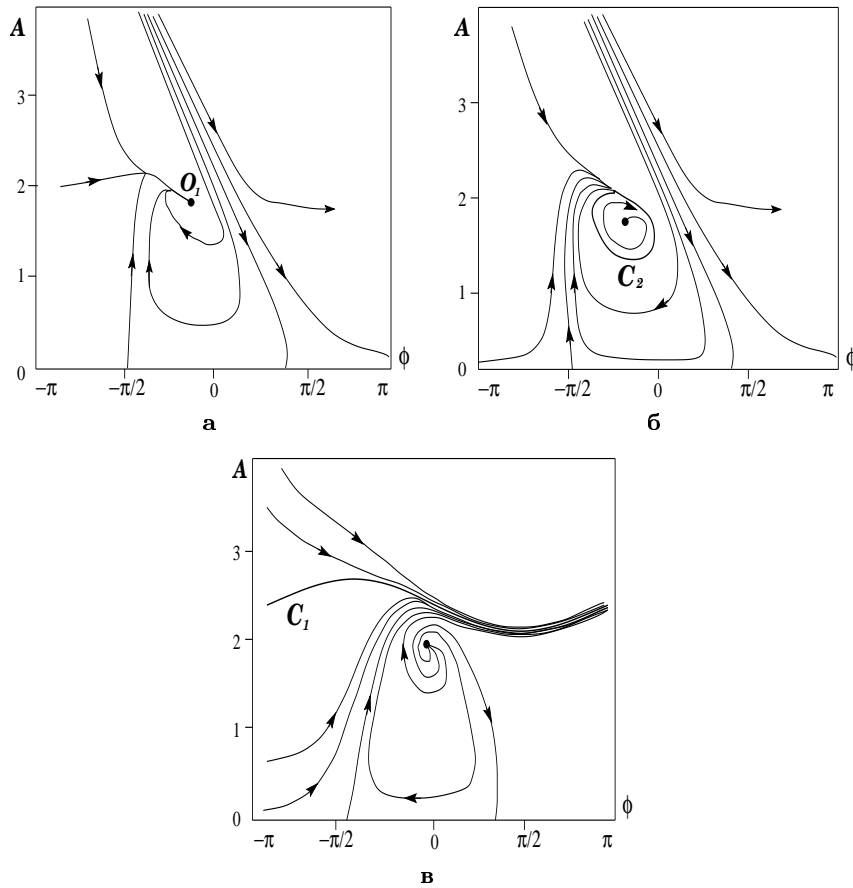


Рис. 1.29. Фазовые портреты системы (1.258) для различных значений параметров: (а) $\varepsilon = 0.1, \mu = 0.056, \Delta = 0.028$; (б) $\varepsilon = 0.1, \mu = 0.056, \Delta = 0.031$; (в) $\varepsilon = 0.1, \mu = 0.056, \Delta = 0.033$

чезает), однако, неподвижная точка O_1 существует и устойчива. Эффект синхронизации здесь уже не связан с резонансом на торе. Особый интерес представляют собой точки D (рис. 1.28), в которых сходятся линии седло-узловой бифуркации l_a и линии бифуркации Андронова–Хопфа l_b . Эти точки носят название бифуркационных точек Богданова–Тakens [180, 181]. В их окрестности на бифуркационной диаграмме возникает сборка. Область синхронизации II находится всегда выше точек D . Реализации режима синхронизации в этой области соответствует пересечение бифуркационных линий l_b в направлениях из областей III внутрь области II. При этом в исходной системе (1.255) квазипериодические колебания мягко исчезают и возникает режим предельного цикла. Этот механизм называют синхронизацией через асинхронное подавление колебаний. В терминах укороченных уравнений (1.258) этому механизму отвечает подавление периодических колебаний амплитуды $A(t)$ и установление режима $A = \text{const}$.

Совершенно ясно, что приближенные уравнения (1.258) не могут точно описать явление синхронизации. Для сравнения проведем численное моделирование исходной системы (1.255). Так как режиму синхронизации отвечает предельный цикл частоты ω_1 , найдем его, положив $\Delta = 0$. Далее, изменяя Δ , будем искать бифуркации потери устойчивости этим циклом. Результаты расчетов приведены на рис. 1.28 (бифуркационные линии l_h). Как видно из рисунка, в области малых амплитуд воздействия ($\mu \leq 0.05$, в области I) результаты расчетов для исходной системы и для укороченных уравнений полностью совпадают.

Бифуркационные точки Богданова–Тakens (точки D) также регистрируются в полной системе (1.255). Выше точек D линии l_h (линии рождения тора или линии бифуркации Неймарка) уже не совпадают с соответствующими линиями l_b , рассчитанными по укороченной системе (1.258). Количественное расхождение тем больше, чем больше параметр μ . Однако, важным является то, что основные бифуркации внутри и на границах областей синхронизации I и II в полной системе (1.255) и в системе (1.258) качественно совпадают. Более того, исследования подтвердили, что эти бифуркации являются типичными в случае синхронизации любых генераторов периодических колебаний внешней гармонической силой частоты $\omega_1 = \omega_0 + \Delta$.

Синхронизация как захват фазы и частоты. Хотя бифуркационный сценарий в значительной степени зависит от поведения мгновенной амплитуды, синхронизация во многих случаях достаточно хорошо описывается поведением только мгновенной фазы и частоты автогенератора (1.255) на больших временах. Мгновенное значение частоты получается дифференцированием мгновенной фазы по времени

$$\omega(t) = \frac{d}{dt} \Phi(t). \quad (1.259)$$

Очевидно, такое дополнительное упрощение модели, позволяющее рассматривать только фазовую динамику, требует дополнительных условий, накладываемых на амплитуду. Оно будет справедливо в случае малой амплитуды внешней периодической силы: $\mu/(A_0\varepsilon) \ll 1$ или, соответственно, $\varepsilon \gg a/(2\omega_1 A_0)$. Это условие выполняется в области I бифуркационной диаграммы рис. 1.28. Можно показать, что в этом случае амплитуда изменяется намного быстрее, чем фаза (чтобы это сделать, нужно сравнить коэффициенты линейных слагаемых, которые определяют масштаб времени релаксации). Таким образом в первом уравнении системы (1.258) можно положить: $\varphi = \text{const}$ и использовать в уравнении для фазы невозмущенное значение амплитуды $A(t) = A_0$:

$$\frac{d}{dt} \varphi = \Delta - \frac{\mu}{A_0} \cos \varphi. \quad (1.260)$$

Это уравнение — одно из канонических в теории фазовой синхронизации [136, 182]. Оно может быть переписано в потенциальной форме: $\dot{\varphi} = -dU(\varphi)/d\varphi$ где $U(\varphi) = -\Delta \cdot \varphi + \frac{\mu}{A_0} \sin \varphi$ потенциальная функция. Таким образом, динамика разности фаз φ может рассматриваться как движение передемпфированной частицы в заданном потенциале $U(\varphi)$ (см. рис. 1.30). Параметр расстройки Δ определяет наклон потенциала, а μ/A_0 задает высоту потенциальных барьеров. При $\Delta < \mu/A_0$ минимумы потенциальной функции в точках $\varphi_k = \arccos(\Delta \cdot A_0/\mu) + 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, соответствуют синхронизации, поскольку мгновенное значение разности фаз остается постоянным во время.

Мгновенная частота автоколебаний в режиме синхронизации постоянна и совпадает с частотой воздействия. При отсутствии синхронизации мгновенная частота изменяется во времени, и нужно рассматривать среднюю частоту автоколебаний, которая определяется как $\langle \omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} 1/T \int_0^T \omega(t) dt$. Зависимость разности

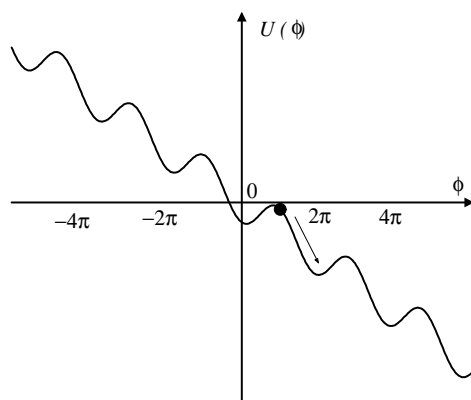


Рис. 1.30. Профиль потенциала $U(\varphi)$ в случае захвата фазы при $\Delta \neq 0$

фаз $\langle \omega \rangle - \omega_1$ от расстройки показана на рис. 1.31 сплошной линией. Из рисунка видно, что средняя частота совпадает с частотой воздействия ω_1 в некоторой конечной области значений Δ . Горизонтальный участок кривой 1 на рис. 1.31 соответствует области синхронизации. Вне этой области $\langle \omega \rangle$ отличается от частоты воздействия, и наблюдаются двухчастотные колебания (биения).

Если увеличивать расстройку дальше, то могут появиться режимы синхронизации более высокого порядка. Для изучения этих режимов, введем отношение частоты возбуждения к средней частоте

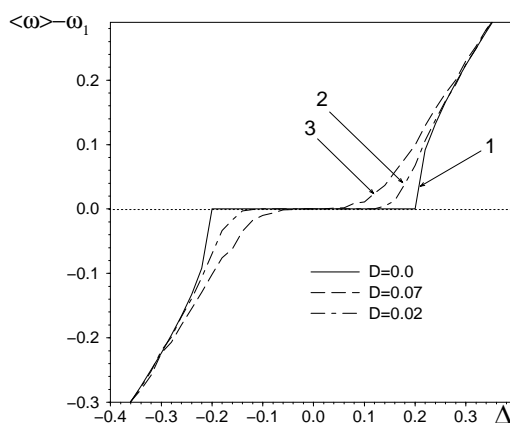


Рис. 1.31. Зависимость разности между средней частотой колебаний в системе (1.260) и частотой внешнего сигнала от параметра расстройки при различных значениях интенсивности шума D

те осциллятора, $\theta = \omega_1 / \langle \omega \rangle$, называемое *числом вращения*. Число вращения говорит о том, сколько периодов внешней силы укладывается в пределах одного периода осциллятора. До сих пор изучался режим синхронизации 1:1, соответствующий $\theta = 1$. Известно, что в этом случае в системе существует устойчивый резонансный предельный цикл, лежащий на двумерном торе. С ростом частоты воздействия ω_1 , число вращения θ также увеличивается и может принимать как рациональные, так и иррациональные значения. При этом структура фазовых траекторий на торе претерпевает бифуркации. Иррациональные значения θ соответствуют эргодическому тору. В этом случае любая фазовая траектория всюду плотно заполняет всю его поверхность. Рациональные значения θ соответствуют возникновению на торе резонансной структуры из устойчивых и неустойчивых предельных циклов.

Возникновение резонансных циклов на торе однозначно связано с явлением синхронизации частот в отношении, соответствующем числу вращения. Некоторые области синхронизации с различными числами вращения θ представлены на рис. 1.32а. Эти области называются “языками Арнольда”.

Рациональные значения $m:n$ числа вращения θ указаны на графике. Все языки Арнольда топологически эквивалентны области синхронизации для основного тона 1:1.

Синхронизация, математическим образом которой служит резонанс на торе с числом вращения $\theta = m:n$, может быть исследована

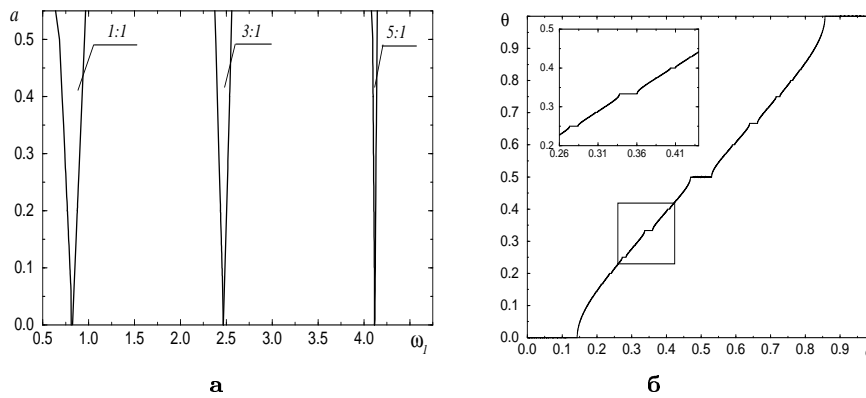


Рис. 1.32. (а) Типичные области синхронизации системы (1.255) с указанными на графике числами вращения; (б) Зависимость числа вращения от параметра расстройки δ для отображения окружности

с помощью модельного одномерного отображения. Сечение Пуанкаре вдоль малой окружности тора порождает одномерное отображение окружности в себя. Оно может быть записано в следующем виде:

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + f(\varphi_n), \quad f(\varphi_n) \equiv f(\varphi_n + 2\pi k). \quad (1.261)$$

Каждая итерация отображения соответствует одному обороту фазовой траектории вдоль большой окружности тора. На каждой итерации происходит поворот изображающей точки на окружности на некоторый угол φ . Если при $n \rightarrow \infty$ на окружности фиксируется конечное число точек, то отображение соответствует резонансному тору. Если число точек бесконечно, и они всюду плотно покрывают окружность, то инвариантная окружность служит образом эргодического тора.

Отображение окружности задается следующим разностным уравнением:

$$x_{k+1} = x_k + \delta - \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi x_k), \quad \text{mod } 1. \quad (1.262)$$

Параметр δ характеризует расстройку частот и управляет числом вращения. При $K = 0$ число вращения строго равно параметру δ . Существование у отображения (1.262) цикла периода n ($n = 1, 2, \dots$) соответствует эффекту синхронизации. Для иллюстрации, рассчитаем число вращения θ :

$$\theta = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_k - x_0}{k}, \quad (1.263)$$

меняя параметр δ (при вычислении необходимо исключать операцию mod 1). Результаты представлены на рис. 1.32б. На графике зависимости числа вращения от параметра четко видны горизонтальные участки, соответствующие областям синхронизации с различными рациональными значениями числа вращения $\theta = m:n$. Кроме того на рис. 1.32б можно заметить свойство самоподобия исследуемой зависимости. Оно проявляется в том, что между любыми двумя горизонтальными участками с числами вращения $\theta_1 = r:s$ и $\theta_2 = p:q$ всегда существует еще одна область синхронизации с числом вращения $\theta = \frac{r+p}{s+q}$. По этой причине, зависимость $\theta(\delta)$ называется “чертовой лестницей”. Области синхронизации на плоскости параметров (K, δ) , для которых число вращения рационально, образуют языки Арнольда.

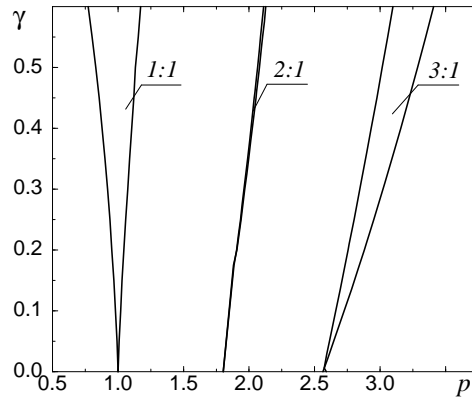


Рис. 1.33. Области синхронизации системы (1.264) на плоскости параметров “расстройка—параметр связи”. Другие параметры: $p = \omega_{02}/\omega_{01}$ и $\varepsilon = 2.0$

Взаимная синхронизация: два связанных генератора Ван дер Поля. В рассмотренном случае внешней синхронизации воздействие на генератор является однонаправленным. Более общим случаем является взаимодействия двух автоколебательных систем с различными собственными частотами ω_{01} и ω_{02} [143, 145]. При взаимодействии генераторы оказывают влияние друг на друга, так как связь между ними осуществляется в обоих направлениях.

В качестве примера исследуем два симметрично связанных генератора Ван дер Поля:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 - \varepsilon(1 - x_1^2)\dot{x}_1 + \omega_{01}^2 x_1 &= \gamma(x_2 - x_1), \\ \ddot{x}_2 - \varepsilon(1 - x_2^2)\dot{x}_2 + \omega_{02}^2 x_2 &= \gamma(x_1 - x_2), \end{aligned} \quad (1.264)$$

где γ — коэффициент связи.

На рис. 1.33 приведена структура бифуркационной диаграммы системы связанных генераторов (1.264), которая топологически эквивалентна случаю неавтономного генератора (рис. 1.32а). Эффект взаимной синхронизации колебаний с точки зрения бифуркационных явлений полностью совпадает с рассмотренным выше режимом внешней синхронизации.

Совокупность рассмотренных динамических явлений в неавтономном (1.255) и связанных генераторах (1.264) позволяет сформулировать критерии и основные свойства нелинейного явления, называемого синхронизацией.

Основным признаком как внешней, так и взаимной синхронизации является установление режима колебаний с постоянным и рациональным значением числа вращения Пуанкаре $\theta = m : n$, которое сохраняется в некоторой конечной области значений параметров системы, называемой областью синхронизации. Область синхронизации характеризуется эффектом захвата частоты и фазы колебаний. Захват частоты означает рациональное отношение двух исходно независимых частот $\omega_1/\omega_2 = m : n$ всюду в области синхронизации. Захвату фаз отвечает постоянство разности фаз $\varphi(t) = \Phi_1(t) - \Phi_2(t)$ колебаний взаимодействующих генераторов в области синхронизации ($\dot{\varphi} = 0$, $\varphi = \text{const}$).

С физической точки зрения эффект синхронизации состоит в том, что два характерных собственных временных масштаба взаимодействующих колебательных систем, которые в отсутствие связи являлись независимыми, при взаимодействии оказываются целочисленно кратными или рационально связанными. При этом важно, что эта кратность оказывается фиксированной в некоторой конечной области значений параметров системы, называемой областью синхронизации.

1.3.3 Синхронизация в присутствии шума.

Эффективная синхронизация

В реальных системах всегда присутствует шум в виде естественных флуктуаций, обусловленных наличием диссипации, а также в виде случайных воздействий внешней среды. Необходимо выяснить, какие принципиальные отличия в динамике генератора могут быть вызваны случайными возмущениями, в частности, каково влияние шумов на эффект синхронизации.

Проблема синхронизации генератора типа Ван дер Поля в присутствии флуктуаций впервые была поставлена и решена в работах Р. Л. Стратоновича, А. Н. Малахова и др. [103, 153–157]. Рассматривалась задача о воздействии шумов на генератор при условии, что мощность шума много меньше мощности гармонического воздействия. Предполагалось также, что статистические характеристики флуктуаций близки к характеристикам белого шума. В частности, источник шума считался широкополосным и время корреляции шума много меньше времени установления стационарных значений амплитуды и фазы колебаний

Введение фазы в зашумленной колебательной системе требует вероятностного подхода. Мгновенные амплитуда и фаза, вводимые в соответствии с (1.256) будут случайными процессами, так же как исходные динамические переменные $x(t)$ и $\dot{x}(t)$. С учетом шума поведение амплитуды и фазы описывается стохастическими дифференциальными уравнениями, содержащими слагаемые с источником шума $\xi(t)$.

Чтобы охарактеризовать стохастическую систему, необходимо либо вычислить моменты $A(t)$, $\Phi(t)$ и $\omega(t) = \dot{\Phi}(t)$ либо рассматривать плотность вероятности перехода $p(A, \Phi, t | A_1, \Phi_1, t_1)$, что является достаточным для марковского приближения. Таким образом можно было бы определить условную плотность вероятности значений амплитуды A и фазы Φ в любой момент времени $t > t_1$, если в момент времени t_0 заданы некоторые значения $A = A_1$ и $\Phi = \Phi_1$.

В зашумленных системах фаза $\Phi(t)$, а также разность фаз автоколебаний и внешней силы $\varphi(t) = \Phi(t) - \omega_1 t$ ведет себя подобно броуновской частице в потенциале $U(\varphi)$ (см. рис. 1.30). Случайный процесс $\varphi(t)$ можно разбить на две части: детерминированную часть, определяемую средним значением фазы или средним значением мгновенной частоты, и флуктуации относительно среднего значения, которые можно охарактеризовать, например, коэффициентом диффузии. Синхронизация, т.е. фиксированное соотношение между двумя фазами, постоянно нарушается из-за резких случайных изменений разности фаз, называемых фазовыми сбоями. Поэтому, в зашумленных колебательных системах понятие синхронизации должно быть математически выражено соотношениями и условиями, связывающими моменты флуктуирующей фазы.

Описание с помощью уравнения Ланжевена. Пусть исходное стохастическое дифференциальное уравнение (СДУ) генератора имеет вид:

$$\ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = a \cos(\omega_1 t) + \sqrt{2D_0} \xi(t), \quad (1.265)$$

где $\xi(t)$ есть δ -коррелированный гауссов шум с нулевым средним значением: $\langle \xi(t) \rangle \equiv 0$; $\langle \xi(t)\xi(t+\tau) \rangle = \delta(\tau)$. Величина D_0 характеризует интенсивность шумового воздействия. Следуя рассуждениям Стратоновича, изложенным в [103], можно получить укороченные СДУ для мгновенной амплитуды $A(t)$ и фазы $\varphi(t)$ колебаний:

$$\dot{A} = \frac{\varepsilon A}{2} \left(1 - \frac{A^2}{A_0^2} \right) - \mu \sin \varphi + \frac{D}{A} + \sqrt{2D} \xi_1(t),$$

$$\dot{\varphi} = \Delta - \frac{\mu}{A} \cos \varphi + \frac{\sqrt{2D}}{A} \xi_2(t), \quad (1.266)$$

где фаза φ - представляет собой мгновенную разность фаз автоколебаний и внешней силы, $\mu = a/2\omega_1$, $D = D_0/2\omega_1^2$. Случайные воздействия ξ_1 и ξ_2 в некотором приближении можно считать независимыми δ -коррелированными нормальными случайными функциями с нулевым средним значением: $\langle \xi_{1,2}(t) \rangle \equiv 0$, $\langle \xi_{1,2}(t) \xi_{1,2}(t+\tau) \rangle = \delta(\tau)$. D характеризует интенсивность источников ξ_1 и ξ_2 . В [103] отмечается, что аналогичная система уравнений может быть получена не только при гармоническом воздействии, но и в случае, когда внешнее воздействие является периодической функцией любой формы, например последовательностью импульсов. Если выполняются условия $a \ll \varepsilon$, $D \ll \varepsilon$, то отклонения амплитуды от ее невозмущенного значения A_0 невелики. В этом случае в уравнении для фазы можно заменить $A(t)$ на постоянное значение A_0 и переписать его в виде

$$\dot{\varphi} = \Delta - \Delta_c \cos \varphi + \frac{\sqrt{2D}}{A_0} \xi_2(t), \quad (1.267)$$

где $\Delta_c = \mu/A_0$ - ширина полосы синхронизации. Уравнение (1.267) описывает броуновское движение "частицы" с координатой φ в одномерном наклоненном периодическом потенциале $U(\varphi) = -\Delta \cdot \varphi - \Delta_c \sin \varphi$ (см. рис. 1.30). В случае $\Delta < \Delta_c$ минимумы потенциала $\varphi_k = \arccos(\Delta/\Delta_c) + 2\pi k$ соответствуют синхронизации, так как мгновенная разность фаз остается постоянной во времени. Наличие шума приводит к диффузии разности фаз в потенциале $U(\varphi)$: $\varphi(t)$ флуктуирует вблизи минимумов потенциала φ_k и совершает случайные переходы из одной потенциальной ямы в другую, скачком меняясь на 2π .

На рис. 1.34 показаны реализации разности фаз для различных значений интенсивности шума D , полученные в результате численного интегрирования СДУ (1.267). Как видно из рисунка, при малых интенсивностях шума ($D = 0.02$) мгновенная разность фаз в течение длительного времени остается близкой к нулю. Увеличение интенсивности шума приводит к уменьшению длительности времен пребывания φ в одной из потенциальных ям и становятся видны перескоки мгновенной разности фаз между различными метастабильными состояниями ($D = 0.07$). Участки приблизительно постоянного мгновенной разности фаз $\varphi \cong \text{const}$ еще достаточно

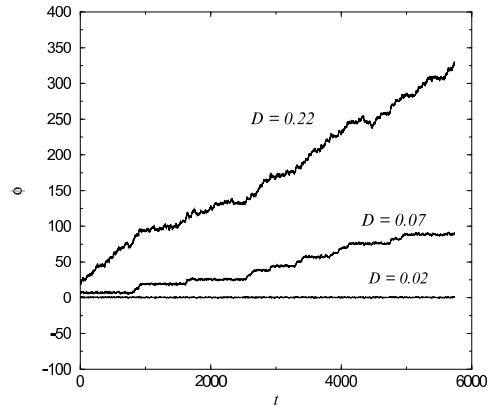


Рис. 1.34. Зависимость мгновенной разности фаз от времени для нескольких значений интенсивности шума. Другие параметры — $\Delta = 0.06$, $\mu = 0.15$ и $A_0 = 1$

хорошо заметны, однако среднее значение φ возрастает во времени. Чем больше наклон (расстройка), чем мельче ямы (чем меньше амплитуда синхронизирующего сигнала) и чем больше интенсивность шума, тем меньше время, в течение которого фазы генератора и воздействия захвачены. Увеличение интенсивности шума приводит к неограниченному росту абсолютной величины разности фаз (см. зависимости $\varphi(t)$ для $D = 0.07$ и $D = 0.22$), и изменению средней частоты колебаний.

Описание с помощью уравнения Фоккера–Планка. УФП, соответствующее стохастическому дифференциальному уравнению (1.267), имеет вид

$$\frac{\partial p(\varphi, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \varphi} \left[(\Delta - \Delta_s \cos \varphi) p(\varphi, t) - Q \frac{\partial p(\varphi, t)}{\partial \varphi} \right], \quad (1.268)$$

где $Q = D/A_0^2$. Значения фазовой переменной φ не ограничены, поэтому случайный процесс, описываемый уравнением (1.268) является нестационарным. Однако, поскольку коэффициенты УФП — периодические по φ , то можно ввести плотность вероятности $P(\varphi, t)$ для приведенной фазы, ограниченной в интервале $[-\pi, \pi]$:

$$P(\varphi, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p(\varphi + 2\pi n, t). \quad (1.269)$$

УФП для $P(\varphi, t)$ имеет тот же самый вид, что и (1.268), но теперь можно найти стационарную плотность вероятности $P_{\text{st}}(\varphi)$, с учетом

периодических граничных условий $P(-\pi, t) = P(\pi, t)$ и условия нормировки $\int_{-\pi}^{\pi} P(\varphi, t) d\varphi = 1$ [103]:

$$P_{\text{st}}(\varphi) = N \exp\left(\frac{\Delta \cdot \varphi - \Delta_s \sin \varphi}{Q}\right) \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} \exp\left(-\frac{\Delta \cdot \psi - \Delta_s \sin \psi}{Q}\right) d\psi, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi, \quad (1.270)$$

где N — нормировочная константа. В частном случае, когда $\Delta = 0$, т. е., когда собственная частота осциллятора точно соответствует частоте возбуждения, стационарная плотность вероятности приведенной разности фаз имеет простой вид:

$$P_{\text{st}}(\varphi) = \frac{1}{2\pi I_0(\Delta_s/Q)} \exp\left(\frac{\Delta_s}{Q} \cos(\varphi + \pi/2)\right), \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi, \quad (1.271)$$

где $I_0(z)$ — модифицированная функция Бесселя. Для большой интенсивности шума, $I_0(\Delta_s/Q) \approx 1$ и $\exp[(\Delta_s/Q) \cos(\varphi + \pi/2)] \approx 1$; таким образом, стационарная плотность вероятности стремится к однородной, $P_{\text{st}}(\varphi) = 1/2\pi$. Эта ситуация соответствует отсутствию синхронизации. В противоположном случае очень слабого шума, $\cos(\varphi + \pi/2) \approx 1 - (\varphi + \pi/2)^2/2$, $I_0(\Delta_s/Q) \approx \exp(\Delta_s/Q)/\sqrt{2\pi\Delta_s/Q}$, и стационарная плотность вероятности имеет гауссову форму: $P_{\text{st}}(\varphi) = \exp(-\Delta_s(\varphi + \pi/2)^2/2Q)/\sqrt{2\pi\Delta_s/Q}$ с центром в $\varphi_0 = -\pi/2$. Четкий максимум гауссового распределения вероятностей разности фаз свидетельствует о захвате фазы. В пределе $Q \rightarrow 0$ плотность вероятности становится δ -функцией, т. е., $\lim_{Q \rightarrow 0} P_{\text{st}}(\varphi) = \delta(\varphi + \pi/2)$.

Зная стационарную плотность вероятности $P_{\text{st}}(\varphi)$ разности фаз в режиме синхронизации можно найти среднюю частоту колебаний $\langle \omega \rangle$:

$$\langle \omega \rangle = \langle \dot{\varphi} \rangle + \omega_1 = \int_{-\pi}^{\pi} (\Delta - \Delta_s \cos \varphi) P_{\text{st}}(\varphi) d\varphi + \omega_1, \quad (1.272)$$

где ω_1 — частота сигнала синхронизации. Зависимость разности средней частоты и частоты воздействия от параметра расстройки для двух различных значений интенсивности шума представлена на рис. 1.31 (кривые 2 и 3). С увеличением интенсивности шума область захвата частоты становится более узкой в следствии разрушения шумом эффекта синхронизации.

Вернемся к рис. 1.34, показывающего, как ведет себя разность фаз во времени под воздействием шума. Пусть распределение разности фаз первоначально было сконцентрировано в бесконечно малой окрестности некоторого начального значения φ_0 , то есть, $p(\varphi, t = 0) = \delta(\varphi - \varphi_0)$, так, что $\langle \varphi^2(t = 0) \rangle = 0$. Из-за воздействия шума разность фаз диффундирует по закону $\langle \varphi^2(t) \rangle \propto D_{\text{эфф}} \cdot t$ [103], где $D_{\text{эфф}}$ — коэффициент эффективной диффузии, характеризующий скорость процесса диффузии:

$$D_{\text{эфф}} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\langle \varphi^2(t) \rangle - \langle \varphi(t) \rangle^2]. \quad (1.273)$$

В отсутствие шума диффузия разности фаз отсутствует: $D_{\text{эфф}} = 0$. При увеличении интенсивности шума коэффициент эффективной диффузии также увеличивается, и скорость диффузии возрастает. На рис. 1.34 этой ситуации соответствуют очень частые сбои фазы. Следовательно, коэффициент эффективной диффузии зависит от средней продолжительности захвата фазы: чем длиннее интервалы захвата, тем медленнее растет дисперсия разности фаз, и, таким образом, меньше диффузия. Коэффициент эффективной диффузии в случае (1.267) можно оценить аналитически, решая задачу Крамерса [95] о выходе из потенциальной ямы $U(\varphi)$ [103]:

$$D_{\text{эфф}} = \frac{\sqrt{\Delta_s^2 - \Delta^2}}{2\pi} \left[1 + \exp\left(-\frac{2\pi\Delta}{Q}\right) \right] \times \exp\left[-\frac{2}{Q} \left(\sqrt{\Delta_s^2 - \Delta^2} \Delta \cdot \arcsin \frac{\Delta}{\Delta_s} \right) \right]. \quad (1.274)$$

Таким образом, эффективная диффузия характеризует среднее число сбоев разности фазы на 2π в единицу времени и растет по экспоненте с увеличением интенсивности шума.

1.3.4 Фазовое описание

Чтобы говорить о синхронизации в смысле захвата частот и фаз в сложных системах, необходимо определить *мгновенную фазу* $\Phi(t)$ аperiodических процессов. По сравнению с гармоническими и квазигармоническими колебаниями введение фазы в случае сложных колебаний требует новых концепций. Для начала попробуем обобщить понятие *мгновенной фазы*, введенное в разделе 1.3.3. Предложенный метод введения фазы не обладает достаточной общностью.

Однако существует ряд альтернативных определений. Использование различных определений существенно зависит от ДС и характера рассмотренных сигналов.

Далее, мы покажем применимость различных определений фазы для выявления эффекта синхронизации в стохастических системах, на примере систем со стохастическим резонансом (СР). Для данного случайного процесса $\Phi(t)$ можно определить условие стохастической синхронизации, используя среднюю угловую частоту

$$\langle \omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{d\Phi(t)}{dt} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} (\Phi(t_0 + T) - \Phi(t_0)), \quad (1.275)$$

и коэффициент эффективной диффузии, определяемый как производная дисперсии по времени

$$D_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\langle \varphi^2(t) \rangle - \langle \varphi(t) \rangle^2], \quad (1.276)$$

где $\varphi(t) = \Phi(t) - \Psi(t)$ и $\Psi(t)$ — мгновенная фаза внешней периодической силы.

Фаза аналитического сигнала. Новое определение мгновенной фазы можно дать используя обобщение аналитического представления колебаний. Данное определение успешно использовалось при описании хаотической синхронизации. Для заданного сигнала $x(t)$ можно сконструировать аналитический сигнал $w(t)$ в комплексной плоскости

$$w(t) = x(t) + iy(t) = A(t)e^{i\Phi(t)}. \quad (1.277)$$

Откуда сразу же можно определить мгновенные амплитуду и фазу :

$$A(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}, \quad \Phi(t) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi k, \quad k = 0, \pm 1, \dots \quad (1.278)$$

Сразу же получаем определение мгновенной частоты как

$$\omega(t) = \frac{d}{dt}\Phi(t) = \frac{1}{A^2(t)}[x(t)\dot{y}(t) - y(t)\dot{x}(t)]. \quad (1.279)$$

До сих пор выбор $y(t)$ был не определен. Ключевым моментом в аналитическом представлении сигнала [183–185] является использование преобразования Гильберта $x(t)$ в определении $y(t)$. Выбор определения сопряженной переменной не единственен. Поэтому, кратко обсудим мотивировку этого выбора, показав, что она в общем согласуется с известными определениями.

В случае гармонических колебаний сигнал $x(t) = A \cos(\omega t)$ всегда можно дополнить сопряженным сигналом $y(t) = A \sin(\omega t)$ и корректно определить фазу $\Phi = \omega t$. Конкретнее, для данного x отображение $x \rightarrow y$ может быть определено в виде $y = -\dot{x} \operatorname{sgn}(\omega)/\omega$. Оно различается для положительных и отрицательных частот, и приводит только к сдвигу фаз. Для положительных частот y опережает x на $+\pi/2$, а для $\omega < 0$ этот сдвиг равен $-\pi/2$.

Кроме того требуют, чтобы процесс $y(t)$ представлял собой свертку $x(t)$, то есть,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t - \tau)x(\tau)d\tau. \quad (1.280)$$

Как должно выглядеть ядро оператора свертки K для гармонического процесса? В спектральном представлении свертка $x(t)$ соответствует произведению Фурье-образов функций $x(t)$ и $K(t - \tau)$, так, что в результате получается Фурье-образ процесса $y(t)$. Т. е. согласно теореме о свертке для спектральных функций имеем:

$$y_{\omega} = K_{\omega} x_{\omega}. \quad (1.281)$$

Нужный сдвиг фаз получается, если умножить x_{ω} на $\pm i$. Следовательно, Фурье-образ ядра есть

$$K_{\omega} = -i \operatorname{sgn}(\omega) \quad (1.282)$$

при $\operatorname{sgn}(0) = 0$. Выполнение обратного Фурье-преобразования дает

$$K(t) = \frac{1}{\pi t}. \quad (1.283)$$

Описанная для гармонических сигналов процедура может быть распространена на сложные процессы. Она подсказывает идею, как сконструировать аналитический сигнал. Для заданного ядра K сопряженный процесс $y(t)$ есть результат преобразования Гильберта:

$$y(t) = H[x] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x(t - \tau) - x(t + \tau)}{\tau} d\tau. \quad (1.284)$$

Интеграл в последнем выражении понимается в смысле главного значения Коши.

Будучи линейным, преобразование $H[x]$ обладает несколькими полезными свойствами. Каждое преобразование Гильберта от линейной комбинации двух сигналов является линейной комбинацией

отдельных преобразований Гильберта. Если сигнала сдвигается во времени на некоторую величину, на ту же величину сдвигается аргумент преобразования Гильберта. Преобразование Гильберта от преобразования Гильберта дает исходный сигнал с обратным знаком. Четные функции преобразуются в нечетные и наоборот. Исходный сигнал и сигнал, сопряженный по Гильберту, ортогональны. Полная энергия исходного сигнала, определенная как интеграл от $x^2(t)$ по всем моментам времени, равна энергии сопряженного сигнала.

Преобразование Гильберта может быть применено к случайным процессам. Для случайного сигнала $x(t)$ сходимость интеграла должна пониматься в среднеквадратическом смысле [186]. Можно показать, что преобразованный сигнал имеет ту же автокорреляционную функцию, что и исходный сигнал. Между собой они антикоррелированы, причем их совместная корреляционная функция являющейся преобразованием Гильберта от автокорреляционной функции исходного сигнала.

В некоторых частных случаях допустимо более простое определение, мгновенных амплитуды и фазы колебаний [187]. Так можно использовать обобщение классического определения фазы на случай, когда хаотическая фазовая траектория достаточно регулярно вращается вокруг неустойчивого состояния равновесия с некоторой скоростью, зависящей от времени. В этом случае мгновенная фаза может быть определена как угол поворота проекции радиус-вектора в плоскости некоторых переменных (x_1, x_2) . Радиус-вектор определяет положение изображающей точки. Обычно начало радиус-вектора помещают в состояние равновесия. Тогда можно ввести следующую замену переменных:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A(t) \cos \Phi(t), \\ x_2(t) &= A(t) \sin \Phi(t). \end{aligned} \quad (1.285)$$

Мгновенные фаза $\Phi(t)$ и амплитуда $A(t)$ определяются по формуле, аналогичной (1.278), где вместо сопряженного по Гильберту процесса $y(t)$ берется динамическая переменная $x_2(t)$. Мгновенная частота ω вводится как производная мгновенной фазы, а средняя частота $\langle \omega \rangle$ задается выражением (1.275).

Мгновенная фаза процессов с дискретным временем. Стохастическая бистабильная динамика в глобальном масштабе достаточно хорошо аппроксимируется дискретным процессом. Изме-

ния фазы можно интерпретировать как переключения между аттракторами. Эти события происходят в случайные моменты времени t_k , определяемые функцией распределения или динамическим процессом. При этом наблюдаемая переменная пересекает некоторый фиксированный уровень, что позволяет определить момент переключения из одного состояния в другое. Таким образом, бистабильная система может быть сведена к простой случайной последовательности.

Время между двумя последовательными пересечениями равно $\tau(t) = t_{k+1} - t_k$, $t_k < t < t_{k+1}$. Мгновенная фаза процесса $x(t)$ может быть определена как

$$\Phi(t)_{\text{lin}} = \pi \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k} + \pi k, \quad t_k < t < t_{k+1}, \quad (1.286)$$

что является кусочно-линейной функцией времени. Средняя частота равна

$$\langle \omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \pi M(T), \quad (1.287)$$

где $M(T)$ — число переключений за время T .

При другом определении пренебрегают линейной интерполяцией между двумя последующими событиями. Можно выбрать

$$\Phi(t)_{\text{discr}} = \pi k(t) = \pi \sum_k \theta(t - t_k), \quad (1.288)$$

где $k(t)$ — возрастающая последовательность целых чисел, а t_k , как и в предыдущем случае, определяются некоторой динамической или вероятностной закономерностью. $\theta(x)$ — функцией Хевисайда. Средняя частота при таком определении фазы есть среднее значение последовательности дельта-образных импульсов:

$$\langle \omega \rangle = \pi \left\langle \sum_k \delta(t_k - t) \right\rangle. \quad (1.289)$$

Соответственно, непрерывный стохастический процесс отображается в дихотомический процесс

$$x(t) = \exp[i\Phi(t)_{\text{discr}}]. \quad (1.290)$$

Он представляет собой последовательность чередующихся во времени состояний $+1$ и -1 , как в двух-уровневом приближении. Монотонное увеличение фазы $\Phi(t)$ характеризует структуру последовательности моментов времени t_k . В общем случае, она может быть

периодической, случайной или промежуточной, как в случае стохастического резонанса. В этих случаях говорят о периодических и случайных дихотомических последовательностях соответственно (или о квазислучайном и случайном телеграфном сигнале).

Сравним определения фазы (1.286) и (1.288) с аналогичными определениями в концепции аналитического сигнала [188]. Для этой цели аналитически вычислим преобразование Гильберта для дихотомического процесса $x(t)$ (где каждое k соответствует переходу $-1 \rightarrow +1$)

$$y(t) = \frac{1}{\pi} \sum_k (-1)^k \ln \left| \frac{t - t_k}{t - t_{k-1}} \right| = \frac{2}{\pi} \sum_k \ln \left| \frac{t - t_{2k}}{t - t_{2k+1}} \right|. \quad (1.291)$$

Для $t < t_k$ имеем $x(t) = -1$, и преобразование Гильберта $y(t)$ монотонно уменьшается, достигая $-\infty$ при $t = t_k$. В этот момент x переключается в состояние $+1$, и $y(t)$ начинает расти, становясь равным $+\infty$ при $t = t_{k+1}$. Таким образом, вектор в фазовом пространстве, следуя x и y , очерчивает окружность в течение двух последующих переключений, возвращаясь к начальному состоянию $x = -1$. Согласно определению (1.278), мгновенная фаза для аналитического сигнала есть

$$\Phi(t)_{\text{Hilbert}} = \pi k(t) + \arctan \frac{y(t)}{x(t)}, \quad (1.292)$$

где $y(t)$ дается (1.291).

Рисунок 1.35 позволяет наглядно сравнить поведение трех по-разному определенных значений мгновенной фазы. Оба, определения: кусочно-линейное и кусочно-постоянное, располагаются точно в окрестности значений Φ_{Hilbert} для аналитического сигнала. Таким образом, концепция фазы для стохастических процессов с дискретным временем хорошо согласуется с фазой аналитического сигнала [188].

Описанные выше определения мгновенной фазы и средней частоты могут быть использованы для развития концепции фазо-частотной синхронизации как хаотических колебаний, так и случайных процессов в бистабильных и возбудимых системах. Обобщенное определение фазовой синхронизации, которое может также применяться к этим случаям, основано на ограничении [187, 189]:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |n\Phi_1(t) - m\Phi_2(t)| < \text{const}. \quad (1.293)$$

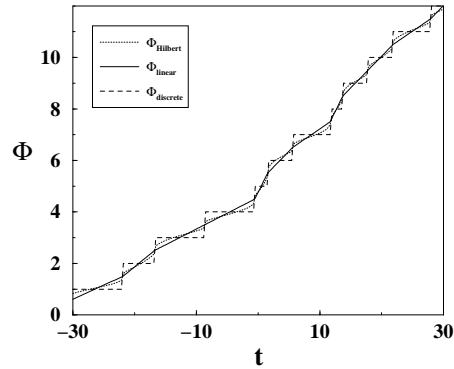


Рис. 1.35. Сравнение поведения мгновенной фазы при трех различных определениях. Как линейная интерполяция, так и ступенчатая аппроксимация хорошо согласуются со значениями фазы для аналитического сигнала

Численные эксперименты свидетельствуют, что хотя точные значения мгновенных фаз и частот, определенных различными методами, могут слегка различаться, поведение средних частот практически одинаково. Следовательно, любое из вышеперечисленных определений мгновенной фазы может быть использовано для диагностики фазо-частотной синхронизации. Средняя частота связана с характерным временем системы. Для режима спирального хаоса, характерным временем служит средний период возврата Пуанкаре $\langle T \rangle$ фазовой траектории к некоторой секущей поверхности. Справедливо следующее равенство:

$$\langle T \rangle = \frac{2\pi}{\langle \omega \rangle}. \quad (1.294)$$

Более того, в этом случае средняя частота колебаний $\langle \omega \rangle$ практически, т. е., в пределах точности вычислений, совпадает с основной (базовой) частотой ω_0 спектра мощности.

1.3.5 Заключение

В заключение этого раздела отметим, что анализ различных типов синхронизации позволяет сформулировать некоторые фундаментальные свойства и критерии синхронизации. Тот факт, что сначала был рассмотрен случай вынужденной синхронизации, не принципиален. Важно было то, что внешняя сила является периодической. Это следует, в частности из качественного рассмотре-

ния динамики двух симметрично связанных генераторов. Известно, что колебания реальных генераторов — периодические, но не строго гармонические. Основным признаком как вынужденной, так и взаимной синхронизации — существование колебательного режима с постоянным и рациональным числом вращения $\theta = m:n$ в некоторой конечной области пространства параметров системы. Эта область называется областью синхронизации и характеризуется эффектами захвата фазы и частоты. Захват частоты проявляется в рациональном отношении двух первоначально независимых частот $\omega_1/\omega_2 = m:n$ всюду в области синхронизации. Захват фазы означает, что мгновенная разность фаз постоянна в области синхронизации ($\dot{\varphi} = 0$, $\varphi_{\text{st}} = \text{const.}$).

Влияние шума на автогенератор приводит к разрушению режима синхронизации в смысле выше приведенного определения. Однако, если интенсивность шума относительно мала, основные физические свойства синхронизации могут сохраняться.

Из-за диффузии фазы, определение синхронизации в присутствии шума оказывается “расплывчатым”. Именно поэтому условия синхронизации должны быть определены статистически, с использованием понятия эффективной синхронизации [153]. Это можно сделать, в рамках определенных предположений о некоторых статистических характеристиках соответствующих случайных процессов. В частности, определение эффективной синхронизации может быть основано на следующих представлениях:

- Стационарная плотность вероятности захваченной разности фаз. В случае синхронизации пик в $P_{\text{st}}(\varphi)$ должен быть хорошо выражен по сравнению с равномерным распределением.
- Средняя частота. Она должна соответствовать частоте воздействия (с точностью до некоторой малой статистической ошибки).
- Коэффициент эффективной диффузии. Эта характеристика должна быть достаточно мала, в соответствии с требованием, чтобы интервалы захвата фазы были намного длиннее, чем период внешней силы. Другими словами, это ограничение требует, чтобы фаза осциллятора была захвачена в течение значительного числа периодов внешнего сигнала, и может быть записано как

$$D_{\text{eff}} \leq 2\pi \frac{\omega_1}{n}, \quad (1.295)$$

где $n \gg 1$ — число периодов внешней силы.

Используя данные определения эффективной синхронизации, можно установить области синхронизации в пространстве параметров.

Литература

1. A.A. Andronov, E.A. Vitt, S.E. Khaikin, *Theory of Oscillations* (Pergamon Press, Oxford 1966).
2. В.С. Анищенко, *Сложные колебания в простых системах* (Наука, Москва 1990).
3. С.П. Кузнецов, А.П. Кузнецов, Н.М. Рыскин, *Нелинейные колебания* (Физматгиз, Москва, 2002).
4. Ю.И. Неймарк, *Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний* (Наука, Москва 1972).
5. А.М. Ляпунов, *Собрание сочинений*, Т. 1 и 2 (Изд-во АН СССР, Москва 1954–1956).
6. A.A. Andronov, E.A. Leontovich, I.E. Gordon, A.G. Maier, *The Theory of Dynamical Systems on a Plane* (Israel Program of Scientific Translations, Israel 1973).
7. V.S. Afraimovich, V.I. Arnold, Yu.S. Il'yashenko, L.P. Shilnikov, In: *Dynamical Systems V, Encyclopedia of Mathematical Sciences* (Springer, Berlin, Heidelberg 1989).
8. H. Haken, *Advanced Synergetics* (Springer, Berlin, Heidelberg 1985).
9. Б.П. Демидович, *Лекции по математической теории устойчивости* (Наука, Москва 1967).
10. S. Smale, Bull. Am. Math. Soc. **73**, 747 (1967).
11. L.P. Shilnikov, Int. Bifurc. Chaos **7**, 1953 (1997).
12. Ю.С. Ильяшенко, В. Ли, *Нелокальные бифуркации* (МЦНМО, Москва 1999).
13. C. Grebogi, E. Ott, J.A. Yorke, Phys. Rev. Lett. **48**, 1507 (1982).
14. T. Poston, I. Steward, *Catastrophe Theory and its Applications* (Pitman, London 1978).
15. R. Thom, *Structural Stability and Morphogenesis* (New York 1972).
16. H. Whitney, Ann. Math. **62**, 247 (1955).
17. V.I. Arnold, A.N. Varchenko, S.M. Gusein-Zade, *Singularities of Differentiable Mappings* (Nauka, Moscow 1968).
18. L.E. Marsden, M. McCracken, *The Hopf Bifurcation and its Applications* (Springer, New York 1976).
19. Л.П. Шильников, Матем. сб. **61**, 443 (1963).
20. Л.П. Шильников, Матем. сб. **10**, 91 (1970).
21. Н.К. Гаврилов, Л.П. Шильников, Матем. сб. **17**, 467 (1972); Матем. сб. **19**, 139 (1973).
22. S.E. Newhouse, Publ. Math. IHES **50**, 101 (1979).
23. С.П. Кузнецов, *Динамический хаос* (Физматгиз, Москва 2001).
24. Ф. Мун, *Хаотические колебания* (Мир, Москва 1990).
25. В.С. Анищенко, *Знакомство с нелинейной динамикой* (ИКИ, Москва-Ижевск 2002).
26. Г. Шустер, *Детерминированный хаос* (Мир, Москва 1988).
27. Ю.И. Неймарк, П.С. Ланда, *Стохастические и хаотические колебания* (Наука, Москва 1987).

28. D. Ruelle, F. Takens, *Commun. Math. Phys.* **20**, 167 (1971).
29. V.S. Anishchenko, G.I. Strelkova, *Discrete Dyn. Nat. Soc.* **2**, 53 (1998).
30. V.S. Afraimovich, L.P. Shilnikov, "Strange Attractors and Quasiattractors", In: *Nonlinear Dynamics and Turbulence*, ed. by G.I. Barenblatt, G. Iooss, D.D. Joseph (Pitman, Boston 1983) p. 1.
31. V.S. Afraimovich, "Attractors", In: *Nonlinear Waves*, ed. by A.V. Gaponov, M.I. Rabinovich, J. Engelbrechet (Springer, Berlin, Heidelberg 1989) p. 6.
32. L.P. Shilnikov, *J. Circuit Syst. Comput.* **3**, 1 (1993).
33. J.L. Kaplan, J.A. Yorke, *Lect. Notes Math.* **730**, 204 (1971).
34. В.И. Арнольд, *Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений* (Наука, Москва 1978).
35. J.D. Farmer, E. Ott, J.A. Yorke, *Physica D* **7**, 153 (1983).
36. R. Williams, *Publ. Math. IHES* **43**, 169 (1974).
37. Р.В. Плыкин, *Успехи матем. наук* **35**, 94 (1980).
38. С.В. Гонченко, Л.П. Шильников, Д.В. Тураев, *ДАН СССР* **44**, 422 (1992).
39. Y.-C. Lai, C. Grebogi, J.A. Yorke, I. Kan, *Nonlinearity* **6**, 779 (1993).
40. M.A. Henon, *Commun. Math. Phys.* **50**, 69 (1976).
41. R. Lozi, *J. Phys.* **39**, 9 (1978).
42. E.N. Lorenz, *J. Atmos. Sci.* **20**, 130 (1963).
43. Л.П. Шильников, Теория бифуркаций и модель Лоренца. В кн. Марсден Дж., Мак-Кракен М. *Бифуркация рождения цикла и ее приложения* (Мир, Москва 1980). С. 317.
44. A.E. Cook, P.H. Roberts, The Rikitake two-disc dynamo system. In: *Proc. of Cambridge Philosophical Society.* **68**, 547 (1970).
45. V.S. Anishchenko, T.E. Vadivasova, J. Kurths, A.S. Kopeikin, G.I. Strelkova, *Phys. Lett. A* **270**, 301 (2000).
46. C. Grebogi, E. Ott, S. Pelikan, J.A. Yorke, *Physica D* **13**, 261 (1984).
47. V.S. Anishchenko, T.E. Vadivasova, O.V. Sosnovtseva, *Phys. Rev. E* **53**, 4451 (1996).
48. J.F. Heagy, S.M. Hammel, *Physica D* **70**, 140 (1994).
49. L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *Lehrbuch der Theoretischen Physik*, Band 5, *Statistische Physik*, 3rd ed. (Akademie, Berlin 1971).
50. Sh. Kogan, *Electronic Noise and Fluctuations in Solids* (Cambridge University Press, Cambridge 1996).
51. W.T. Coffey, Yu.P. Kalmykov, J.T. Waldron, *The Langevin equation with Applications in Physics, Chemistry and Electrical Engineering* (World Scientific, Singapore 1996).
52. N.G. Van Kampen, *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*, 2nd ed. (North Holland, Amsterdam 1992).
53. W. Horsthemke, R. Lefever, *Noise Induced Transitions, Theory and Applications in Physics, Chemistry and Biology*, Springer Series in Synergetics, Vol. 15 (Springer, Berlin 1983).
54. R. Kubo, M. Toda, N. Hashitsume, *Statistical Physics II*, Springer Series in Solid-State Science, Vol. 31 (Springer, Berlin, Heidelberg 1985).
55. P. Hänggi, H. Thomas, *Phys. Rep.* **88**, 207 (1982).
56. Р.Л. Стратонович, *Нелинейная неравновесная термодинамика* (Наука, Москва 1985).
57. G. Nicolis, I. Prigogine, *Self-Organization in Non-Equilibrium Systems* (Wiley, New York 1977).
58. R. Feistel, W. Ebeling, *Evolution of Complex Systems* (Kluwer, Dordrecht 1989).
59. Yu.L. Klimontovich, *Statistical Physics*, Vol. 1 (Kluwer, Dordrecht 1995)

60. G. Nicolis, *Introduction to Nonlinear Science* (Cambridge University Press, Cambridge 1995).
61. F. Moss, P.V.E. McClintock (eds.), *Noise in Nonlinear Dynamical Systems*, 3 Vol. (Cambridge University Press, Cambridge 1990).
62. A. Bulsara, S. Chillemi, L. Kiss, P.V.E. McClintock, R. Mannella, F. Marchesoni, C. Nicolis, K. Wiesenfeld (eds.), *Stochastic Resonance, Signal Processing and Related Phenomena*, Nuovo Cimento D **17**, 653 (1995).
63. P. Hänggi, P. Jung, Adv. Chem. Phys. **89**, 239 (1995).
64. M. Milonas (ed.), *Fluctuations and Order, The New Synthesis* (Springer, New York 1996).
65. L. Schimansky-Geier, T. Pöschel (eds.), *Stochastic Dynamics*, Lecture Notes in Physics, Vol. 484 (Springer, Berlin 1997).
66. J.B. Kadtko, A. Bulsara (eds.), *Applied Nonlinear Dynamics and Stochastic Systems Near the Millennium*, APS Conf. Proc., Vol. 411 (AIP, Woodbury, N. Y. 1997).
67. D.G. Luchinsky, P.V.E. McClintock, M.I. Dykman, Rep. Prog. Phys. **61**, 889 (1998).
68. J. García-Ojalvo, J.M. Sancho, *Noise in Spatially Extended Systems* (Springer, New York 1999).
69. D.S. Broomhead, E.A. Luchinskaya, P.V.E. McClintock, T. Mullin (eds.), *Stochastic and Chaotic Dynamics in the Lakes*, APS Conf. Proc., Vol. 502 (AIP, Melville 2000).
70. J.A. Freund, T. Pöschel T. (eds.), *Stochastic Processes in Physics, Chemistry and Biology*, Lecture Notes in Physics, Vol. 557 (Springer, Berlin, Heidelberg 2000).
71. M. San Miguel, R. Toral, In: *Instabilities and Nonequilibrium Structures VI*, ed. by E. Tirapegui, J. MartMnez, R. Tiemann (Kluwer, Dordrecht 2000).
72. A.T. Bharucha-Reid, *Elements in the Theory of Markovian Processes and their Applications* (McGraw-Hill, New York 1960).
73. A. Papoulis, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes* (McGraw-Hill, New York 1965).
74. Yu.A. Rusanov, *Stochastic Processes* (Nauka, Moscow 1971) (in Russian).
75. E. Wong, *Stochastic Processes in Information and Dynamical Systems*, McGraw Series in System Science (McGraw-Hill, New York 1971).
76. B. Karlin, M.M. Taylor, *A First Course in Stochastic Processes*, 2nd ed. (Academic, New York 1975).
77. W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Applications*, Vol. 2 (Wiley, New York 1971).
78. M.I. Freidlin, A.D. Wencel, *Random Perturbations in Dynamical Systems* (Springer, New York 1984).
79. L. Arnold, *Stochastic Differential Equations, Theory and Applications* (Krieger, Malabar 1992).
80. C.W. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods*, Springer Series in Synergetics, Vol. 13 (Springer, Berlin, Heidelberg 1982).
81. H. Risken, *The Fokker-Planck Equation*, Springer Series in Synergetics, Vol. 18 (Springer, Berlin, Heidelberg 1984).
82. M. Lax, Rev. Mod. Phys. **38**, 541 (1966).
83. M. Lax, *Fluctuations and Coherence in Classical and Quantum Physics* (Gordon and Breach, New York 1968).
84. H. Haken, Rev. Mod. Phys. **47**, 67 (1975).
85. R. Graham, *Springer Tracts in Mod. Phys.* 66 (Springer, Berlin, Heidelberg 1973) p. 1.

86. С.М. Рытов, *Введение в статистическую радиофизику* (Наука, Москва 1966).
87. Н.М. Ito, *J. Stat. Phys.* **35**, 151 (1984).
88. Б.П. Левин, *Теоретические основы радиотехники*, Т. 1 (Сов. радио, Москва 1974).
89. E.W. Montroll, K.E. Shuler, *Adv. Chem. Phys.* **1**, 361 (1969).
90. E. W. Montroll and J. L. Lebowitz, (eds.), *Fluctuation Phenomena*, 2nd ed. (North Holland., Amsterdam, 1987).
91. C. van den Broeck, *J. Stat Phys.* **31**, 467 (1983).
92. R.L. Stratonovich, In: *Noise in Nonlinear Dynamical Systems*, ed. by F. Moss, P.V.E. McClintock (Cambridge University Press, Cambridge 1990).
93. В.И. Тихонов, М.А. Миронов, *Марковские процессы* (Сов. радио, Москва 1979).
94. N. Wax (ed.), *Selected Papers on Noise* (Dover, New York 1954).
95. P. Hänggi, M. Borkovec, P. Talkner, *Rev. Mod. Phys.* **62**, 251 (1990).
96. C. Van den Broeck, P. Hänggi, *Phys. Rev. A* **30**, 2730 (1984).
97. W. Ebeling, *Phys. Lett. A* **68**, 430 (1978).
98. H. Malchow, L. Schimansky-Geier, *Noise and Diffusion in Bistable Nonequilibrium Systems* (Teubner, Leipzig 1985).
99. A. Schenzle, H. Brand, *Phys. Rev. A* **20**, 1628 (1979).
100. R. Graham and A. Schenzle, *Phys. Rev. A* **25**, 1731 (1982).
101. W. Ebeling, H. Engel, H. Herzog, *Selbstorganisation in der Zeit* (Akademie, Berlin 1990).
102. Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний* (Физматгиз, Москва, 1963).
103. Р.Л. Стратонович, *Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике* (Сов. радио, Москва 1961).
104. P.I. Kuznetsov, R.L. Stratonovich, V.I. Tikhonov, *Non-Linear Transformations of Stochastic Processes* (Pergamon, Oxford 1965).
105. R.L. Stratonovich, P.S. Landa, In: *Non-Linear Transformation of Stochastic Processes*, ed. by P.I. Kuznetsov, R.L. Stratonovich, V.I. Tikhonov (Pergamon, Oxford 1965) p. 259.
106. R.L. Stratonovich, Yu.M. Romanovski, In: *Non-Linear Transformation of Stochastic Processes*, ed. by P.I. Kuznetsov, R.L. Stratonovich, V.I. Tikhonov (Pergamon, Oxford 1965).
107. E. Shidlovskaya, L. Schimansky-Geier, Yu.M. Romanovski, *Z. Phys. Chemie* **214**, 65 (2000).
108. P. Hänggi, P. Riseborough, *Am. J. Phys.* **51**, 347 (1983).
109. H.A. Kramers, *Physica* **7**, 284 (1940).
110. W. Ebeling, *Strukturbildung bei irreversiblen Prozessen* (Teubner, Leipzig 1976).
111. L. Farkas, *Z. Phys. Chem.* **125**, 236 (1927).
112. R. Becker, W. Döring, *Ann. Phys.* **24**, 719 (1935).
113. Л.С. Понтрягин, А.А. Андронов, А.А. Витт, *ЖЭТФ* **3**, 165 (1933).
114. G.H. Weiss, *Adv. Chem. Phys.* **13**, 1 (1967).
115. B.J. Matkowsky, Z. Schuss, *SIAM J. Appl. Math.* **33**, 365 (1977).
116. P. Reimann, G.J. Schmid, P. Hänggi, *Phys. Rev. E* **60**, 1 (1999).
117. S.O. Rice, *Bell Syst. Technol. J.* **23**, 1 (1944); in: *Selected Papers on Noise*, ed. by N. Wax (Dover, New York 1954).
118. J.S. Langer, *Ann. Phys.(N.Y.)* **54**, 258 (1969).
119. V.I. Mel'nikov, *Phys. Rep.* **209**, 1 (1991).
120. P. Jung, *Phys. Rep.* **234**, 175 (1993).

121. P. Hänggi, P. Talkner (eds.), *New Trends in Kramers Reaction Rate Theory* (Kluwer, Boston 1995).
122. P. Talkner, Ber. Bunsenges. Phys. Chem. **95**, 327 (1991).
123. P. Talkner, Chem. Phys. Lett. **180**, 199 (1994).
124. H. Frauenfelder, P.G. Wolynes, R.H. Austin, Rev. Mod. Phys. **71**, 149 (1999).
125. P. Talkner, Phys. B. **68**, 201 (1987).
126. C. Huygenii, *Horologium Oscillatorium* (Parisii, France 1673).
127. А.А. Андронов, *Собрание трудов* (Изд-во АН СССР, Москва 1956).
128. К.Ф. Теодорчик, *Автоколебательные системы* (Гостехиздат, Москва 1952).
129. Т. Хаяси, *Нелинейные колебания в физических системах* (Мир, Москва 1968).
130. И.И. Блехман, *Синхронизация динамических систем* (Наука, Москва 1971).
131. Ю.М. Романовский, Н.В. Степанова, Д.С. Чернавский, *Математическое моделирование в биофизике* (Наука, Москва 1975).
132. А.Г. Демьянченко, *Синхронизация генераторов гармонических колебаний* (Энергия, Москва 1976).
133. А.Т. Winfree, *The Geometry of Biological Time* (Springer, Berlin 1980).
134. П.С. Ланда, *Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы* (Наука, Москва 1980).
135. И.И. Блехман, *Синхронизация в природе и технике* (Наука, Москва 1981).
136. Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence* (Springer, Berlin 1984).
137. П.С. Ланда, *Нелинейные колебания и волны* (Наука, Москва 1997).
138. А. Пиковский, М. Розенблюм, Ю. Куртс, *Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление* (Техносфера, Москва 2003).
139. E. Mosekilde, Yu. Maistrenko, D. Postnov, *Chaotic Synchronization. Applications to Living Systems*. Vol. 42 (World Scientific, Singapore 2002).
140. В. Van der Pol, Radio Rev. **1**, 701 (1920).
141. E.V. Appleton, Proc. of the Cambridge Philosophical Society. Math. and Phys. Sciences **21** (1922).
142. А.А. Андронов, А.А. Витт, К теории захватывания Ван дер Поля. В собр. тр. А.А. Андропова. (Изд-во АН СССР, Москва 1956) с. 51.
143. А. Mayer, Tech. Phys. of USSR **2**(5), 1 (1935).
144. А. Mayer, Tech. Phys. of USSR **3**(12), 1 (1936).
145. В.И. Гапонов, ЖТФ **6**(6), 801 (1936).
146. К.Ф. Теодорчик, ДАН СССР **40**(2), 63 (1943).
147. Р.В. Хохлов, ДАН СССР **97**(6), 411 (1954).
148. И.И. Минакова, К.Ф. Теодорчик, ДАН СССР **106**(4), 658 (1956).
149. В.Н. Парыгин, Радиотехника и электроника **1**(2), 197 (1956).
150. Г.М. Уткин, Радиотехника и электроника **2**(1), 44 (1957).
151. П.С. Ланда, Н.Д. Таранкова, Радиотехника и электроника **21**(2), 260 (1976).
152. В.Ф. Скупой, В.П. Копылов, Радиотехника и электроника **24**(7), 1374 (1979).
153. А.Н. Малахов, *Флуктуации в автоколебательных системах* (Наука, Москва 1968).
154. И.Г. Акопян, П.С. Ланда, Радиотехника и электроника **7**(8), 1285 (1962).
155. А.Н. Малахов, Л.Г. Шепелевич, Радиотехника и электроника **15**(2), 328 (1970).
156. И.К. Костин, Ю.М. Романовский, Вестник МГУ, Сер. 3, **13**(6), 698 (1972).

157. И.К. Костин, Ю.М. Романовский, Изв. вузов, Радиофизика **18**(1), 34 (1975).
158. Y. Soen, N. Cohen, D. Lipson, E. Braun, Phys. Rev. Lett. **82**, 3556 (1999).
159. A. Neiman, X. Pei, D. Russell, W. Wojtenek, L. Wilkens, F. Moss, H. Braun, M. Huber, K. Voigt, Phys. Rev. Lett. **82**, 660 (1999).
160. R.C. Elson, A.I. Selverston, R. Huerta, N.F. Rulkov, M.I. Rabinovich, H.D.I. Abarbanel, Phys. Rev. Lett. **81**, 5692 (1998).
161. See, for instance, H.D.I. Abarbanel, M. I. Rabinovich, A. Selverston, M.V. Bazhenov, R. Huerta, M.M. Sushchik, L.L. Rubchinskii, Phys.-Uspekhi **39**, 337 (1996).
162. A.T. Winfree, J. Theor. Biol. **16**, 15; A.T. Winfree, *The Geometry of Biological Time* (Springer, New York 1980); J. Buck, Q. Rev. Biol. **63**, 265 (1988); S.H. Strogatz, I. Stewart, Sci. Am. **269**, 102 (1993).
163. C. Schäfer, M. Rosenblum, J. Kurths, H. Abel, Nature **392**, 239 (1998); Phys. Rev. E **60**, 857 (1998).
164. P. Tass, M. Rosenblum, J. Weule, J. Kurths, A. Pikovsky, J. Volkman, A. Schnitzler, H. Freund, Phys. Rev. Lett. **81**, 3291 (1998).
165. V.A. Vasilev, Yu.M. Romanovsky, D.S. Chernavsky, V.G. Yakhno, *Autowave Processes in Kinetic Systems* (VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1987).
166. В.С. Анищенко, И. Арансон, Д. Постнов, М. Рабинович, ДАН СССР **286**, 1120 (1986).
167. V. Belykh, N. Verichev, L. Kocarev, L. Chua, J. Circuit Syst. Comput. **50**, 1874 (1993).
168. L. Pecora, T. Carroll, Phys. Rev. Lett. **64**, 821 (1990).
169. G.V. Osipov, A.S. Pikovsky, M.G. Rosenblum, J. Kurths, Phys. Rev. E **55**, 2353 (1997).
170. L. Kocarev, U. Parlitz, Phys. Rev. Lett. **74**, 5028 (1995).
171. V.S. Afraimovich, V.I. Nekorkin, G.V. Osipov, V.D. Shalfeev, *Stability, Structures and Chaos in Nonlinear Synchronization Networks* (World Scientific, Singapore 1994).
172. J. Yamaguchi, H. Shimizu, Physica D **11**, 212 (1984).
173. S.H. Strogatz, R.E. Mirollo, J. Phys. A **21**, L699 (1988).
174. P.C. Matthews, R.E. Mirollo, S.H. Strogatz, Physica D **51**, 293 (1991).
175. B. Hu, Ch. Zhou, Phys. Rev. E **61**, R1001 (2000).
176. E. Mosekilde, F. Larsen, G. Dewell, P. Borcmans, Int. J. Bifurc. Chaos **8**, 1003 (1998).
177. A. Amengual, E. Fernandez-Garcia, R. Montagne, M. San Miguel, The Regime of Coupled Spatiotemporal Intermittency. Phys. Rev. Lett. **78**, 4379 (1997).
178. S. Boccaletti, J. Bragard, F.T. Arecchi, Phys. Rev. E **59**, 6574 (1999).
179. S. Boccaletti, J. Bragard, F.T. Arecchi, H. Mancini, Phys. Rev. Lett. **83**, 536 (1999).
180. B. Bogdanov, Functional Anal. Appl. **9**, 144 (1976).
181. J. Guckenheimer, P.J. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields* (Springer, New York 1983).
182. R. Adler, Proc. IRE **34**, 351 (1946).
183. P. Panter, *Modulation, Noise and Spectral Analysis* (McGraw-Hill, New York 1965).
184. D. Gabor, J. IEE Lond. **93**, 429 (1946).
185. Л. Вайнштейн, Д. Вакман, *Разделение частот в теории колебаний и волн* (Наука, Москва 1983).
186. D. Middleton, *An Introduction to Statistical Communication Theory* (McGraw-Hill, New York 1960).

187. M. Rosenblum, A. Pikovsky, J. Kurths, Phys. Rev. Lett. **76**, 1804 (1996).
188. J.A. Freund, A. Neiman, L. Schimansky-Geier, In: *Stochastic Climate Models. Progress in Probability*, ed. by P. Imkeller and J. von Storch (Birkhäuser, Boston 2001).
189. L. Schimansky-Geier, V. Anishchenko, A. Neiman, In: *Neuro-informatics*, ed. by S. Gielen, F. Moss, Handbook of Biological Physics, Vol. 4, Series Editor A.J. Hoff (Elsevier, Amsterdam 2000).

2. Хаотические и сложные колебания динамических систем

2.1 Бифуркационные механизмы перехода к хаосу

2.1.1 Введение

При изменении управляющих параметров динамической системы (ДС) по-разному проявляются её нелинейные свойства. С ростом влияния нелинейности происходит усложнение динамического режима. Простые аттракторы в фазовом пространстве диссипативной системы сменяются более сложными. При определённых условиях нелинейность приводит к возникновению динамического хаоса. Движение в пространстве параметров вдоль соответствующего направления позволяет наблюдать последовательность бифуркаций, в результате которой формируется хаотический аттрактор. Такие типичные бифуркационные последовательности объединяются понятием *бифуркационных механизмов* или *сценариев развития хаоса*.

Первый сценарий перехода от регулярного поведения к нерегулярному был предложен Л.Д. Ландау в 1944 г. [1] и независимо от него Е. Хопфом [2] в связи с попытками объяснить возникновение турбулентного поведения жидкости при увеличении числа Рейнольдса. Соответствующий бифуркационный механизм, получивший название *сценария Ландау–Хопфа*, предусматривает последовательность бифуркаций (типа бифуркации Андронова–Хопфа), каждая из которых порождает новую несоизмеримую частоту: $\omega_1 \rightarrow \omega_1, \omega_2 \rightarrow \dots \rightarrow \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$. В результате возникает многочастотный квазипериодический режим, соответствующий многомерному тору в фазовом пространстве ДС. Если число бифуркаций k достаточно велико, то спектр процесса с учётом флуктуаций, всегда присутствующих в реальных системах, становится неотличим от сплошного. Однако такие многочастотные колебания, даже в присутствии флуктуаций, всё же не являются хаотическими,

поскольку сценарий Ландау–Хопфа не предусматривает развития неустойчивости и перемешивания в системе. Кроме того, данный сценарий не мог объяснить возникновения колебаний со сплошным спектром в маломерных системах.

Идея развития турбулентности через квазипериодические колебания в начале 70-х годов была переработана с новых позиций Д. Рюэлем, Ф. Такенсом и С. Ньюхаусом [3, 4]. Они связали турбулентное поведение с хаотической динамикой и впервые ввели понятие *странного аттрактора* как математического образа хаоса в динамической системе. При этом было показано, что странный аттрактор может возникать в системах даже с небольшой размерностью фазового пространства ($N \geq 3$).

К настоящему времени открыты и исследованы три типичных бифуркационных сценария развития хаоса в диссипативных системах, реализуемые уже в трёхмерном фазовом пространстве [5–9]. Причём каждый из них обладает свойствами *универсальности*, то есть некоторыми общими закономерностями, не зависящими от конкретного вида оператора эволюции. Эти сценарии будут представлены в настоящей главе. Кроме того, в рамках квазипериодического сценария будут рассмотрены особенности развития нерегулярной динамики в системах с грубым эргодическим двумерным тором.

2.1.2 Переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода. Универсальность Фейгенбаума

В численных и натуральных экспериментах в огромном количестве самых разнообразных динамических систем, начиная с простейших отображений и кончая распределёнными системами, наблюдается переход к хаосу через *последовательность бифуркаций удвоения периода* [10–17]. Этот переход допускает однопараметрический анализ (так как бифуркация удвоения имеет коразмерность 1) и состоит в следующем. Пусть ДС при некотором значении управляющего параметра $\alpha = \alpha_0$ имеет устойчивый предельный цикл C с периодом $T(\alpha)$. Пусть при увеличении параметра до значения $\alpha = \alpha_1$ происходит суперкритическая бифуркация удвоения периода, приводящая к рождению устойчивого предельного цикла $2C$ с периодом $2T(\alpha)$. Далее наблюдается бесконечная последовательность бифуркаций удвоения периодов циклов $2^k C$ в точках

$\alpha = \alpha_k$, $k = 1, 2, 3, \dots$. В спектре возникают субгармоники частоты $\omega_0 = 2\pi/T_0$, поэтому последовательность бифуркаций удвоения иногда называют *субгармоническим каскадом*. Бифуркационные точки α_k сходятся в пределе $k \rightarrow \infty$ к некоторому критическому значению $\alpha = \alpha_{cr}$, при котором период становится бесконечным, а спектр сплошным. При $\alpha > \alpha_{cr}$ возникают аperiodические колебания, неустойчивые по Ляпунову. Этим колебаниям соответствует странный аттрактор в фазовом пространстве системы. В качестве примера на рис. 2.1 представлены изменения, происходящие в процессе перехода к хаосу через последовательность удвоений периода в генераторе с инерционной нелинейностью (ГИН) Анищенко–Астахова [14], описываемом уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x} &= tx + y - xz, \\ \dot{y} &= -x, \\ \dot{z} &= -gz + g\Phi(x), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\Phi(x) = x^2$ при $x \geq 0$ и $\Phi(x) = 0$ при $x < 0$.

Экспериментально было установлено, что во всех без исключения трехмерных потоковых системах формирующийся в результате последовательности удвоений периода хаотический аттрактор имеет фрактальную размерность $2 < d < 3$, а его сечение по форме напоминает подкову. В этом случае простейшей моделью возникающего в секущей поверхности отображения может служить отображение Хенона (Эно) [18],

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 + y_n - ax_n^2, \\ y_{n+1} &= bx_n, \end{aligned} \quad (2.2)$$

которое является обратимым и при $b < 1$ сжимает элемент площади. При изменении любого из параметров (a или b) отображение (2.2) демонстрирует переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода циклов. Если сжатие элемента площади столь велико, что поперечной канторовой структурой подковы можно пренебречь и считать точки в отображении лежащими на одну гладкую изогнутую кривую, то, вводя вдоль этой кривой новую координату, можно прийти к необратимому модельному отображению отрезка прямой, задаваемому гладкой функцией последования с одним экстремумом. Оно растягивает элемент отрезка и “укладывает” его в тот же самый отрезок. Поскольку функция

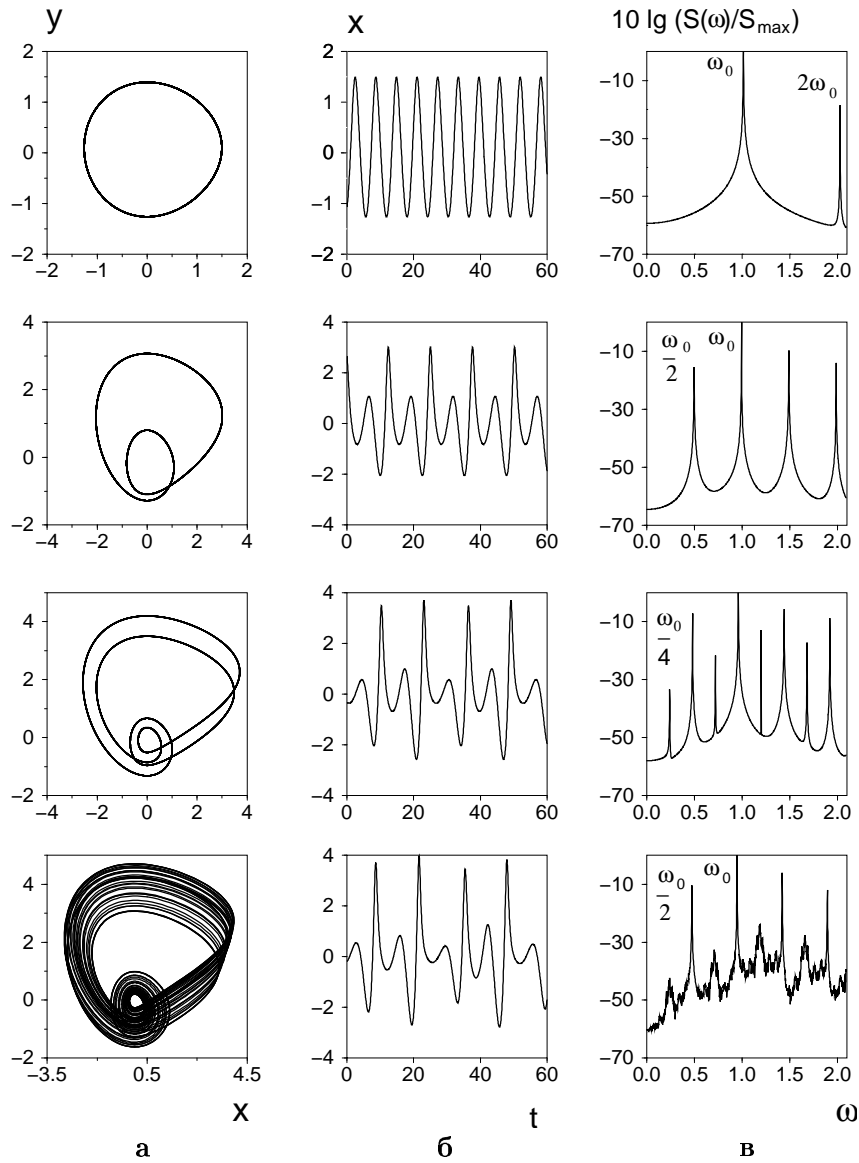


Рис. 2.1. Последовательность бифуркаций удвоения периода в ГИН: проекции фазовых траекторий (а), форма колебаний (б) и спектры мощности (в) для циклов с периодами $2T_0^k$, $k = 1, 2, 3$, и странного аттрактора

последования предполагается всюду гладкой, то, как и в случае с подковой, имеется область (вблизи экстремума), для которой растяжение отсутствует. Существование такой области является причиной рождения устойчивых периодических орбит в зоне хаоса, так называемых *окон устойчивости*. Исключить окна устойчивости можно при условии, что отображение будет всюду растягивающим (как, например, кусочно-линейное отображение типа треугольника, имеющее излом в точке экстремума), но в таких моделях вместе с окнами устойчивости исчезает и последовательность бифуркаций удвоения. Теория перехода к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода была развита на базе модельных одномерных отображений М. Фейгенбаумом [19–21], поэтому данный бифуркационный механизм получил название *сценария Фейгенбаума*.

Простейшей моделью для исследования сценария Фейгенбаума служит *логистическое отображение*

$$x_{n+1} = f(x_n) = r - x_n^2, \quad (2.3)$$

где r – параметр отображения, $r \geq 0$.

Логистическое отображение может быть представлено в других формах записи, сводящихся к (2.3) заменой переменных, например,

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \quad x_{n+1} = 1 - rx_n^2. \quad (2.4)$$

Рассмотрим как ведёт себя отображение (2.3) с ростом параметра r . Неподвижная точка отображения $x_0 > 0$ (цикл периода 1, или 1-цикл) имеет координату $x_0 = -1/2 + \sqrt{r + 1/4}$ и устойчива при $r \in [0; 3/4]$ (мультипликатор неподвижной точки μ_1 равен $-2x_0$). При $r = r_1 = 3/4$ мультипликатор принимает значение $\mu_1 = -1$. Имеет место бифуркация удвоения периода 1-цикла. Рождается устойчивый цикл периода 2, состоящий из точек x_1, x_2 . Координаты точек 2-цикла равны $x_{1,2} = 1/2 \pm \sqrt{r - 3/4}$, а мультипликатор цикла есть $\mu_2 = f'_x(x_1)f'_x(x_2) = 4(1 - r)$. 2-цикл устойчив в области значений параметра $r \in [3/4; 5/4]$. При $r = r_2 = 5/4$ мультипликатор принимает значение $\mu_2 = -1$ и происходит следующая бифуркация удвоения периода. Рождается 4-цикл и т.д. Получаем последовательность бифуркационных значений параметра $r_1 = 3/4$, $r_2 = 5/4$, $r_3 \approx 1.368099$, $r_4 \approx 1.394046$, $r_5 \approx 1.399637, \dots$, накапливающуюся к критической точке $r_{cr} \approx 1.40115\dots$ При

$k \rightarrow \infty$ скорость сходимости бифуркационных значений стремится к некоторому конечному пределу

$$\delta = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r_{k+1} - r_k}{r_{k+2} - r_{k+1}} = 4.669201 \dots \quad (2.5)$$

Фазопараметрическая диаграмма режимов отображения (2.3), приведенная на рис. 2.2, характерна для систем с каскадом удвоений периодов, приводящим к хаосу. Подобный вид диаграммы получил название *дерево Фейгенбаума*. Диаграмма даёт наглядное представление о дроблении масштаба динамической переменной и наличии свойств *скейлинга*, т.е. *масштабной инвариантности*, когда один и тот же элемент изображения повторяется во всё более мелком масштабе. Обозначив расстояния между подобными точками ветвей дерева Δ_k (как показано на рис. 2.2), можно ввести масштабные множители $a_k = \Delta_k / \Delta_{k+1}$, которые в пределе сходятся к некоторому значению

$$a = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\Delta_k}{\Delta_{k+1}} = -2.5029 \dots \quad (2.6)$$

Как показали численные исследования, величины δ и a не зависят от конкретного вида отображения. Главное, чтобы оно было унимодальным (имело один экстремум) и чтобы экстремум был квадратичным.

Универсальный характер количественных закономерностей перехода к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода был объяснён М. Фейгенбаумом, создавшим *теорию универсальности* [19–21]. Для анализа отображений типа логистической параболы Фейгенбаум применил метод *ренормализационной группы* (РГ), содержание которого сводится к следующему. Пусть в критической точке $r = r_{cr}$ имеется отображение

$$x_{n+1} = f_0(x_n), \quad (2.7)$$

где f_0 – произвольная унимодальная функция с квадратичным экстремумом в точке $x_n = 0$, причём $f_0(0) = 1$. Дважды применённое отображение (2.7) даёт отображение $x_{n+1} = f_0(f_0(x_n))$. Произведём перемасштабирование переменной $x \rightarrow x/a_0$ так, чтобы новое отображение в начале координат тоже было отнормировано на единицу, то есть $a_0 = 1/f_0(f_0(0))$, и обозначим новое отображение как

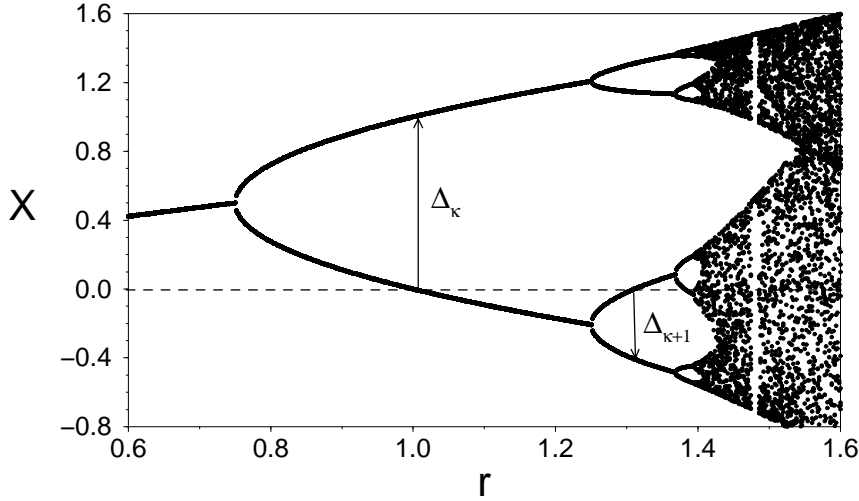


Рис. 2.2. Фазопараметрическая диаграмма режимов отображения (2.3)

$x_{n+1} = f_1(x_n) = a_0 f_0(f_0(x_n/a_0))$. Повторяя эту процедуру много раз, получаем *уравнение ренормализационной группы*:

$$f_{i+1}(x) = a_i f_i(f_i(x/a_i)), \tag{2.8}$$

где $a_i = 1/f_i'(f_i(0))$. В критической точке в силу свойств самоподобия существуют пределы

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f_i(x) = g(x), \quad \lim_{i \rightarrow \infty} a_i = a. \tag{2.9}$$

Функция $g(x)$ является неподвижной точкой функционального *уравнения Фейгенбаума-Цветановича*:

$$\hat{T}g(x) = ag(g(x/a)) = g(x), \tag{2.10}$$

где \hat{T} – оператор удвоения; $a = 1/g'(g(0))$. Для критической точки, соответствующей сценарию перехода к хаосу через удвоения периодов, граничными условиями уравнения (2.10) будут: $g(0) = 1$, $g'(0) = 0$. Функция $g(x)$ называется *универсальной*, поскольку она не зависит от конкретной формы исходного отображения и определяется только порядком экстремума. Она даёт асимптотическую форму 2^i -кратно применённого оператора эволюции в критической точке при $i \rightarrow \infty$ с учётом перенормировки динамической

переменной x . Входящая в уравнение неподвижной точки константа a также является универсальной. Найденное Фейгенбаумом численное решение уравнения (2.10) в предположении квадратичности экстремума и указанных граничных условий имеет вид

$$g(x) = 1 - 1.5276330x^2 + 0.1048152x^4 + 0.0267057x^6 - 0.0035274x^8 + 0.0000816x^{10} + 0.0000254x^{12} - 0.0000027x^{14}. \quad (2.11)$$

Универсальная константа Фейгенбаума a оказывается равной $-2.502907876\dots$

Если внести малое возмущение оператора эволюции $f(x_n)$, слегка отклонив значение параметра от критического, оператор удвоения \hat{T} и функция $g(x)$ также оказываются возмущёнными. Линеаризовав оператор \hat{T} в точке $g(x)$ при $r = r_{\text{кр}}$, получаем оператор \hat{L}_g , определяющий поведение возмущения, и уравнение для собственных функций $h(x)$ и собственных значений ρ линеаризованного оператора:

$$\hat{L}_g h(x) = a[g'(g(x/a))h(x/a) + h(g(x/a))] = \rho h(x). \quad (2.12)$$

Определяющую роль в поведении возмущения будут играть собственные значения, превышающие по модулю единицу. В случае квадратичного экстремума имеется одно такое значение, соответствующее неустранимой компоненте возмущения, и оно определяет вторую универсальную фейгенбаумовскую константу $\rho_1 = \delta = 4.6692016091\dots$

Отображения с неквадратичным экстремумом характеризуются другими значениями универсальных констант [22–25]. Однако в численных и натуральных экспериментах, проведённых для множества потоковых систем (в том числе распределённых) с фейгенбаумовским сценарием развития хаоса, масштабный множитель a и скорость сходимости бифуркационной последовательности δ в пределах ошибки эксперимента соответствовали значениям, полученным на основании теории Фейгенбаума для отображений с квадратичным экстремумом. Очевидно, в типичном случае отображение, порожаемое оператором эволюции потоковой системы в окрестности критической точки, близко к одномерному отображению с квадратичным экстремумом, другие же случаи являются нетипичными.

Универсальность сценария Фейгенбаума проявляется в поведении спектральных амплитуд субгармоник, возникающих при каждом удвоении периода. Так, отношение амплитуд субгармоник $\omega_0/2^k$

и $\omega_0/2^{k+1}$ в момент бифуркации удвоения периода цикла в пределе $k \rightarrow \infty$ является универсальной константой [6, 26].

Предельное множество точек одномерного отображения с квадратичным экстремумом, возникающее при $r = r_{cr}$, называется *аттрактором Фейгенбаума*. Аттрактор Фейгенбаума является странным, так как характеризуется дробной емкостной размерностью, но не хаотическим, поскольку ляпуновский показатель λ движения в критической точке равен нулю. Особенности поведения в закритической области $r > r_{cr}$ также обладают свойствами универсальности как для модельных отображений, так и для потоковых систем. Ляпуновский показатель, ставший в критической точке положительным, растёт по универсальному закону [27]

$$\lambda \sim \varepsilon^\gamma, \quad \gamma = \frac{\ln 2}{\ln \delta} \approx 0.4498, \quad (2.13)$$

где $\varepsilon = r - r_{cr}$ – параметр надкритичности. Коэффициент γ , по аналогии с теорией фазовых переходов 2-го рода, называется *критическим* индексом перехода к хаосу. На рис. 2.3 представлены полученные численно зависимости ляпуновского показателя от параметра для логистического отображения и двух старших показателей для ГИН.

За критической точкой в системах с фейгенбаумовским сценарием развития хаоса наблюдается каскад бифуркаций связанности. Бифуркация *связанности* представляет собой объединение частей (лент) хаотического аттрактора, посещаемых изображаю-

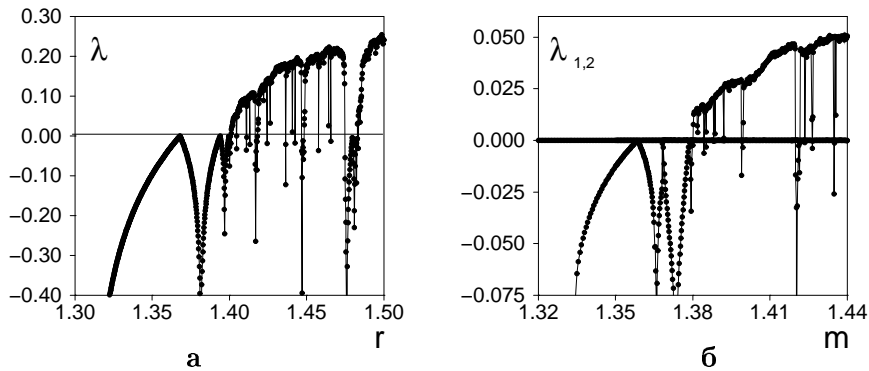


Рис. 2.3. Зависимости от параметра ляпуновского показателя λ для логистического отображения (а) и двух старших показателей для ГИН при $g = 0.2$ (б)

щей точкой в определённом порядке. При каждой бифуркации связанности в спектре исчезают соответствующие субгармоники. На рис. 2.4 приведены проекции фазовых траекторий и соответствующие спектры при бифуркациях связанности, рассчитанные для ГИН [8, 28]. Для одномерного отображения бифуркация связанности выглядит как объединение соседних интервалов, заполненных точками хаотической последовательности. Обозначим значения параметра, соответствующие бифуркациям связанности, как \bar{r}_k (индекс $k = 1, 2, \dots$ возрастает с приближением к критической точке справа налево). Расположение на оси значений r интервалов существования периодических аттракторов 2^i (2^i – период цикла

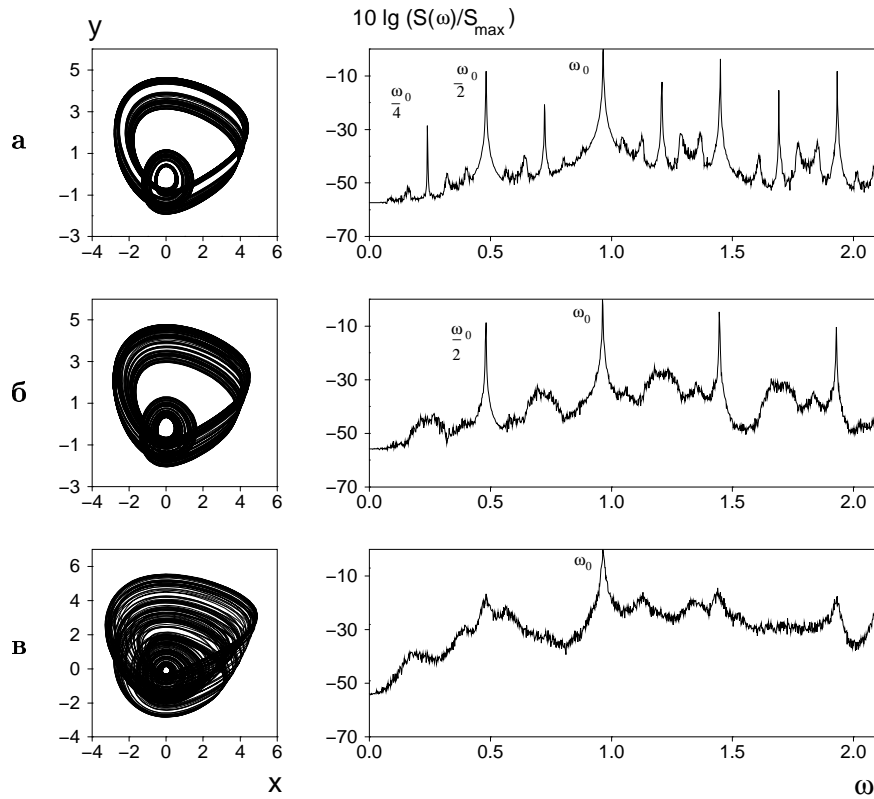


Рис. 2.4. Проекция фазовых траекторий и спектры при бифуркациях связанности в ГИН: (а) – четырёхсвязанный хаотический аттрактор; (б) – двухсвязанный хаотический аттрактор; (в) – односвязанный хаотический аттрактор (ω_0 – основная частота спектра, связанная с периодом T_0 порождающего цикла)

отображения) до критической точки и 2^i -связанных хаотических множеств за критической точкой обладает симметрией относительно критической точки. Фрагменты многосвязанных хаотических множеств в соответствующих точках каждого отрезка обладают свойством подобия с масштабными множителями, стремящимися к универсальной константе a . Скорость накопления значений \bar{r}_k к критической точке равна универсальной константе δ .

Кроме хаотических траекторий, логистическое отображение имеет в закритической области множество периодических траекторий с различными периодами. В работе А.Н. Шарковского 1964 г. устанавливается иерархия циклов гладкого необратимого отображения отрезка [29]. Цикл периода M считается более сложным, чем цикл периода N , если из существования M -цикла следует существование N -цикла. Говорят, что между периодами существует отношение порядка $M \rightarrow N$. Согласно теореме Шарковского, это отношение упорядочивает циклы следующим образом (так называемый *порядок Шарковского*):

$$\begin{aligned} 3 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 * 2 \rightarrow 5 * 2 \rightarrow 7 * 2 \rightarrow \dots \rightarrow 3 * 2^2 \rightarrow \\ \rightarrow 5 * 2^2 \rightarrow 7 * 2^2 \rightarrow \dots \rightarrow 2^3 \rightarrow 2^2 \rightarrow 2 \rightarrow 1. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Самым сложным в смысле Шарковского оказывается цикл периода 3. Из его существования следует существование циклов любого периода. К аналогичному результату независимо от Шарковского пришли Т. Ли и Дж. Йорк в 1975 г. [30]. Они также доказали, что из существования у отображения цикла периода 3 следует существование хаотических последовательностей и поэтому назвали свою работу “Период три рождает хаос”. Однако ни в теореме Шарковского, ни в теореме Ли–Йорка ничего не говорится об устойчивости циклов. Расположение областей устойчивости (*окон периодичности*) циклов различного периода в закритической области подчиняется следующей закономерности: 6, 5, 3, 6, 5, 6, 4, 6, 5, 6, ... Причём, хотя ширина окон и бифуркационные значения параметра, соответствующие границам окон, различны в различных ДС, закономерность в порядке их появления с ростом параметра надкритичности столь универсальна, что не зависит даже от порядка экстремума функции последования. Наиболее широкое окно устойчивости соответствует циклу периода 3, который возникает в результате касательной бифуркации и с ростом параметра претерпевает последовательность удвоений периода с образованием хаоса.

Аналогично возникают и эволюционируют в окнах устойчивости циклы с другими периодами. Вообще говоря, в закритической области в сколь угодно малой окрестности любого значения параметра существует окно устойчивости какого-либо цикла. Период цикла может быть столь велик, а окно устойчивости столь узко, что цикл невозможно наблюдать даже в численных экспериментах. Однако сам этот факт говорит о негрубости хаотического аттрактора, возникающего по сценарию Фейгенбаума по отношению к малым возмущениям, и о том, что он является квазиаттрактором. Зависимости ляпуновских показателей от параметра, представленные на рис. 2.3, также имеют типичный для квазиаттрактора вид.

2.1.3 Жёсткие переходы к хаосу. Кризис и перемежаемость

С развитием представлений о динамическом хаосе было установлено, что переход от периодических колебаний к хаосу может происходить скачком, в результате одной единственной бифуркации. Такой механизм возникновения хаоса называют *жестким*. Он сопровождается явлением *перемежаемости*. *Перемежаемостью* называют режим чередования во времени почти регулярных колебаний (*ламинарная фаза*) с интервалами хаотического поведения (*турбулентная фаза*), наблюдающийся сразу за порогом возникновения хаоса. Типичный вид колебаний в режиме перемежаемости приведён на рис. 2.5.

Жёсткий переход к хаосу и явление перемежаемости были впервые рассмотрены в работах И. Помо и П. Манневилья [31, 32], поэтому соответствующий бифуркационный механизм возникновения хаоса получил название *сценария Помо – Манневилья*.

При жёстком возникновении хаоса единственная бифуркация периодического режима приводит к резкой качественной перестройке структуры фазового пространства, включая структуру поглощающей области (бассейна притяжения аттрактора). Подобные бифуркации аттракторов называют *кризисами* [33, 34]. Как уже отмечалось в разделе 1.1, типичными кризисами периодического режима (предельного цикла) являются следующие локальные бифуркации коразмерности 1: касательная (седло-узловая) бифуркация, субкритическая бифуркация удвоения периода и субкритическая бифуркация рождения тора (бифуркация Андронова – Хопфа в

отображении). В случае касательной бифуркации устойчивый предельный цикл исчезает, сливаясь с седловым. В двух других случаях предельный цикл продолжает существовать и после бифуркации, но становится неустойчивым (седловым).

Пусть при $\alpha < \alpha_{cr}$ система имеет аттрактор – предельный цикл C . В результате любой из перечисленных бифуркаций в точке $\alpha = \alpha_{cr}$ аттрактор C перестаёт существовать. При $\alpha > \alpha_{cr}$ фазовые траектории из локальной окрестности исчезнувшего аттрактора C должны попадать на какой-то другой аттрактор, либо уже существовавший в системе при $\alpha < \alpha_{cr}$, либо возникающий в результате бифуркации. Пусть ДС уже имела другой аттрактор. Тогда в результате бифуркации наблюдается простое переключение с одного режима на другой. Перемежаемость при этом не возникает, даже если новый режим является хаотическим. Дело в том, что в этом случае кризис предельного цикла не служит причиной, порождающей хаотический аттрактор, а сам аттрактор не захватывает локальную окрестность цикла C . Траектории уходят из этой окрестности и не возвращаются. Каковы же условия, при которых кризис предельного цикла приводит к возникновению перемежающегося хаоса? Очевидно, это происходит в том случае, когда в бифуркационной точке $\alpha = \alpha_{cr}$ уже существует хаотическое множество, которое при $\alpha > \alpha_{cr}$ становится притягивающим и включает в себя локальную окрестность цикла C так, что фазовая траектория на хаотическом аттракторе время от времени в эту

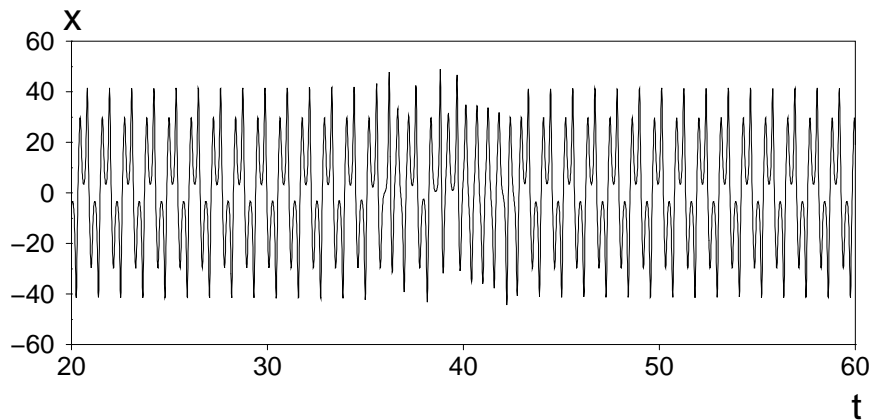


Рис. 2.5. Перемежаемость в системе Лоренца ($\dot{x} = \sigma(y - x)$, $\dot{y} = -xy + rx - y$, $\dot{z} = xy - bz$) при $r = 166.1$, $\sigma = 10$, $b = 8/3$

окрестность возвращается. Условием реализации такого поведения системы может явиться наличие у седлового предельного множества, участвующего в кризисе аттрактора C , гомоклинической траектории. В качестве примера на рис. 2.6 представлена касательная бифуркация циклов, приводящая к хаотической перемежаемости. Седловой цикл имеет пару грубых гомоклинических траекторий. В точке бифуркации $\alpha = \alpha_{cr}$ образуется негрубая седло-узловая орбита с гомоклинической структурой в её окрестности. Траектории удаляются от неё и приближаются к ней вдоль двоякоасимптотических гомоклинических кривых (им соответствуют точки пересечения многообразий в сечении, изображённом на рис. 2.6). При $\alpha > \alpha_{cr}$ негрубая замкнутая орбита исчезает, а непритягивающая гомоклиническая структура становится притягивающей. В фазовом пространстве ДС возникает хаотический аттрактор. Траектории на нём сгущаются в области, где существовала седло-узловая орбита, подолгу повторяя движение на ней, что соответствует ламинарной фазе перемежающегося хаоса.

Перемежаемость, связанная с касательной бифуркацией циклов, наиболее типична для широкого класса ДС [31, 32, 35]. Она была обнаружена и исследована раньше других случаев перемежаемости и получила название – *перемежаемость I типа*. Для анализа свойств перемежаемости I типа используется одномерное модельное отображение вида

$$x_{n+1} = f(x_n) = \varepsilon + x_n + \beta|x_n|^p + \text{“возврат”}. \quad (2.15)$$

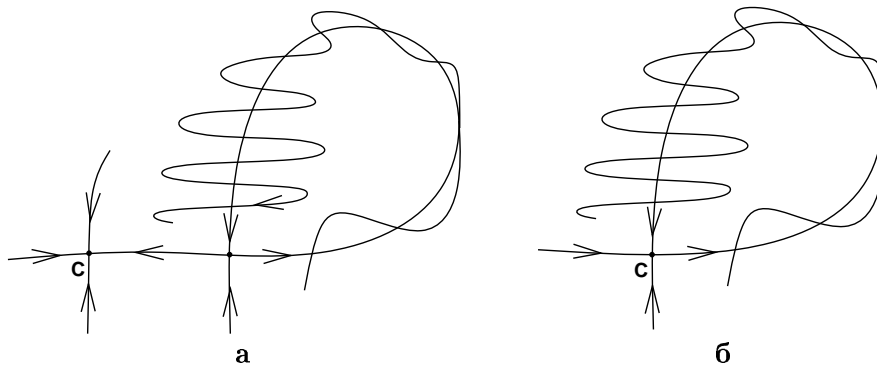


Рис. 2.6. Качественный вид сечений Пуанкаре для касательной бифуркации устойчивого и седлового циклов, приводящей к возникновению хаоса через перемежаемость: до бифуркации (а) и в точке бифуркации (б)

Параметр ε соответствует параметру надкритичности $\alpha - \alpha_{cr}$ системы, так как в (2.15) касательная бифуркация имеет место при $\varepsilon = 0$; p – целое число, определяющее порядок экстремума функции последования. Возврат изображающей точки в ограниченный интервал значений x может быть осуществлён различными способами. Например, для отображения, представленного на рис. 2.7, для возврата изображающей точки служит ветвь графика функции последования на отрезке AB . Отображение, приведенное на рис. 2.7а, соответствует моменту касательной бифуркации $\varepsilon = 0$. Пунктирные линии на графике представляют собой построение с помощью диаграммы Ламерея дwoякоасимптотической траектории седло-узловой точки. Отображение на рис. 2.7б соответствует случаю $\varepsilon \gtrsim 0$. В окрестности исчезнувшей неподвижной точки график функции последования образует так называемый *канал*, по которому изображающая точка движется довольно долго, что соответствует ламинарной фазе перемежаемости. Уход изображающей точки из канала определяет турбулентную фазу, в которой точка должна попасть на участок AB , обеспечивающий её возврат в канал.

Исследование отображений вида (2.15) выявляет определённые количественные закономерности перемежаемости I типа (например, характер зависимости средней длительности ламинарной фазы от параметра надкритичности), носящие универсальный характер в том смысле, что они не зависят от конкретного вида отоб-

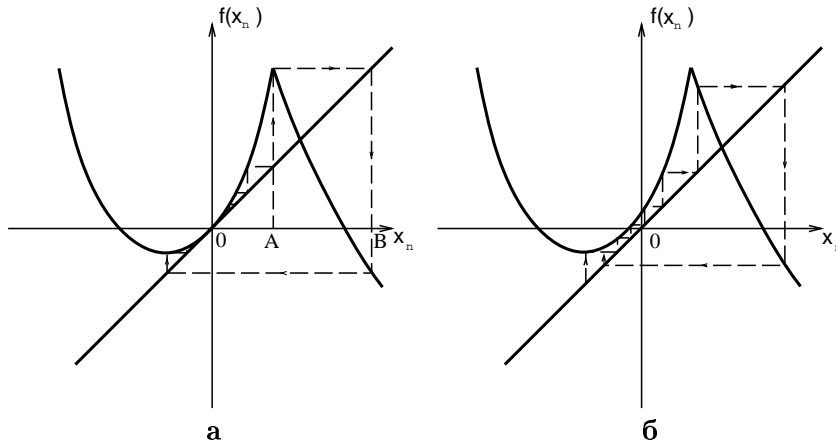


Рис. 2.7. Отображение, моделирующее перемежаемость I типа: (а) – в точке бифуркации; (б) – сразу после бифуркации

ражения и определяются порядком экстремума p . Для типичного случая $p = 2$ эти закономерности хорошо согласуются с результатами численных и экспериментальных исследований перемежаемости I типа в потоковых системах. К исследованию перемежаемости I типа был применён РГ метод [7]. Рассмотрим отображение в критической точке, ограничиваясь интервалом $x_n \in [0; 1]$, на котором отображение задано монотонной функцией вида $x_{n+1} = f_0(x_n)$, для которой $f_0(0) = 0$, $f'_0(0) = 1$. Применяя все те же рассуждения, что и в случае сценария Фейгенбаума, можно получить то же самое уравнение Фейгенбаума–Цветановича (2.10), но с другими граничными условиями: $g(0) = 0$; $g'(0) = 1$. РГ-анализ позволяет теоретически определить асимптотику поведения средней длительности ламинарной фазы:

$$T_1 \sim \varepsilon^{-\nu}, \quad \nu = \frac{p-1}{p}. \quad (2.16)$$

При $p = 2$ имеем $T \sim 1/\sqrt{\varepsilon}$, что хорошо согласуется с результатами многочисленных экспериментов.

Другие типы перемежаемости, как уже отмечалось, связаны с субкритической бифуркацией Андронова – Хопфа в сечении и субкритической бифуркацией удвоения периода цикла. Они называются, соответственно, *перемежаемостями II и III типа* [9]. Модельным отображением для *перемежаемости II типа* служит следующее отображение плоскости, задаваемое в полярных координатах:

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= (1 + \varepsilon)r_n + \beta r_n^3 + \text{“возврат”}, \\ \phi_{n+1} &= \phi_n + \Omega, \text{ mod } 1. \end{aligned} \quad (2.17)$$

При $\varepsilon = 0$ в отображении имеет место субкритическая бифуркация Андронова – Хопфа, которая представляет собой “влипание” неустойчивой инвариантной окружности в устойчивый фокус. Неустойчивая инвариантная окружность соответствует седловому тору в потоковой системе размерности $N \geq 4$. Данный тип перемежаемости характеризуется асимптотическим поведением средней длительности ламинарной фазы вида

$$T_1 \sim \frac{1}{\varepsilon}, \quad (2.18)$$

где $\varepsilon = \alpha - \alpha_{\text{cr}}$ – параметр надкритичности.

Переमेжаемость III типа может быть описана одномерным модельным отображением вида

$$x_{n+1} = -(1 + \varepsilon)x_n - \beta x_n^2 + \text{“возврат”}, \quad (2.19)$$

демонстрирующим при $\varepsilon = 0$ субкритическую бифуркацию удвоения периода 1-цикла. Данный тип перемежаемости наблюдался экспериментально [36]. Асимптотическое поведение средней длительности ламинарной фазы имеет тот же вид, что и в случае перемежаемости II типа.

2.1.4 Переход к хаосу через разрушение двухчастотных колебаний

Согласно сценарию Рюэля–Такенса–Ньюхауса переход от квазипериодических колебаний к хаосу происходит после рождения третьей частоты, когда на трёхмерном торе становится возможным появление неустойчивых по Ляпунову хаотических траекторий [3, 4]. Однако исследование конкретных динамических систем показало, что не менее типичным является переход к хаосу через разрушение двухчастотного квазипериодического движения. При этом двумерный тор T^2 в фазовом пространстве должен разрушаться, после чего траектории попадают на множество с фрактальной размерностью $2 + d$, $d \in [0; 1]$, образующееся в его окрестности и называемое *тор-хаосом* [37]. Такой сценарий можно рассматривать как особый случай перехода к хаосу через квазипериодическое движение.

В отличие от сценария Фейгенбаума, переход $T^2 \rightarrow CA$ требует двухпараметрического анализа. Это связано с тем обстоятельством, что характер квазипериодического режима зависит от числа вращения θ , определяющего отношение базовых частот колебаний. Если θ рационально, то имеет место резонанс на торе (и соответственно периодические колебания). При иррациональном значении числа вращения движение на торе будет эргодическим. Наблюдать переход от тора к хаосу при фиксированном значении числа вращения можно только контролируя, как минимум, два параметра системы одновременно. На линии рождения тора, задаваемой бифуркационным условием $\mu_{1,2} = \exp j\phi$, где $\mu_{1,2}$ – пара комплексносопряжённых мультипликаторов предельного цикла, число вращения определяется как $\theta = \phi/2\pi$. Области резонансов на плоскости

двух управляющих параметров имеют форму языков, опирающихся острым концом на соответствующие точки линии рождения тора. Эти области называют *языками* или *клювами Арнольда* (в честь В.И. Арнольда, исследовавшего структуру резонансных областей [38, 39]). Для каждого выбранного пути движения в пространстве параметров характерна своя последовательность бифуркаций, связанных с возникновением и исчезновением различных резонансов на торе.

Теорема о разрушении двумерного резонансного тора Для понимания механизмов разрушения двумерного тора и рождения тор-хаоса очень важны результаты, полученные математиками в рамках качественной теории динамических систем. Л.П. Шильниковым и В.С. Афраймовичем доказана теорема о разрушении двумерного тора T^2 с резонансной структурой на нём и указаны возможные пути возникновения хаотической динамики [40, 41].

Рассмотрим N -мерную ДС ($N \geq 3$)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \alpha), \quad (2.20)$$

где компоненты вектор-функции \mathbf{F} , $j = 1, 2, \dots, N$, принадлежат классу гладкости C^k , $k \geq 3$; α – вектор параметров системы. Предположим следующее:

1. При $\alpha = \alpha_0$ система (2.20) в некоторой области фазового пространства имеет гладкий притягивающий тор $T^2(\alpha_0)$ с грубой структурой на нём, состоящей из устойчивого и седлового циклов, что соответствует области резонансного клюва. Поверхность резонансного тора образуется замыканием неустойчивого многообразия W^u седлового цикла $C^{sd}(\alpha_0)$ на устойчивый цикл $C^{st}(\alpha_0)$, то есть $T^2(\alpha_0) = W^u(\alpha_0) \cup C^{st}(\alpha_0)$. Сечение резонансного тора изображено на рис. 2.8а. Пусть при $\alpha = \alpha_1$ инвариантного тора не существует. Тогда для непрерывной кривой $\alpha(s)$, где $s \in [0, 1]$, $\alpha(0) = \alpha_0$, $\alpha(1) = \alpha_1$, существует такое значение $s = s^*$, что в точке $\alpha(s^*)$ тор разрушается, и, по крайней мере, для некоторых сколь угодно близких к s^* значений $s > s^*$ система (2.20) не имеет тора T^2 ;
2. Пусть при всех $0 \leq s < s^*$ притягивающее множество системы (2.20) совпадает с тором $T^2(\alpha(s))$;
3. Пусть при $s > s^*$ неустойчивое многообразие седлового цикла $W^u(\alpha(s))$ не содержит периодических движений, отличных от C^{st} и C^{sd} .

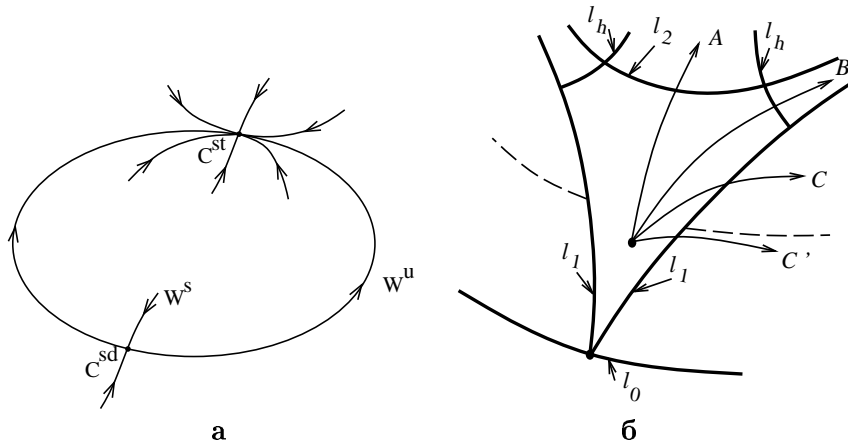


Рис. 2.8. Сечение резонансного тора T^2 (а) и качественная бифуркационная диаграмма разрушения тора T^2 (б). Пути, соответствующие различным механизмам разрушения, обозначены буквами A, B, C

В сделанных предположениях справедлива *теорема о разрушении тора*, согласно которой тор T^2 разрушается одним из следующих трёх способов: 1) в связи с потерей устойчивости циклом C^{st} ; 2) в результате возникновения гомоклинического касания неустойчивого (W^u) и устойчивого (W^s) многообразий седлового цикла C^{sd} ; 3) в результате касательной бифуркации циклов C^{st} и C^{sd} на торе. Перед тем как разрушиться, тор при $s > s^{**}$ теряет гладкость, то есть $T^2(\alpha(s > s^{**}))$ *гомеоморфен*, но не *диффеоморфен* тору.

На рис. 2.8б приведён качественный вид клюва Арнольда на плоскости параметров α_1 и α_2 и указаны направления A, B, C отвечающие трём механизмам разрушения резонансного тора в соответствии с теоремой. На диаграмме использованы следующие обозначения: l_0 – линия рождения тора; l_1 – линии касательной бифуркации циклов на торе, определяющие границы области синхронизации; l_2 – линия потери устойчивости резонансным циклом C^{st} в области синхронизации; l_h – линия гомоклинического касания многообразий W^u и W^s . Пунктиром нанесена условная граница разрушения тора вне рассматриваемой резонансной области (в действительности она имеет сложную фрактальную структуру). Направление C' соответствует случаю, когда в результате касательной бифуркации на линии l_1 резонансный тор не разрушается, а становится эргодическим.

При движении по направлению A на линии l_2 цикл C^{st} теряет устойчивость либо вследствие бифуркации удвоения периода, либо

вследствие бифуркации рождения тора из цикла C^{st} . Резонансный тор T^2 теряет гладкость, когда мультипликаторы цикла становятся комплексно-сопряжёнными или один из мультипликаторов – отрицательным. В момент бифуркации длина инвариантной кривой в сечении тора становится бесконечной (рис. 2.9а), что означает разрушение тора. При дальнейшем движении по направлению A может образоваться хаотический аттрактор либо в результате последовательности бифуркаций удвоения периода, либо через разрушение тора, родившегося на линии l_2 .

При движении по направлению B неустойчивое многообразие седлового цикла W^u , образующее поверхность тора, искривляется и на линии l_h происходит его гомоклиническое касание с устойчивым многообразием W^s (рис. 2.9б). В этот момент ($s = s^*$) образуется негрубая гомоклиническая кривая Γ_0 , а тор T^2 разрушается. При $s > s^*$ возникают две грубые гомоклинические кривые и гомоклиническая структура циклов и хаотических траекторий в их окрестности. Однако аттрактором остаётся цикл C^{st} , а хаотическая динамика может возникнуть только в том случае, если он исчезнет или потеряет устойчивость. Так, при пересечении границы области синхронизации выше линии l_h наблюдается переход к хаосу, сопровождающийся перемежаемостью I типа.

Направление C также соответствует искажению многообразия W^u при подходе к устойчивому циклу C^{st} . Разрушение тора происходит при переходе через линию касательной бифуркации l_1 . Пусть в момент бифуркации инвариантная кривая в сечении тора стала негладкой (рис. 2.9в). Это означает, что при последовательном применении отображения Пуанкаре образ малой окрестности

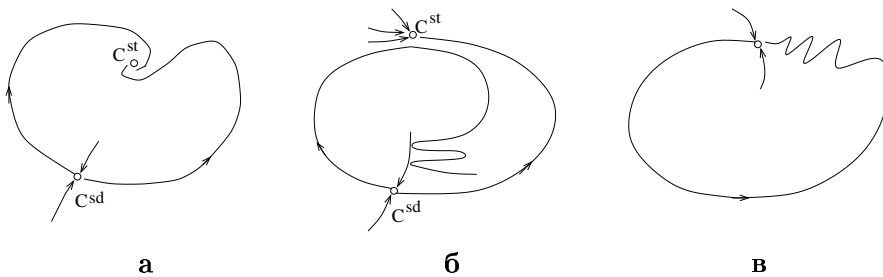


Рис. 2.9. Качественный вид инвариантной кривой в сечении в момент разрушения тора T^2 при движении по направлениям A, B, C (соответственно **а**, **б** и **в**, указанным на рис. 2.8б)

некоторого куска неустойчивой сепаратрисы седло-узла изогнут, как подкова. Исчезновение седло-узла приводит к возникновению в его окрестности отображения типа подковы Смейла, порождающего счётное множество седловых циклов и непрерывное множество непериодических гиперболических траекторий, которые при некоторых дополнительных условиях могут сформировать хаотический аттрактор.

Таким образом, рассмотренные в теореме механизмы разрушения резонансного тора приводят к образованию в окрестности тора хаотического множества, которое может стать притягивающим. Хаотический аттрактор порождается отображением типа подковы с гладким изгибом и является квазиаттрактором [42, 43]. Описанные механизмы возникновения хаоса связаны с бифуркациями резонансных циклов на торе. Они не ведут к резкой перестройке поглощающей области и поэтому составляют бифуркационный механизм мягкого перехода к хаосу. Общий характер выводов теоремы о разрушении тора был подтверждён численными и натурными экспериментами для широкого класса дискретных и потоковых систем [44–51]. Если в эксперименте попытаться проследить за эволюцией инвариантной кривой в сечении тора, изменяя параметры таким образом, чтобы число вращения оставалось иррациональным, можно увидеть следующее: перед разрушением форма инвариантной кривой в сечении эргодического тора искажается, повторяя форму неустойчивого многообразия седлового резонансного цикла [50]. Затем происходит потеря гладкости и разрушение эргодического тора, но хаос возникает не сразу, так как в окрестности разрушившегося тора с иррациональным числом вращения в фазовом пространстве $ДС$ существуют ещё не разрушившиеся резонансные торы, которые являются аттракторами системы. Таким образом, переходу к хаосу всегда предшествует резонанс на T^2 . Линия разрушения тора на плоскости двух управляющих параметров имеет сложную структуру. Она состоит из счётного множества отрезков линий, на которых происходит разрушение резонансного тора в соответствии с указанными теоремой механизмами, и множества точек разрушения эргодического тора, имеющих совокупную нулевую меру.

Отображение окружности. Универсальные закономерности мягкого перехода от квазипериодических колебаний к хаосу Движение на двумерном торе в общем случае моделируется

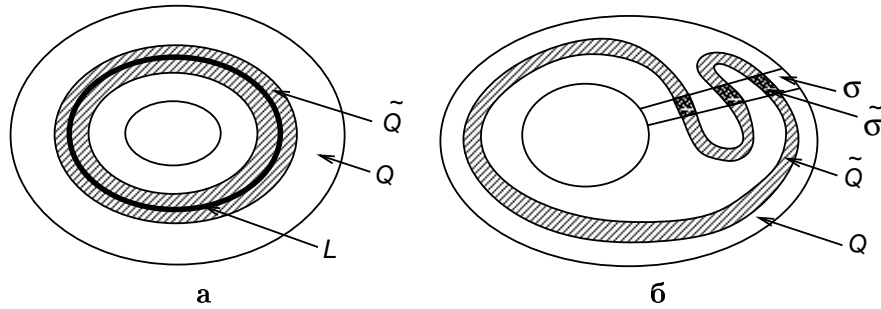


Рис. 2.10. Отображение кольца в случае существования инвариантной замкнутой кривой L (а) и образования локального отображения типа подковы (б)

изоморфным диссипативным отображением кольца Q в себя. Для различных значений параметров отображения возможны следующие случаи [52]:

1. Внутри кольца существует замкнутый контур L (рис. 2.10а), преобразующийся в себя (т.е. инвариантная замкнутая кривая отображения, соответствующая двумерному тору в потоковой системе); на контуре L можно задать новое отображение, которое будет одномерным и гомеоморфным отображению окружности:

$$\phi_{n+1} = \Phi(\phi_n, \alpha), \quad \text{mod } 1, \quad (2.21)$$

где α – векторный параметр отображения окружности;

2. Возникает отображение типа подковы, порождающее счетное множество периодических и непрерывное множество непериодических гиперболических траекторий. Такая структура образуется тогда, когда некоторая часть области Q (обозначим её σ) преобразуется в $\tilde{\sigma}$, как показано на рис. 2.10б. Замкнутый контур L в этом случае не существует, а модельное отображение (2.21) становится необратимым.

Наиболее часто отображение окружности задаётся в виде

$$\phi_{n+1} = \Phi(\phi_n, \Omega, K) = \phi_n + \Omega - \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi\phi_n), \quad \text{mod } 1, \quad (2.22)$$

где угол ϕ определён в интервале $[0; 1]$; $K \geq 0$ и $\Omega \in [0; 1]$ – параметры отображения. Вообще говоря, форма задания функции

$\Phi(\phi)$ почти не существенна (как и в случае с логистическим отображением), но должны выполняться следующие условия: 1) $\Phi(\phi + 1) = 1 + \Phi(\phi)$; 2) при $K < K_{\text{cr}}$ функция $\Phi(\phi)$ и обратная функция $\Phi^{-1}(\phi)$ существуют и дифференцируемы (т.е. отображение есть диффеоморфизм окружности); 3) при $K = K_{\text{cr}}$ функция $\Phi^{-1}(\phi)$ теряет дифференцируемость в точке $\phi = 0$, а при $K > K_{\text{cr}}$ не существует однозначной обратной функции. Для (2.22) все эти условия выполняются, причём $K_{\text{cr}} = 1$.

Динамика точки в отображении окружности характеризуется числом вращения θ :

$$\theta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi^n(\phi_0) - \phi_0}{n}. \quad (2.23)$$

Оно представляет собой средний угол поворота изображающей точки на окружности за одну итерацию. Для гладкого взаимно однозначного отображения (т.е. в случае $0 \leq K < 1$) предел (2.23) существует и не зависит от начальной точки ϕ_0 . Из этого факта следует, что при иррациональном значении числа вращения θ отображение (2.22) не имеет неподвижных точек, а при рациональном значении $\theta = p/q$ (где p и q взаимно простые числа) отображение окружности имеет чётное число устойчивых и неустойчивых неподвижных точек кратности q , т.е., по крайней мере, один устойчивый и один неустойчивый q -цикл отображения. Числитель p определяет число полных оборотов по окружности за q итераций. Резонансная структура, соответствующая рациональному значению числа вращения, является грубой [53]. Каждое рациональное значение θ сохраняется неизменным в некоторой области изменения параметров (в клюве Арнольда). Зависимость числа вращения от параметра Ω называется “чёртовой лестницей” и представляет собой фрактальную кривую, состоящую из бесконечного числа “ступенек”, соответствующих рациональным значениям θ , и множества отдельных точек, соответствующих иррациональным значениям θ . При $K = 0$ число вращения для (2.22) совпадает с параметром Ω и имеет множество рациональных значений меры нуль. При $0 \leq K < 1$ мера как рациональных, так и иррациональных значений числа вращения отлична от нуля. С ростом K мера рациональных значений растёт, а иррациональных – убывает, обращаясь в нуль на критической линии $K = 1$ (сумма длин всех ступенек равна единице). Однако при $K = 1$ ещё имеется счётное множество точек с иррациональными значениями числа вращения.

При $K > 1$ отображение окружности не имеет квазипериодических траекторий. Зависимость $\theta(\Omega)$ становится неоднозначной, что соответствует перекрытию клювов Арнольда. В закритической области отображение окружности описывает резонансы на торе и хаотические движения в окрестности разрушившегося тора T^2 . Оно демонстрирует указанные в теореме сценарии разрушения тора и возникновения хаотической динамики. В клювах Арнольда устойчивый резонансный цикл теряет устойчивость на линии удвоения периода. В каждом клюве наблюдается переход к хаосу по сценарию Фейгенбаума. В областях перекрытия резонансов имеют место кризисы, приводящие к объединению хаотических аттракторов, возникших на базе различных резонансных циклов. В результате объединения хаотических множеств формируется тор-хаос. Диаграмма режимов отображения (2.22) на плоскости параметров отражает сложную самоподобную структуру языков Арнольда (рис. 2.11) [54].

При разрушении эргодических квазипериодических движений отображение (2.22) демонстрирует некоторые количественные закономерности универсального характера, т.е. не зависящие от конкретного вида функции $\Phi(\phi)$, если она удовлетворяет перечисленным ранее условиям [55, 56]. Однако эти закономерности зависят от выбранного значения числа вращения.

Иррациональное число раскладывается в *непрерывную цепную дробь* [38]:

$$\theta = \frac{1}{m_1 + \frac{1}{m_2 + \frac{1}{\dots}}} = \langle m_1, m_2, \dots, m_k, \dots \rangle. \quad (2.24)$$

Если ограничиться k первыми членами разложения, то получается рациональное число $\theta_k = p_k/q_k$, называемое *рациональной аппроксимацией* числа θ порядка k . Тогда иррациональное число можно представить как предел последовательности рациональных чисел:

$$\theta = \lim_{k \rightarrow \infty} \theta_k. \quad (2.25)$$

Наиболее простое представление в виде периодической цепной дроби имеет иррациональное число, называемое *золотым сечением*¹: $\theta_g = 0.5(\sqrt{5} - 1) = \langle 1, 1, 1, \dots \rangle$.

¹ Для золотого сечения p_k и q_k есть последовательные члены основного ряда Фибоначчи: $p_k = F_k$, $q_k = F_{k+1}$. Ряды Фибоначчи определяются рекуррент-

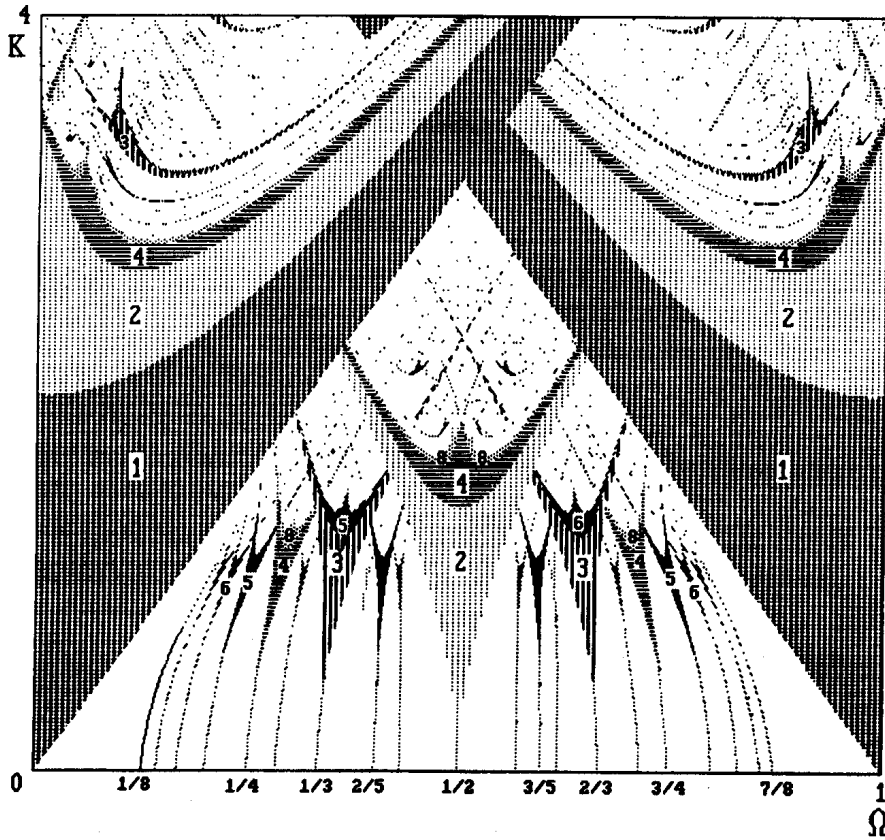


Рис. 2.11. Диаграмма режимов отображения окружности. Штриховкой выделены области периодических режимов; соответствующие периоды обозначены цифрами [54]

Для иррациональных значений θ , имеющих периодическое (хотя бы начиная с некоторого m_k) разложение в цепную дробь, характерны определенные закономерности. Пусть $\Omega_k(K)$ – значение параметра Ω при фиксированном K , для которого $\theta = \theta_k$, и точка $\phi = 0$ принадлежит устойчивому циклу периода q_k . То есть Ω_k определяется соотношением $\Phi^{q_k}(0, \Omega_k, K) = p_k$, где Φ^{q_k} – q_k раз приращенная функция. Величины Ω_k сходятся к некоторому значению $\Omega_\infty(\theta, K)$ по закону геометрической прогрессии со скоростью δ :

ной формулой $F_{k+1} = F_{k-1} + F_k$, где (F_0, F_1) – основание ряда. Основной ряд имеет основание $(0,1)$. Соответственно $\theta_g = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{F_k}{F_{k+1}}$.

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Omega_k - \Omega_{k-1}}{\Omega_{k+1} - \Omega_k}. \quad (2.26)$$

Величина δ является универсальной константой, определяемой значениями θ и K . Для золотого сечения было получено: $\delta = -2.6180339\dots = -\theta_g^{-2}$ при $K < K_{\text{cr}}$ и $\delta = -2.83362\dots$ при $K = K_{\text{cr}}$.

Для масштаба, определяемого величиной $d_k = \Phi_{\Omega_k}^{q_k-1}(0, \Omega_k, K) - p_{k-1}$, существует предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d_k}{d_{k+1}} = a, \quad (2.27)$$

где a – универсальная константа. Для $\theta = \theta_g$ было получено: $a = -1.618\dots = -\theta_g^{-1}$ при $K < K_{\text{cr}}$ и $a = -1.28857\dots$ при $K = K_{\text{cr}}$.

Спектр траекторий отображения окружности в критической точке $K = K_{\text{cr}}$ также обладает рядом универсальных свойств. Если θ можно представить в виде периодической цепной дроби, то спектр обладает свойством *скейлинга*. Для $\theta = \theta_g$ частоты спектральных компонент, приведённые к интервалу $[0;1]$, удовлетворяют соотношению

$$\nu = |F_{k+1}\theta_g - F_k|, \quad (2.28)$$

где F_k, F_{k+1} – последовательные члены одного из рядов Фибоначчи. Спектральные серии, расположенные в порядке убывания амплитуд спектральных линий, соответствуют рядам Фибоначчи с основаниями: главная серия – (0,1); 2-я серия – (2,2); 3-я серия – (1,3); 4-я серия – (3,3); 5-я серия – (1,4); 6-я серия – (2,5) и т.д. Для линий каждой серии приведённая спектральная мощность имеет предел при $j \rightarrow \infty$:

$$S_i = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{S_i^j}{\nu^2(j)} = \text{const}. \quad (2.29)$$

Нормированный спектр $a_i^j = S_i^j / (S_1^1 \nu^2(j))$, представленный в координатах $\log a_i^j - \log \nu$, разбивается на идентичные интервалы, заключённые между соответствующими линиями каждой серии.

Вышеперечисленные и другие количественные закономерности разрушения двухчастотных квазипериодических режимов оказываются характерными не только для модельных одномерных отображений, но и для обратимых отображений размерности $N \geq 2$ и потоковых систем. Они наблюдались (в пределах достижимой

точности) в натуральных экспериментах и при компьютерном моделировании различных ДС [49, 51, 57, 58].

Для анализа отображений типа (2.22) был применён метод ренорм-группы [56, 59–63]. Так, для $\theta = \theta_g$ можно получить функциональное уравнение неподвижной точки:

$$\Phi^*(\phi) = a\Phi^*(a\Phi^*(\phi/a^2)), \quad (2.30)$$

где $\Phi^*(\phi + 1) = \Phi^*(\phi) + 1$. Его решение $\Phi^*(\phi)$ есть универсальная функция, а масштабный множитель a является универсальной константой. Уравнение (2.30) имеет линейное решение $\Phi^*(\phi) = \phi - 1$. Ему соответствуют значения $a_{1,2} = 0.5(\pm\sqrt{5} - 1)$. Численно найденное при $K < K_{cr}$ значение масштабного множителя совпадает с решением $a_2 = 0.5(-\sqrt{5} - 1) = -\theta_g^{-1} \approx -1.618$. При $K = K_{cr}$ линейное решение не удовлетворяет (2.30). Поскольку $\Phi(\phi)$ имеет в нуле кубическую точку перегиба, универсальная функция $\Phi^*(\phi)$ должна содержать кубическое слагаемое ϕ^3 . Нетривиальная функция такого типа была получена численно в виде

$$\Phi^*(\phi) = 1 + c_1\phi^3 + c_2\phi^6 + \dots \quad (2.31)$$

Найденное значение константы a согласуется с численно полученными результатами. Линеаризованное уравнение в неподвижной точке в качестве одного из собственных значений имеет величину, совпадающую с численно найденной по формуле (2.26) константой. Это объясняет универсальный характер константы δ . Результаты, полученные методом ренорм-группы для $\theta = \theta_g$, были обобщены на случай произвольного иррационального числа вращения, которое можно представить в виде периодической цепной дроби. При этом вид функции $\Phi^*(\phi)$ и значения констант a и δ , естественно, зависят от значения θ [62].

2.1.5 Переход к хаосу через трёхмерный тор. Хаос на трёхмерном торе. Хаотические нестранные аттракторы

В предыдущем параграфе рассматривался квазипериодический сценарий возникновения хаоса, который не предусматривал появления третьей независимой частоты колебаний. Следовательно, описанный сценарий может иметь место в потоковых системах с размерностью фазового пространства $N = 3$. Однако такой сценарий не исключает возможности рождения в системе третьей, четвёртой

и т.д. независимых частот, если это допускает размерность фазового пространства. Многочастотные квазипериодические режимы наблюдались и исследовались во многих численных и экспериментальных работах [5, 64–66]. Таким образом, для систем с размерностью $N \geq 4$ сценарий Рюэля–Такенса–Ньюхауса вполне реален. Однако теоремы, доказанные в работах Рюэля, Такенса и Ньюхауса, ничего не говорят о конкретных бифуркационных последовательностях, приводящих к хаосу. Утверждается только, что малое возмущение квазипериодического движения на трёхмерном торе T^3 может приводить к рождению странного аттрактора (СА). Причём СА принадлежит потоку на T^3 (т.е. тор не разрушается).

Численные исследования перехода от трёхчастотных квазипериодических колебаний к хаосу показали, что он во многом подобен переходу к хаосу через квазипериодические движения на T^2 [67–72]. Для визуализации эволюции T^3 в потоковой системе используют двойное сечение Пуанкаре. В дискретной системе трёхчастотным квазипериодическим движениям соответствует инвариантный двумерный тор T^2 . Применив сечение Пуанкаре для отображения, можно получить инвариантную замкнутую кривую, соответствующую T^3 в потоковой системе. Исследования показали, что инвариантная кривая в двойном сечении T^3 ведёт себя подобно инвариантной кривой в сечении T^2 [71]. Возникновению хаоса предшествует искажение формы кривой и резонансы на T^3 .

Движения на T^3 часто моделируют с помощью обратимых отображений единичного квадрата, исходя из следующих соображений: сечение потока на трёхмерном торе порождает отображение двумерного тора в себя, которое можно представить в виде

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \Phi(x_n, y_n), \text{ mod } 1, \\ y_{n+1} &= \Psi(y_n, x_n), \text{ mod } 1. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Фазовым пространством такого отображения является квадрат со стороной, равной единице, представляющий собой развёртку двумерного тора. Если отображение обратимо, оно может соответствовать некоторому потоку на T^3 . Если отображение при некоторых значениях параметров перестаёт быть обратимым, значит, происходит разрушение T^3 . Регулярные режимы на T^3 характеризуются двумя числами вращения, определяющими соотношение трёх базовых частот. Для отображения (2.32) они вводятся как

$$\begin{aligned}\theta_x &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi^n(x_n, y_n)}{n}, \\ \theta_y &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Psi^n(x_n, y_n)}{n}.\end{aligned}\quad (2.33)$$

На T^3 могут иметь место *частичные* и *полные* резонансы. Частичные резонансы наблюдаются, когда только одно из чисел вращения становится рациональным, а второе остаётся иррациональным, или когда оба числа вращения иррациональны, но кратны между собой. В этом случае на T^3 существуют резонансные двумерные торы. Если оба числа вращения рациональны, имеет место полный резонанс, и на T^3 возникают периодические орбиты. Однако пределы (2.33) не всегда существуют и однозначны. В отличие от отображения окружности отображение тора (2.32) может обладать хаотической динамикой, оставаясь обратимым. Этот факт рассматривается как свидетельство возможности хаоса на трёхмерном торе.

Наиболее популярной моделью динамики на T^3 является отображение тора, представляющее собой два отображения окружности, связанных следующим образом:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + \Omega_x - \frac{K}{2\pi} \sin 2\pi y_n, \text{ mod } 1, \\ y_{n+1} &= y_n + \Omega_y - \frac{K}{2\pi} \sin 2\pi x_n, \text{ mod } 1.\end{aligned}\quad (2.34)$$

Оно моделирует динамику фаз трёх взаимодействующих осцилляторов. Параметры Ω_x и Ω_y имеют смысл расстроек по частотам и управляют числами вращения θ_x и θ_y . K характеризует степень нелинейного взаимодействия. При $K < 1$ отображение (2.34) является диффеоморфизмом. При $K > 1$ оно становится необратимым, что соответствует разрушению T^3 . С ростом K мера эргодических трёхчастотных движений убывает, а мера частичных и полных резонансов возрастает. Наблюдаются различные хаотические режимы (ещё при $K < 1$). Бифуркации отображения (2.34) при $K < 1$, связанные с резонансными неподвижными точками и инвариантными кривыми, теоретически и численно исследовались в работе [73]. Были выделены три типа хаоса на T^3 : *сжимаемый* (contractible), *вращательный* и *торoidalный*. Разные типы хаоса связаны с различным поведением многообразий седловых непо-

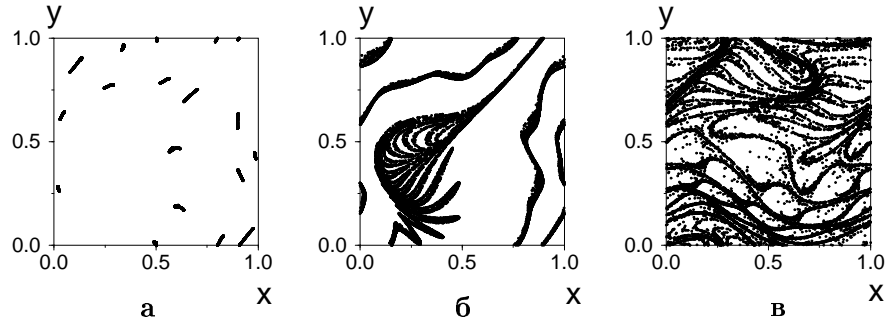


Рис. 2.12. Типы хаоса в отображении (2.34): (а) – сжимаемый; (б) – вращательный; (в) – тороидальный

движных точек в областях полной синхронизации и, соответственно, с разным поведением пределов (2.33) [73]. На рис. 2.12 представлены фазовые портреты различных хаотических аттракторов отображения (2.34).

Тороидальный хаос может развиваться в эргодический хаотический аттрактор, точки которого всюду плотно заполняют поверхность тора. Такой аттрактор характеризуется целой ёмкостной размерностью и поэтому его называют *хаотическим нестранным аттрактором* [74]. Подобные режимы наблюдались численно в системе связанных отображений окружности [75].

Хаотической динамикой обладают многие консервативные (сохраняющие площадь) диффеоморфизмы тора. Например, тороидальный хаос (в данном случае нельзя говорить об аттракторе), заполняющий всю поверхность тора, демонстрирует известное *отображение Арнольда*, часто называемое *отображением кошки* (*cat map*) [76]:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + y_n, \text{ mod } 1, \\y_{n+1} &= x_n + 2y_n, \text{ mod } 1.\end{aligned}\quad (2.35)$$

Отображение Арнольда (2.35) является *грубой гиперболической системой* (*У-каскад Аносова*). Возмущение системы (2.35) в виде добавки в первое уравнение нелинейного слагаемого $\delta \sin 2\pi x_n$ приводит к диссипативному отображению

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + y_n + \delta \sin 2\pi x_n, \text{ mod } 1, \\y_{n+1} &= x_n + 2y_n, \text{ mod } 1,\end{aligned}\quad (2.36)$$

являющемуся обратимым при $\delta < 1/2\pi$. Как было показано Я.Г. Си-наем [77] для малых δ , отображение (2.36) имеет хаотический аттрактор с целой ёмкостной размерностью $D_C = 2$. Устойчивое и неустойчивое многообразия седловых неподвижных точек отображения Арнольда огибают поверхность тора, пересекаясь трансверсально, так что касаний нигде не возникает. Такое поведение многообразий сохраняется для возмущённого отображения (2.36) при малых δ . Следовательно, хаотический аттрактор в (2.36) является примером грубого гиперболического аттрактора.

Таким образом, на трёхмерном торе возможны различные типы хаотического поведения, в том числе и такие необычные, как хаотические нестранные аттракторы. Однако имеющиеся результаты касаются отображений на двумерном торе. Вопрос о том, насколько такие отображения отражают поведение потока на T^3 , остаётся открытым. Во всяком случае попытка обнаружить хаотические аттракторы, принадлежащие T^3 , при численном моделировании потоковой системы типа связанных осцилляторов, предпринятая в [78], окончилась неудачей. До настоящего времени хаотическое движение на T^3 не обнаружено. Более типичным является разрушение T^3 , предшествующее возникновению хаоса. Однако всё же возможность существования хаоса на трёхмерном торе нельзя исключать.

Квазипериодический сценарий перехода к хаосу в многомерных системах допускает появление четвёртой, пятой и т.д. независимых частот колебаний. Однако, в силу нелинейного взаимодействия колебательных мод системы, мера эргодических многочастотных режимов крайне мала и переход к хаосу, как правило, связан с возникновением резонансных структур на многомерных торах.

2.1.6 Переход к хаосу через разрушение эргодического тора. Странные нехаотические аттракторы

Ранее отмечалось, что при квазипериодическом сценарии перехода к хаосу важнейшую роль играют резонансные явления, всегда предшествующие формированию хаотического множества. Однако можно выделить целый класс систем, для которых эргодическое квазипериодическое движение является грубым, а переход к хаосу не сопровождается возникновением резонансных периодических движений. Этот класс составляют системы с квазипериодическим воздействием. Квазипериодическое воздействие с фиксированным

иррациональным соотношением частот “навязывает” системе иррациональное число вращения, не зависящее от внутренних параметров системы. Рассмотрим простейший случай: одна из частот воздействия совпадает с собственной частотой периодических колебаний системы. При этом в области синхронизации собственных колебаний наблюдается грубый квазипериодический двухчастотный режим с фиксированным значением числа вращения, которое задаётся извне и предполагается иррациональным. Меняя параметры системы и амплитуду воздействия, можно добиться разрушения двумерного тора T^2 и перехода к хаосу. Сценарий перехода от эргодического тора к хаосу имеет свои особенности по сравнению с ранее рассмотренным случаем разрушения тора с произвольно меняющимся числом вращения. Многочисленные исследования потоковых систем и отображений с квазипериодическим воздействием [74, 79–84] показали, что для таких систем типичен режим так называемого странного нехаотического аттрактора (СНА). СНА представляет собой притягивающее предельное множество ДС, не являющееся многообразием. Особенностью этого множества является отсутствие разбегания фазовых траекторий при наличии фрактальной геометрии.

Для изучения механизмов перехода от эргодического тора к хаосу удобно использовать модельные отображения с квазипериодическим воздействием, представляя их в автономном виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{F}(\mathbf{x}_n, \phi_n, \boldsymbol{\alpha}), \\ \phi_{n+1} &= \phi_n + \theta, \text{ mod } 1, \end{aligned} \quad (2.37)$$

где $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^N$ – вектор состояний автономной системы; $\mathbf{F} \in \mathbf{R}^N$ – периодическая по аргументу ϕ функция с периодом 1; $\boldsymbol{\alpha}$ – векторный параметр системы; ϕ – фаза воздействия; θ – число вращения. Воздействие является квазипериодическим, если θ – иррационально. Обычно число вращения фиксируют равным золотому сечению $\theta = 0.5(\sqrt{5} - 1)$. Наиболее просто использовать одномерные отображения ($N = 1$). Двумерному тору в (2.37) соответствует инвариантная замкнутая кривая. Изображающие точки всюду плотно заполняют эту кривую, поскольку θ – иррационально. Так как на торе не возникает резонансной структуры и нет необходимости контролировать значение числа вращения, то бифуркационные механизмы разрушения T^2 и возникновения хаоса в этом случае допускают

однопараметрический анализ. Поэтому будем считать α скалярной величиной.

Пусть при $\alpha = \alpha_0$ существует эргодический тор T^2 с жёстко фиксированным иррациональным числом вращения, а при $\alpha = \alpha_1$ существует хаотический аттрактор СНА. Каков сценарий перехода к хаосу в этом случае? Исследования показали, что разрушение грубого эргодического T^2 первоначально приводит к возникновению СНА, который затем преобразуется в хаотический аттрактор [80, 82–85]. В отображении первоначально наблюдаются искажения формы инвариантной кривой, ведущие к потере гладкости. Резонансный тор по теореме Афраймовича–Шильникова [41] перед разрушением тоже теряет гладкость. Но это происходит на конечном множестве неподвижных точек инвариантной кривой, соответствующих точкам устойчивого резонансного цикла. Такой “негладкий тор” может какое-то время существовать в фазовом пространстве ДС прежде чем произойдёт его разрушение.

В случае эргодического тора неподвижные точки на инвариантной кривой отсутствуют, и при некотором значении $\alpha = \alpha_{cr1}$ происходит потеря гладкости инвариантной кривой одновременно на всюду плотном множестве точек. В результате кривая разрушается и возникает множество, не являющееся многообразием. Однако разрушение тора не ведёт автоматически к возникновению экспоненциальной неустойчивости движения. Динамика становится хаотической позже, при некотором значении $\alpha = \alpha_{cr2} > \alpha_{cr1}$. Таким образом, имеется конечная область значений параметра $\alpha_{cr1} < \alpha < \alpha_{cr2}$, в которой существует СНА. Режим СНА обладает свойствами, являющимися промежуточными между квазипериодическим режимом и хаосом. Проблема исследования СНА состоит в следующем: если в численном эксперименте СНА очень легко отличить от хаоса (по отсутствию положительного ляпуновского показателя), то выявить различие с квазипериодическим режимом гораздо сложнее. Критерии численного эксперимента не позволяют однозначно определить, чем является исследуемое множество: странным нехаотическим аттрактором или сильно искажённым, но всё же тором.

В работах А.С. Пиковского и др. [86, 87] были предложены наиболее достоверные численные методы диагностики режима СНА. К ним относятся метод, связанный с рациональной аппроксимацией числа вращения, метод, основанный на свойстве фазовой чувстви-

тельности режима СНА, и критерий положительных локальных ляпуновских показателей. Рассмотрим (2.37) для случая $N = 1$. Отображение примет вид

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n, \phi_n, \alpha), \\ \phi_{n+1} &= \phi_n + \theta, \text{ mod } 1.\end{aligned}\quad (2.38)$$

Исследуется разрушение инвариантной кривой отображения на фазовой плоскости. *Метод рациональной аппроксимации* базируется на бифуркационном анализе циклов, возникающих в отображении при рациональной аппроксимации числа вращения $\theta_k = r_k/q_k$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \theta_k = \theta$. Поведение отображения в этом случае сильно зависит от выбора начальной фазы ϕ_0 . Если при достаточно больших (теоретически при сколь угодно больших) k циклы с изменением ϕ_0 претерпевают бифуркации, то можно говорить о существовании в (2.38) СНА. При использовании этого метода для $\theta = \theta_k$ строят фазопараметрическую диаграмму $x(\phi_0)$, $\phi_0 \in [0; 1/q_k]$, названную в [86] *аппроксимирующим притягивающим множеством*. Действительно, зависимость координат аттракторов отображения от ϕ_0 при $\theta = \theta_k$ аппроксимирует маленький участок эргодического аттрактора. Гладкий характер аппроксимирующего множества свидетельствует о квазипериодическом режиме отображения, в то время как наличие точек негладкости говорит о режиме СНА.

Другой критерий основан на свойстве *чувствительности динамической переменной к изменению фазы воздействия*, которая рассматривается уже не для рациональной аппроксимации, а для иррационального значения числа вращения. Оценивается максимум производной $\partial x_n / \partial \phi_0$ при её вычислении вдоль траектории. Для (2.38) легко получить

$$\frac{\partial x_n}{\partial \phi_0} = \sum_{k=1}^n f_{\phi} \mu_{n-k}(x_k, \phi_k) + \mu_n(x_0, \phi_0) \frac{\partial x_0}{\partial \phi_0}, \quad (2.39)$$

где

$$\mu_m(x_k, \phi_k) = \prod_{i=0}^{m-1} f_x(x_{k+i}, \phi_{k+i}), \quad \mu_0 = 1, \quad (2.40)$$

есть “локальный мультипликатор” фазовой траектории. Отображение (2.38) имеет один, отличный от тождественного нуля, ляпуновский показатель:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\mu_n|. \quad (2.41)$$

Поскольку в режиме СНА он отрицателен, локальный мультипликатор должен стремиться к нулю с ростом n . С учётом этого (2.39) можно переписать в виде

$$\frac{\partial x_n}{\partial \phi_0} = \sum_{k=1}^n f_{\phi} \mu_{n-k}(x_k, \phi_k). \quad (2.42)$$

Введем величину Γ_n :

$$\Gamma_n = \min_{x_0, \phi_0} \max_{0 \leq i \leq n} \left| \frac{\partial x_i}{\partial \phi_0} \right|, \quad (2.43)$$

где максимум ищется по всем точкам одной траектории, а минимум – по множеству различных начальных условий. Неограниченный рост величины Γ_n при $n \rightarrow \infty$ означает, что производная $\partial x_n / \partial \phi_0$ не существует, т.е. что инвариантная кривая потеряла гладкость и возник СНА. На рис. 2.13 приведены зависимости Γ_n от n , полученные в [86] для отображения

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 2\sigma(\tanh x_n) \cos(2\pi\phi_n) + \alpha \cos(2\pi(\phi_n + \beta)), \\ \phi_{n+1} &= \phi_n + \theta, \text{ mod } 1 \end{aligned} \quad (2.44)$$

при $\theta = \theta_g = 0.5(\sqrt{5} - 1)$ и различных α . Как видно из графиков, только $\alpha = 0$ соответствует существованию СНА. Можно представить Γ_n в виде

$$\Gamma_n \sim n^\eta. \quad (2.45)$$

Показатель η называют *показателем фазовой чувствительности*. В [86] было доказано, что в режиме СНА $\eta = 1$.

Фазовая чувствительность связана с существованием ненулевой меры положительных значений локального ляпуновского показателя. *Локальным ляпуновским показателем* называется ляпуновский показатель траектории, рассчитанный на конечном времени [86]. Для отображения (2.38) локальный ляпуновский показатель есть

$$\Lambda_n(x, \phi) = \frac{1}{n} \ln |\mu_n(x, \phi)|, \quad (2.46)$$

где $\mu_n(x, \phi)$ определяется по формуле (2.40). Разумеется, величина и знак локального ляпуновского показателя зависят от выбора начальной точки (x, ϕ) . В силу негладкости СНА и неограниченности

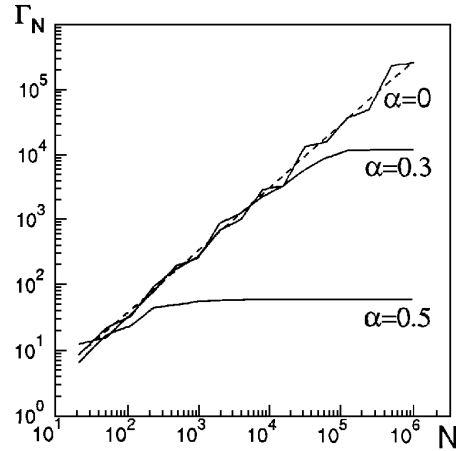


Рис. 2.13. Зависимости величины Γ_n от n для отображения (2.44) при $\theta = \theta_g$, $\sigma = 1.5$, $\beta = 1/8$

локального мультипликатора μ_n мера положительных значений A_n должна быть отлична от нуля даже при достаточно больших n . При этом $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lambda < 0$, так как аттрактор не хаотический.

К сожалению, рассмотренные критерии применимы, главным образом, к одномерным дискретным моделям с квазипериодическим воздействием и мало подходят для потоковых систем. Исключение, быть может, составляет критерий положительных локальных ляпуновских показателей. Однако его применение связано с вопросом, каково для данной ДС минимальное время, на котором локальные показатели квазипериодического режима уже не могут быть положительными. Предлагались и другие численные критерии существования СНА, связанные со свойствами спектра и корреляционной функции [79, 87], но и они в большинстве случаев не дают однозначного результата. По этой причине к исследованию разрушения эргодического тора надо подходить осторожно, по возможности используя все возможные критерии СНА.

Анализ причин потери гладкости и разрушения инвариантной кривой в модельных отображениях выявил два механизма, приводящих к СНА: 1) кризис эргодического тора при $\alpha = \alpha_{cr1}$ в результате нелокальной бифуркации; 2) постепенная деформация тора, приводящая в точке $\alpha = \alpha_{cr1}$ к потере гладкости и его разрушению [85]. Кризис эргодического тора происходит в результате касания устойчивым тором седлового тора или его устойчивого мно-

гообразия, играющего роль сепаратрисной поверхности. Для одномерных моделей с квазипериодическим воздействием (2.38) роль седлового тора играет неустойчивая инвариантная кривая (репеллер). Кризис может быть связан с объединением частей квазипериодического аттрактора². Дело в том, что в результате бифуркаций удвоения тора по одному из периодов инвариантная кривая в его сечении будет состоять из 2^k частей, посещаемых изображающей точкой в строго определённом порядке и разделённых сепаратрисной поверхностью, в качестве которой выступает поверхность в сечении устойчивого многообразия седлового тора. Для одномерных моделей сепаратрисой является неустойчивая инвариантная кривая. На Рис. 2.14 представлен кризис объединения частей инвариантной кривой в логистическом отображении с квазипериодической модуляцией параметра [82]:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \alpha(1 + \varepsilon \cos 2\pi\phi_n x(1 - x)), \\ \phi_{n+1} &= \phi_n + \theta, \text{ mod } 1.\end{aligned}\tag{2.47}$$

При $\alpha < \alpha_{\text{cr1}}$ имеется инвариантная кривая, состоящая из двух частей, разделённых репеллером. Изображающая точка посещает каждую из частей через итерацию. Искажение формы инвариантной кривой приводит к тому, что при $\alpha = \alpha_{\text{cr1}}$ она касается репеллера, разделяющего части аттрактора. В момент касания происходит потеря гладкости и разрушение устойчивой инвариантной кривой. При $\alpha > \alpha_{\text{cr1}}$ существует СНА, объединяющий обе части разрушенной кривой, которые теперь посещаются изображающей точкой в случайном порядке. Именно такой механизм разрушения тора ограничивает последовательность бифуркаций удвоения эргодического тора, которая в типичном случае конечна.

Кризис тора может быть также связан с объединением двух различных квазипериодических аттракторов [84, 85]. Возможна ситуация, когда кризис не связан с объединением квазипериодических аттракторов или частей одного аттрактора. Такая ситуация особенно типична для резонанса на T^3 , одно из чисел вращения которого имеет фиксированное иррациональное значение, а второе произвольно меняется. В результате искажения формы инвариантных кривых в сечении устойчивого и неустойчивого двумерных торов

² С точки зрения определения кризиса, такое объединение кризисом не является, так как не ведёт к изменению поглощающей области. Но термин “кризис” в данном случае является устоявшимся.

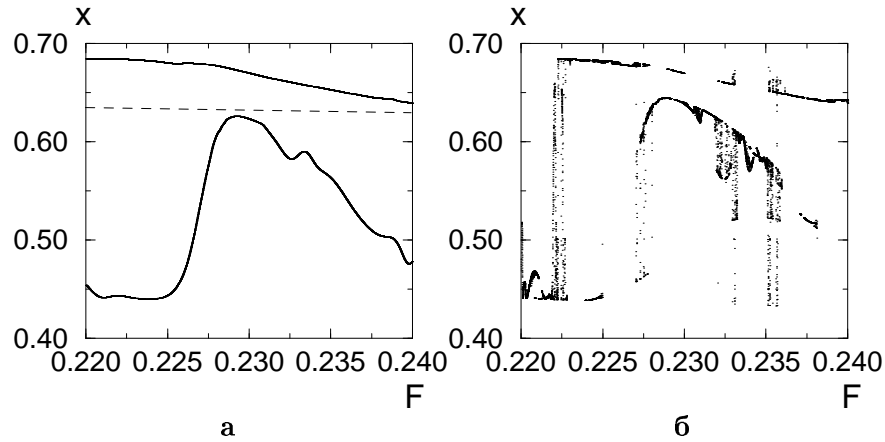


Рис. 2.14. Кризис объединения частей инвариантной кривой в отображении (2.47) при $\varepsilon = 0.1$, $\theta = \theta_g$. Фрагмент инвариантной кривой до касания ($\alpha = 3.271$) (а) и после касания ($\alpha = 3.272$) (б) с репеллером (пунктир)

на T^3 вместо касательной бифуркации торов на границе области синхронизации может произойти кризис касания в отдельных точках. Такой кризис был обнаружен и исследован в [83].

Потеря гладкости и разрушение эргодического тора может происходить и без нелокальных бифуркаций, связанных с касанием сепаратрис. В этом случае с изменением управляющего параметра α постепенно происходит искажение формы инвариантной кривой в сечении тора, приводящее к росту фазовой чувствительности. В критической точке $\alpha = \alpha_{cr1}$ производная по начальной фазе перестаёт быть ограниченной. Если аппроксимировать число вращения рациональными приближениями, то динамика отображения при некоторых значениях ϕ_0 становится хаотической, а при других остаётся регулярной. Однако ляпуновский показатель при $n \rightarrow \infty$ сходится ещё к отрицательному значению. Аппроксимирующее множество в этом случае не может быть гладким, что соответствует существованию СНА в пределах некоторого интервала $\alpha_{cr1} \leq \alpha \leq \alpha_{cr2}$. Такой эволюционный механизм образования СНА исследовался в [84, 85].

Предполагается, что СНА, возникающий в результате кризиса или эволюционным путём, существует на множестве значений параметров, имеющем ненулевую меру. Однако это утверждение очень трудно доказать. Известно, что в интервале $\alpha \in [\alpha_{cr1}, \alpha_{cr2}]$

СНА может вырождаться в инвариантную кривую, имеющую конечное число точек нарушения гладкости, а затем вновь возникать [85]. Неизвестен бифуркационный механизм перехода от СНА к хаотическому аттрактору. Изученные сценарии формирования хаоса предполагают наличие гомоклинических траекторий седловых циклов или опасных сепаратрисных петель состояний равновесия седло-фокусного типа, в окрестности которых возникает отображение типа подковы и формируется хаотическое множество траекторий. При постоянном иррациональном значении числа вращения θ система не имеет ни состояний равновесия, ни предельных циклов. В этом случае гомоклиническая структура должна быть связана с касанием и пересечением многообразий седловых торков. Гомоклиника подобного типа в настоящее время недостаточно исследована.

2.1.7 Заключение

В настоящем разделе нами были рассмотрены три известных на сегодняшний день типичных сценария перехода к хаосу: последовательность бифуркаций удвоения периода цикла (сценарий Фейгенбаума), кризис периодических колебаний и переход к хаосу через перемежаемость (сценарий Помо – Манневиля) и различные варианты перехода к хаосу через квазипериодические режимы (квазипериодический сценарий, или сценарий Рюэля – Такенса). Надо заметить, что для одной и той же системы могут наблюдаться различные сценарии перехода к хаосу, соответствующие различным областям пространства параметров и направлениям движения в нём. Более того, наблюдаемые бифуркационные последовательности могут быть сложным образом скомбинированы. Поэтому, чтобы представить картину возникновения хаотических колебаний в целом, нельзя ограничиваться однопараметрическим анализом. Необходимо иметь представление, хотя бы в общих чертах, о диаграмме режимов системы в пространстве параметров, о том, что происходит на её различных листах, где они “сшиваются” и т.д.

Рассмотренные сценарии являются типичными в том смысле, что наблюдаются для широкого класса ДС как с малой, так и с большой размерностью фазового пространства, а также для распределённых систем при довольно произвольном выборе контрольных параметров и путей их изменения. Возможны ли какие-либо иные сценарии возникновения хаоса? Очевидно, такие сценарии

возможны, но не типичны. Они могут быть связаны с какими-то особенностями (вырождениями) ДС или со специальным выбором путей движения в пространстве параметров, проходящих через критические точки высокой коразмерности [54, 88].

2.2 Корреляционный анализ режимов детерминированного и зашумленного хаоса

2.2.1 Введение

Анализ корреляционных функций играет принципиально важную роль в исследовании как стохастических (истинно случайных) процессов, так и хаотических колебаний, порождаемых детерминированной динамикой нелинейных систем. Убывание корреляционных функций является следствием перемешивания. Происходит потеря статистической взаимосвязи между состояниями системы, промежутки времени между которыми достаточно велики. Из свойства перемешивания следует свойство эргодичности системы. Кроме того, для хаотических ДС расщепление корреляций во времени связано с неустойчивостью хаотических траекторий и свойством системы производить энтропию. Автокорреляционная функция процесса однозначно связана с его энергетическим спектром преобразованиями Винера–Хинчина.

Несмотря на принципиальную важность, спектрально-корреляционные свойства нерегулярных колебательных режимов ДС изучены явно недостаточно. Широко распространено представление о том, что в хаотических системах корреляционные функции являются экспоненциально убывающими с декрементом, определяемым энтропией Колмогорова H_K [89], которая оценивается сверху суммой положительных ляпуновских показателей. Однако теоретические результаты получены только для некоторых классов отображений последования с перемешивающей мерой. Они дают экспоненциальную оценку сверху для убывания корреляций во времени [90, 91]. В некоторых случаях скорость затухания корреляций связана с ляпуновскими показателями [92], в других случаях на нее влияют прочие характеристики, определяемые оператором Фробениуса–Перрона [93–96]. Даже для простейших отображений с дискретным временем наблюдаются отклонения от экспоненциального поведения [93]. Однако связь декремента экспоненты с ди-

намическими характеристиками системы не определена. Для потоковых систем теоретические результаты оценки скорости убывания корреляций вообще отсутствуют [97].

Для дифференциальных систем закономерности спада автокорреляционных функций (АКФ) во времени в общем случае не установлены. Да и вряд ли это можно сделать, так как свойства АКФ определяются конкретными свойствами ДС и будут различными даже для различных динамических переменных одной и той же системы. Сложный характер зависимости автокорреляции от времени обусловлен многими факторами. К ним можно отнести неоднородность свойств локальной неустойчивости в различных областях фазового пространства, наличие близких к периодичности осцилляций, присутствие эффектов переключательного характера и пр. Перечисленные свойства наиболее характерны для хаотических аттракторов негиперболического типа. Однако и для почти гиперболических аттракторов скорость расщепления корреляций определяется не только (и не столько!) скоростью экспоненциального разбегания траекторий.

Одним из возможных способов анализа корреляционных свойств динамического хаоса состоит в сопоставлении поведения АКФ хаотических автоколебаний ДС с поведением АКФ классических моделей случайных процессов. Если установлено определенное соответствие, то появляется возможность теоретических оценок свойств АКФ для определенных хаотических режимов. В настоящем разделе приводятся результаты анализа спектрально-корреляционных свойств некоторых типов хаотических автоколебаний на основе их сходства с классическими случайными процессами типа узкополосного “гармонического” шума и телеграфного сигнала. Более подробно изложение материала этого раздела можно найти в работах [98, 99] и приведенных в них ссылках на литературу.

2.2.2 Гармонический шум и телеграфный сигнал

В задачах прикладного характера часто приходится иметь дело с такими моделями случайных процессов, как зашумленные гармонические колебания и телеграфный сигнал. Первая из указанных моделей используется для описания влияния естественных и технических флуктуаций на спектрально-корреляционные характеристики колебаний квазигармонических автогенераторов [100–102]. Телеграфный случайный процесс служит моделью для описания

статистических свойств импульсных случайных процессов, например, случайных переключений в бистабильной системе в условиях воздействия шума (задача Крамерса, вызванные шумом переключения триггера Шмитта и др. [102–104]). Указанные выше классические модели случайных процессов могут быть использованы для описания спектрально-корреляционных свойств определенного класса хаотических систем. Как будет показано ниже, модель гармонического шума достаточно хорошо описывает корреляционные характеристики спирального хаоса, а модель случайного телеграфного сигнала может использоваться для характеристики статистических свойств аттракторов “переключательного” типа, как, например, аттракторы в системе Лоренца и цепи Чуа.

Рассмотрим основные свойства упомянутых моделей случайных процессов.

Гармонический шум. Гармонический шум $x(t)$ представляет собой стационарный случайный процесс с нулевым средним значением, который описывается колебаниями вида [100–102]:

$$x(t) = R_0[1 + \rho(t)] \cos[\omega_0 t + \phi(t)]. \quad (2.48)$$

Здесь R_0 и ω_0 – постоянные (средние) значения амплитуды и частоты колебаний, $\rho(t)$ и $\phi(t)$ – случайные функции, характеризующие флуктуации амплитуды и фазы колебаний, соответственно. Процесс $\rho(t)$ полагается стационарным. Модель гармонического шума подразумевает, что флуктуации амплитуды и фазы являются медленными по сравнению с $\cos \omega_0 t$. Наиболее часто используются следующие упрощающие предположения: (1) амплитудные и фазовые флуктуации статистически независимы; (2) – флуктуации фазы $\phi(t)$ представляют собой винеровский процесс:

$$\dot{\phi}(t) = \sqrt{2B}\xi(t), \quad (2.49)$$

где $\xi(t)$ – нормированный гауссовский белый шум ($\langle \xi(t) \rangle \equiv 0$, $\langle \xi(t + \tau)\xi(t) \rangle = \delta(\tau)$). Константа B представляет собой коэффициент диффузии фазы. При сделанных предположениях АКФ процесса (2.48) имеет следующий вид [100–102]:

$$\psi(\tau) = \frac{R_0^2}{2}[1 + K_\rho(\tau)] \exp(-B|\tau|) \cos \omega_0 \tau, \quad (2.50)$$

где $K_\rho(\tau)$ – ковариационная функция приведенных амплитудных флуктуаций $\rho(t)$ ³. Используя преобразование Винера–Хинчина, из (2.50) можно получить соответствующее выражение для спектральной плотности мощности.

Обобщенный телеграфный сигнал. Этот стохастический процесс представляет собой случайные переключения между двумя возможными состояниями $x(t) = \pm a$. Рассматривают два типа телеграфного процесса. Первый из них, так называемый *случайный телеграфный сигнал*, характеризуется пуассоновским распределением моментов переключения t_k . В стационарном случае средняя частота переключений будет постоянной. При пуассоновском распределении значений t_k длительность импульсов θ имеет экспоненциальное распределение:

$$p(\theta) = \eta \exp(-\eta\theta), \quad \theta \geq 0, \quad (2.51)$$

где η – средняя частота переключений. АКФ такого процесса будет иметь вид [102, 105]

$$\psi(\tau) = a^2 \exp(-2\eta|\tau|). \quad (2.52)$$

Другой тип телеграфного сигнала – *квазислучайный телеграфный сигнал* – описывает случайные переключения между двумя состояниями $x(t) = \pm a$, которые могут происходить только в дискретные моменты времени $t_n = nT_0 + \eta$, $n = 1, 2, 3, \dots$, где $T_0 = \text{const}$, η – некоторая случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0, T_0]$. Если обозначить за p вероятность того, что в текущий момент времени состояние не изменится, а за q – вероятность того, что состояние изменится, то АКФ такого процесса задается выражением

$$\psi(\tau) = a^2 \left(n - \frac{|\tau|}{T_0} \right) (p - q)^{n-1} + a^2 \left[\frac{|\tau|}{T_0} - (n - 1) \right] (p - q)^n \quad (2.53)$$

$$(n - 1)T_0 \leq |\tau| < T_0.$$

Для частного случая, когда вероятности переключений равны ($p = q = 1/2$), АКФ (2.53) принимает вид:

³ Префактор $\frac{R_0^2}{2}[1 + K_\rho(\tau)]$ есть ковариационная функция $K_A(\tau)$ случайной амплитуды $A(t) = R_0[1 + \rho(t)]$. Таким представлением нам будет удобнее пользоваться в дальнейшем.

$$\psi(\tau) = a^2 \left(1 - \frac{|\tau|}{T_0}\right) \text{ при } |\tau| < T_0; \quad \psi(\tau) = 0 \text{ при } |\tau| \geq T_0 \quad (2.54)$$

то есть $\psi(\tau)$ спадает во времени по линейному закону.

2.2.3 Корреляционно-спектральный анализ спирального хаоса

Спиральные (или фазово-когерентные) аттракторы возникают в окрестности петли сепаратрисы седло-фокуса, формируются в результате бифуркаций удвоения периода и относятся к хаотическим аттракторам негиперболического типа. Спектр мощности режима спирального хаоса характеризуется ярко выраженным пиком на базовой (средней) частоте, вследствие чего огибающая автокорреляционной функции спадает относительно медленно. Примером могут служить спиральные аттракторы в модели Рёсслера [106, 107], в генераторе с инерционной нелинейностью Анищенко–Астахова [8], в цепи Чуа [108] и др. Автоколебания в них напоминают динамику зашумленных периодических осцилляторов типа генератора Ван дер Поля. Хаотические аттракторы такого типа обладают свойствами зашумленного предельного цикла [107]. Однако следует подчеркнуть, что спиральные аттракторы реализуются в полностью детерминированных системах (т.е. в отсутствие шумов).

Рассмотрим режим спирального хаоса в системе Рёсслера

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - z + \sqrt{2D}\xi(t), & \dot{y} &= x + \alpha y, & \dot{z} &= \beta + z(x - \mu), \end{aligned} \quad (2.55)$$

$$(\alpha = \beta = 0.2, \quad \mu = 6.5),$$

где $\xi(t)$ – нормированный гауссовский источник δ -коррелированного шума с нулевым средним значением; D – интенсивность шума. Для введения мгновенной амплитуды $A(t)$ и полной мгновенной фазы $\Phi(t)$ хаотических колебаний в режиме спирального аттрактора в системе Рёсслера можно применить замену переменных⁴.

$$x(t) = A(t) \cos \Phi(t), \quad y(t) = A(t) \sin \Phi(t). \quad (2.56)$$

Из (2.55) с помощью замены (2.56) получим систему уравнений в новых переменных

⁴ Такая возможность связана с почти регулярным вращением траектории в XU -проекции вокруг седлофокуса. Причем седлофокус расположен очень близко к началу координат, так, что постоянными компонентами колебаний $x(t)$ и $y(t)$ можно пренебречь.

$$\begin{aligned}
\dot{A} &= \frac{1}{2}\alpha A - \frac{1}{2}\alpha A \cos 2\Phi - z \cos \Phi + \sqrt{2D}\xi \cos \Phi, \\
\dot{\Phi} &= 1 + \frac{1}{2}\alpha \sin 2\Phi + \frac{1}{A}z \sin \Phi - \frac{\sqrt{2D}}{A}\xi(t) \sin \Phi, \\
\dot{z} &= \beta + z(A \cos \Phi - \mu).
\end{aligned} \tag{2.57}$$

В процессе вычислений использовались обе эквивалентные системы (2.55) и (2.57).

В работе [107] было сделано предположение о том, что в режиме спирального хаоса дисперсия мгновенной фазы растет линейно во времени. Это предположение было подтверждено численно в [109] для системы Ресслера. Для развитого спирального хаоса наблюдался практически линейный рост дисперсии фазы как в случае отсутствия шума ($D = 0$), так и при $D \neq 0$. Дисперсия полной фазы равна дисперсии её нерегулярной компоненты $\phi(t) = \Phi(t) - \omega_0 t$, где $\omega_0 = \langle \dot{\Phi}(t) \rangle$ – есть средняя частота хаотических колебаний. Линейность роста дисперсии $\sigma_\phi^2(t)$ позволяет ввести коэффициент эффективной диффузии фазы

$$B_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \frac{d\sigma_\phi^2(t)}{dt}. \tag{2.58}$$

В проведенных исследованиях вычислялась нормированная АКФ хаотических колебаний $\Psi_x(\tau) = \psi_x(\tau)/\psi_x(0)$ в системе (2.55). С использованием системы (2.57) рассчитывалась ковариационная функция амплитуды $K_A(\tau)$ и коэффициент эффективной диффузии фазы B_{eff} . При расчетах $\Psi_x(\tau)$ и $K_A(\tau)$ применялась процедура усреднения по времени, для вычисления B_{eff} использовался метод усреднения по ансамблю реализаций [109]. На рис. 2.15 представлены результаты расчета автокорреляционной функции $\Psi_x(\tau)$ (области серого цвета). Как в отсутствие шума (рис. 2.15а), так и при наличии шума (рис. 2.15б) автокорреляционная функция хаотических колебаний спадает практически экспоненциально. При этом на малых временах ($\tau < 20$) имеется участок более быстрого убывания корреляции (см. рис. 2.15в).

Исходя из (2.50), проведем аппроксимацию огибающей полученной автокорреляционной функции $\Psi_x(\tau)$. С этой целью рассчитанные характеристики $K_A(\tau)$ и B_{eff} (2.58) подставляются в выражение для нормированной огибающей $\Gamma(\tau)$:

$$\Gamma(\tau) = \frac{K_A(\tau)}{K_A(0)} \exp(-B_{\text{eff}}|\tau|). \tag{2.59}$$

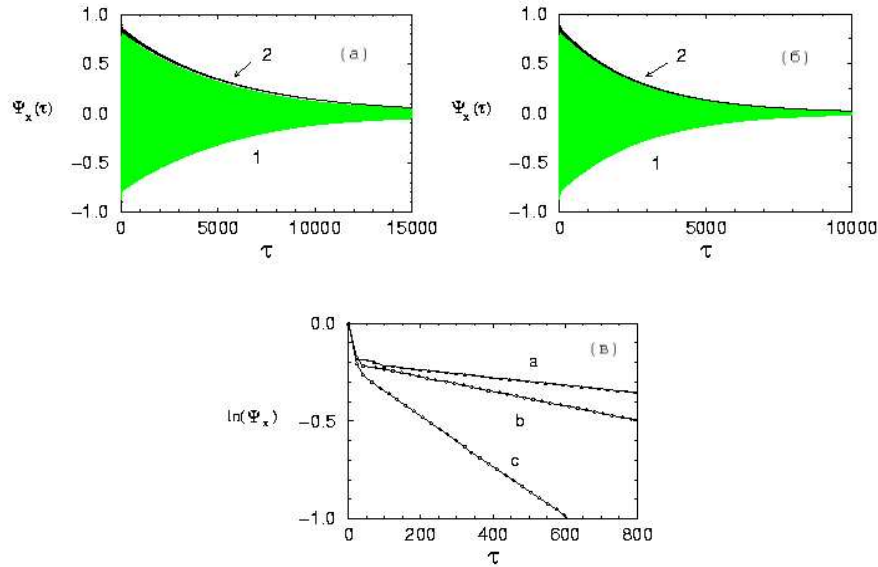


Рис. 2.15. Нормированная АКФ колебаний $x(t)$ в системе (2.55) при $\alpha = \beta = 0.2$, $\mu = 6.5$ (серые области) и ее аппроксимация в соответствии с (2.59) (кривые 2): (а) – без шума $D = 0$, $B_{\text{эф}} \approx 0.0002$; (б) – в присутствии шума $D = 10^{-3}$, $B_{\text{эф}} \approx 0.0003$; (в) – огибающие АКФ в линейно-логарифмическом масштабе для $D = 0$ (а), $D = 0.001$ (б) и $D = 0.01$ (с)

Результаты расчетов $\Gamma(\tau)$ нанесены на Рис. 2.15а,б точками черного цвета. Как видно из графиков, выражение (2.59) достаточно хорошо описывает поведение огибающей автокорреляционной функции $\Psi_x(\tau)$. Причем именно учет множителя $K_A(\tau)/K_A(0)$ позволяет получить хорошую аппроксимацию не только на больших временах ($\tau \geq 20$), но и на интервале $0 < \tau < 20$. Это означает, что флуктуации амплитуды играют существенную роль на малых временах, в то время как медленный процесс расщепления корреляций определяется в основном эффективной диффузией фазы. Совпадение результатов эксперимента в режиме спирального хаоса с классической моделью гармонического шума является просто удивительным! В то же время мы не можем строго объяснить причину такого совпадения. Во-первых, соотношение (2.50) получено в приближении статистической независимости значений амплитуды и фазы, что не применимо к хаотическому режиму. Во-вторых, при выводе (2.50) предполагалось, что флуктуации фазы описываются винеровским процессом. В случае хаотических колебаний процесс

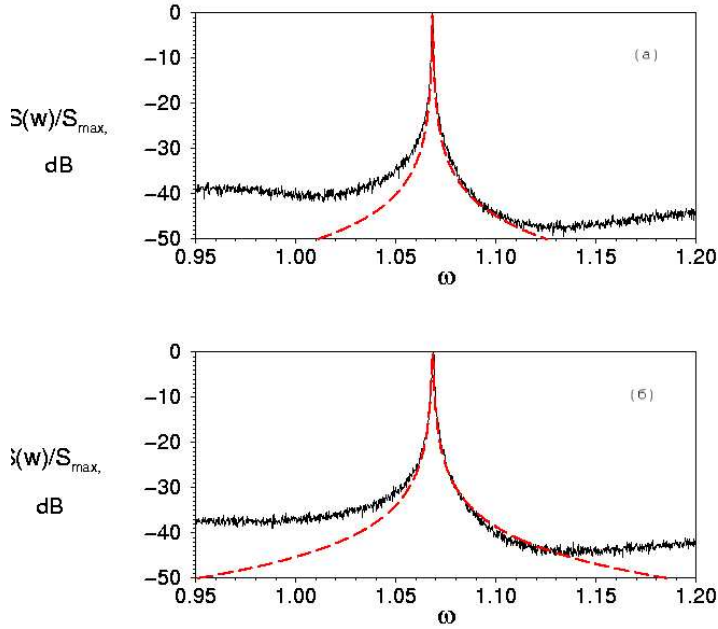


Рис. 2.16. Фрагмент нормированного спектра мощности колебаний $x(t)$ в системе (2.55) в окрестности базовой (средней) частоты при $\alpha = \beta = 0.2$, $\mu = 6.5$ (сплошная линия) и его аппроксимация в соответствии с (2.60) (пунктир) для двух значений интенсивности шума: (а) $D = 0$; (б) $D = 10^{-3}$

$\phi(t)$ носит более сложный характер. Особенно важно отметить, что данные рис. 2.15а получены в режиме детерминированного хаоса, т.е. в отсутствие в системе шума.

Поскольку при $\tau > \tau_c$ (τ_c — время корреляции) огибающая АКФ хаотических колебаний задается экспонентой $\exp(-B_{\text{eff}}|\tau|)$, то, в силу теоремы Винера–Хинчина, спектральный пик на средней частоте ω_0 должен иметь форму, близкую к лоренциану, ширина которого определяется эффективным коэффициентом диффузии фазы B_{eff} :

$$S(\omega) = C \frac{B_{\text{eff}}}{B_{\text{eff}}^2 + (\omega - \omega_0)^2}, \quad C = \text{const.} \quad (2.60)$$

Результаты расчетов, представленные на рис. 2.16, это подтверждают. Аппроксимация основного спектрального пика в соответствии с (2.60) достаточно хорошо согласуется с результатами непосредственного экспериментального определения спектра мощности

колебаний $x(t)$ как в отсутствие шума, так и при его наличии. Отметим, что результаты, представленные на рис. 2.15 и рис. 2.16 для интенсивности шума $D = 10^{-3}$ были подтверждены и для других значений интенсивности $0 < D < 10^{-2}$, а также для других значений параметра μ , соответствующих режиму спирального аттрактора.

Результаты аппроксимации автокорреляционной функции хаотических колебаний и формы основного спектрального пика полностью подтверждаются исследованиями спиральных аттракторов в других динамических системах. В качестве примера рассмотрим генератор с инерционной нелинейностью (ГИН) Анищенко–Астахова [8], описываемый следующими уравнениями в безразмерных переменных

$$\begin{aligned} \dot{x} &= mx + y - xz + rx^3 + \sqrt{2D}\xi(t), \\ \dot{y} &= -x, \quad \dot{z} = -gz + gf(x), \\ f(x) &= x^2, \quad x > 0, \quad f(x) = 0, \quad x \leq 0, \quad m = 1.35, g = 0.21, r = -10^{-3}, \end{aligned} \quad (2.61)$$

$\xi(t)$ – источник шума, с теми же характеристиками, что и в системе (2.55). Исследовались уравнения (2.61), а также уравнения, получаемые при замене переменных (2.56). Генератор с инерционной нелинейностью проявляет высокую чувствительность к действию малого шума. По сравнению с системой (2.55) в (2.61) гораздо меньший шум приводит к значительно большему росту диффузии фазы. Более того, в режиме развитого спирального аттрактора шум приводит к сильным качественным изменениям и возникновению винтового хаоса. Фрагмент спектра мощности в окрестности базовой частоты и аппроксимация основного спектрального пика согласно (2.60), полученные для системы (2.61) при двух значениях интенсивности шума, представлены на рис. 2.17.

Спектрально-корреляционные свойства спирального хаоса были исследованы в физическом эксперименте на модели генератора Анищенко–Астахова. Важность этого эксперимента обусловлена тем, что стохастические уравнения генератора (2.61) являются лишь приближенными и не могут учитывать все источники естественных флуктуаций, реально действующих в электронной схеме генератора. Результаты экспериментов представлены на рис. 2.18 и полностью подтверждают все данные, полученные в численных расчетах (рис. 2.15–2.17).

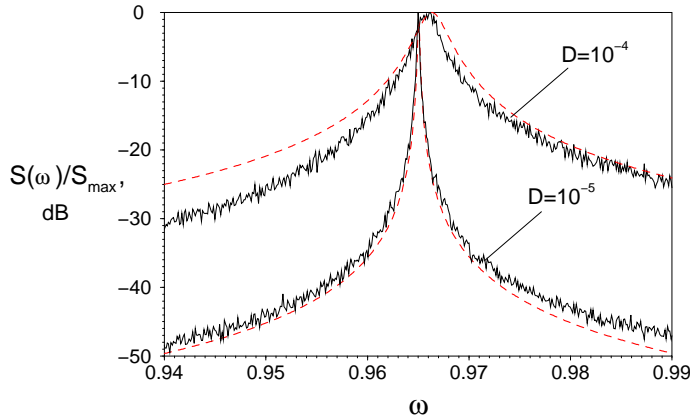


Рис. 2.17. Фрагмент нормированного спектра мощности колебаний $x(t)$ в системе (2.61) при $g = 0.21$, $m = 1.35$ в окрестности базовой частоты (сплошные линии) и его аппроксимация в соответствии с (2.60) (пунктир) для двух значений интенсивности шума $D = 10^{-4}$ ($B_{\text{eff}} \approx 0.0017$) и $D = 10^{-5}$ ($B_{\text{eff}} \approx 0.0008$)

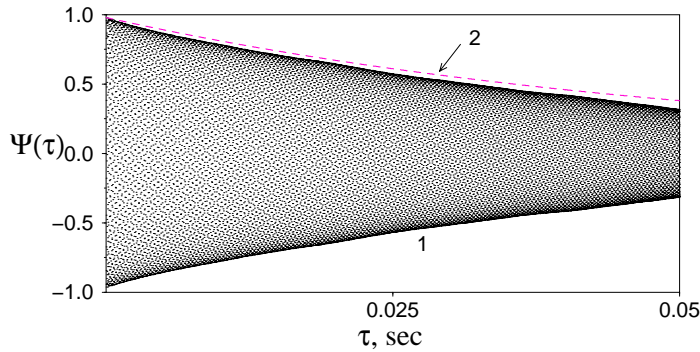


Рис. 2.18. Нормированная автокорреляционная функция колебаний $x(t)$ в генераторе Анищенко–Астахова (область 1) и ее экспоненциальная аппроксимация $\exp(-B_{\text{eff}}|\tau|)$ (кривая 2) (натурный эксперимент). Коэффициент диффузии мгновенной фазы $B_{\text{eff}} \approx 18.6 \text{ с}^{-1}$ был вычислен из экспериментальных данных независимо от АКФ

Таким образом, проведенные эксперименты четко показали, что спиральный хаос в автоколебательных системах в большой степени сохраняет спектрально-корреляционные свойства зашумленных квазигармонических автоколебаний. При этом скорость расщепления корреляций в потоковой системе на малых временах зависит от поведения как мгновенной амплитуды, так и мгновенной фа-

зы хаотических колебаний. На больших временах огибающая автокорреляционной функции в основном определяется диффузией мгновенной фазы. Соответственно, ширина основного пика в спектре мощности спирального хаоса также определяется величиной B_{eff} , а флуктуации амплитуды задают уровень пьедестала спектра. Эффективный коэффициент диффузии фазы в системе без шума определяется ее хаотической динамикой, но он не связан непосредственно с положительными ляпуновскими показателями.

2.2.4 Автокорреляционные функции и спектры мощности в режиме винтового хаоса

Полученные результаты могут быть до определенной степени обобщены и на режим винтового хаоса. По сравнению со спиральным хаосом, для хаотического аттрактора винтового типа характерно более сложное вращение траекторий вокруг точки равновесия. Оно сопровождается сбоями значений мгновенной фазы, приводящими к немонотонной зависимости фазы (угловой переменной) от времени [109]. Примером винтового хаоса может служить исследованный в данной работе хаотический режим, существующий в системе (2.55) при $\alpha = \beta = 0.2$, $\mu > 8.5$.

Для более строгого введения мгновенной фазы колебаний $x(t)$ в режиме со сложной фазовой динамикой использовалась концепция аналитического сигнала (раздел 1.3.4).

При переходе к винтовому аттрактору коэффициент диффузии B_{eff} резко возрастает (на 2–3 порядка), что приводит к быстрому спадаанию автокорреляционной функции и значительному уширению основного спектрального пика [109, 110].

Результаты численного моделирования, представленные на рис. 2.19, получены для системы (2.55) при $\mu = 13$, $D = 0$. Они свидетельствуют о том, что и в режиме винтового хаоса рассмотренные аппроксимации могут достаточно хорошо согласоваться с экспериментом. Однако при некоторых значениях параметра μ фазовая переменная $\Phi(t)$ ведет себя настолько сложным образом, что аппроксимация (2.59) становится неудовлетворительной, а основной спектральный пик даже приближенно не похож на лоренциан. Это происходит в том случае, когда фазовые траектории попадают в сколь угодно малую окрестность седлофокуса. Такое поведение наблюдалось, например, при $\mu = 10$. Результаты расчетов приведены на рис. 2.20.

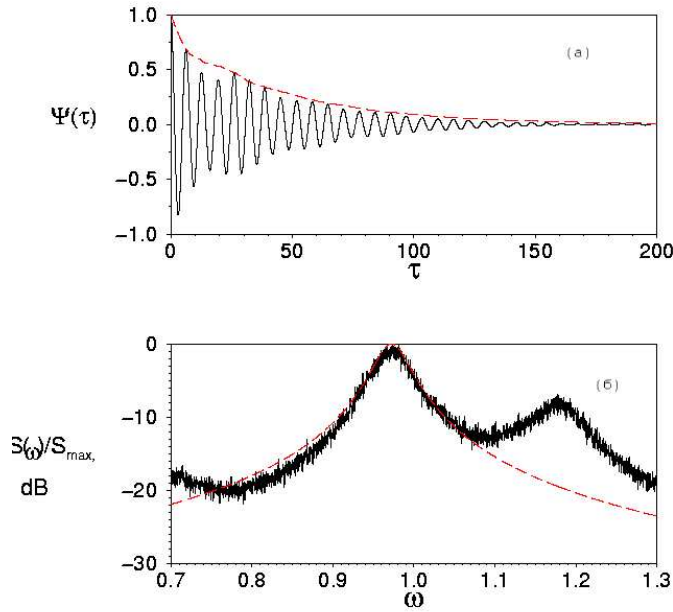


Рис. 2.19. Нормированная автокорреляционная функция (а) и фрагмент спектра мощности (б) колебаний $x(t)$ для системы (2.55) в режиме винтового хаоса при $\alpha = \beta = 0.2$, $\mu = 13$, $D = 0$. Пунктирные линии соответствуют аппроксимациям (2.59) и (2.60). Коэффициент диффузии $B_{\text{эф}} \approx 0.0219$

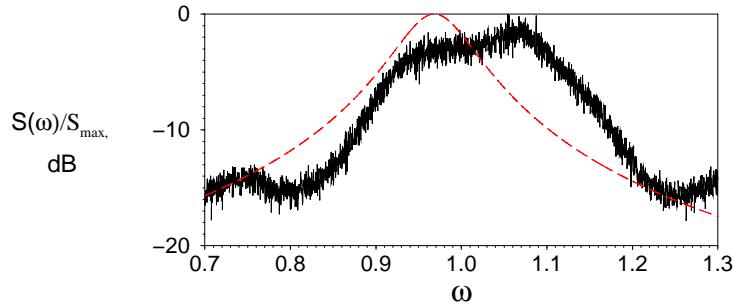


Рис. 2.20. Фрагмент спектра мощности колебаний $x(t)$ для системы (2.55) в режиме винтового хаоса при $\alpha = \beta = 0.2$, $\mu = 10$, $D = 0$. Пунктирная линия соответствует аппроксимации (2.60). Коэффициент диффузии $B_{\text{эф}} \approx 0.0401$

2.2.5 Корреляционно-спектральные характеристики хаотических автоколебаний переключательного типа в режиме квазигиперболического аттрактора Лоренца

Приведенное выше описание корреляционных свойств хаотических систем Ресслера и Анищенко–Астахова, основанное на использова-

нии эффективного коэффициента диффузии фазы, не может быть применено для аппроксимации автокорреляционных функций хаотических колебаний переключательного типа, когда в фазовом пространстве системы есть несколько хорошо различимых состояний, посещаемых траекторией с той или иной вероятностью. В простейшем случае такими хорошо различимыми состояниями могут быть устойчивые точки или циклы, разделенные в фазовом пространстве многообразиями седловых точек или циклов. Однако переключения в таком случае возникают только при воздействии на систему шума или какой-либо внешней силы [103,111]. Для ряда хаотических аттракторов, имеющих достаточно сложную структуру, также можно выделить такие состояния, которые являются частями аттрактора, разделенными многообразиями седловых точек и циклов, так что переходы между этими состояниями возможны, но не в любой момент времени, а только при выполнении некоторых условий [112]. Такие колебания возникают, например, в системе Лоренца [113]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\sigma(x - y), \\ \dot{y} &= -xz - y + rx, \\ \dot{z} &= -bz + xy, \\ \sigma &= 10, \quad b = \frac{8}{3}, \quad r = 28. \end{aligned} \quad (2.62)$$

В фазовом пространстве системы Лоренца существуют два симметрично расположенных относительно оси OZ седло-фокуса, разделенные устойчивым многообразием седловой точки в начале координат. Это устойчивое многообразие имеет сложную структуру, которая позволяет траектории переходить от одного седло-фокуса к другому по некоторым выделенным путям [112,114] (рис. 2.21).

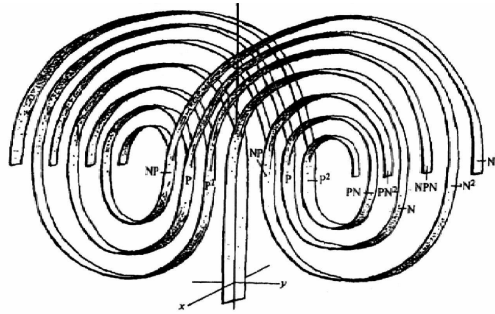


Рис. 2.21. Глобальная структура многообразий в системе Лоренца

Раскручиваясь вокруг одного из седло-фокусов, траектория подходит к устойчивому многообразию, откуда она может перепрыгнуть с некоторой вероятностью к другому седло-фокусу. Вращение вокруг седло-фокусов скорее всего не вносит существенный вклад в спад автокорреляционной функции, в то время как "случайные-переключения должны определять скорость спада АКФ.

Рассмотрим реализацию $x(t)$ системы Лоренца. Используем метод символьной динамики, т.е. исключим из рассмотрения осциллирующие колебания (вращение вокруг седло-фокусов). Получаем процесс $X(t)$ переключательного характера, подобный телеграфному сигналу (см. рис. 2.22).

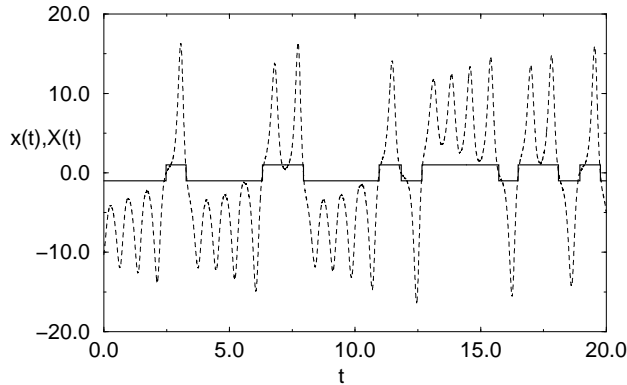


Рис. 2.22. Телеграфный сигнал, полученный для координаты $x(t)$ системы Лоренца

Сравним АКФ колебаний $x(t)$ в системе Лоренца с АКФ, полученной для данной реализации $x(t)$ телеграфного сигнала $X(t)$ (рис. 2.23).

Можно утверждать, что время расщепления корреляций и поведение АКФ на этих временах определяются именно переключениями, а вращение вокруг седло-фокусов вносит лишь незначительный вклад в спад АКФ. Следует отметить, что на малых временах спад АКФ является линейным. Это – замечательный факт в том смысле, что линейному спаду АКФ соответствует довольно специфичное распределение вероятностей времен пребывания в одном из состояний. Вернемся к параграфу 2.2.2, где были даны определения двух видов телеграфных сигналов, основанные на распределениях времен пребывания в одном из состояний. Линейной АКФ соответ-

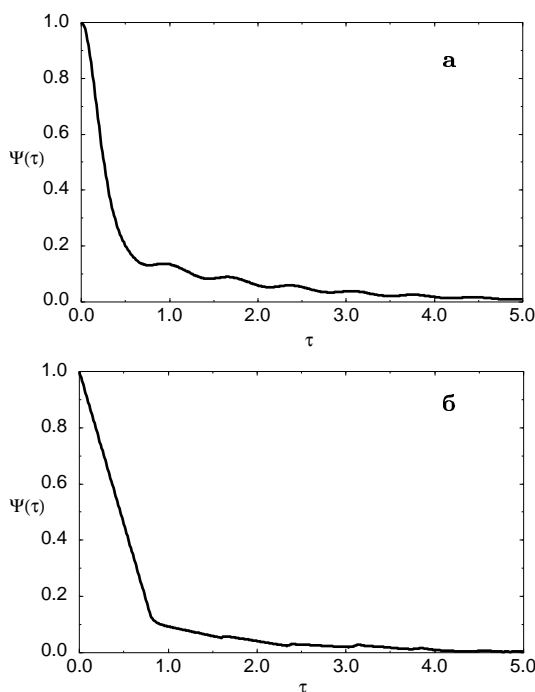


Рис. 2.23. Автокорреляционная функция реализации $x(t)$ (а) и соответствующего телеграфного сигнала $X(t)$ (б)

ствует дискретное эквидистантное распределение времен пребывания в виде дельта-пиков, причем вероятность переключения между состояниями равна $1/2$ [102, 105].

На рис. 2.24 представлено распределение длительности импульсов для телеграфного сигнала, соответствующего хаотическим переключениям на аттракторе Лоренца.

Как видно из рисунка, распределение времен пребывания имеет структуру, близкую к эквидистантному дискретному распределению, но пики имеют конечную ширину. Распределение вероятностей переключений за времена, кратные T_0 , где T_0 – минимальное время пребывания в одном из состояний, показывает, что вероятность перехода близка к $1/2$. Конечная ширина пиков в распределении и небольшое отличие вероятности перехода от $1/2$ приводит к тому, что АКФ спадает не до нуля, а до некоторой конечной величины, что согласуется с теоретическими результатами [105].

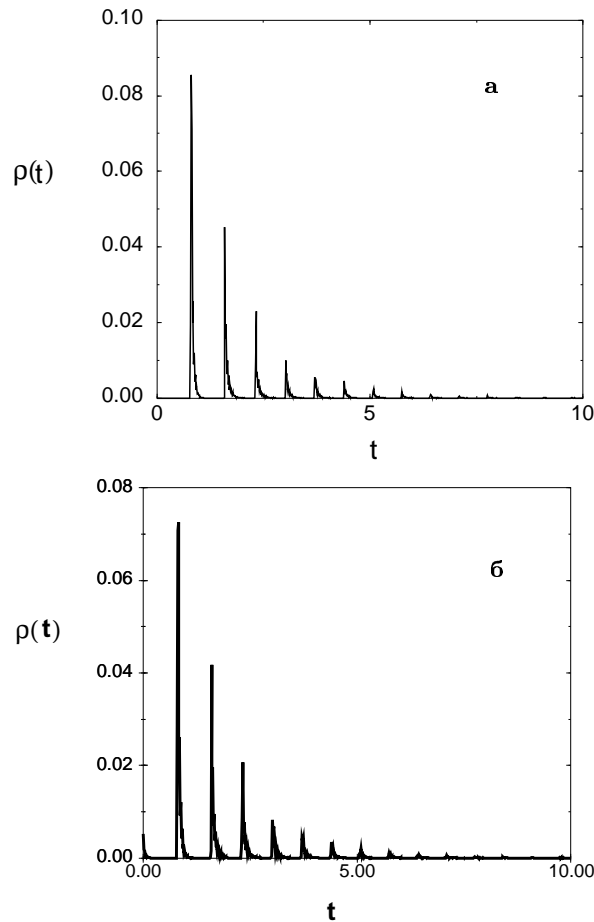


Рис. 2.24. Распределение длительности импульсов телеграфного сигнала в системе без шума (а) и при наличии шума $D = 0.001$ (б)

Дискретность переключений в системе Лоренца определяется особенностями в структуре многообразий (см. рис. 2.21). Наличие расщеплений многообразия на два определяет поведение траектории системы таким образом, что вероятность переключения между двумя состояниями за один оборот вокруг неподвижной точки равна $1/2$. Благодаря таким особенностям в поведении траектории, автокорреляционная функция координат x и y должна определяться выражением (2.53).

При воздействии на систему слабого гауссовского шума линейный характер спада АКФ практически не нарушается. Модель

(2.53) по-прежнему хорошо описывает АКФ соответствующего колебаниям $x(t)$ телеграфного сигнала, поскольку характер распределения длительности импульсов остается прежним (рис. 2.24б).

2.2.6 Заключение

Проведенные эксперименты показали, что спиральный хаос в значительной степени сохраняет свойства зашумленных квазигармонических колебаний. При этом время расщепления корреляций в дифференциальных системах на малом времени зависит как от поведения мгновенной амплитуды, так и от величины диффузии мгновенной фазы хаотических колебаний. Соответственно, ширина основной спектральной линии спирального хаоса определяется коэффициентом эффективной диффузии фазы $B_{\text{эф}}$, в то время как флуктуации мгновенной амплитуды задают уровень спектрального пьедестала. Коэффициент $B_{\text{эф}}$ в системе без шума определяется особенностями хаотической динамики, но не только положительным ляпуновским показателем.

Исследование аттрактора Лоренца говорит о том, что свойства АКФ в данном случае определяются статистикой хаотических переключений фазовой траектории между окрестностями двух седлофокусов и слабо зависят от характеристик вращения вокруг седлофокусов. Корреляционные свойства хаотических колебаний в данном случае хорошо описываются классической моделью квазислучайного телеграфного сигнала. В частности, выражение (2.53) хорошо аппроксимирует наблюдающийся у АКФ колебаний $x(t)$ на интервале $\tau \in [0.2, 1]$ участок линейного убывания АКФ.

2.3 Синхронизация хаоса

2.3.1 Введение

Синхронизация автоколебаний – одно из фундаментальных нелинейных явлений в естествознании. В настоящее время проблема синхронизации регулярных (периодических и квазипериодических) колебаний достаточно хорошо исследована [115–128]. В спектре регулярных колебаний легко выделить основные частоты, однозначно связанные с характерными временами (периодом, квазипериодом) и фазами колебаний. При захвате частот происходит стабилизация фазового сдвига между взаимодействующими модами.

Характерные времена также становятся равными или кратными. В случае регулярных колебаний взаимодействующих осцилляторов фазовому захвату соответствует седло-узловая бифуркация циклов на двумерном торе, в результате которой аттрактор на границе синхронизации претерпевает очевидную качественную перестройку: вместо эргодического движения на двумерном торе возникает устойчивый предельный цикл.

С накоплением знаний о хаотической динамике нелинейных систем возникла потребность обобщить классические представления о синхронизации автоколебаний на этот случай [129–132]. Уже при визуальном наблюдении хаотических аттракторов взаимодействующих систем с частотной расстройкой можно заметить, что с ростом степени взаимодействия возможна определенная перестройка их структуры. Это наводит на мысль об аналогии механизмов синхронизации хаотических и регулярных автоколебаний. Правомерно возникает вопрос: что считать хаотической синхронизацией? Ответ на него не столь прост, как в случае регулярных колебаний, поскольку для хаотических колебаний период отсутствует, а спектр является сплошным.

На сегодняшний день известно несколько концепций синхронизации хаоса. Одной из первых была концепция, согласно которой синхронизация хаоса понимается как явление возникновения периодического режима под влиянием внешнего воздействия на хаотические автоколебания или в результате взаимодействия хаотических генераторов [133–135]. Однако переход от хаотических колебаний к регулярным наблюдается лишь при достаточной интенсивности взаимодействия генераторов (т.е. имеет порог) и связан с механизмом синхронизации через подавление хаотических автоколебаний, т.е. не исчерпывает всех возможных эффектов синхронизации хаоса. Согласно наиболее часто встречающейся в литературе [136–143] концепции, синхронизация хаоса имеет место при взаимодействии идентичных хаотических осцилляторов и состоит в том, что с ростом связи временные реализации соответствующих динамических переменных парциальных систем полностью повторяют друг друга без какого-либо сдвига во времени. То есть осцилляторы колеблются “синфазно”. Синфазные колебания наблюдаются и при взаимодействии периодических генераторов, однако возможны и другие синхронные колебания. Очевидно то же можно сказать и о синхронизации хаоса. В работах [144–147] предложе-

но обобщение классических представлений о синхронизации как о захвате или подавлении частот на случай взаимодействия генераторов в режиме спирального хаотического аттрактора⁵. Рассматриваются случаи взаимной и вынужденной синхронизации хаоса, в том числе синхронизации хаоса гармонической внешней силой. В [129, 149–151] в рамках классического подхода к явлению синхронизации развивается представление о захвате фаз хаотических генераторов. Кроме того, в работах некоторых авторов под синхронизацией хаотических автоколебаний понимается возникновение функциональной взаимосвязи между мгновенными состояниями парциальных систем (*обобщённая синхронизация*) [152–154].

В последнее время эффекты, подобные синхронизации, были обнаружены в системах с более сложной хаотической динамикой, включающей нерегулярные переходы траектории из окрестности одного седло-фокуса в окрестность другого [155]. Эффекты синхронизации в хаотических системах с переключениями схожи с недавно обнаруженным явлением *стохастической синхронизации* в мультистабильных системах с переключениями, вызванными действием случайных сил [130, 156, 157]. Таким образом, понятие синхронизации может быть распространено на очень широкий круг явлений, наблюдаемых не только в динамических, но и в стохастических системах. Однако далеко не всегда может быть в полной мере применен математический аппарат теории бифуркаций, как это сделано, например, для случая периодических колебаний. Как физики-экспериментаторы, мы зачастую можем лишь представить совокупность диагностических признаков, которые прямо или по аналогии с более простыми и изученными случаями свидетельствуют о характере предполагаемой бифуркации. Подтвердить или опровергнуть построенную на такой базе гипотезу – дело математиков.

⁵ Спиральным хаосом называют хаотический аттрактор типа аттрактора Рёслера, т.е. возникающий через последовательность бифуркаций удвоения периода порождающего цикла [8, 107, 148].

2.3.2 Классический подход к синхронизации хаоса. Полная и частичная синхронизация и их количественные характеристики

Синхронизация хаотических осцилляторов может пониматься в самом широком смысле как возникновение взаимосвязи между какими-либо характеристиками парциальных колебаний [123], а может, наоборот, рассматриваться в самом узком смысле – как установление полностью идентичных колебаний в парциальных системах. Наиболее последовательным следует признать понимание синхронизации хаоса как развитие классической концепции синхронизации характерных частот и времён динамических систем. Классические представления о синхронизации можно легко обобщить на случай генераторов в режиме спирального хаоса. В спектре спирального хаоса наблюдается четко различимый пик на частоте, близкой к частоте предельного цикла, породившего хаотический аттрактор в результате последовательности субгармонических бифуркаций. Можно рассматривать эту частоту как *базовую* частоту колебаний ω_0 , исследовать эффект ее захвата или подавления, а также вводить некоторый аналог захвата фазы хаотических колебаний. Подобные эффекты получили название *синхронизации в смысле Гюйгенса* или *частотно-фазовой синхронизации*. Синхронизация хаоса в таком понимании может наблюдаться в системах, достаточно сильно различающихся между собой как с точки зрения математической модели, так и по своему поведению. Возможна также вынужденная синхронизация хаоса в смысле Гюйгенса, в том числе при периодическом воздействии.

Впервые попытка распространения классических представлений о синхронизации как о захвате или подавлении частот на случай взаимодействия хаотических осцилляторов была предпринята в работах [130, 144–147]. Обнаружено, что на плоскости параметров, управляющих степенью взаимодействия и частотой расстройки хаотических генераторов, можно выделить области синхронизации хаоса, подобные языкам Арнольда. Хаотические колебания в этих областях (синхронный хаос) топологически отличаются от хаоса за их пределами (несинхронного хаоса). В [145, 146] экспериментально и численно исследуются два взаимодействующих радиотехнических генератора Анищенко–Астахова с расстройкой базовых частот. Блок-схема установки приведена на рис. 2.25. Математиче-

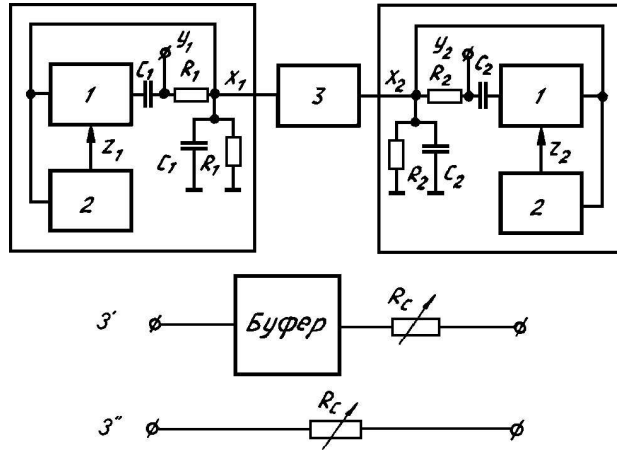


Рис. 2.25. Блок-схема системы двух связанных генераторов Анищенко – Астахова: 1 – линейные усилители с управляемыми коэффициентами усиления, 2 – инерционные нелинейные преобразователи, 3 – блок связи (3' – однонаправленной, 3'' – взаимной)

ской моделью рассматриваемых взаимодействующих автогенераторов служит система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= (m_1 - z_1)x_1 + y_1 + \gamma_1(x_2 - x_1 + y_1 - y_2/p), \\
 \dot{y}_1 &= -x_1, \\
 \dot{z}_1 &= g_1(f(x_1) - z_1), \\
 \dot{x}_2/p &= (m_2 - z_2)x_2 + y_2 + \gamma_2(Bx_1 - x_2 + y_2 - Bp y_1), \\
 \dot{y}_2/p &= -x_2, \\
 \dot{z}_2/p &= g_2(f(x_2) - z_2),
 \end{aligned} \tag{2.63}$$

где $m_{1,2}$ и $g_{1,2}$ – параметры, управляющие динамическим режимом парциального генератора; $p = C_1/C_2$ – расстройка резонансных частот мостов Вина, определяющая частотную расстройку парциальных систем; $\gamma_{1,2}$ характеризуют степень связи; B – коэффициент передачи буфера. Выбор $\gamma_1 = 0$, $B = 3$ соответствует однонаправленному воздействию первого генератора на второй, а при $\gamma_1 = \gamma_2$, $B = 1$ имеет место взаимная симметричная связь между генераторами. Функция $f(x)$, задающая нелинейность инерционных преобразователей, есть x^2 при $x \geq 0$ и 0 при $x < 0$.

Эволюция спектров при вынужденной синхронизации хаотических колебаний с отношением базовых частот $f_1 : f_2 = 1 : 1$, наблю-

дававшаяся в эксперименте в случае однонаправленной связи, представлена на рис. 2.26 и 2.27, соответствующих двум механизмам синхронизации: через захват и через подавление базовой частоты.

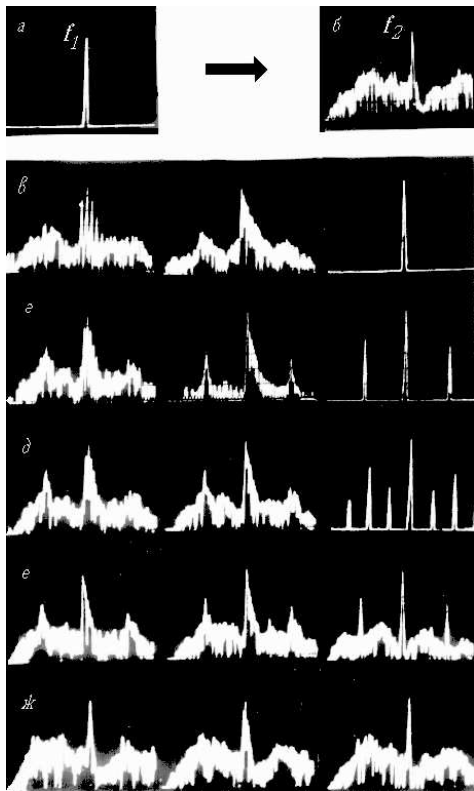


Рис. 2.26. Спектры колебаний $x_2(t)$ в случае вынужденной синхронизации через захват базовой частоты хаотических колебаний (физический эксперимент): (а) – спектр сигнала воздействия; (б) – спектр автономных колебаний второго автогенератора; (в–ж) – спектры колебаний второго автогенератора при различной величине частотной расстройки; параметр связи возрастает слева направо [145]

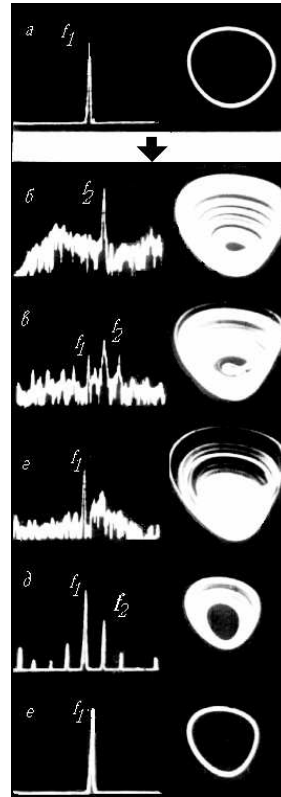


Рис. 2.27. Спектры и фазовые портреты колебаний, иллюстрирующие вынужденную синхронизацию через подавление базовой частоты хаотических колебаний (физический эксперимент): (а) – сигнал воздействия; (б–е) – колебания второго автогенератора при фиксированной частотной расстройке и различных величинах параметра связи; параметр связи возрастает сверху вниз [145]

Аналогичная эволюция спектров наблюдалась и при взаимной синхронизации генераторов в случае симметричной связи. На

рис. 2.28 представлен фрагмент полученной в физическом эксперименте бифуркационной диаграммы системы симметрично связанных генераторов. Колебания генераторов в отсутствие связи соответствовали режиму спирального хаоса, возникшего на базе цикла утроенного периода. На диаграмме представлена правая половина области синхронизации (с отношением базовых частот 1 : 1). Используются следующие обозначения: линия l_1^2 соответствует взаимному захвату базовых частот на границе области синхронных колебаний удвоенного периода $2T_0$; на линиях l_2^k , $k = 1, 2, 4$, происходят бифуркации удвоения периода синхронных циклов с периодами kT_0 соответственно; на линиях l_0^k , $k = 1, 2$, наблюдается подавление одной из базовых частот колебаний (ω_1^0 при $p < 1$ и ω_2^0 при $p > 1$) и возникновение периодических колебаний с периодом kT_0 . Области периодических колебаний оставлены незаштрихованными и обозначены kT_0 , $k = 2, 3, 4, 8, \dots$, где kT_0 – период колебаний; T_0 – область периодических колебаний с периодом T_0 , определяемым базовой частотой $f_1 = f_2 = f_0$. Кроме того, на диаграмме отмечены две области синхронизации высшего порядка с отношением частот $5/4$ и $4/3$. Выделены три области синхронного хаоса (CA_0 , CA'_0 , CA_3) и область несинхронного хаоса (CA_2).

Результаты численных исследований модели (2.63) находятся в полном соответствии с результатами физических экспериментов.

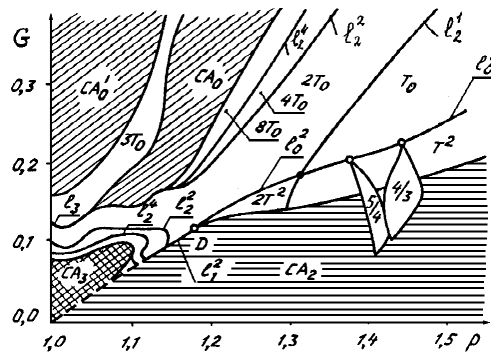


Рис. 2.28. Бифуркационная диаграмма двух симметрично связанных генераторов на плоскости параметров “частотная расстройка – связь” (физический эксперимент); в отсутствие связи парциальные генераторы демонстрируют хаотические колебания, отличающиеся только слабой расстройкой базовых частот [145]

В работах [149, 150] предложены методы введения мгновенной фазы хаотических колебаний и показано, что с увеличением связи между взаимодействующими хаотическими генераторами, имеющими расстройку по частотам, средняя разность мгновенных фаз колебаний устанавливается постоянной, что означает явление фазового захвата. Очевидно, эффекты частотного и фазового захвата в случае хаотических колебаний так же, как в случае периодических колебаний, тесно взаимосвязаны.

Рассмотрим суть классического подхода к синхронизации хаоса и вскрыем взаимосвязь фазовых и частотных представлений на примере хаотического генератора с гармоническим воздействием. Колебания автономного хаотического генератора можно представить в виде

$$x(t) = A(t) \cos(\Phi(t)), \quad (2.64)$$

где $A(t)$ и $\Phi(t)$ – введённые каким-либо образом мгновенные амплитуда и фаза колебаний. (Способы введения мгновенной фазы колебаний были рассмотрены в п.1.3.4.) Для мгновенной фазы имеем

$$\Phi(t) = \langle \Phi(t) \rangle + \delta\phi(t), \quad (2.65)$$

где $\delta\phi$ – флуктуация фазы относительно среднего значения $\langle \Phi(t) \rangle$. Если предположить, что среднее значение мгновенной частоты

$$\langle \omega(t) \rangle = \left\langle \frac{d\Phi(t)}{dt} \right\rangle = \omega_{av} \quad (2.66)$$

постоянно, то можно представить

$$\langle \Phi(t) \rangle = \Phi_0 + \omega_{av}t, \quad (2.67)$$

где Φ_0 – начальная фаза колебаний. При корректном определении мгновенной фазы $\Phi(t)$ средняя частота хаотических колебаний ω_{av} , совпадает с базовой частотой спектра ω_0 (или очень близка к ней).

Захват средней частоты колебаний ω_{av} (или же базовой частоты) внешней силой $f(t) = \sin(\omega_s t + \Phi_s)$ сопровождается захватом фазы. Среднее значение разности мгновенных фаз колебаний и воздействия

$$\langle \Delta\Phi \rangle = \langle \omega_{av}t + \Phi_0 + \delta\phi(t) - (\omega_s t + \Phi_s) \rangle = (\omega_{av} - \omega_s)t + \Phi_0 - \Phi_s \quad (2.68)$$

при условии $\omega_{av} = \omega_s$ будет равно начальной разности фаз ($\Phi_0 - \Phi_s = \text{const}$).

Рассмотрим, как ведут себя базовая и средняя частоты хаотических колебаний в случае вынужденной синхронизации хаоса. В качестве примера возьмем неавтономный осциллятор Рёсслера в режиме спирального хаоса. Уравнения системы имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\Omega y - z + \gamma \sin \omega_s t, \\ \dot{y} &= \Omega x + \alpha y, \\ \dot{z} &= \beta + z(x - \mu).\end{aligned}\tag{2.69}$$

Частоту воздействия ω_s зафиксируем равной единице. Частотная расстройка автоколебаний и воздействия управляется параметром Ω . На рис. 2.29а,б показано поведение частот ω_{av} и ω_0 при изменении параметра Ω . Рисунок 2.29в отражает зависимость от Ω коэффициента эффективной диффузии D_{eff} разности фаз автоколебаний и воздействия. Мгновенная фаза в данном случае введена как угол поворота изображающей точки в xy -проекции. При выбранных значениях параметров на границах основной области синхронизации наблюдается переход “синхронный хаос – несинхронный хаос”. В пределах точности численного эксперимента все рассмотренные характеристики определяют одни и те же значения параметра $\Omega_{1,2}$, соответствующие границам синхронизации.

Говоря о фазовой синхронизации хаотических автоколебаний, важно отметить следующее. Захват фаз и частот – это два проявления одного и того же эффекта (как и в классическом случае синхронизации гармонических колебаний). Однако захват фазы будет наблюдаться только при том условии, что мгновенная фаза хаотических колебаний введена корректно. Корректное определение мгновенной фазы вызывает в ряде случаев большие затруднения. Если мгновенная фаза определена неудачно, то рассчитанная для нее средняя частота ω_{av} не совпадает с базовой частотой спектра. В таком случае поведение мгновенной фазы и соответствующей средней частоты не отражает эффекта синхронизации. В качестве примера на рис. 2.30 приведено поведение разности фаз колебаний и воздействия $\Delta\Phi(t) = \Phi(t) - \omega_s t$ в области синхронизации спирального хаоса в системе (2.69) при $\mu = 6.5$. Мгновенная фаза определялась через сопряженный по Гильберту сигнал (как это предлагается в п. 1.3.4). Кривая 1 соответствует мгновенной фазе $\Phi(t)$, рассчитанной для переменной x , и свидетельствует о фазовом захвате. Кривая 2, полученная для переменной y , не отражает эффекта фазового захвата. В автономном режиме при выбранном

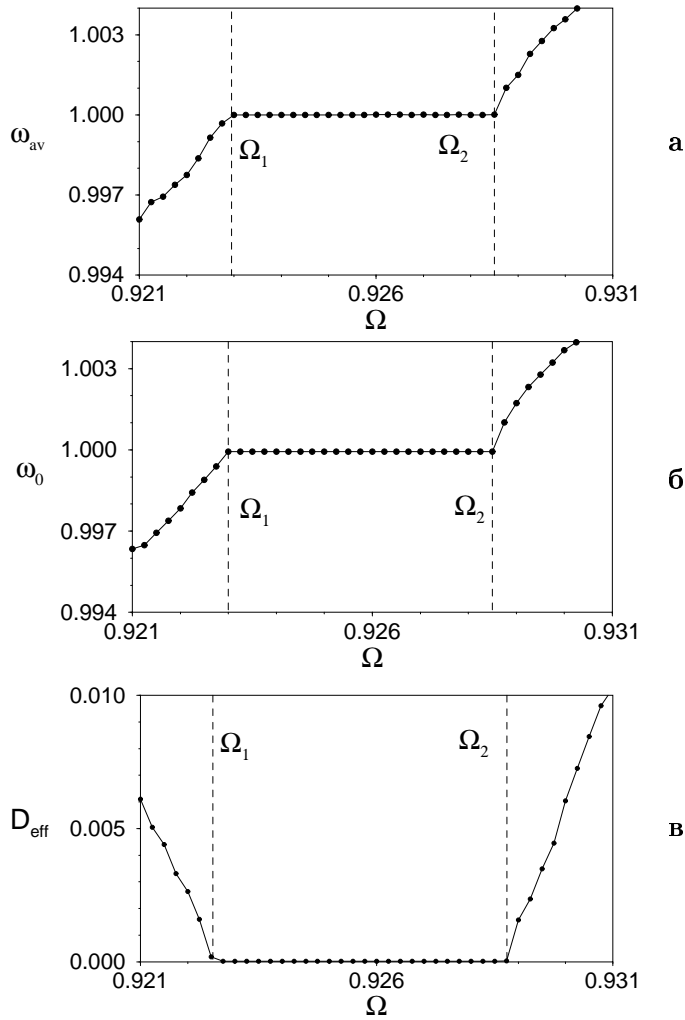


Рис. 2.29. Вынужденная синхронизация хаотических колебаний в системе Ресслера (2.69): (а) – зависимость средней частоты колебаний ω_{av} от параметра Ω ; (б) – зависимость базовой частоты ω_0 от Ω ; (в) – зависимость коэффициента эффективной диффузии фазы от параметра Ω . Параметры системы выбирались равными $\alpha = 0.2$, $\beta = 0.2$, $\mu = 4$, $C = 0.02$, $\omega_s = 1$

значении μ средняя частота ω_{av} , рассчитанная для колебаний $y(t)$, не совпадает с базовой частотой спектра ω_0 . Это означает, что мгновенная фаза для переменной y определена неудачно.

Численные исследования показывают, что спектральный максимум наблюдается для любой динамической переменной системы на одной и той же базовой частоте ω_0 . В рассматриваемом режиме

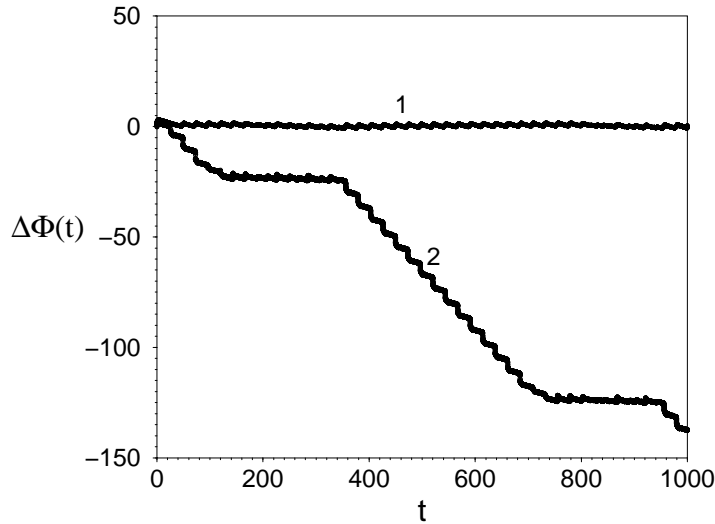


Рис. 2.30. Поведение разности фаз $\Delta\Phi(t) = \Phi(t) - \omega_s t$ в системе (2.69) в области синхронизации хаоса при $\mu = 6.5$, $C = 0.05$, $\Omega = 1$, $\omega_s = 1.068$. Кривые 1 и 2 отвечают мгновенным фазам $\Phi(t)$, полученным для переменных x и y , соответственно

базовая частота оказывается захваченной на частоте воздействия. Таким образом, спектральный подход к описанию синхронизации хаоса является более универсальным.

Перестройка хаотического аттрактора на границе области синхронизации не только легко диагностируется перечисленными характеристиками, но хорошо определяема “невооружённым глазом” по виду проекций фазовых траекторий и их сечений⁶. При больших значениях амплитуды воздействия и частотной расстройки $\Delta = \Omega - \omega_s$ наблюдается явление подавления хаотических автоколебаний. В этом случае в области синхронизации существуют периодические режимы, а граница области соответствует бифуркации рождения тора из предельного цикла (как и в классическом случае подавления периодических автоколебаний).

При взаимодействии двух совершенно идентичных хаотических осцилляторов (с одинаковыми спектрами колебаний), начиная с некоторого значения параметра связи, колебания парциальных систем могут стать совершенно идентичными. Именно это явление в

⁶ В случае вынужденной синхронизации информативными являются проекции на плоскость динамических переменных, одной из которых служит вынуждающая сила.

литературе, начиная с [140–142], часто называют хаотической синхронизацией. В отличие от рассмотренной выше частотно-фазовой синхронизации это явление правильнее было бы называть *полной* или *синфазной* синхронизацией хаоса.

Рассмотрим систему взаимодействующих осцилляторов, задаваемых одинаковыми уравнениями:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \mathbf{F}(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\alpha}_1) + \gamma \mathbf{g}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1), \\ \mathbf{x}_2 &= \mathbf{F}(\mathbf{x}_2, \boldsymbol{\alpha}_2) + \gamma \mathbf{g}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \end{aligned} \quad (2.70)$$

где $\mathbf{x}_{1,2} \in \mathbf{R}^N$; $\boldsymbol{\alpha}_{1,2}$ – векторные параметры парциальных систем; γ – параметр связи; функция \mathbf{g} определяет характер связи, причём, если $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$, то $\mathbf{g}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \mathbf{g}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) = 0$. В случае $\boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{\alpha}_2$ парциальные осцилляторы полностью идентичны, и фазовое пространство системы (2.70) имеет инвариантное многообразие U ($\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$), называемое *симметричным подпространством*. Фазовые траектории, лежащие в U , соответствуют полностью синхронным колебаниям. Если предельное множество, принадлежащее U , притягивает фазовые траектории не только из U , но и из некоторой окрестности симметричного подпространства, то наблюдается *полная синхронизация*.

При расстройке парциальных систем по параметрам симметричное подпространство перестаёт существовать, и соответственно при конечном значении γ полная синхронизация невозможна. Однако если осцилляторы характеризуются расстройкой параметров, обеспечивающей в отсутствие связи хотя бы небольшое различие базовых частот при идентичной структуре хаотических аттракторов парциальных систем, то при достаточно сильной связи наблюдается эффект, близкий к полной синхронизации. Он состоит в том, что колебания осцилляторов полностью повторяют друг друга с некоторой задержкой τ_d во времени: $\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}_2(t + \tau_d)$. Этот эффект, впервые описанный в [158], был назван *lag-синхронизацией*⁷. Хотя инвариантного подпространства в случае lag-синхронизации не существует, хаотический аттрактор топологически эквивалентен аттрактору при полной синхронизации. Таким образом, можно рассматривать lag-синхронизацию как обобщение понятия полной синхронизации на случай систем со слабой частотной расстройкой.

Итак, для взаимодействующих хаотических осцилляторов, характеризующихся частотной расстройкой, можно выделить три

⁷ По английски “lag” означает “отставание”, “запаздывание”.

степени синхронизации хаоса. Граница клюва синхронизации определяется синхронизацией в смысле Гюйгенса, т.е. соответствует захвату мгновенных фаз и базовых частот хаотических колебаний парциальных систем или (при больших значениях расстройки) подавлению автоколебаний одного из осцилляторов. В последнем случае, несмотря на хаотическое поведение обеих парциальных систем в автономном режиме, в области синхронизации наблюдаются периодические колебания. С уменьшением расстройки и ростом параметра связи может возникнуть более сильный эффект синхронизации – *lag-синхронизация*. Переход от фазово-частотной синхронизации к lag-синхронизации является сложным процессом, бифуркационный механизм которого ещё не в достаточной степени изучен, но, по-видимому, аналогичен механизму разрушения полной синхронизации (о котором речь пойдёт в следующем параграфе). При нулевой расстройке, начиная с некоторого значения параметра связи, может наблюдаться полная синхронизация: хаотическое предельное множество в симметричном подпространстве становится притягивающим в полном фазовом пространстве системы.

Для двух почти идентичных взаимодействующих осцилляторов можно вводить различные характеристики степени синхронизации (т.е. степени близости колебаний парциальных осцилляторов к идентичным). В [158] предлагается следующая характеристика степени синхронности колебаний $x_1(t)$ и $x_2(t)$ парциальных систем:

$$\kappa = \min_{\tau} S(\tau), \quad (2.71)$$

где $S(\tau)$ – функция подобия,

$$S^2(\tau) = \frac{\langle (x_2(t+\tau) - x_1(t))^2 \rangle}{\sqrt{\langle x_1^2(t) \rangle \langle x_2^2(t) \rangle}}. \quad (2.72)$$

В случае полной синхронизации и lag-синхронизации $\kappa = 0$. С ростом расстройки и уменьшением связи κ растёт. Чтобы охарактеризовать степень синхронизации можно использовать также взаимную нормированную корреляционную функцию:

$$R_{x_1 x_2}(\tau) = \frac{\langle x_1(t) x_2(t+\tau) \rangle - \langle x_1(t) \rangle \langle x_2(t+\tau) \rangle}{\sqrt{(\langle x_1^2(t) \rangle - \langle x_1(t) \rangle^2) (\langle x_2^2(t+\tau) \rangle - \langle x_2(t+\tau) \rangle^2)}}. \quad (2.73)$$

Величина $\eta = \max_{\tau} R_{x_1 x_2}(\tau)$ будет равна единице в случае lag-синхронизации (и, разумеется, полной синхронизации) и будет стремиться к нулю при потере колебаниями $x_1(t)$ и $x_2(t)$ статистической взаимосвязи. О степени синхронности движения свидетельствует также плотность вероятности мгновенной разности фаз хаотических колебаний $\Delta\Phi(t) = \Phi_1(t) - \Phi_2(t)$. В качестве количественных характеристик можно выбрать диффузию мгновенной разности фаз $D_{\Delta\phi}$, дисперсию мгновенной разности фаз, приведённой к интервалу $[-\pi, \pi]$, или энтропию её распределения (соответствующую фиксированному шагу дискретизации значений h_{ϕ}).

Степень синхронности можно оценить и в рамках спектрального подхода. С этой целью можно использовать функцию когерентности [145]

$$r_{x_1 x_2}(\omega) = \frac{|S_{x_1 x_2}(\omega)|}{\sqrt{S_{x_1}(\omega)S_{x_2}(\omega)}}, \quad (2.74)$$

где S_{x_1}, S_{x_2} – спектры мощности флуктуаций $x_1(t) - \langle x_1 \rangle$ и $x_2(t) - \langle x_2 \rangle$; $S_{x_1 x_2}$ – взаимный спектр флуктуаций. Для статистически независимых процессов $r_{x_1 x_2} \equiv 0$, а в случае линейной взаимосвязи $x_1(t)$ и $x_2(t)$ имеем $r_{x_1 x_2} \equiv 1$. Чтобы ввести не зависящую от частоты количественную характеристику, можно рассматривать среднее значение коэффициента когерентности в исследуемом частотном интервале $\bar{\tau}$. В [145] предлагается использовать характеристику степени согласованности фаз различных спектральных компонент сигналов $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Рассматриваются фазовые спектры реализаций $x_1(t)$ и $x_2(t)$ на конечном времени T и вводится текущая разность фаз для каждой частоты спектра:

$$\Delta\phi(\omega) = \phi_1(\omega) - \phi_2(\omega), \quad \Delta\phi \in [-\pi, \pi], \quad (2.75)$$

где

$$\phi_{1,2}(\omega) = \arg \int_{-T/2}^{T/2} x_{1,2}(t) \exp(-j\omega t) dt.$$

Для различных начальных точек на аттракторе получаются различные зависимости $\Delta\phi(\omega)$ и на множестве таких зависимостей можно рассчитать плотность вероятности $p(\Delta\phi, \omega)$. В случае полной и lag-синхронизации плотность вероятности принимает вид δ -функции, не зависящей от частоты. При срыве lag-синхронизации распределение имеет конечную ширину и форму, различные на различных частотах. Количественной характеристикой степени синхронности осцилляторов может служить усреднённая по всем частотам дисперсия или энтропия распределения разности фаз.

На рис. 2.31 в качестве примера приведены зависимости некоторых из рассмотренных выше характеристик степени синхронности парциальных хаотических колебаний от параметра связи при фиксированной частотной расстройке, рассчитанные для системы двух связанных осцилляторов Рёсслера

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= -\Omega_1 y_1 - z_1 + \gamma(x_2 - x_1), \\
 \dot{y}_1 &= \Omega_1 x_1 + \alpha y_1, \\
 \dot{z}_1 &= \beta + z_1(x_1 - \mu), \\
 \dot{x}_2 &= -\Omega_2 y_2 - z_2 + \gamma(x_1 - x_2), \\
 \dot{y}_2 &= \Omega_2 x_2 + \alpha y_2, \\
 \dot{z}_2 &= \beta + z_2(x_2 - \mu),
 \end{aligned} \tag{2.76}$$

где $\Omega_{1,2} = \Omega \pm \Delta$ – параметры, определяющие частоты парциальных осцилляторов (Δ – расстройка); γ – параметр связи; α , β и μ управляют динамическим режимом осцилляторов.

2.3.3 Особенности взаимодействия осцилляторов с фейгенбаумовским сценарием развития хаоса. Фазовая мультистабильность в области синхронизации

Особенностью взаимной синхронизации осцилляторов с фейгенбаумовским сценарием развития хаоса является наличие в клюве Арнольда области мультистабильности периодических и хаотических режимов [136, 139, 145, 146, 159, 160]. Эту мультистабильность можно назвать *фазовой*, так как она связана с возможностью взаимной синхронизации колебаний, спектр которых содержит субгармоники базовой частоты ω_0 , в различных фазах по отношению друг к другу. Число возможных синхронных режимов, различающихся фазовым сдвигом между парциальными осцилляторами, тем больше, чем больше субгармоник базовой частоты можно выделить в спектре.

Для исходных (порождающих) периодических колебаний с периодом T_0 разность фаз Φ_0 между парциальными системами аналогична разности фаз $\Phi_0 \pm 2\pi k$, $k = 1, 2, \dots$ Для колебаний удвоенного периода $2T_0$, в спектре которых возникла субгармоника $\omega_0/2$, разности фаз Φ_0 и $\Phi_0 \pm 2\pi$ соответствуют два различных предельных цикла в фазовом пространстве взаимодействующих осцилляторов. Количество возможных предельных циклов с периодом $2^n T_0$

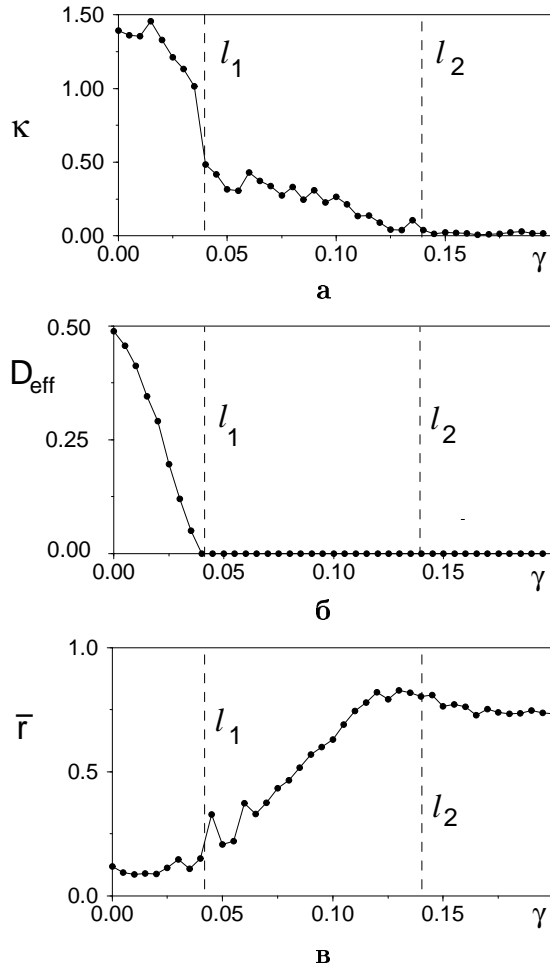


Рис. 2.31. Зависимость различных количественных характеристик степени синхронности взаимодействующих хаотических генераторов от параметра связи γ для модели (2.76) при $\alpha = 0.165$, $\beta = 0.2$, $m = 10$, $\Omega = 0.97$, $\Delta = 0.02$. **(а)** Минимальное значение функции подобия κ ; **(б)** коэффициент диффузии мгновенной разности фаз D_{eff} и **(в)** среднее значение коэффициента когерентности $\bar{\gamma}$ (пунктирными линиями l_1 , l_2 отмечены границы фазовой и lag-синхронизации соответственно)

возрастает до 2^n . Они отличаются фазовым сдвигом между парциальными осцилляторами, который может принимать значения $\phi_0 + 2\pi m$, где $m = 0, 1, 2, \dots, 2^n - 1$. Возникшая в области периодических колебаний фазовая мультистабильность сохраняется и для слабого хаоса, соответствующего многосвязанным хаотическим ат-

тракторам, представляющим собой 2^k -оборотную ленту. Иерархия фазовой мультистабильности в идентичных системах с диссипативной связью была подробно исследована В.В. Астаховым и др. при численном моделировании динамики связанных логистических отображений [139, 160] и в экспериментах с синфазно возбуждаемыми нелинейными радиотехническими контурами [159]. Обнаруженная иерархия режимов обладает определёнными чертами универсальности, которые проявляются также и при безынерционном взаимодействии автоколебательных систем [161].

Базовой моделью для исследования фазовой мультистабильности в идентичных, диссипативно связанных осцилляторах с фейгенбаумовским сценарием развития хаоса служит система логистических отображений вида [136, 138, 139]

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= r - x_n^2 + \gamma(x_n^2 - y_n^2), \\y_{n+1} &= r - y_n^2 + \gamma(y_n^2 - x_n^2),\end{aligned}\tag{2.77}$$

где r – управляющий параметр логистического отображения; γ – параметр связи. Для системы (2.77) с дискретным временем фазовый сдвиг понимается как сдвиг между временными реализациями в подсистемах на m итераций. Колебания, для которых $m = 0$, называются *синфазными*; соответствующие им предельные множества принадлежат симметричному подпространству $x = y$. Колебания, для которых $m \neq 0$, являются *несинфазными* и не лежат в симметричном подпространстве.

При увеличении параметра r происходит развитие фазовой мультистабильности по следующему сценарию. Исходный цикл теряет устойчивость и становится седловым. С ростом r седловой цикл претерпевает бифуркацию удвоения периода, которая приводит к разрушению симметрии. Родившийся цикл периода 2 не лежит в симметричном подпространстве, но является зеркально симметричным относительно прямой $x = y$. Этот цикл, рождающийся седловым, при дальнейшем увеличении r становится устойчивым. Каждый из синфазных циклов порождает свою ветвь несинфазных режимов. Все несинфазные циклы, возникающие из синфазных, претерпевают бифуркацию рождения тора. В результате резонанса на торе появляется новая пара циклов и т.д. Мультистабильность может наблюдаться и для хаотических режимов. На рис. 2.32 приведены фазовые портреты предельных циклов системы (2.77),

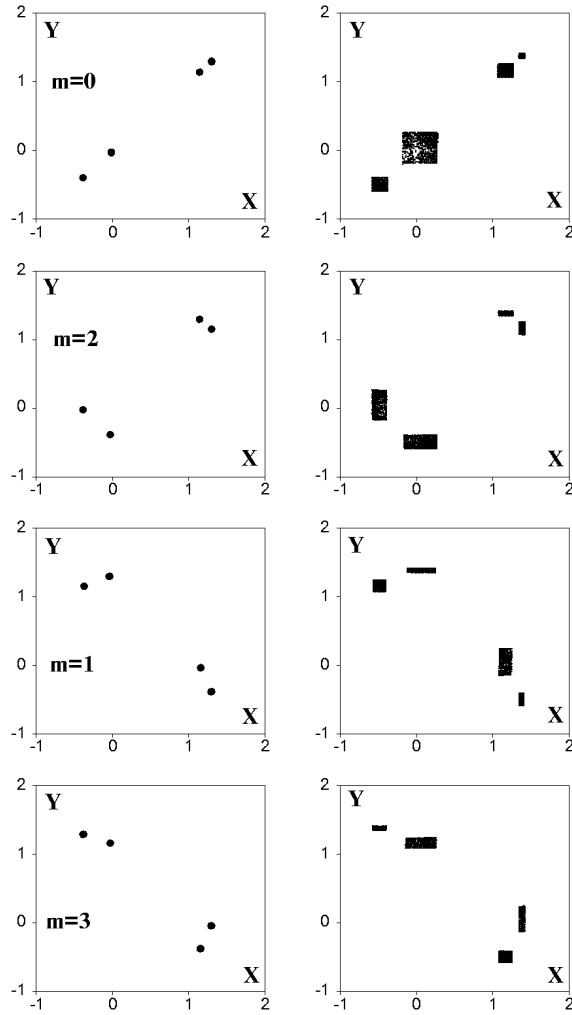


Рис. 2.32. Иллюстрация фазовой мультистабильности в системе (2.77) при $\gamma = 0.002$: циклы с различным фазовым сдвигом m и для $r = 1.3$ (слева) и хаотические аттракторы, порождаемые этими циклами, при $r = 1.415$ (справа)

соответствующие разным m , и возникающие на их основе хаотические аттракторы.

На рис. 2.33, взятом из работы [139], схематически показана эволюция различных видов колебаний при изменении r и малом фиксированном γ . Сплошные линии соответствуют устойчивым режимам, пунктирные – неустойчивым. Точками показаны бифуркационные переходы. Символ $2^n C^m$ означает цикл периода 2^n , со-

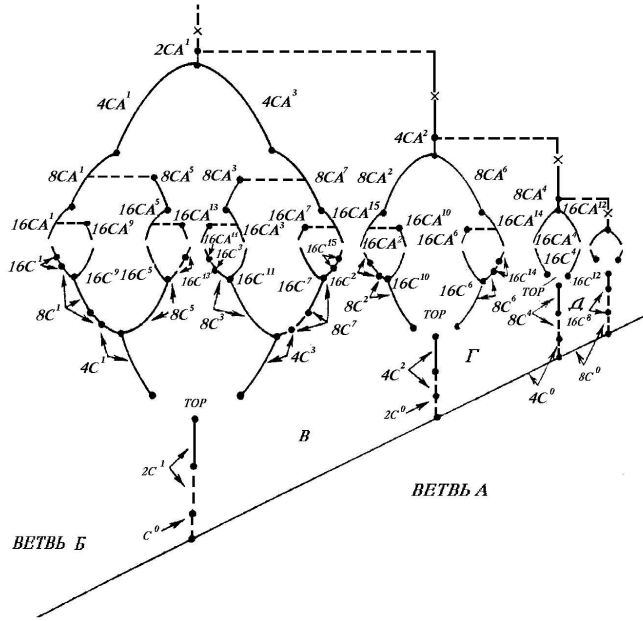


Рис. 2.33. Схема эволюции различных видов колебаний при изменении параметра r и фиксированном $\gamma = 0.002$ для отображения (2.77) [139]

ответствующий сдвигу на m итераций между колебаниями подсистем. Символ $2^n CA^m$ означает 2^n -связанный хаотический аттрактор, возникающий на базе цикла со сдвигом m .

На схеме выделены четыре ветви – А, Б, В, Г. Ветвь А соответствует эволюции синфазных режимов ($m = 0$), ветви Б, В, Г – эволюциям несинфазных режимов ($m \neq 0$). В точках ветвления исходный цикл теряет устойчивость, становясь седловым. В хаосе с ростом надкритичности наблюдается последовательность бифуркаций связанности хаотических аттракторов $2^n CA^m$. Параллельно идёт процесс уменьшения числа хаотических аттракторов в порядке, обратном возникновению циклов $2^n C^m$. На каждой из ветвей последовательность слияния лент завершается аттракторами, у которых n и m совпадают с индексами резонансных циклов на торе. При дальнейшем увеличении r наблюдается объединение пар аттракторов: $4CA^1$ и $4CA^3$ на ветви Б, $8CA^2$ и $8CA^6$ на ветви В и т.д. Объединение хаотических аттракторов сопровождается явлением перемежаемости “хаос – хаос”. В результате объединения возникают хаотические аттракторы $2^n CA^m$, у которых n и m сов-

падают с индексами цикла, порождающего данную ветвь. Начиная с больших n и m , в определённой последовательности происходит объединение оставшихся хаотических множеств в точках, отмеченных крестиками. Причём одно из двух множеств перед объединением становится непритягивающим. Таким образом, в этих точках происходит кризис “хаотический аттрактор – хаотическое седло”. В конечном счёте все хаотические множества объединяются с образованием единого хаотического аттрактора CA^Σ , которому соответствует режим гиперхаоса.

Описанная картина соответствует малым значениям параметра связи γ . С ростом γ несинфазные семейства постепенно “вымирают” и остаются только предельные множества, лежащие в симметричном подпространстве.

Для связанных автоколебательных потоковых систем можно ввести частотную расстройку между ними и исследовать область фазовой синхронизации. Изучение системы (2.76) и других аналогичных систем показало, что введение очень малой расстройки ($\Delta \leq 0.001$) при слабой связи ($\gamma \approx 0.02$) не приводит к существенному изменению схемы эволюции различных видов колебаний, полученной для дискретной модели (2.77). Надо отметить, что при введении $\Delta \neq 0$ симметричное подпространство перестаёт существовать и все соотношения симметрии предельных множеств нарушаются. Вилообразной бифуркации циклов в этом случае быть уже не может, и её место занимает обычная седло-узловая бифуркация предельных циклов, причём седловой цикл удвоенного периода так и остаётся седловым, а устойчивый рождается рядом [162]. Однако дальнейшее увеличение расстройки приводит к существенным изменениям в порядке и характере бифуркаций периодических и хаотических режимов. Так, начиная с некоторого значения $\Delta \approx 0.0015$ рождения торов из циклов $2C^1$, $4C^2$ и т.д. не наблюдается, вместо этого происходят обычные бифуркации удвоения периодов.

В зависимости от выбора значений параметров системы (2.76) граница фазовой синхронизации хаоса может проходить в области мультистабильности или объединённого хаоса CA^Σ . На рис. 2.34 представлен небольшой фрагмент бифуркационной диаграммы на плоскости параметров $\Delta - \mu$. В заштрихованной области существуют два хаотических аттрактора – $4CA^0$ и $4CA^1$. С ростом μ аттрактор $4CA^1$ становится хаотическим седлом, а $4CA^0$ претерпевает бифуркацию связанности. Затем происходит объединение хаотиче-

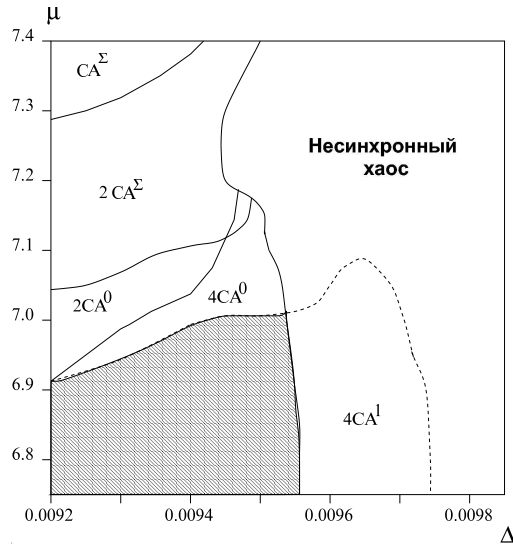


Рис. 2.34. Фрагмент бифуркационной диаграммы системы (2.76) в окрестности границы фазового захвата в условиях хаотической бистабильности; $\alpha = 0.165$, $\beta = 0.2$, $\gamma = 0.02$, $\Omega = 1$

ского множества с образованием аттрактора $2CA^\Sigma$.

Наличие притягивающих и седловых предельных множеств несинфазных семейств при небольших значениях параметра связи ведёт к сложной структуре фазового портрета взаимодействующих хаотических генераторов в нижней части клюва Арнольда. Здесь наблюдается мультистабильность, фрактальность границ бассейнов, изрешечивание бассейнов [163–166], кризисы хаотических аттракторов, сопровождающиеся явлением перемежаемости и гиперхаоса. Увеличение связи приводит к вырождению “несимметричных” предельных множеств, что имеет своим итогом переход в область lag-синхронизации или (при $\Delta = 0$) полной синхронизации. В этой области существует только один хаотический аттрактор, CA^0 , с простой структурой, топологически эквивалентной хаотическому аттрактору парциального осциллятора.

2.3.4 Бифуркационные механизмы разрушения полной и частичной синхронизации хаоса

Особенность переходов от синхронных хаотических режимов к несинхронным состоит в том, что они осуществляются в результате последовательности на первый взгляд незаметных внутренних бифуркаций хаотического аттрактора, связанных с встроенными в него неустойчивыми циклами (периодическими седлами или репеллерами). Причём, как оказалось, механизмы разрушения полной синхронизации и частотно-фазовой синхронизации во многом сходны.

Рассмотрим сначала более изученный на сегодняшний день вопрос о разрушении режима полной хаотической синхронизации в системе связанных идентичных осцилляторов типа (2.70) [136, 142, 162–165, 167–169]. Каким образом инвариантное многообразие U системы (2.70) (определяемое равенством $x_1 = x_2$), в котором располагается “синфазный” хаотический аттрактор, перестаёт быть притягивающим?

При исследовании данного вопроса, помимо потоковых моделей связанных идентичных хаотических осцилляторов, часто используются простейшие модельные системы, представляющие собой связанные одномерные необратимые отображения вида

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n) + \gamma g(y_n - x_n), \\y_{n+1} &= f(y_n) + \gamma g(x_n - y_n).\end{aligned}\quad (2.78)$$

Устойчивость траекторий системы (2.78), принадлежащих инвариантному многообразию U (биссектрисе $x = y$), в этом случае можно описать двумя ляпуновскими показателями, λ_{tn} и λ_{tr} , характеризующими эволюцию возмущений, лежащих в многообразии U и трансверсальных к нему соответственно. Таким образом, разрушение режима полной хаотической синхронизации в (2.78) диагностируется по знаку *трансверсального показателя*, определяемого выражением

$$\lambda_{\text{tr}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_n}. \quad (2.79)$$

Когда показатель λ_{tr} становится положительным, – это означает, что предельное множество, лежащее в U , теряет устойчивость в трансверсальном направлении и траектория при сколь угодно малом нарушении симметрии в начальных условиях уходит от инвариантного многообразия U на аттрактор, не лежащий в U . В

многомерном случае эволюция возмущения, трансверсального к U , описывается N ляпуновскими показателями (где N – размерность фазового пространства парциальной системы). Если хотя бы один из них становится положительным, то инвариантное многообразие перестаёт быть устойчивым. В результате происходит разрушение режима полной синхронизации хаоса, называемое *бифуркацией прорыва* (*blowout bifurcation*). Оно обычно сопровождается явлением переходной (на конечных временах) или “истинной” перемежаемости (*перемежаемость Ямады – Фуджисаки* или *“on-off-перемежаемость* [136, 163]).

Однако ляпуновские показатели являются усреднёнными по аттрактору характеристиками, которые не диагностируют всех локальных изменений в структуре предельного множества. В [163, 165, 167, 169] было показано, что ещё до того как λ_{tr} становится положительным, возможно появление счётного множества точек инвариантного многообразия, в которых имеет место трансверсальная неустойчивость. Эти точки принадлежат неустойчивым циклам, лежащим в инвариантном подпространстве. Для двумерного отображения (2.78) эти циклы являются репеллерами, в общем случае – седлами. Попав в окрестность такого цикла, изображающая точка (если она не лежит строго в U) удаляется от инвариантного многообразия. Если в системе при тех же значениях параметров нет другого аттрактора, кроме “симметричного” (или, по-другому, “синфазного”, т.е. лежащего в U), то через некоторое время траектория вновь вернётся в окрестность инвариантного многообразия и в конечном счёте попадёт на него. Однако если число встроенных в “синфазный” хаотический аттрактор неустойчивых циклов велико, может наблюдаться длительный переходный процесс on-off перемежаемости. Воздействие малого шума на “синфазный” хаос приводит к постоянному возобновлению процесса перемежаемости. Наблюдаемый экспериментально хаотический аттрактор в результате действия шума уже не лежит в инвариантном многообразии, а как бы разбухает. Это явление получило название *баблинга*⁸ [163, 165]. Если в системе имеется какой-либо регулярный или хаотический аттрактор, не лежащий в U , то возникновение неустойчивых циклов в “синфазном” хаосе приводит к образованию “языков” бассейна притяжения “несинфазного” аттрактора, опирающихся на точки этих циклов [163, 169]. Подобный язык на фазовой плоскости каче-

⁸ От слова *bubbling* – пузырение.

ственно изображён на рис. 2.35. Границы языка образованы устойчивыми многообразиями “несинфазных” седловых циклов $S^{1,2}$.

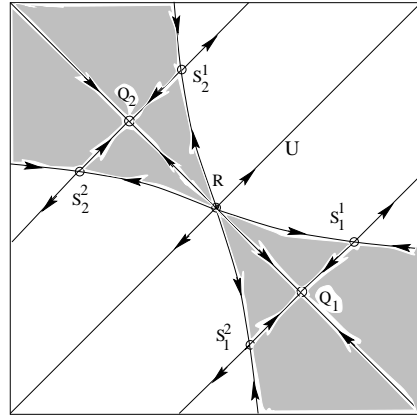


Рис. 2.35. Возникновение языка бассейна “несинфазного” цикла периода 2 (точки $Q_{1,2}$), опирающегося на репеллер R в инвариантном многообразии U (биссектриса). $S_{1,2}^1$ и $S_{1,2}^2$ – точки седловых циклов периода 2

Возникновение счётного множества языков, принадлежащих аттрактору, не лежащему в U , приводит к “изрешечиванию” локальной окрестности инвариантного многообразия, так что сколь угодно близко от любой точки “синфазного” аттрактора найдётся точка, принадлежащая бассейну другого аттрактора. Такое явление получило название *ридлинга*⁹ [163–165]. В результате ридлинга хаотический аттрактор в U перестаёт быть аттрактором в обычном смысле и его называют *слабым аттрактором* или *аттрактором Милнора* [166, 170]. На рис. 2.36 представлен вид изрешеченной окрестности хаотического аттрактора, лежащего в многообразии U (на биссектрисе) для системы связанных логистических отображений. Причём трансверсальный ляпуновский показатель ещё отрицателен, т.е. бифуркация прорыва ещё не произошла.

После того, как трансверсальное направление становится неустойчивым в среднем на аттракторе, лежащий в инвариантном многообразии аттрактор перестаёт быть аттрактором даже в смысле Милнора, что и соответствует бифуркации прорыва.

⁹ От слова riddling – изрешечивание.

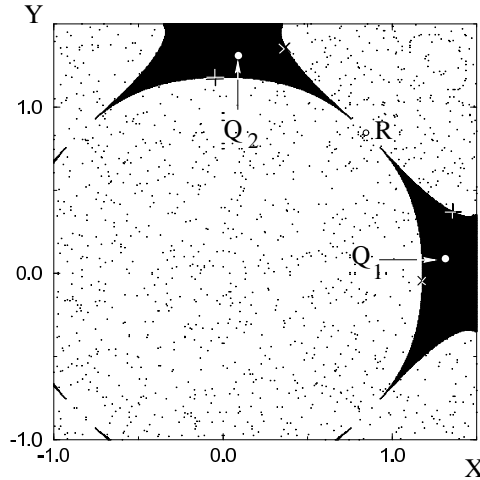


Рис. 2.36. Бистабильность и ридлинг в системе (2.77). Помимо хаотического “синфазного” аттрактора, расположенного на биссектрисе $x = y$, имеется “несинфазный” устойчивый цикл периода 2 (ему принадлежат точки $Q_{1,2}$). Бассейн притяжения “несинфазного” аттрактора обозначен тёмными точками

При разрушении и возникновении частотно-фазовой синхронизации бифуркации встроенных в синхронный аттрактор седловых циклов также играют важную роль. В [145] было установлено, что на плоскости управляющих параметров линии касательных бифуркаций седловых циклов различных периодов накапливаются к границе синхронизации хаоса. Сама граница хаотической синхронизации трактуется как критическая линия, к которой стремятся точки касательных бифуркаций для циклов всё возрастающих периодов. Роль встроенных в хаотический аттрактор седловых циклов детально рассматривалась в [171] на примере необратимого двумерного отображения, моделирующего синхронизацию хаотического генератора внешней периодической силой. Отображение имеет вид

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n, \phi_n), \\ \phi_{n+1} &= \phi_n + \Omega + \varepsilon \cos(2\pi\phi_n + g(x_n)), \text{ mod } 1, \end{aligned} \quad (2.80)$$

где ϕ соответствует разности фаз генератора и воздействия; Ω – частотная расстройка; ε характеризует амплитуду воздействия. Функция $g(x)$, задающая хаотическую модуляцию фазы, выбиралась равной $\delta \cdot x$ (где δ – некоторый параметр), а функция $f(x, \phi)$, описывающая динамику амплитуды хаотического генератора, бы-

ла взята в виде $f(x, \phi) = 1 - a|x| + \varepsilon\rho \sin(2\pi\phi)$ ¹⁰. Седловые циклы, составляющие как бы скелет синхронного хаоса, претерпевают касательные бифуркации в паре с соответствующими периодическими репеллерами. Последние составляют скелет хаотического репеллера, который касается хаотического аттрактора в отдельных точках (а именно, в точках седловых и неустойчивых циклов в момент их слияния). Каждая пара скелетных циклов принадлежит неустойчивой инвариантной кривой (соответствующей седловому тору потоковой системы). В результате касательной бифуркации движение на инвариантной кривой становится эргодическим, т.е. возникает направление, по которому изображающая точка уходит от синхронного аттрактора и, сделав оборот вдоль инвариантной кривой, вновь возвращается. При этом наблюдается скачок разности фаз на 2π .

Исчезновение отдельных пар циклов и возникновение направлений неустойчивости может долго не проявлять себя в численном эксперименте. Однако накопление локальных изменений структуры синхронного хаоса в конечном счёте приводит к окончательному разрушению фазовой синхронизации. Соответствующая бифуркация подобна описанной ранее бифуркации прорыва. Она хорошо заметна по поведению ляпуновских показателей. На границе фазового захвата один из отрицательных ляпуновских показателей синхронного хаоса становится равным нулю [149, 150, 172]. Зависимости двух старших ляпуновских показателей от параметра расстройки при переходе через границу фазового захвата, полученные для неавтономного осциллятора Рёсслера, приведены на рис. 2.37. Еще один показатель, связанный с периодическим возмущением, тождественно равен нулю (горизонтальная линия на рис. 2.37а,б). При выходе из основной области синхронизации могут иметь место два равных нулю показателя (рис. 2.37а) или только один (рис. 2.37б). Но в любом случае на границе синхронизации имеются два нулевых ляпуновских показателя. Проведенные в [174] численные эксперименты с неавтономным осциллятором Рёсслера подтверждают предполагаемый бифуркационный механизм фазового захвата хаотических колебаний. Синхронные колебания, сдвинутые по фазе относительно периодической внешней силы на $\theta(t)$ и $\theta(t) + 2\pi$, рассматриваются как принадлежащие двум сосуществующим хаотическим аттракторам – R и L . Граница бассейнов притяжения

¹⁰ Сходное отображение было рассмотрено также в [173].

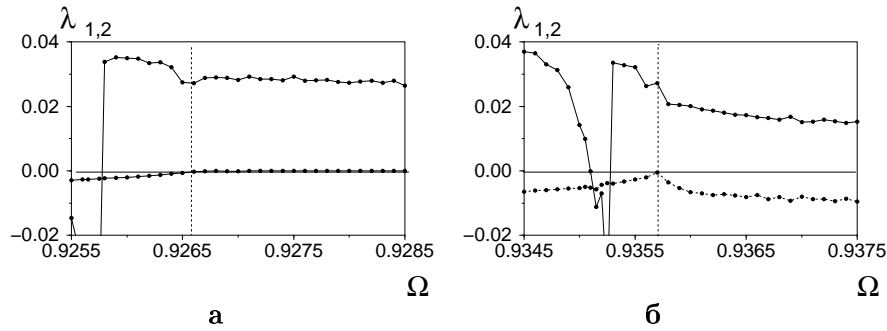


Рис. 2.37. Зависимости двух старших ляпуновских показателей от параметра расстройки Ω , полученные для неавтономного осциллятора Рёсслера (2.69) при $\alpha = \beta = 0.2$, $C = 0.02$, $\mu = 3.8$ (а) и $\mu = 3.71$ (б)

этих двух аттракторов даёт представление о расположении хаотического седла (в модельном отображении (2.80) ему соответствует хаотический репеллер), объединяющегося с хаотическим аттрактором. Их объединение приводит к разрушению фазовой синхронизации. На рис. 2.38, взятом из [174], представлена проекция аттрактора R на плоскости мгновенных значений амплитуды r и разности фаз колебаний и воздействия θ , а также проекция части бассейна аттрактора L (серый цвет). Можно видеть, как языки бассейна притяжения аттрактора L приближаются к аттрактору R . На

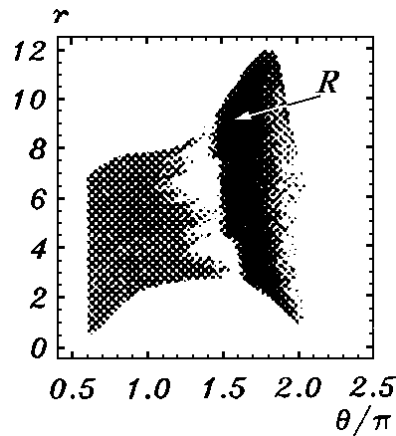


Рис. 2.38. Иллюстрация кризиса хаотического аттрактора R и хаотического седла в неавтономном осцилляторе Рёсслера, взятая из [174]. Седло располагается на границе области притяжения аттрактора L , закрашенной серым цветом (сам аттрактор L не изображен)

концах языков располагаются неустойчивые циклы (в потоковой системе седлового типа). Если начальная точка попадает в один из языков, то траектория уходит от аттрактора R , что соответствует фазовому сбоям.

2.3.5 Заключение

Фундаментальное явление синхронизации, наблюдаемое в разнообразных хаотических системах, в последние годы привлекает особое внимание исследователей. Практически близка к завершению единая концепция хаотической и стохастической синхронизации, базирующаяся на классических методах и подходах и включающая в себя представление о полной (синфазной) и частичной синхронизации хаоса. Однако остаётся ещё целый ряд недостаточно исследованных вопросов. Это и синхронизация некоторых типов хаоса (например, тор-хаоса), и детали бифуркационных механизмов разрушения полной и частичной синхронизации и многие явления, связанные с синхронизацией хаоса в ансамблях генераторов. Только начинают появляться работы, посвященные синхронизации пространственно-временных структур в распределённых системах.

Всестороннее исследование явления синхронизации сложных динамических систем имеет принципиальное значение не только в рамках нелинейной динамики, но и с точки зрения всего комплекса естественных наук, так как позволяет продвинуться в понимании механизмов самоорганизации взаимодействующих систем.

2.4 Эффекты синхронизации в цепочках связанных генераторов

2.4.1 Введение

Исследование динамики ансамблей, состоящих из большого числа нелинейных элементов, представляет собой одно из основных направлений развития теории нелинейных колебаний и волн. Ансамбли взаимодействующих генераторов с периодическим и хаотическим поведением, модельных отображений, бистабильных систем и стохастических осцилляторов, объединённых различными типами связи, нашли широкое применение при математическом моделировании физических, оптических и радиоэлектронных распределённых систем.

ных систем [123,129,175–186], а также химических и биологических пространственно-временных процессов [129,175,187–195].

Главным фактором в динамике ансамблей автоколебательных систем, который приводит к упорядоченному пространственно-временному поведению, служит синхронизация элементов ансамбля. Хорошо известен эффект синхронизации частот и фаз в неоднородных ансамблях квазигармонических автогенераторов [175,187,189,190,196–199]. Простейшие квазигармонические системы при взаимодействии в большом ансамбле порождают множество сложных нелинейных эффектов таких, например, как образование фазовых и частотных кластеров [181,189,200–205], подавление колебаний (так называемая “осцилляторная смерть” [204–209], возникновение режимов “замороженных состояний” [203], формирование коллективной хаотической динамики [183,202,209]. Все эти эффекты непосредственно связаны с проявлениями свойств фазо-частотной синхронизации.

Синхронизация в ансамбле автогенераторов служит причиной ограничения роста размерности аттракторов, что приводит к возникновению устойчивых пространственных структур. С возможностью реализации синхронных режимов с различными фазовыми сдвигами тесно связано явление мультистабильности, т.е. сосуществования множества регулярных и хаотических аттракторов в фазовом пространстве взаимодействующих систем [210]. Мультистабильность, в свою очередь, приводит к кризисам аттракторов, фрактализации бассейнов притяжения и другим нетривиальным эффектам. При исследовании распределенных систем, описываемых уравнениями в частных производных, также обнаруживаются проявления синхронизации пространственно-временных структур [211–214].

Несмотря на большое количество работ, посвященных эффектам синхронизации в ансамблях нелинейных элементов различного типа, в этой области остается еще много не исследованных явлений и задач. В данном разделе будут рассмотрены эффекты образования частотных кластеров в неоднородных цепочках квазигармонических генераторов, исследовано влияние шума на режимы кластерной синхронизации и дано обобщение понятия эффективной синхронизации на пространственно распределенные системы. Анализ эффектов проводится на моделях различного уровня: в цепочках генераторов, каждый из которых описывается укороченными

уравнениями для амплитуд и фаз, и в цепочках фазовых осцилляторов. Будет описано явление вынужденной синхронизации в цепочке хаотических генераторов, а также эффекты синхронизации и мультистабильности в кольце идентичных генераторов с бифуркациями удвоения периода.

2.4.2 Образование частотных кластеров в неоднородных цепочках генераторов

Рассмотрим неоднородную цепочку квазигармонических генераторов, каждый из которых описывается укороченными уравнениями для амплитуд и фаз, с диффузионной связью в виде [204, 205]:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_j &= r(1 - \rho_j^2)\rho_j + g(\rho_{j-1} \cos \theta_{j-1} + \rho_{j+1} \cos \theta_{j+1} - 2\rho_j), \\ \dot{\theta}_j &= \delta_j + g \left[\frac{\rho_{j+2}}{\rho_{j+1}} \sin \theta_{j+1} - \left(\frac{\rho_j}{\rho_{j+1}} + \frac{\rho_{j+1}}{\rho_j} \right) \sin \theta_j + \frac{\rho_{j-1}}{\rho_j} \sin \theta_{j-1} \right], \\ j &= 1, 2, \dots, m-1. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Здесь ρ_j – амплитуда колебаний j -го генератора, $\theta_j = \Phi_{j+1} - \Phi_j$ – разность фаз и $\delta_j = \omega_{j+1} - \omega_j$ – расстройка собственных частот соседних генераторов. Будем полагать, что $\delta_j = \Delta$ и $\omega_1 = 1$. Граничные условия зададим в виде

$$\rho_0 = \rho_1, \Phi_0 = \Phi_1, \rho_{m+1} = \rho_m, \Phi_{m+1} = \Phi_m, \quad (2.82)$$

что соответствует свободным концам цепочки. В результате взаимодействия генераторов при $g \neq 0$ происходит изменение парциальных частот автоколебаний. Поскольку колебания парциальных генераторов в общем случае не будут периодическими, введем усредненные парциальные частоты

$$\tilde{\omega}_j = | \langle \dot{\Phi}_j(t) \rangle | = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|\Phi_j(t_0 + T) - \Phi_j(t_0)|}{T} \quad (2.83)$$

или их отклонения от собственной частоты первого генератора: $\Omega_j = \tilde{\omega}_j - \omega_1$. Исследования проводились при фиксированном значении параметра возбуждения $r = 0.5$ для всех генераторов, число элементов цепочки m было выбрано равным 100.

При задании линейной расстройки вдоль цепочки между собственными частотами генераторов $\omega_j = \omega_1 + (j - 1)\Delta$ в некоторой области значений параметров (Δ, g) наблюдается режим частичной синхронизации. В цепочке формируются частотные кластеры, состоящие из групп элементов со строго одинаковыми или близкими средними частотами $\bar{\omega}_j$. Если средние частоты близки, но полностью не совпадают, то в цепочке наблюдается многочастотный квазипериодический режим. Каждый генератор имеет свою, в общем случае независимую среднюю частоту автоколебаний. Такие режимы называются промежуточными кластерными структурами (рис. 2.39а). В случае строгого совпадения средних частот в каждой группе генераторов, кластерные структуры называются идеальными (рис. 2.39б). Им соответствуют режимы периодических колебаний, так как все средние частоты оказываются линейно-зависимыми. Разностные частоты между кластерами совпадают и равны наименьшей кластерной частоте [204, 205].

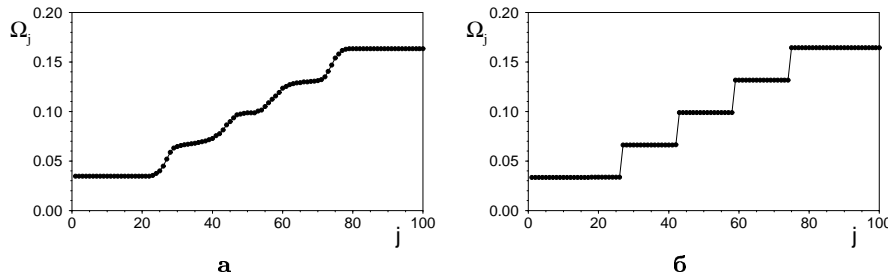


Рис. 2.39. Распределение средних частот Ω_j в цепочке (2.81) при $\Delta = 0.002$, соответствующее промежуточной кластерной структуре при $g = 1.45$ (а) и идеальной кластерной структуре при $g = 1.2$ (б)

С ростом значения параметра связи g наблюдается уменьшение числа кластеров. При выполнении условия

$$\left| \frac{\Delta m^2}{8g} \right| < 1, \quad (2.84)$$

имеет место глобальная синхронизация. В этом случае все генераторы синхронизованы на одной и той же частоте.

Образование частотных кластеров характерно для ансамблей, состоящих из генераторов не только с периодическим, но также и с хаотическим поведением, о чем свидетельствуют результаты работ [215, 216].

2.4.3 Влияние шума на режимы кластерной синхронизации в цепочке квазигармонических генераторов

В этом разделе будут представлены результаты исследования влияния шума на режимы кластерной синхронизации и дано обобщение понятия эффективной синхронизации (синхронизации в присутствии флуктуаций [100,101]) на пространственно - распределенные системы [217,218].

Запишем укороченные уравнения неоднородной цепочки квазигармонических генераторов (2.81) с учетом флуктуаций

$$\begin{aligned}
 \dot{\rho}_j &= r(1 - \rho_j^2)\rho_j + g(\rho_{j-1} \cos(\Phi_j - \Phi_{j-1}) + \frac{D}{\rho_j} + \\
 &\quad + \rho_{j+1} \cos(\Phi_{j+1} - \Phi_j) - 2\rho_j) + \sqrt{2D}\xi_j(t), \\
 \dot{\Phi}_j &= \omega_j + g\left(\frac{\rho_{j+1}}{\rho_j} \sin(\Phi_{j+1} - \Phi_j) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\rho_{j-1}}{\rho_j} \sin(\Phi_j - \Phi_{j-1})\right) + \frac{\sqrt{2D}}{\rho_j}\eta_j(t), \\
 j &= 1, 2, 3, \dots, m,
 \end{aligned} \tag{2.85}$$

где $\xi_j(t)$ и $\eta_j(t)$ – источники шума. Они характеризуются одной и той же интенсивностью D и предполагаются одинаковыми, некоррелированными между собой белыми гауссовскими процессами с нулевыми средними значениями. Исследования проводились при $r = 0.5$ в цепочке с граничными условиями (2.82). Начальные условия для осцилляторов цепочки выбирались близкими к однородным с небольшим случайным разбросом в пределах интервала $\varepsilon = 0.1$.

Рассмотрим влияние шума на структуру частотных кластеров в цепочке генераторов (2.85) с линейной расстройкой частот вдоль пространственной координаты j . Результаты, соответствующие двум различным значениям параметра связи $g = 0.55$ и $g = 3.8$ с расстройкой $\Delta = 0.002$, представлены на рис. 2.40.

Из приведенных графиков хорошо видно, что для обоих значений параметра связи с ростом интенсивности шума происходит разрушение кластеров синхронизации. Слабый шум (фрагменты (II)) приводит к сглаживанию краев кластерных ступенек. Сглаживание и постепенное разрушение кластеров с ростом интенсивности

шума D начинается с середины цепочки. При достаточно сильной интенсивности (фрагменты (III)) все средние кластеры разрушаются полностью. Многочисленные расчеты, проведенные для различных значений параметров Δ и g , показали, что два крайних кластера весьма устойчивы к действию шума. Для их разрушения требуется очень сильное шумовое воздействие.

Присутствие флуктуаций разрушает четкую границу фазовой синхронизации. Численные эксперименты показывают, что в отсутствие шума разность фаз осцилляторов, принадлежащих различным кластерам, растет со временем в среднем по линейному закону, в то время, как разность фаз осцилляторов, относящихся к одному кластеру остается постоянной за исключением осцилляций

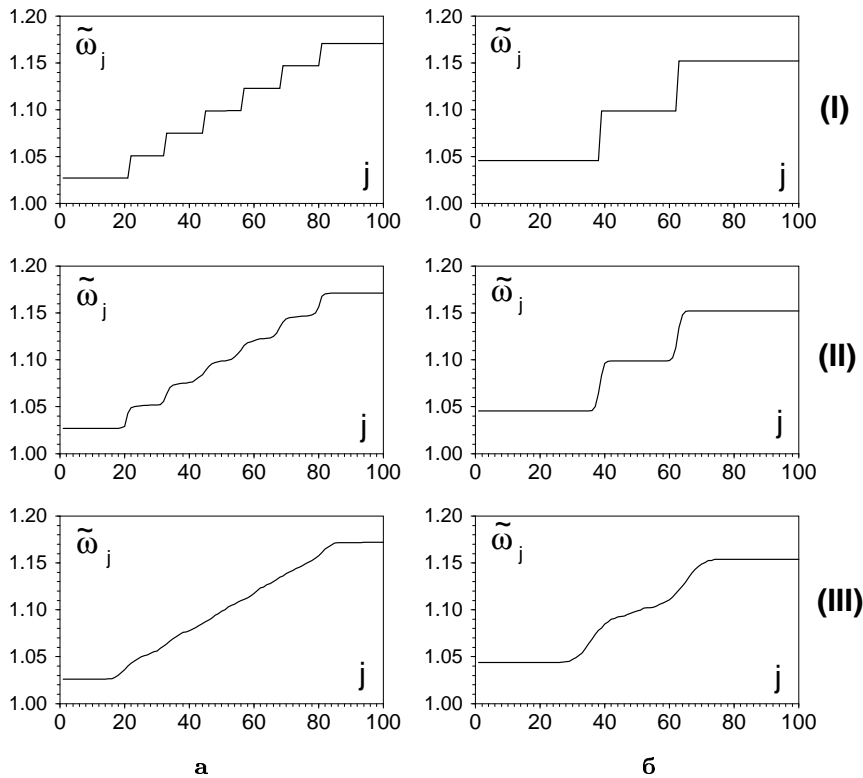


Рис. 2.40. Распределение средних частот $\tilde{\omega}$ генераторов в цепочке (2.85) при $\Delta = 0.002$ и двух значениях параметра диффузионной связи: **(а)** – $g = 0.55$; **(б)** – $g = 3.8$. Фрагменты (I), (II), (III) получены при интенсивности источников шума $D = 0$, $D = 0.00001$, $D = 0.001$, соответственно

в пределах $[-\pi, \pi]$ относительно среднего значения. Воздействие шума приводит к тому, что разность фаз любых соседних осцилляторов неограниченно растет во времени, но этот рост ни для какого j не будет линейным. Средняя скорость роста разности фаз различна для различных j . Можно выделить некоторые участки цепочки, для которых эта скорость мала. В результате мы получаем возможность определить кластеры эффективной синхронизации в присутствии шума [101].

Для оценки границ кластеров эффективной синхронизации при наличии флуктуаций можно использовать коэффициент эффективной диффузии разности фаз соседних осцилляторов D_{θ}^{eff} [100]. Его среднее во времени значение для j -го и $(j + 1)$ -го элемента цепочки есть

$$D_{\text{eff}}(j) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left\langle \frac{d\sigma_{\theta_j}^2(t)}{dt} \right\rangle, \quad (2.86)$$

где $\sigma_{\theta_j}^2(t) = \langle \theta_j^2(t) \rangle - \langle \theta_j(t) \rangle^2$.

Зависимости коэффициента эффективной диффузии от пространственной координаты в пределах одного кластера ($39 \leq j \leq 62$), полученные для разных значений интенсивности шума D , приведены на рис. 2.41. Они свидетельствуют о постепенном разрушении границ кластера с ростом интенсивности шума. Можно отметить, что зависимость D_{eff} от j подобна (с учетом дискретности переменной j) известной зависимости коэффициента эффективной диффузии разности фаз автоколебательной системы и воздействия от расстройки. Для определения границ кластера эффективной синхронизации требуется задать некоторый максимально допустимый уровень диффузии $D_{\text{eff}}^{\text{max}}$. Тогда можно считать, что автогенераторы, для которых $D_{\text{eff}} \leq D_{\text{eff}}^{\text{max}}$, принадлежат одному кластеру. Такое определение границ кластера достаточно произвольно, так как значение $D_{\text{eff}}^{\text{max}}$ можно задавать различным образом, исходя из конкретной задачи. Однако, в любом случае с ростом интенсивности шума длина кластера будет уменьшаться. Например, если положить $D_{\text{eff}}^{\text{max}} = 0.001$, то границы кластера, представленного на рис. 2.41 при $D = 0.001$, будут соответствовать элементам цепочки с номерами $j = 43$ и $j = 56$.

Часто при изучении динамики ансамблей осцилляторов ограничиваются только фазовыми уравнениями, считая амплитуды ос-

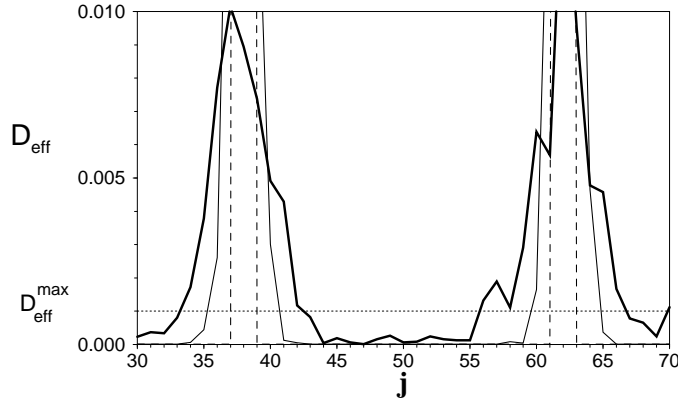


Рис. 2.41. Коэффициент эффективной диффузии в зависимости от пространственной координаты j для случаев $D = 10^{-8}$ (тонкая пунктирная линия), $D = 10^{-5}$ (тонкая сплошная линия) и $D = 10^{-3}$ (жирная сплошная линия). Горизонтальной точечной линией отмечен уровень коэффициента диффузии $D_{\text{eff}}^{\text{max}}$, определяющий границы кластера. Значения параметров расстройки и связи: $\Delta = 0.002$; $g = 3.8$

цилляторов одинаковыми и постоянными во времени. Такой подход позволяет качественно описать явления, связанные с частотно-фазовым захватом, и в ряде случаев делает возможным аналитическое решение задачи [175, 181, 182, 190, 200, 209]. Однако, пренебрежение амплитудными соотношениями может привести к потере некоторых эффектов, например таких, как эффект “вымирания автоколебаний” [204–208, 219]. Влияние амплитудных эффектов на образование кластерных структур отмечалось в [204]. В ходе данных исследований было проведено сравнение особенностей кластерной синхронизации в цепочке осцилляторов, описываемой полной системой укороченных уравнений для амплитуд и фаз (2.85) и соответствующей системой фазовых уравнений. Последнюю легко получить из (2.85), полагая $\rho_j = 1$ для любого j , т.е. зафиксировав амплитуды всех осцилляторов равными их невозмущенному значению. Система фазовых уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_j &= \omega_1 + (j-1)\Delta + g(\sin(\Phi_{j+1} - \Phi_j) - \\ &\quad - \sin(\Phi_j - \Phi_{j-1})) + \sqrt{2D}\eta_j(t), \\ j &= 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (2.87)$$

При исследованиях использовались граничные условия $\Phi_0 = \Phi_1$, $\Phi_{m+1} = \Phi_m$. Результаты расчета распределения частот вдоль цепочки, описываемой системой (2.87), при $\Delta = 0.002$ и различных значениях параметра связи g представлены на рис. 2.42. Рисунок 2.42а отражает распределение частот при $g = 0.55$ в отсутствие шума ($D = 0$). В отличие от результата, полученного в аналогичном случае для системы (2.85) (см. рис. 2.40а), здесь наблюдаются только два кластера, примыкающих к концам цепочки. Средние кластеры возникают при более сильной связи (см. рис. 2.42б,в), однако сформированные кластерные структуры несколько отличаются от тех, которые наблюдались в цепочке, описываемой полной системой укороченных уравнений для амплитуд и фаз (2.85). В данном случае крайние кластеры удлиняются, а средние становятся более короткими. Высота кластерных ступенек (разность частот в соседних кластерах) здесь меньше, чем для системы (2.85), причем она быстро уменьшается с ростом параметра связи. Таким образом, при учете только фазовой динамики, область существова-

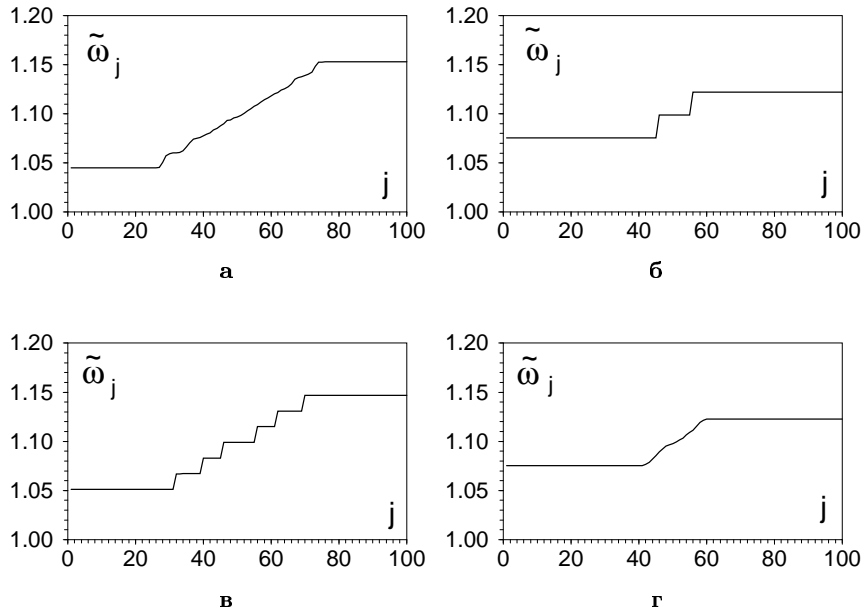


Рис. 2.42. Распределение средних частот в цепочке генераторов, описываемых фазовыми уравнениями (2.87), при $\Delta = 0.002$ и различных значениях параметра связи: (а) – $g = 0.55$, (б) – $g = 0.7$, (в) – $g = 1.5$. Рисунки (а),(в) соответствуют отсутствию шума ($D = 0$). Рисунок (г) получен при $g = 1.5$ и наличии шума интенсивности $D = 10^{-5}$

ния кластерной синхронизации значительно сужается. Кроме того, кластерная структура в этом случае оказывается менее устойчивой к действию флуктуаций. Введение малого шума $D = 10^{-5}$ сразу же приводит к разрушению средних кластеров (см. рис. 2.42г).

2.4.4 Вынужденная синхронизация цепочки хаотических автоколебательных систем

Рассмотрим явление вынужденной синхронизации цепочки идентичных хаотических осцилляторов Ресслера с однонаправленной связью [220]. При внешнем гармоническом воздействии на первый элемент, в цепочке хаотических осцилляторов может возникнуть явление частотно-фазовой синхронизации. Исследуемая система имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= -\omega_1 y_1 - z_1 + C \sin \omega_{\text{ex}} t, \\
 \dot{y}_1 &= \omega_1 x_1 + \alpha y_1, \\
 \dot{z}_1 &= \beta + z_1(x_1 - \mu) \\
 \dot{x}_j &= -\omega_j y_j - z_j + \gamma(x_{j-1} - x_j), \\
 \dot{y}_j &= \omega_j x_j + \alpha y_j, \\
 \dot{z}_j &= \beta + z_j(x_j - \mu), \\
 j &= 2, 3, \dots, m,
 \end{aligned} \tag{2.88}$$

где j – номер осциллятора цепочки (дискретная пространственная координата), m – длина цепочки, γ – коэффициент связи. Параметры α, β, μ определяют динамику парциальных систем, ω_j – параметры, управляющие частотами осцилляторов, C и ω_{ex} – амплитуда и частота внешнего гармонического воздействия на первый осциллятор цепочки. Исследования проводились для цепочки из 50 осцилляторов со свободными концами и одинаковыми собственными частотами ($\omega_j = \omega_1 = 0.924$) при фиксированных значениях параметров $\alpha = 0.2, \beta = 0.2, \mu = 4$, которые соответствуют режиму спирального хаоса [8, 148] в системе Ресслера. Начальные условия осцилляторов цепочки выбирались с малыми случайными отклонениями от однородного состояния.

Для того чтобы ввести мгновенные амплитуды ρ_j и фазы Φ_j хаотических колебаний, используем замену переменных:

$$\begin{aligned} x_j &= \rho_j \cos \Phi_j, & y_j &= \rho_j \sin \Phi_j. \\ j &= 1, 2, 3, \dots, m. \end{aligned} \quad (2.89)$$

Средние частоты $\tilde{\omega}_j$ колебаний осцилляторов цепочки рассчитывались с помощью соотношения (2.83).

В отсутствие внешнего сигнала средние частоты колебаний во всех хаотических осцилляторах одинаковы $\tilde{\omega}_j = \omega_0 \approx 0.9981, j = 1, 2, \dots, m$. Частота главного максимума в спектре мощности в пределах точности численного эксперимента совпадает со средней частотой ω_0 . При воздействии гармонического сигнала с частотой ω_{ex} близкой к ω_0 можно наблюдать явление вынужденной частотно-фазовой синхронизации цепочки хаотических генераторов. Захват мгновенной фазы хаотических колебаний j -го осциллятора диагностировался на основе выполнения условия

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\Phi_j(t) - \Phi_{\text{ex}}(t)| < \infty, \quad (2.90)$$

которое означает ограниченность разности фаз. Здесь $\Phi_{\text{ex}} = \omega_{\text{ex}}t$ — фаза воздействия. Захват фазы одновременно сопровождается захватом средней частоты колебаний j -го генератора: $\tilde{\omega}_j = \omega_{\text{ex}}$. Отношение частот определяет число вращения для каждого генератора цепочки: $W_j = \tilde{\omega}_j / \omega_{\text{ex}} (j = 1, 2, \dots, m)$. В численных экспериментах элемент цепочки с номером j полагался синхронизованным, если для него выполнялось условие $|W_j - 1| \leq \varepsilon$, где погрешность ε полагалась равной 10^{-4} .

Рассмотрим процесс синхронизации элементов цепочки при вариации амплитуды C и частоты ω_{ex} внешнего воздействия с фиксированным значением коэффициента связи $\gamma = 0.01$. На плоскости параметров (C, ω_{ex}) области синхронизации каждого элемента цепочки с $j \geq 2$ имеют одинаковый вид. Границы областей практически совпадают и их невозможно различить в пределах точности численного эксперимента. На рис. 2.43 на плоскости параметров (C, ω_{ex}) построена область глобальной синхронизации S (то есть синхронизации всех элементов) для цепочки из 50 генераторов. Следует отметить, что здесь не проводилось специального исследования вопроса о существовании порога синхронизации [173]. Если такой порог и существует в принципе, при выбранных значениях параметров он неразличимо мал, и область S на рис. 2.43 практически опирается на ось абсцисс.

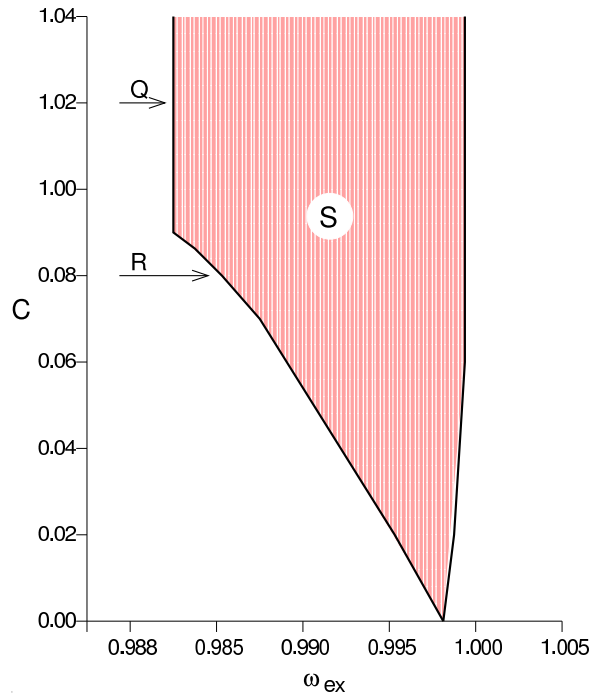


Рис. 2.43. Область глобальной синхронизации S для цепочки (2.88) длиной $m = 50$ на плоскости параметров воздействия ω_{ex}, C . Значения других параметров: $\alpha = \beta = 0.2, \mu = 4, \omega_j = 0.924, j = 1, 2, \dots, 50, \gamma = 0.01$. Отмеченные направления R и Q соответствуют различным сценариям глобальной синхронизации

Зависимость числа вращения W_j от частоты ω_{ex} при фиксированном значении параметра связи $\gamma = 0.01$ и амплитуды воздействия $C = 0.08$ для генератора с любым номером j характеризуется наличием горизонтального участка (ступеньки), соответствующего значению $W_j = 1$ (рис. 2.44).

В рассматриваемой цепочке без внешнего воздействия ($C = 0$) реализуется грубый пространственно однородный хаотический во времени режим колебаний, для которого $x_j(t) = x_k(t), y_j(t) = y_k(t), z_j(t) = z_k(t)$ ($j, k = 1, 2, \dots, m$). Внешнее воздействие на первый элемент цепочки приводит к появлению неоднородности. В области фазового захвата средние частоты всех генераторов цепочки равны частоте воздействия, и мгновенные фазы захвачены. Однако синхронные хаотические колебания не являются пространственно однородными.

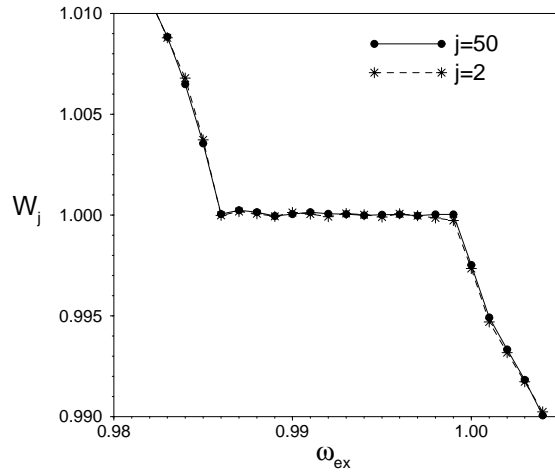


Рис. 2.44. Зависимость числа вращения W_j от частоты воздействия ω_{ex} для элементов цепочки с номерами $j = 2$ и $j = 50$ при значении параметра связи $\gamma = 0.01$ и амплитуды воздействия $C = 0.08$

На рис. 2.45 приведены (x_1, x_j) -проекции фазовых портретов синхронных и несинхронных хаотических колебаний для нескольких различных значений пространственной координаты j . Группы рисунков (а) и (б) соответствуют режиму глобальной фазовой синхронизации цепочки на частоте воздействия $\omega_{ex} = 0.992$. Можно отметить, что средний по времени фазовый сдвиг $\langle \Phi_1(t) - \Phi_j(t) \rangle$ между синхронными хаотическими колебаниями первого и j -го генераторов цепочки конечен, но при этом различен для различных j . Так, проекции для $j = 9, 11, 13$, объединенные в группу (а), отражают наличие среднего фазового сдвига, близкого к $\pm 2\pi k, \pi/2 \pm 2\pi k, \pi \pm 2\pi k, (k = 0, 1, 2, 3, \dots)$, соответственно. Вид проекций для $j = 42, 44, 47$, приведенных в группе (б), практически повторяет вид проекций группы (а). Такое поведение объясняется наличием монотонного роста или уменьшения (в зависимости от значения ω_{ex}) среднего фазового сдвига $\langle \Phi_1(t) - \Phi_j(t) \rangle$ вдоль цепочки. Таким образом, можно говорить, что вдоль цепочки хаотических генераторов распространяется бегущая фазовая волна. Проекции фазовых портретов несинхронных колебаний, полученных при $\omega_{ex} = 1.025$, представлены в группе (в). Они заметно отличаются от проекций, соответствующих синхронным колебаниям.

Режим хаотической динамики элементов цепочки диагностировался как по виду фазовых проекций, так и с помощью ляпунов-

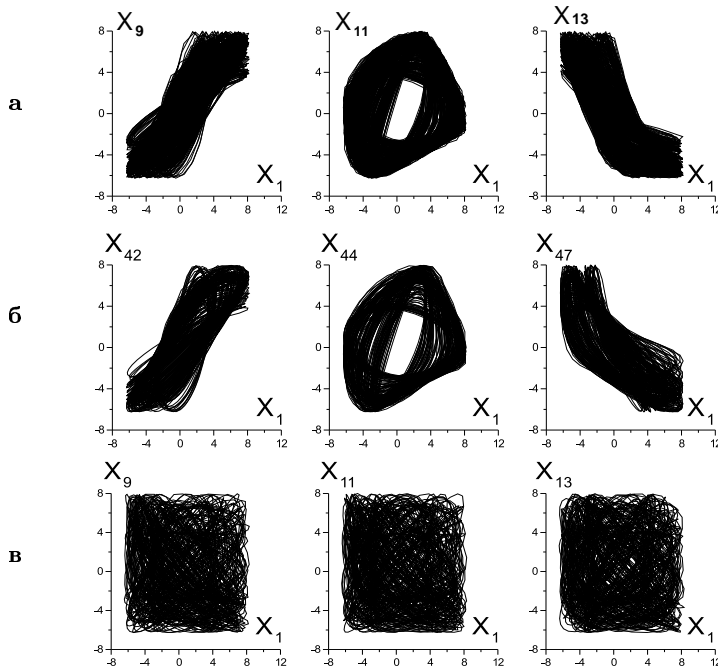


Рис. 2.45. Проекция синхронных (группы (а) и (б)) и несинхронных (группа (в)) колебаний для нескольких различных значений пространственной координаты j , полученные при $C = 0.1, \gamma = 0.006$

ских характеристических показателей. В случае однонаправленной связи элементов цепочки, каждый последующий элемент можно рассматривать отдельно, как неавтономный генератор, находящийся под воздействием сложного сигнала. Таким образом, совокупный спектр ляпуновских характеристических показателей (спектр ЛХП) разбивается на парциальные спектры показателей, вносимых отдельными элементами цепочки. Наличие положительного показателя в спектре первого генератора уже обеспечивает хаотическое поведение всех последующих генераторов. Они, в свою очередь, могут добавлять в совокупный спектр ЛХП свои положительные показатели (режим гиперхаоса), а могут и не добавлять (в случае полной или обобщенной синхронизации [140, 144, 152]). При выбранных значениях параметров в исследуемой цепочке наблюдается режим гиперхаоса как в случае частотно-фазовой синхронизации всех элементов, так и вне области синхронизации. Каждый элемент цепочки добавляет свой положительный характеристиче-

ский показатель в совокупный спектр ЛХП. В области синхронизации всех элементов цепочки в совокупном спектре ЛХП кроме m положительных показателей имеется $2m$ отрицательных и только один нулевой показатель, связанный с периодическим сигналом воздействия.

2.4.5 Синхронизация и мультистабильность в кольце генераторов с удвоениями периода

Явление фазовой синхронизации регулярных и хаотических движений в ансамблях взаимодействующих генераторов ведет к формированию различных фазовых структур, когда колебания в подсистемах имеют почти одинаковые амплитуды и различные фазы и частоты. С возможностью реализации синхронных режимов с различными фазовыми сдвигами тесно связано явление мультистабильности, т.е. сосуществования множества регулярных и хаотических аттракторов в фазовом пространстве взаимодействующих систем. Хорошо известно, что замкнутые в кольцо цепочки из осцилляторов с предельными циклами демонстрируют режимы фазовых волн, когда колебания в соседних элементах сдвинуты по фазе на постоянную величину. В ряде работ было продемонстрировано, что режимы фазовых волн возможны также в кольце из осцилляторов с хаотическим поведением.

В данном разделе будет рассмотрена эволюция фазовых волн при вариации управляющих параметров в кольце генераторов с бифуркациями удвоения периода. Здесь мы обсудим следующие вопросы. Какие режимы фазовых волн возможны в цепочках хаотических осцилляторов? Каким образом усложнение временной динамики парциальной системы влияет на изменение пространственных структур? Каким образом разрушение пространственных структур связано с синхронизацией между соседними осцилляторами?

В качестве модели рассмотрим цепочку радиотехнических генераторов Чуа с резистивной связью

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= \alpha(y_i - x_i - f(x_i)), \\ \dot{y}_i &= x_i - y_i + z_i + \gamma(y_{i-1} + y_{i+1} - 2y_i), \\ \dot{z}_i &= -\beta y_i,\end{aligned}\tag{2.91}$$

$$f(x) = \begin{cases} bx + a - b, & \text{если } x > 1, \\ ax, & \text{если } |x| \leq 1, \\ bx - a + b, & \text{если } x < -1, \end{cases}$$

($i = 1, 2, \dots, N$) с периодическими граничными условиями:

$$x_1 = x_{N+1}, \quad y_1 = y_{N+1}, \quad z_1 = z_{N+1}.$$

Цепочка состоит из идентичных элементов. Поведение частичного генератора хорошо известно и детально описано в литературе (см., например, [221]). В нем наблюдается каскад бифуркаций удвоения периода, завершающийся возникновением хаотического аттрактора. Данная система является бистабильной, когда в ее фазовом пространстве сосуществуют два симметричных аттрактора, сформированных вблизи точек равновесия P_1 и P_2 . При увеличении параметра α эти аттракторы сливаются и образуется объединенный хаотический аттрактор (“double scroll”). Система двух связанных генераторов ведет себя более сложным образом [84]. Она демонстрирует переход к хаосу и через каскад бифуркаций удвоения периода, и через разрушение тора. Для системы характерно явление полной синхронизации хаоса и развитой мультистабильности. Режим полной синфазной синхронизации хаоса существует при достаточно больших значениях коэффициента связи. При уменьшении связи режим синхронизации разрушается [222]. Этот процесс сопровождается явлениями пузырения (bubbling) аттрактора и изрешечивания (riddling) бассейна притяжения. Поведение ансамблей и цепочек взаимодействующих генераторов Чуа с различными типами связи изучалось в работах [223–226].

Рассмотрим поведение системы (2.91) в зависимости от значений параметра α и коэффициента связи γ при фиксированных значениях других параметров: $a = -8/7$, $b = -5/7$, $\beta = -22$.

При $\alpha < 8.78$ колебания в системе отсутствуют. С увеличением значений параметра ($\alpha \geq 8.78$) в зависимости от коэффициента связи и начальных условий могут наблюдаться близкие к гармоническим колебания во времени с различными пространственными периодами по цепочке. Эти пространственно-периодические структуры характеризуются одинаковыми амплитудами и определенными сдвигами фаз между колебаний элементов цепочки. Данные режимы представляют собой фазовые волны, распространяющиеся по кольцу с постоянной фазовой скоростью. Для визуализации пространственной структуры фазовых волн можно использовать се-

чение Пуанкаре, фиксируя значения динамических переменных x_i каждого генератора в момент, когда динамическая переменная y_1 пересекает нулевой уровень от положительных значений к отрицательным.

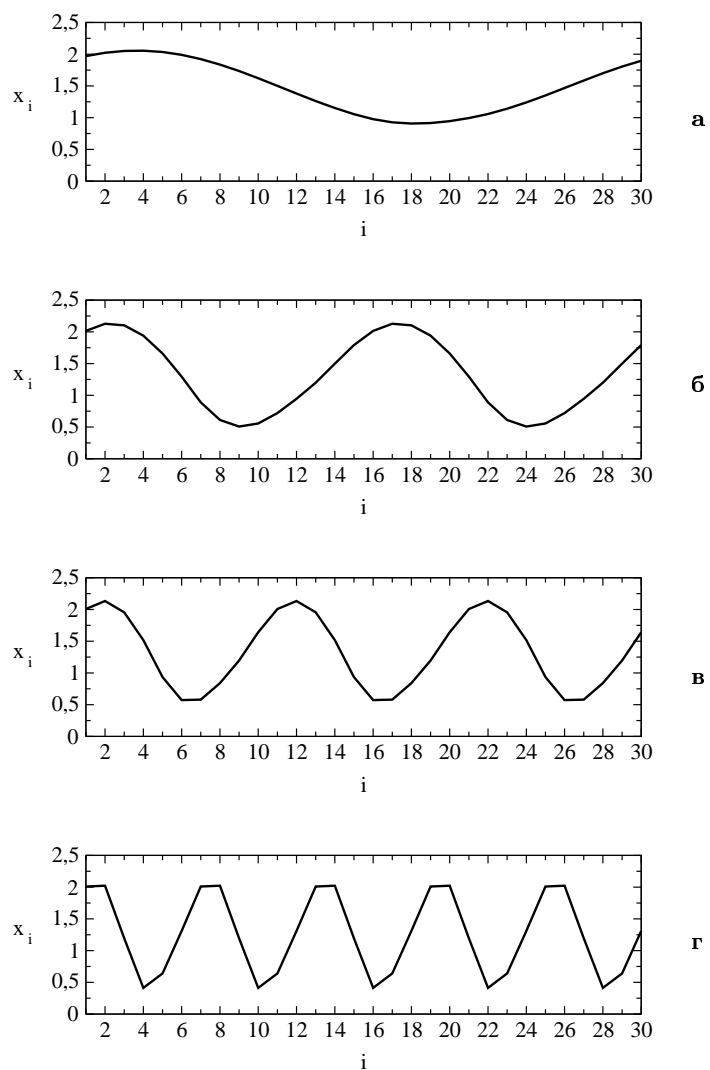


Рис. 2.46. Простейшие пространственные структуры с различными длинами волн: (а) $n = 1$, (б) $n = 2$, (в) $n = 3$, (г) $n = 5$

Простейшие структуры с различными длинами волн представлены на рис. 2.46. На оси абсцисс указано расположение генераторов по цепочке, на оси ординат – значения переменной x_i в сечении Пуанкаре. Если все генераторы будут совершать синфазные колебания, то в сечении будет прямая линия. Если между генераторами имеются некоторые фазовые сдвиги, то в сечении будут периодические по пространству кривые. Поскольку цепочка замкнута в кольцо, суммарный фазовый сдвиг вдоль всей цепочки должен быть пропорционален $2\pi n$. Состояния, представленные на рис. 2.46, соответствуют фазовым сдвигам между колебаниями соседних генераторов на $\pi/15$, $2\pi/15$, $\pi/5$ и $\pi/3$. Очевидно, что в цепочках с конечным числом элементов может наблюдаться только конечное число пространственно-периодических режимов, поскольку длина цепочки должна быть кратна пространственному периоду структуры. В нашем случае (цепочка из 30 генераторов) из числа возможных структур помимо перечисленных остаются режимы с $n = 6$ и $n = 15$. Последний случай соответствует полной противофазной синхронизации. Режимы с данными пространственными периодами ($\Lambda = 5$ и $\Lambda = 2$) не были обнаружены в рассматриваемой цепочке. Возможно, что указанные пространственные структуры являются неустойчивыми или имеют очень узкие области устойчивости в исследуемых интервалах значений параметров.

С увеличением параметра α происходит усложнение временной динамики в каждом генераторе. Состояния, представленные на рис. 2.46, претерпевают бифуркации. В цепочке наблюдаются бифуркации удвоения периода и рождения тора для регулярных аттракторов, бифуркации слияния лент для хаотических аттракторов. На рис. 2.47 проиллюстрировано усложнение регулярных пространственно-периодических режимов с увеличением параметра α . Здесь представлена эволюция режимов на базе начального состояния с пространственным периодом $\Lambda = N/2$ (рис. 2.46б). При усложнении фазовых волн в каждом генераторе цепочки происходит усложнение временной динамики. Наблюдается цикл периода два $2C_{N/2}$ (рис. 2.47а), периода четыре $4C_{N/2}$ (рис. 2.47б), удвоенный тор $2T_{N/2}$ (рис. 2.47в) и тор $1T_{N/2}$ (рис. 2.47г). На этом рисунке построены пространственные структуры, проекции фазовых портретов на плоскость $x_1 - y_1$ и $x_1 - x_{16}$. Последняя проекция показывает, что перечисленные регулярные режимы имеют точную пространственную периодичность $x_i = x_{i+15}$. Видно, что рост вре-

менного периода не ведет к изменению пространственного периода, и временная квазипериодичность не индуцирует пространственной квазипериодичности. Здесь наблюдается развитие временных режимов на основе исходной пространственной структуры, которая разрушается только после перехода к хаотическому во времени поведению генераторов.

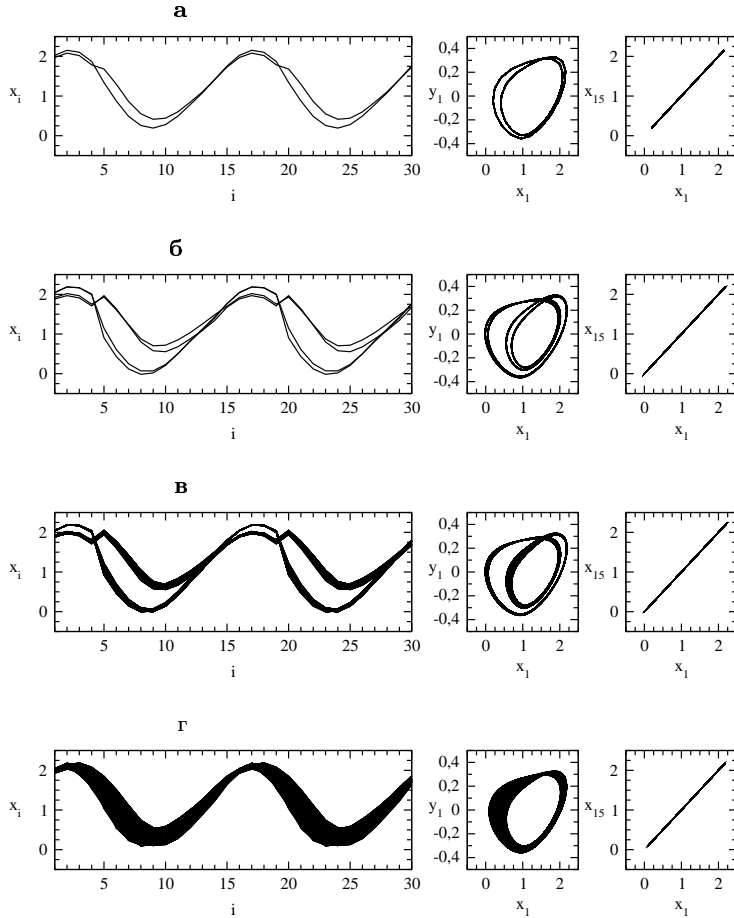


Рис. 2.47. Усложнение регулярных фазовых волн при увеличении параметра α : (а) $\alpha = 1.14, \gamma = 0.02$, (б) $\alpha = 11.48, \gamma = 0.02$, (в) $\alpha = 11.54, \gamma = 0.1$, (г) $\alpha = 11.4, \gamma = 0.2$

Эволюция хаотических режимов показана на рис. 2.48. Здесь представлены случаи четырехленточного (рис. 2.48а), двухленточ-

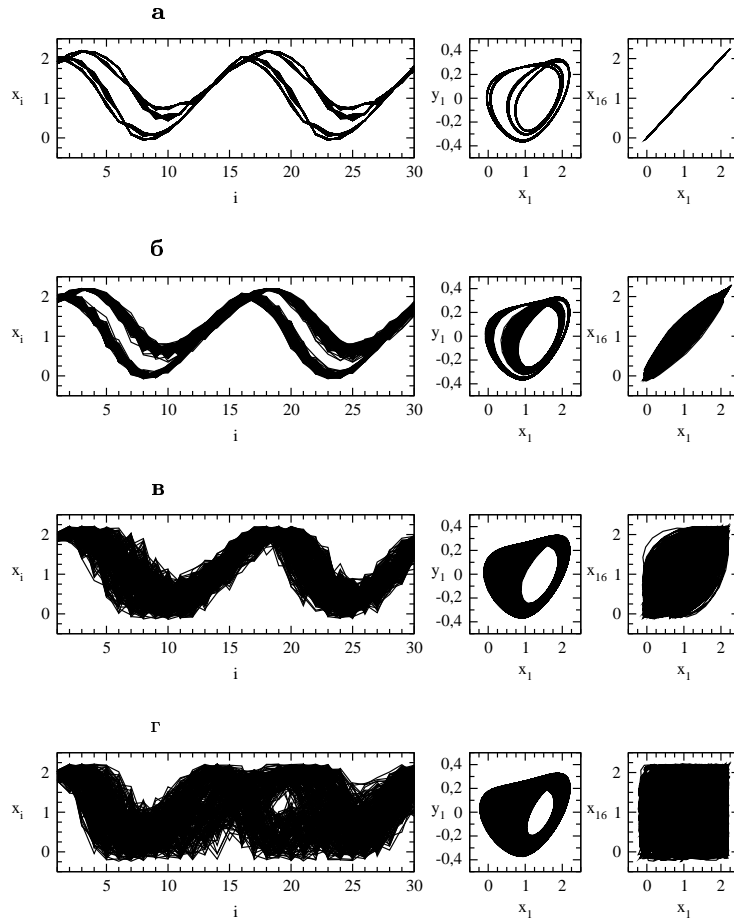


Рис. 2.48. Развитие хаотических фазовых волн при увеличении параметра α ($\gamma = 0.05$): (а) $\alpha = 11.57$, (б) $\alpha = 11.61$, (в) $\alpha = 11.66$, (г) $\alpha = 11.79$

ного (рис. 2.48б) и одноленточного (рис. 2.48в,г) аттракторов. Для хаотических во времени режимов точная пространственная периодичность не сохраняется, что можно видеть из взаимной проекции $x_1 - x_{16}$, которая уже больше не является тонкой линией на биссектрисе и имеет конечную "толщину". Для многоленточных хаотических аттракторов проекция фазовых портретов является довольно тонкой и расположена в окрестности биссектрисы, то есть эти режимы остаются почти периодическими в пространстве. По мере развития хаоса проекции "утолщаются", и пространственная периодичность структур теряется. В режиме развитого однолен-

2.4 Эф

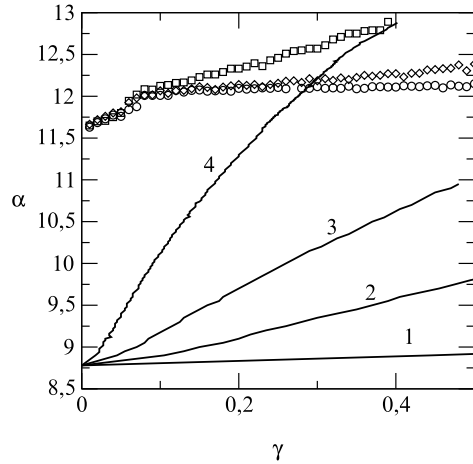


Рис. 2.49. Области устойчивости для семейства режимов с различными длинами волн

точного хаотического аттрактора фазовая траектория не остается в окрестности биссектрисы, а заполняет весь квадрат (рис. 2.48в). Взаимные проекции фазовых портретов и пространственные диаграммы демонстрируют, что хаотические колебания уже не являются пространственно-периодическими. Однако, как будет показано ниже, они остаются пространственно-периодическими в среднем.

Устойчивость фазовых волн зависит от их длины волны и от величины связи. Увеличение коэффициента связи γ ведет к потере устойчивости коротковолновых мод и переходу в режимы с большей длиной волны.

На рис. 2.49 показаны области устойчивости семейства режимов, возникших на базе фазовых волн, представленных на рис. 2.46. При переходе через верхние границы, изображенные символами, происходит разрушение соответствующей пространственной структуры в результате развития временной хаотической динамики. При переходе через правые границы, помеченные линиями, происходит потеря устойчивости данного режима и жесткий переход к пространственно-временному режиму с большей длиной волны. Линия 1 ограничивает семейство режимов с пространственным периодом N (см. рис. 2.46а). Эта линия проходит почти горизонтально к оси абсцисс. Ниже этой линии возможно существова-

ние только пространственно однородного режима. Линии 2, 3, 4 ограничивают семейства режимов с пространственными периодами $N/2$, $N/3$, $N/5$, соответственно. Данные режимы наблюдаются слева от указанных линий. В данной системе наблюдается явление мультистабильности. Выше линии 4 сосуществуют семейства режимов с длинами волн $N/5$, $N/3$, $N/2$, N и пространственно-однородные состояния. В области, расположенной между линиями 3 и 4, сосуществуют пространственно-однородные режимы и режимы с длинами волн $N/3$, $N/2$, N . Между линиями 2 и 3 – режимы с длинами волн $N/2$, N и пространственно-однородные. Пространственно-однородные режимы существуют при любых значениях связи. Видно, что устойчивость фазовых волн зависит от величины связи. Увеличение связи ведет к потере устойчивости режимов с небольшими пространственными периодами. Детальное описание типичных бифуркационных переходов и структуры плоскости управляющих параметров для семейства пространственно-периодических режимов представлено в работе [227].

Ранее отмечалось, что точная пространственная периодичность разрушается при переходе к хаотическому во времени поведению. В области хаоса отсутствует точная периодичность, но пространственные структуры сохраняют свою периодичность в среднем по времени. На рис. 2.50 представлены усредненные пространственно-временные диаграммы при уменьшении связи.

Видно, что происходит постепенное разрушение усредненной пространственной периодичности структуры. Соответствующее временное поведение представляет одноленточный хаотический аттрактор. При больших значениях связи усредненная пространственная диаграмма выглядит также как исходный строго периодический режим. Затем, с уменьшением γ форма пространственной структуры становится более плоской, но исходный вид с двумя максимумами сохраняется. Далее при малых значениях связи исходная форма структуры полностью нарушается. Постепенное разрушение усредненной пространственной периодичности наблюдается только для развитого временного хаоса.

Процесс разрушения пространственной периодичности структур с точки зрения взаимной синхронизации генераторов заключается в следующем. До перехода к хаотическому во времени поведению имеет место полная синхронизация. Эти режимы характеризуются точными равенствами $x_i(t) = x_{i+N/2}(t)$ и $x_i(t) = x_{i+1}(t + \tau_i)$

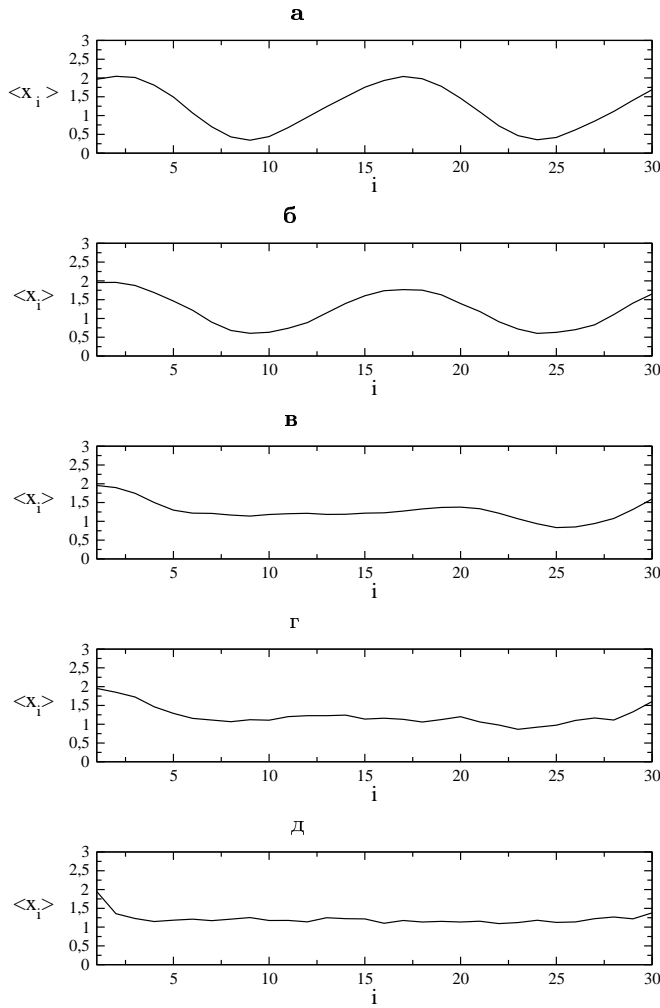


Рис. 2.50. Усредненные пространственные структуры при $\alpha = 11.78$ и для различных γ : (а) 0.15, (б) 0.045, (в) 0.035, (г) 0.03, (д) 0.01

для каждого осциллятора цепочки. С увеличением параметра α , когда колебания становятся хаотическими, эти равенства становятся приближенными и затем полностью нарушаются. В работе [227] показано, что при этом количественная мера синхронизации уменьшается от 1 (полностью синхронные колебания) до 0 (полное отсутствие синхронизации), и установлено, что пространственная периодичность связана с когерентностью колебаний на

основных частотах спектра. Пока спектр колебаний содержит частоты, на которых движения являются полностью когерентными, в цепочке сохраняются пространственные структуры периодические в среднем. Если функция когерентности спадает для каждой частоты, пространственно-периодическая структура разрушается.

2.4.6 Заключение

В данном разделе рассмотрены эффекты синхронизации в цепочках связанных осцилляторов, в частности, образование частотных кластеров в неоднородных цепочках квазигармонических генераторов, влияние шума на режимы кластерной синхронизации, вынужденная синхронизация цепочки хаотических осцилляторов, явления синхронизации и мультистабильности в кольце генераторов с бифуркациями удвоения периода.

Показано, что частотные кластеры, наблюдаемые в цепочке неидентичных элементов, являются достаточно устойчивыми к действию некоррелированных гауссовских флуктуаций, подаваемых на каждый элемент. Понятие эффективной синхронизации, введенное для одиночного осциллятора Ван дер Поля и характеризующее коэффициентом эффективной диффузии, может быть обобщено на случай кластерной синхронизации в распределенных системах. Амплитудная динамика может играть существенную роль в образовании кластерных структур. Кластерная синхронизация может также наблюдаться в цепочке, моделируемой только фазовыми уравнениями, однако этот эффект реализуется в гораздо более узком диапазоне значений параметра связи. Кроме того, возникающие кластерные структуры являются более чувствительными к воздействию шума.

Выявлен эффект вынужденной частотно-фазовой синхронизации цепочки хаотических осцилляторов с однонаправленной диффузионной связью. Установлено существование области глобального фазового захвата цепочки на плоскости управляющих параметров амплитуда – частота внешнего воздействия.

Проанализирована динамика пространственно периодических режимов в кольце идентичных генераторов с удвоениями периода. На плоскости управляющих параметров для них построена карта характерных режимов и изучены типичные бифуркационные переходы.

2.5 Синхронизация в живых системах

2.5.1 Введение

Эффекты синхронизации сложных колебательных процессов, рассмотренные выше, изучались на относительно простых модельных ДС методами теории колебаний. При исследовании реальных систем в естественности задача математического моделирования решается по принципу "от простого к сложному". Математическая простота при этом подразумевает, что модельная система должна демонстрировать некий фундаментальный эффект. Например, уравнения генератора Ван дер Поля есть простейшая математическая модель автоколебательной системы с устойчивым предельным циклом. При переходе к реальным ДС различной природы математические модели в лучшем случае заметно усложняются, в худшем – математическую модель системы ввести в рассмотрение не удастся. В последней ситуации исследователи используют наиболее общие, базовые, понятия той или иной теории, физическую интуицию, принцип аналогии и т.д. для продуманной постановки и проведения прямых натуральных экспериментов.

В настоящем разделе мы рассмотрим задачи синхронизации колебательных процессов в таких сложных системах, какими являются живые организмы. Первым примером послужит внешняя синхронизация электрорецепторов рыбы (веслоноса), вторым – внешняя и взаимная синхронизация ритма организма человека. Совершенно очевидно, что современная наука не способна дать адекватное математическое описание указанных систем. Однако, как следует из приведенных далее результатов экспериментов, рассматриваемые очень сложные системы демонстрируют фундаментальные эффекты, физическое и математическое описание которых получено на относительно простых моделях теории колебаний.

2.5.2 Стохастическая синхронизация электрорецепторов веслоноса

Данный параграф посвящен экспериментальным исследованиям синхронизации в электросенсорной нейронной системе веслоноса (*Polyodon spathula*) [228]. Молодые особи используют электрочувствительность для нахождения пищи – зоопланктона. Механизмы

синхронизации могут вносить вклад в чрезвычайно высокую чувствительность веслоноса к слабым периодическим электрическим полям, которые генерирует зоопланктон.

Веслонос (рис. 2.51) получил свое название благодаря длинному плоскому лопатовидному придатку, расширяющемуся впереди головы и называемому "клювом" или "рострумом". Рострум покрыт десятками тысяч сенсорных рецепторов, которые известны как пассивные рецепторы [229]. Кластеры электрорецепторов покрывают также голову и жабры рыбы. Однако, с точки зрения функций этих рецепторов поведенческие и нейрофизиологические признаки оставались ограниченными до тех пор, пока в 1993 году было окончательно установлено, что эти рецепторы действительно представляют собой пассивные вазообразные электрорецепторы, которые реагируют на электрические сигналы, генерируемые планктоном, например, дафниями (*Daphnia*), и что электрорецепторы используются веслоносом для обнаружения планктона во время поиска пищи [230]. Рострум расположен далеко ото рта, что позволяет ему выполнять функции так называемой "ранней предупреждающей системы-о приближающихся жертвах". Таким образом, рострум функционирует как антенна, несущая множество электро-сенсоров.

Периферийные клетки, реагирующие на слабые электрические изменения ≤ 10 мкВ·см⁻¹ и определяемые как электрорецепторы, были обнаружены только у некоторых видов рыб. Речь идет о вазоподобных электрорецепторах, названных так в силу своего сходства по форме с вазой. Эти электрорецепторы формируют у веслоноса пассивную сенсорную систему, таким образом, веслонос только получает сигналы от внешних источников. Внешнее отверстие (пора) на коже, диаметром 80 – 120 мкм, ведет к короткому каналу, длиной ≈ 200 мкм. Поры расположены на роструме в виде кластеров по 5–20 штук (см. увеличенную часть рострума на рис. 2.51), более крупные кластеры находятся на голове, жабрах и вблизи рта. Внутренний конец каждого канала покрыт сенсорным эпителием. Эпителий – это клеточный слой, толщиной в одну клетку, и обычно покрывающий полый орган. Эпителий состоит из двух типов клеток. Первый тип составляют "волосные клетки", которые считаются электрочувствительными, но нейронами не являются, так как имеют отличное от нервной системы эмбриональное происхождение. Волосные клетки перемешаны со вторым

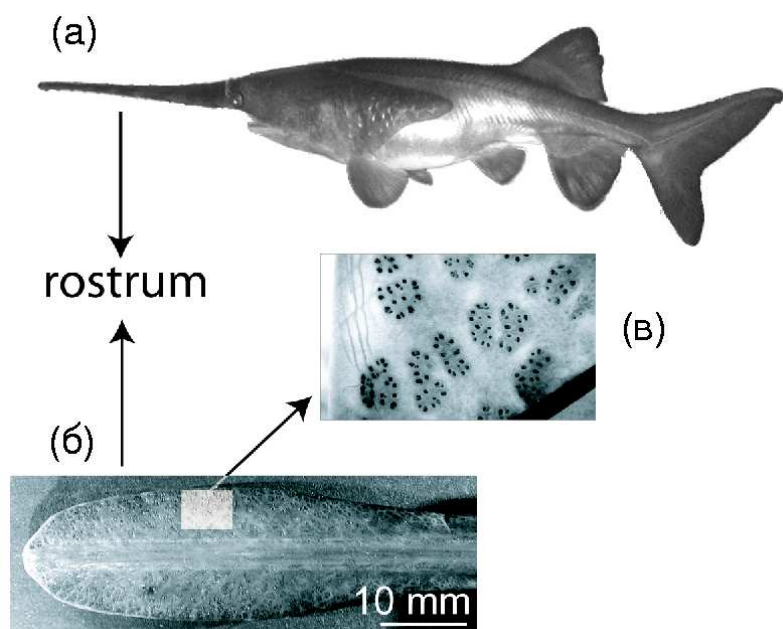


Рис. 2.51. (а) Небольшой веслонос, *Polyodon spathula*. (б) Нижняя часть роострума веслоноса, длиной 21 см. (в) Увеличенное изображение кластеров пор электрорецептора

типом клеток, так называемыми "опорными клетками". Эти два вида клеток формируют "тугие- межклеточные соединения, или высоко-прочные затворы, которые блокируют внеклеточные пути из канала во внутренность тела, уменьшая таким образом силу электрического тока.

На базальной стороне эпителия волосяные клетки возбуждают аксоны первичных афферентов (центростремительных нейронов) посредством химического синапсиса. Сами первичные афференты считаются нечувствительными к сенсорным воздействиям: волосяные клетки требуются им в качестве преобразователей. Благодаря свойству первичных центростремительных окончаний генерировать импульсы, синапсис от каждой волосяной клетки преобразует аналоговый сигнал от волосяных клеток в последовательность или ряд потенциалов действия, кодируя электросенсорную информацию в виде временного ряда (интервалы между импульсами). Электрорецепторы веслоноса возбуждаются катодными воздействиями, т.е. скорость их центростремительного разряда увеличивается, ко-

гда электрод вблизи поры кожи становится отрицательным и тормозится при анодных воздействиях. Затем импульсы распространяются в мозг. В отсутствие воздействий разряд повторяется бесконечно с частотой $\approx 35 - 65$ Гц, что называется "спонтанной активностью".

Понятие "электрорецептор" является неопределенным. Для его понимания необходимо представлять общую структуру "пора + канал + эпителий + первичный центrostремительный аксон" (см. схему на рис. 2.52). Хотя волосяные клетки являются действительными сенсорами, закодированный отклик последовательности импульсов от основных афферентов представляет собой тот сигнал, который часто регистрируется при помощи микроэлектрода, расположенного в сенсорном узле (совокупность тел нервных клеток), который находится вблизи, но вне мозга.

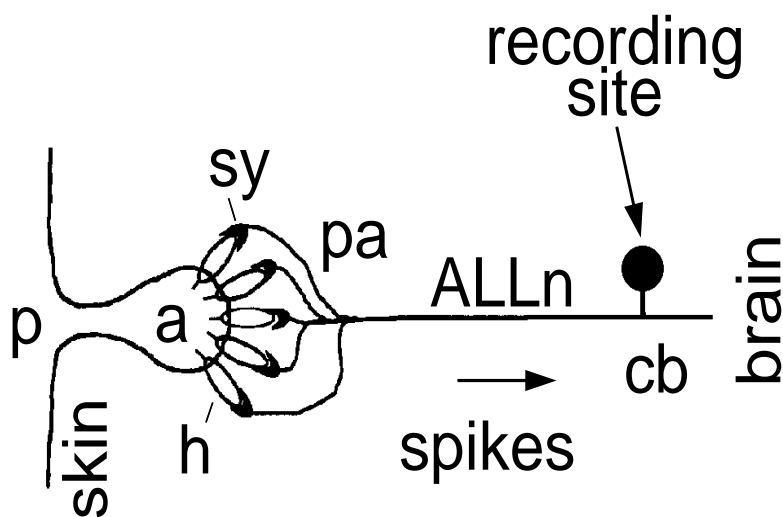


Рис. 2.52. Схематическое представление различных компонент электрорецептора. **cb** – тело клетки первичного афферента, где можно регистрировать импульсы с помощью микроэлектрода; **sy** – возбужденный синапс от волосяных клеток к аксону первичного афферента (**pa**) в переднем боковом нерве (**ALLn**)

Ключевой особенностью последовательности импульсов (спайков), генерируемых первичными афферентами электрорецептора, является их спонтанная квазипериодическая структура зажиганий. В работе [231] было обнаружено, что электрорецепторы веслоноса

обладают новым типом организации, состоящим из двух различных видов осцилляторов. Один осциллятор находится в скоплении клеток эпителия и синаптически и однонаправленно связан со вторым осциллятором, который расположен в афферентном терминале. Основная частота эпителиального осциллятора при температуре 22°C составляет 25–27 Гц для различных электрорецепторов, в то время как средняя частота зажигания для различных афферентов варьируется в широком пределе 35–65 Гц. Однонаправленная связь этих осцилляторов ведет к особым бипериодическим структурам зажигания. Однако только афферентный осциллятор подвержен внешним электрическим воздействиям [231].

Были проведены *in vivo* электрофизиологические эксперименты с веслоносом, имевшим длину 35–40 см. Детальное описание экспериментальной установки приведено в работе [230].

Записи спонтанной активности первичных афферентов представлены на рис. 2.53 в виде плотности вероятности интервалов между импульсами (известной также как гистограмма интервалов между импульсами) для двух различных нейронов. На гистограммах виден пик на основной частоте f . Конечная ширина этого пика показывает, что шум оказывает влияние на периодические зажигания. Различные клетки имеют различные собственные частоты и характеризуются различной степенью стохастичности, которую можно оценить путем определения ширины гистограммы интервалов между импульсами.

На приведенном рисунке можно отметить удивительное поведение электрорецепторов, которое очень близко напоминает поведение зашумленных автоколебаний периодического осциллятора [232]. В случае автоколебательного осциллятора аналог гистограммы межимпульсных интервалов можно получить путем подсчета интервалов между пересечением секущей Пуанкаре в фазовом пространстве системы. Таким образом, вполне естественно ожидать, что клетки электрорецептора можно синхронизовать с помощью слабого внешнего периодического поля.

Для проверки данной гипотезы на клетку воздействовали слабым электрическим или магнитным полем, которое генерировал диполь, расположенный вблизи рострума рыбы. Интенсивности электрического поля были сравнимы по величине с интенсивностями поля, которое генерирует зоопланктон (несколько десятков мкВ/см). Одновременно регистрировалась последовательность им-

пульсов, генерируемых основным афферентом, и периодический электрический сигнал от диполя. Три примера записей от одной и той же клетки показаны на рис. 2.54 для различных значений частоты воздействия.

Мгновенная фаза последовательности импульсов может быть вычислена через моменты зажигания нейрона электрорецептора t_k (1.286). Фаза, определяемая таким образом, является кусочно-линейной функцией времени. Фаза периодического сигнала $\Psi(t) = 2\pi f_0 t$. В силу того, что записи нейронной активности можно представить как дискретные стохастические процессы, естественно представить разность фаз как "стробоскопическое" отображение Пуанкаре [233]: фаза воздействия вычисляется в моменты зажигания нейрона (например, когда фаза последовательности импульсов $\Phi(t)$ изменяется на 2π) и в результате получаем точку на окружности $[0; 1]$:

$$\phi_k = \frac{1}{2\pi} \Psi(t_k), \quad \text{mod}1. \quad (2.92)$$

Результаты вычислений, проведенных с помощью уравнения (2.92) для трех случаев, показанных на рис. 2.54, представлены на рис. 2.55. Четко видны три различных режима. При низкой частоте воздействия (5 Гц) имеет место синхронизация высокого порядка 1:17,

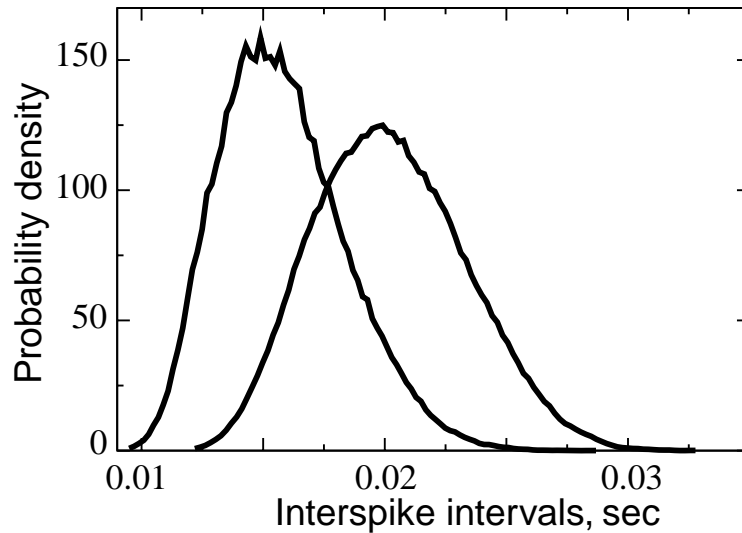


Рис. 2.53. Гистограммы распределения интервалов между импульсами от двух различных афферентов веслоноса

которая сохраняется в течение нескольких периодов времени. На частоте $f_0 = 17$ Гц наблюдается ярко выраженный захват фаз 1:5. Пять горизонтальных полос соответствуют интервалам захвата фаз, а наклонные линии отражают сбой фаз. Захват фаз происходит в течение нескольких сотен периодов воздействия. И наконец, при более высокой частоте, $f_0 = 21$ Гц, наблюдается квазипериодическое поведение без синхронизации. Синхрограммы (см. также [233]), показанные на рис. 2.55, имеют качественно ту же структуру, что и последовательность итераций зашумленного отображения окружности.

Статистические свойства синхронного поведения также представлены на рис. 2.55 в виде плотности вероятностей разности фаз, определенной в интервале $[0; 1]$. В случае сильной синхронизации 1:5 плотность вероятностей состоит из ярко выраженных пиков, соответствующих структурам захвата фаз.

Альтернативный подход основан на разности фаз, определенной на всей действительной оси:

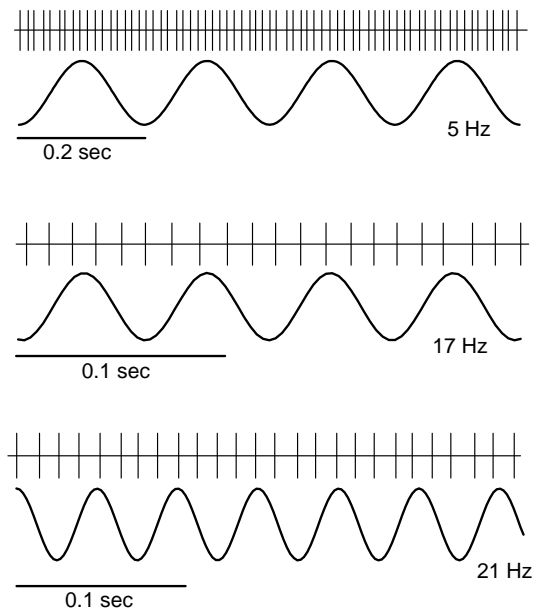


Рис. 2.54. Примеры записей последовательности импульсов от клетки электрорецептора, находящейся под воздействием дипольного электрического поля, для трех указанных частот

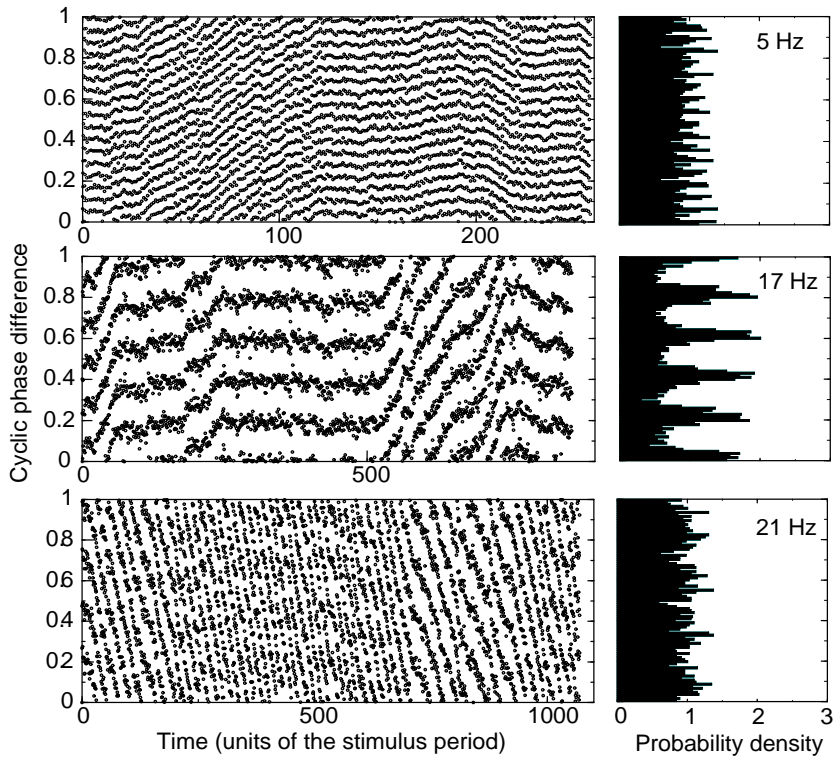


Рис. 2.55. Циклическая (приведенная к интервалу $[0; 1]$) разность фаз последовательностей импульсов, вычисленная по формуле (2.92), для указанных значений частот электрического поля диполя. Соответствующие плотности вероятностей циклической разности фаз показаны на рисунках справа

$$\phi(t) = \rho \Phi(t) - 2\pi f_0, \quad (2.93)$$

где $\Phi(t)$ – фаза последовательности импульсов, определяемая выражением (1.286), ρ – число вращения. Для случая $f_0 = 5$ Гц, $\rho = 1/17$, тогда как $\rho = 1/5$ для $f_0 = 17$ Гц. Результаты вычисления непрерывной разности фаз представлены на рис. 2.56 и находятся в полном соответствии с теоретическими результатами по синхронизации: горизонтальные сегменты захвата фаз прерываются фазовыми сбоями в силу наличия шума в системе. Расчеты эффективного коэффициента диффузии дают $0.076 \text{ рад}^2/\text{с}$ для частоты воздействия 5 Гц и $0.256 \text{ рад}^2/\text{с}$ для частоты 17 Гц. Эти значения полностью совпадают с оценками D_{eff} по средней продолжительности сегментов захвата фаз.

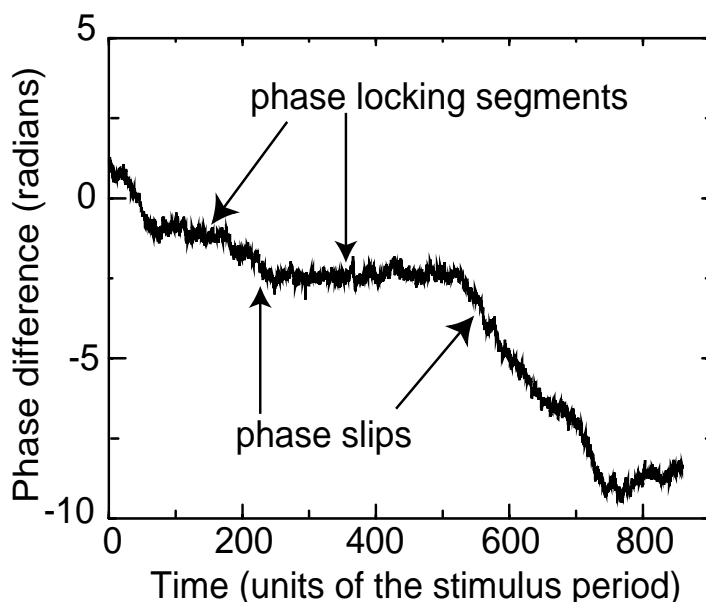


Рис. 2.56. Мгновенная разность фаз, вычисленная по формуле (2.93), для частоты воздействия 17 Гц

В примерах, показанных выше, синхронизация происходит без значительной модуляции скорости зажигания нейронов, т.е. спайки равномерно распределены в течение периода внешнего воздействия, как показано на рис. 2.54. Однако, с точки зрения моментов вспышек (зажигания) наблюдается другой тип откликов первичных афферентов на внешние возмущения [234]. В этом случае внешнее воздействие индуцирует качественное изменение в структуре зажигания нейронов: переход к "взрывной" моде, когда импульсы концентрируются в группе вспышек (bursts). В присутствии периодических воздействий вновь наблюдается синхронизация, но теперь скорость зажигания афферента существенно модулируется воздействием. Пример такой синхронизации показан на рис. 2.57, когда на электрорецептор воздействовали электрическим полем с частотой 5 Гц. Уже при малой амплитуде (рис. 2.57а) афферент демонстрирует вспышки, но степень синхронизации очень слабая: наблюдается только один короткий сегмент захвата фаз. При большей амплитуде периодического воздействия синхронизация регистрируется более четко (рис. 2.57б): последовательность

импульсов представляет собой вспышки, состоящие из 10–11 импульсов. Более того, отдельные импульсы внутри вспышек располагаются особым образом относительно периода воздействия, что свидетельствует о фазовой синхронизации.

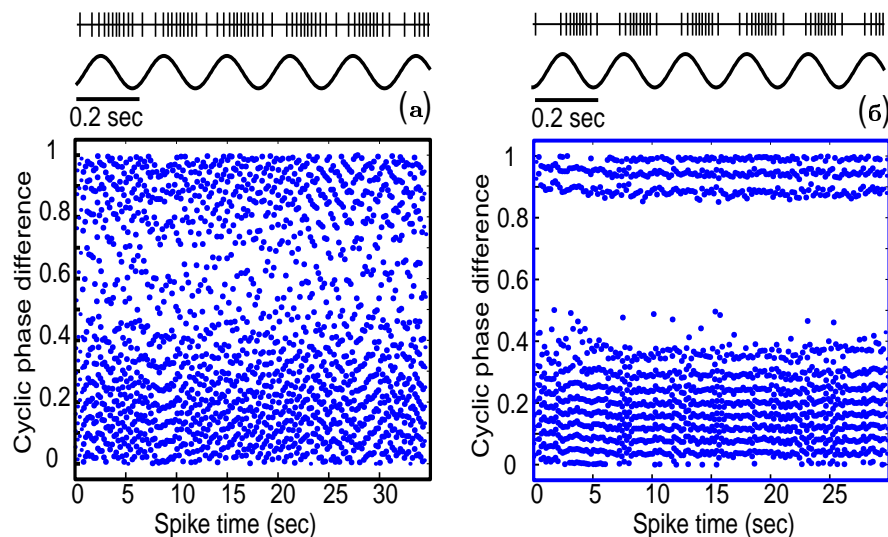


Рис. 2.57. Примеры записей последовательности импульсов, генерируемых клеткой электрорецептора под воздействием электрического поля диполя с частотой 5 Гц, для двух различных амплитуд. Соответствующие расчеты циклической разности фаз показаны ниже

Небольшой веслонос использует электрочувствительность для нахождения и поглощения отдельных организмов зоопланктона, которые генерируют электрические поля, имеющие ярко выраженные периодические низкочастотные (от 5 до 12 Гц) компоненты. Эффект синхронизации может выступать как возможный механизм, который животное использует для обнаружения и преследования своей добычи. Однако необходимо провести дополнительные эксперименты для подтверждения связи между поведением рыбы и электрофизиологическими данными.

2.5.3 Синхронизация кардиоритма

Фазовая синхронизация кардиоритма внешним периодическим сигналом. Сердечно-сосудистая система (ССС) человека

является одним из примеров наиболее сложной нелинейной колебательной системы. Очевидность факта существования самоподдерживающихся незатухающих колебаний не вызывает сомнений в автоколебательном характере функционирования ССС. В то же время вопрос о механизме автоколебаний ССС пока не выявлен окончательно. Известно, что колебания сердца человека (или животных) не являются строго периодическими [235–237]. Это может быть следствием воздействия различных источников шума на ССС, как в рассмотренном в разделе 1 случае автоколебаний зашумленного генератора Ван дер Поля. Однако есть основания полагать, что аperiodичность колебаний сердца обусловлена принципиально хаотической динамикой ССС [235, 237, 238]. Нельзя исключать из рассмотрения и самосогласованное воздействие на ССС различных подсистем организма, усложняющее анализ и требующее привлечения теории неавтономных колебаний.

Для изучения внешней синхронизации кардиоритма в [239, 240] предложена следующая схема эксперимента. На испытуемого воздействует слабый сигнал, представляющий периодическую последовательность импульсов, частота которых f_F близка к средней частоте пульса испытуемого (f_H), а длительность составляет $\simeq 10\%$ от средней длительности одного кардиоинтервала (рис. 2.58). Эти импульсы преобразовывались в синхронную периодическую последовательность вспышек на экране дисплея (высвечивался яркий красный квадрат), одновременно с которыми динамик компьютера издавал слабый звуковой сигнал. Схема проведения эксперимента приведена на рис. 2.59.

Эффекты синхронизации исследовались путем численной обработки сигнала электрокардиограммы (ЭКГ). ЭКГ испытуемого записывалась как в отсутствие, так и при наличии внешнего воздействия. Длительность записей ЭКГ составляла 300–600 секунд в реальном времени. Обработка данных экспериментов проводилась на основе расчетов мгновенной разности фаз между сигналом воздействия и ЭКГ испытуемого в установившемся режиме при наличии воздействия. Для расчетов использовались дискретные последовательности RR -интервалов ЭКГ с применением определения мгновенной фазы в соответствии с (1.286). Было проведено около 40 записей сигналов ЭКГ с привлечением в качестве испытуемых 16 молодых людей с отсутствием признаков патологии ССС. Сте-

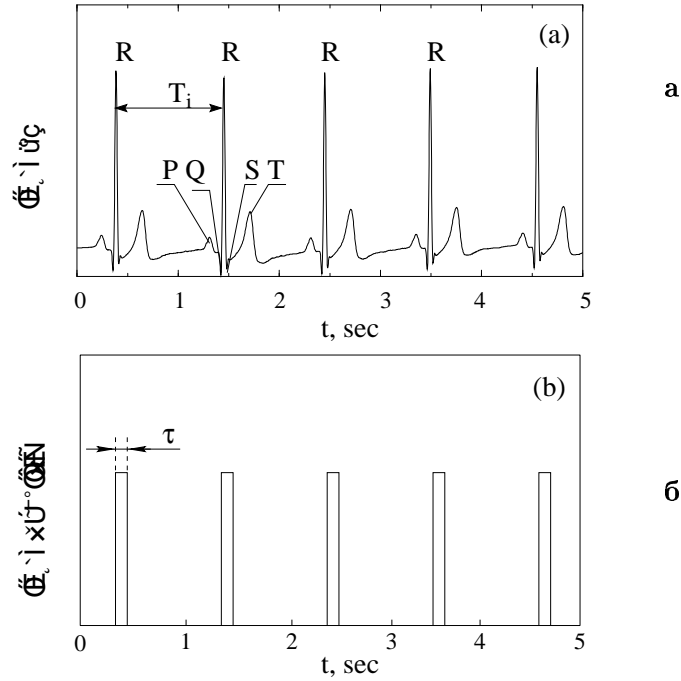


Рис. 2.58. Типичная ЭКГ человека (а) и форма сигнала внешнего воздействия (б)

пень достоверности результатов контролировалась специальными способами [239].

Рисунок 2.60а иллюстрирует типичную зависимость нормированной на 2π мгновенной разности фаз от времени для случая, когда средняя частота пульса испытуемого и частота внешнего воздействия отличались на 3%. Результаты свидетельствуют об эффективной фазовой синхронизации кардиоритма: мгновенная разность фаз остается ограниченной и близкой к нулю или целому числу 2π на отрезке времени $\Delta t \simeq 150$ с (примерно 150 кардиоинтервалов). Изменения частоты воздействия (в сторону увеличения и уменьшения ее в сравнении со средней частотой кардиоритма испытуемого в отсутствие воздействия) дали возможность экспериментально определить область захвата частоты. Результаты представлены на рис. 2.60б и свидетельствуют о том, что средняя частота кардиоритма оказывается захваченной внешним сигналом в полосе частот $\pm 5\%$ от средней частоты кардиоритма в отсутствие воздействия. Расчеты показали, что в области синхронизации ко-

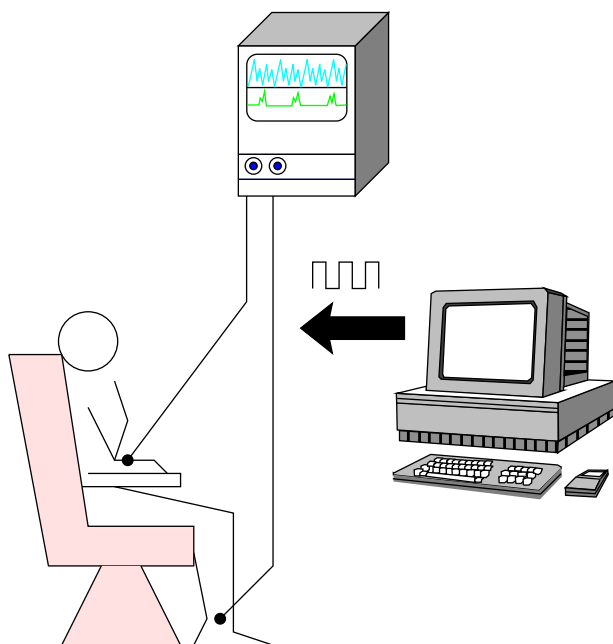


Рис. 2.59. Иллюстрация схемы проведения эксперимента

эффицент эффективной диффузии фазы D_{eff} имеет ярко выраженный минимум, близкий к 10^{-2} , и резко возрастает при выходе из области синхронизации.

Фазовая синхронизация кардиоритма внешним аперiodическим сигналом. Интересно проверить, возможно ли явление фазовой синхронизации кардиоритма человека при воздействии на него неперiodическим сигналом? С этой целью внешний сигнал был выбран в виде последовательности RR -интервалов ЭКГ, полученных в экспериментах с другим человеком. Более того, отбирались испытуемые, у которых средние длительности RR -интервалов управляющего и управляемого испытуемых отличаются более, чем на 5%. Это означает выход из области синхронизации на основном тоне. Ниже мы рассмотрим результаты, полученные в условиях, когда средняя частота пульса управляющей ЭКГ была 1 Гц, а пульса испытуемого (в отсутствие воздействия) – 0,85 Гц.

В случае заметного различия средних частот управляющего и управляемого колебательных процессов условие фазовой синхронизации удовлетворяет общему соотношению:

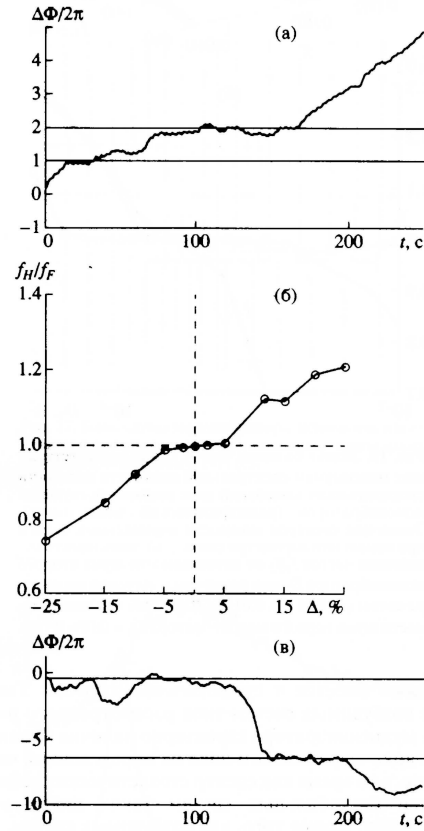


Рис. 2.60. (а) Мгновенная разность фаз между сигналом периодического воздействия и последовательностью RR -интервалов ЭКГ испытуемого для случая, когда $\Delta = |(f_H) - f_F|/f_F = 3\%$; (б) зависимость отношения частот f_H/f_F от расстройки Δ , свидетельствующая об эффективной фазовой синхронизации; (в) – то же, что и (а), но для случая аperiodического воздействия

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |m\Phi_1(t) - n\Phi_2(t)| < M = \text{const}, \quad (2.94)$$

где m, n – целые числа, $\Phi_{1,2}(t)$ – мгновенные фазы сравниваемых колебательных процессов.

Типичные результаты экспериментов представлены на рис. 2.60в. График иллюстрирует зависимость мгновенной разности фаз во времени, полученную при условии $m = 7, n = 6$. Разность фаз близка к нулю на отрезке времени $\Delta t \simeq 50$ с и не превосходит 2π на интервале $\Delta t \simeq 100$ с. Можно говорить об эффективной фазовой синхронизации, отвечающей резонансу $m : n = 7 : 6$. Синхрониза-

ция аperiodическим сигналом была подтверждена в 19 из 20 проведенных экспериментов. Отметим, что результаты предыдущего раздела с точки зрения условия (2.94) трактуются как эффективная синхронизация на основном тоне при условиях $m = 1$, $n = 1$.

Фазовая синхронизация кардиореспираторной системы. Взаимная синхронизация. В работах [233, 241, 242] исследовался эффект синхронизации сердечного ритма и процесса дыхания. С точки зрения теории колебаний мы можем говорить об эффекте взаимной синхронизации двух колебательных подсистем организма человека: дыхательной (или респираторной) системы и кардиоваскулярной (сердечно-сосудистой) системы. Известно, что частота дыхания относительно здорового человека в среднем в 3–5 раз меньше в сравнении с частотой сердечных сокращений. Благодаря естественной взаимосвязи указанных подсистем в едином организме, наблюдаются эффекты синхронизации дыхания и сердцебиения, когда их частоты становятся целочисленно кратными. Справедливо отметить, что в работах [233, 241, 242] впервые была поставлена и экспериментально решена задача об исследовании фазовой синхронизации кардио-респираторной системы с определением мгновенной фазы на основе теории аналитического сигнала.

Оставляя в стороне направленность и детали экспериментов, описанных в работах [233, 241, 242], отметим наиболее важные с нашей точки зрения результаты. Во-первых, установлено, что имеет место фазовая синхронизация кардио-респираторной системы человека, отвечающая сложным резонансам $3 : 1$, $5 : 2$ и $8 : 3$. Во-вторых, обоснованно показано, что реализуется режим эффективной синхронизации, при котором эффект захвата фазы и частоты имеет место на конечных временах, превышающих средний период дыхания (и, естественно, среднюю длительность кардиоинтервала).

2.5.4 Заключение

Представленные в этом разделе экспериментальные результаты исследований электрорецепторов рыбы и кардиоритма человека убедительно свидетельствуют о наличии эффектов как внешней, так и взаимной синхронизации в сложных системах живой природы. Для более точной диагностики синхронизации эффективным является метод динамики мгновенных фаз, детально отработанный

при исследовании фазовой синхронизации в простых системах типа зашумленного генератора Ван дер Поля.

2.6 Управление хаосом

2.6.1 Введение

До недавнего времени хаос ассоциировался с совершенно непредсказуемыми, неуправляемыми процессами, и сочетание слов “управление хаосом” звучало парадоксально. Однако за последнее десятилетие такое представление изменилось коренным образом. Именно хаотические системы являются более восприимчивыми к управляющим воздействиям и содержат более широкий спектр возможностей по сравнению с системами, динамика которых ограничена только регулярными движениями. Для существенного изменения поведения нехаотической системы, как правило, необходимы значительные изменения условий ее функционирования. В системе с хаотическим аттрактором тот же результат может быть достигнут малыми, определенным образом заданными управляющими воздействиями. В хаотический аттрактор встроено счетное множество неустойчивых периодических орбит, что в принципе неограниченно расширяет выбор возможных режимов работы системы. Малые воздействия позволяют управлять не только переходами между этими состояниями, но и временем переходных процессов. Указанные преимущества обусловлены в первую очередь структурой и свойствами хаотических аттракторов. Хаотические колебания встречаются довольно часто и могут возникать в системах различной природы. Однако на практике часто желательно избежать хаоса и/или улучшить функционирование системы или изменить определенным образом. Таким образом, возможность управления хаосом имеет большое практическое значение. Эта проблема является типичной задачей теории управления, сформулированной для хаотических систем.

Управление хаосом часто ассоциируется с задачей подавления хаотических колебаний, то есть перевода системы либо к устойчивым периодическим движениям, либо в состояние равновесия. В более широком смысле, под управлением хаоса понимают преобразование хаотического поведения системы в регулярное или хаотическое, но с другими свойствами.

Впервые задача об управлении хаосом была поставлена в статьях Хюблера и Лючера [243], Джексона [244, 245] и в ставшей классической работе Отта, Гребжи, Йорка [246]. В обзоре [247] можно найти ссылки на более ранние источники, которые в той или иной степени имеют отношение к центральной идее. Предложенный Оттом, Гребжи и Йорком достаточно эффективный способ управления хаосом привлек к себе активное внимание многих исследователей. На основе их метода (так называемый метод OGY) было построено множество алгоритмов управления в различных системах [248–264], включая гидродинамические [251], механические [261, 263], химические [256] и медико-биологические [255, 258].

Идея метода OGY базируется на том, что существует бесконечное множество неустойчивых периодических орбит, встроенных в хаотический аттрактор, и фазовая траектория время от времени попадает в малую окрестность каждой из них. Если при этом обеспечить малые определенным образом заданные воздействия на параметр системы, то траектория может остаться вблизи желаемой периодической орбиты. В результате система будет демонстрировать периодическое движение. Таким образом, задача об управлении хаосом сводится к задаче о стабилизации определенных (желаемых) периодических орбит, встроенных в хаотический аттрактор.

Следует отметить, что разработанные способы управления хаосом не ограничиваются методом OGY, который заключается в стабилизации уже существующих неустойчивых периодических орбит. Детальные обзоры идей и методов управления хаосом даны в монографиях и статьях [132, 265–271].

Вопросы управления хаосом во взаимодействующих системах непосредственно связаны с задачами по управляемой синхронизации. С помощью целенаправленных воздействий определенные хаотические подмножества, соответствующие синхронным движениям идентичных осцилляторов, можно преобразовать в устойчивые по одним собственным направлениям при сохранении неустойчивости по другим. В результате будет осуществлен управляемый переход от несинхронных хаотических колебаний к режиму полной синхронизации хаоса [272–279]. Естественным развитием данного направления является постановка задач об управлении пространственно-временным хаосом [280–287]. В этой очень важной и сложной проблеме на сегодняшний день имеются определенные успехи, но в основном они касаются простейших моделей распределенных си-

стем в виде цепочек связанных отображений. Обзор результатов исследований по управлению хаоса в ансамблях связанных осцилляторов и распределенных системах дан в работе [288]. Подходы, используемые для управления пространственно-временным хаосом, как правило, базируются на методах управления, разработанных для систем с небольшим числом степеней свободы. Некоторые специфические алгоритмы для управления хаосом в распределенных системах были предложены в работах [289, 290]. Один из подходов состоит в комбинации идентичных систем, которые демонстрируют как регулярную, так и хаотическую динамику в цепочке однонаправленно связанных элементов. Такая конструкция позволяет подавить хаотические колебания и тем самым перевести движения к периодическому поведению. В другом методе предлагается введение асимметричных связей между элементами ансамбля. Хаотические колебания могут быть подавлены путем изменения однородности связей, то есть, когда величины связи между элементами становятся неоднородными для различных частей цепочки.

В данном разделе рассматриваются управляемые переходы во взаимодействующих хаотических системах. На примере диссипативно связанных кубических отображений изучается противофазная синхронизация во взаимодействующих хаотических системах с определенными видами симметрии. Исследуются закономерности управляемых переходов от режимов развитого хаоса к периодическим колебаниям в двух симметрично связанных автоколебательных системах. Представлены результаты, которые свидетельствуют, что синхронизация хаоса может быть обеспечена с помощью параметрического периодического воздействия на элемент связи. Обсуждается возможность синхронизации цепочки хаотических осцилляторов с помощью параметрических воздействий. Описан метод управления пространственно-временным хаосом в решетках связанных отображений. В частности, определен вид пространственно - временных возмущений параметров системы, которые позволяют стабилизировать желаемые неустойчивые пространственно - временные состояния в одномерных и двумерных решетках логистических отображений с различными видами связи.

2.6.2 Управляемая противофазная синхронизация

хаоса в связанных кубических отображениях

Так называемая полная синхронизация хаоса представляет собой один из простейших видов когерентных движений взаимодействующих хаотических систем [136, 140, 162, 169, 291–293]. В связанных идентичных колебательных системах возможна ситуация, когда выше некоторого порогового значения параметра связи подсистемы начинают совершать полностью идентичные колебания, то есть $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Здесь \mathbf{x} и \mathbf{y} - вектора динамических переменных первой и второй подсистемы, соответственно. Таким образом, режим полной синхронизации хаоса соответствует хаотическому аттрактору расположенному в симметричном подпространстве $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ полного фазового пространства связанных систем. Однако существует широкий класс хаотических динамических систем, например, связанные кубические отображения, осцилляторы Дуффинга, генераторы Чуа, которые обладают симметрией не только по отношению к замене $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$, но и к замене $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{y}$. В таких системах существует два симметричных подпространства, а именно, $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ и $\mathbf{x} = -\mathbf{y}$, и можно выделить два вида полной синхронизации хаоса, каждый из которых соответствует движению внутри определенного симметричного подпространства. Колебания в первом подпространстве называются режимом полной синфазной синхронизации, а движения во втором подпространстве соответствуют режиму полной противофазной синхронизации. Противофазная синхронизация хаоса была рассмотрена в работе [294] на примере однонаправленно связанных систем в виде дискретных отображений и обыкновенных дифференциальных уравнений. В данной работе, по аналогии с работой Керрола и Пекоры [142], авторы рассматривают “master-slave” синхронизацию хаоса. Следует отметить, что эффект противофазной синхронизации хаоса имеет практическое значение. Появились новые возможности для развития методов скрытой передачи информации, эти аспекты детально обсуждаются в работе [294].

Хорошо известно, что устойчивые и грубые режимы синфазной синхронизации хаоса могут быть реализованы только при определенных типах связи и выше некоторого порогового значения коэффициента связи. Однако для многих видов взаимодействия в широком диапазоне значений коэффициента связи в системе могут существовать синфазные и противофазные синхронные хаотические движения, которые являются неустойчивыми в трансвер-

сальном направлении к симметричному подпространству. В таких случаях несинхронные хаотические колебания могут быть синхронизованы с помощью методов управления хаосом. Определенные хаотические множества, соответствующие синфазным и противофазным синхронным движениям можно преобразовать в устойчивые по одним собственным направлениям, оставляя неустойчивыми по другим собственным направлениям.

Рассмотрим систему связанных отображений в виде:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n) + \gamma(f(y_n) - f(x_n)), \\y_{n+1} &= f(y_n) + \gamma(f(x_n) - f(y_n)),\end{aligned}\quad (2.95)$$

где x_n и y_n - динамические переменные первой и второй подсистемы, γ - коэффициент связи. Динамика парциальной системы описывается отображением

$$x_{n+1} = f(x_n) = (a - 1)x_n - ax_n^3, \quad (2.96)$$

где a - управляющий параметр парциальной системы.

В отсутствие связи ($\gamma = 0$) в интервале значений $0 < a < 2$ система (2.96) имеет устойчивую неподвижную точку C_0 с координатой $x = 0$. При $a = 2$ ее собственное значение $\mu = a - 1$ становится равным $+1$ и C_0 претерпевает бифуркацию потери симметрии (бифуркация вил). В результате точка C_0 теряет свою устойчивость, и в ее окрестности рождается пара устойчивых симметричных неподвижных точек C_1 и C_2 с координатами $x_1 = \sqrt{(a - 1)/a}$ и $x_2 = -\sqrt{(a - 1)/a}$, соответственно. При дальнейшем увеличении параметра a , на базе точек C_1 и C_2 происходит каскад бифуркаций удвоения периода, в результате которого при $a = 3.3$ возникает два симметричных хаотических аттрактора. При $a = 3.6$ они сливаются и образуется единый хаотический аттрактор.

При введении связи динамика системы (2.95) становится достаточно сложной. Отметим, что эта система является симметричной по отношению к замене переменных $x \leftrightarrow y$ и $x \leftrightarrow -y$. Симметричное подпространство $x = -y$ в дальнейшем будем называть “антисимметричным” подпространством. Движения в подпространстве $x = y$ общего фазового пространства взаимодействующих систем соответствует полной синфазной синхронизации. Движения в подпространстве $x = -y$ соответствует полной противофазной синхронизации. Синхронные синфазные и противофазные колебания

наблюдаются в системе в том случае, если предельные множества являются устойчивыми в трансверсальном направлении, соответственно, к симметричному или антисимметричному подпространству. Их устойчивость определяется знаком трансверсального ляпуновского показателя. Если ляпуновский показатель отрицательный, то синхронные колебания – трансверсально устойчивы. В противном случае они будут трансверсально неустойчивыми и не могут наблюдаться в экспериментах. Исследования показали, что в системе связанных отображений синфазные хаотические колебания могут наблюдаться в определенном диапазоне значений параметра связи. В тоже время, режимы противофазной синхронизации хаоса не наблюдаются.

Попробуем детально исследовать, каким образом режимы противофазной синхронизации хаоса могут быть реализованы в системе. Здесь удобно перейти к новым переменным

$$\begin{aligned} u &= \frac{x+y}{2}, \\ v &= \frac{x-y}{2}. \end{aligned} \quad (2.97)$$

Складывая и вычитая уравнения в системе (2.95), получим

$$\frac{x_{n+1} + y_{n+1}}{2} = \frac{1}{2} [f(x_n) + f(y_n)], \quad (2.98)$$

$$\frac{x_{n+1} - y_{n+1}}{2} = \frac{1}{2} [(1 - 2\gamma)(f(x_n) - f(y_n))]. \quad (2.99)$$

Предположим, что изображающая точка эволюционирует в малой окрестности антисимметричного подпространства:

$$x = \frac{x-y}{2} + \Delta x, \quad y = \frac{y-x}{2} + \Delta y,$$

где Δx и Δy - малые величины. В этом случае функции $f(x)$ и $f(y)$ можно разложить в ряд Тейлора в окрестности $(x-y)/2$ и ограничиться в разложении линейными членами

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\frac{x-y}{2}\right) + f'\left(\frac{x-y}{2}\right) \left(x - \frac{x-y}{2}\right), \\ f(y) = -f(-y) &= -f\left(\frac{x-y}{2}\right) - f'\left(\frac{x-y}{2}\right) \left(-y - \frac{x-y}{2}\right). \end{aligned}$$

Подставляя эти соотношения в (2.98) и (2.99), получим

$$u_{n+1} = f'(v_n)u_n, \quad (2.100)$$

$$v_{n+1} = (1 - 2\gamma)f(v_n). \quad (2.101)$$

Уравнение (2.101) описывает движение внутри антисимметричного подпространства. В отличие от синфазных синхронных движений, здесь характер синхронных колебаний зависит от коэффициента связи γ . Устойчивость колебаний внутри антисимметричного подпространства (для тангенциальных возмущений) определяется тангенциальным ляпуновским показателем

$$A_{\parallel} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ln |(1 - 2\gamma)f'(v_n)|. \quad (2.102)$$

Уравнение (2.100) управляет динамикой в трансверсальном направлении к антисимметричному подпространству, и неявно зависит от коэффициента связи через динамическую переменную v . Решение $u = 0$ уравнения (2.100) соответствует противофазным колебаниям. Их устойчивость определяется трансверсальным (нормальным) ляпуновским показателем

$$A_{\perp} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ln |f'(v_n)|. \quad (2.103)$$

Из выражений (2.102) и (2.103) следует, что ляпуновские показатели связаны следующим образом

$$A_{\perp} = A_{\parallel} - \ln |1 - 2\gamma|. \quad (2.104)$$

Для интересующего нас диапазона значений коэффициента связи $0 \leq \gamma \leq 0.5$ получаем $\ln |1 - 2\gamma| \leq 0$ и, следовательно,

$$A_{\perp} \geq A_{\parallel}.$$

Это соотношение показывает, что все колебательные режимы, предельные множества которых располагаются в антисимметричном подпространстве, вначале теряют устойчивость в трансверсальном направлении и только после этого происходит потеря устойчивости в тангенциальном направлении. Выше линии критических значений, в антисимметричном подпространстве формируется хаотическое предельное множество, для которого тангенциальный ляпуновский показатель всегда больше нуля. В соответствии с

соотношением (2.104) нормальный ляпуновский показатель также будет положительной величиной. Следовательно, противофазные хаотические колебания в системе диффузионно связанных отображений не могут быть трансверсально устойчивыми, и противофазная самосинхронизация не может быть реализована в таких системах.

Для того чтобы стабилизировать изначально неустойчивые противофазные хаотические колебания, можно использовать управляющие воздействия через дополнительную обратную связь. Добавляя слагаемое обратной связи $r(f(x_n) + f(y_n))$ к правой части первого уравнения системы (2.95), запишем

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n) + \gamma(f(y_n) - f(x_n)) + r(f(x_n) + f(y_n)), \\y_{n+1} &= f(y_n) + \gamma(f(x_n) - f(y_n)).\end{aligned}\quad (2.105)$$

Управляющее воздействие выбрано таким образом, что дополнительное слагаемое обратной связи исчезает, когда достигается цель управления, т.е. противофазная синхронизация. Следовательно управляющий механизм не меняет характер и форму противофазных колебаний, воздействуя в то же время на их устойчивость в трансверсальном направлении.

Перейдем к новым переменным u , v , и запишем линеаризованные уравнения

$$u_{n+1} = (1 + r)f'(v_n)u_n, \quad (2.106)$$

$$v_{n+1} = (1 - 2\gamma)f'(v_n) + rf'(v_n)u_n. \quad (2.107)$$

В случае противофазных колебаний получаем $u_n = 0$, и уравнение (2.107) трансформируется в уравнение (2.101). Используя уравнение (2.106), можно определить нормальный ляпуновский показатель для системы с управлением:

$$A_{\perp}^{a_{contr}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ln |(1 + r)f'(v_n)| \quad (2.108)$$

или

$$\Lambda_{\perp}^a \text{contr} :$$

Задавая r близкими к -1 , 1 значениями для нормального $\Lambda_{\perp}^a \text{contr}$ можно стабилизировать про-

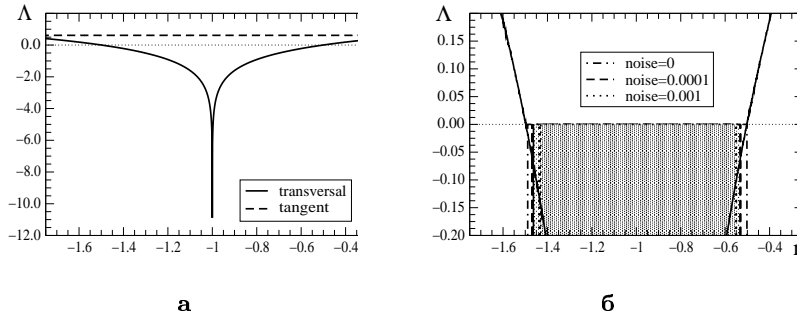


Рис. 2.61. (а) Нормальный ляпуновский показатель (сплошная линия) в зависимости от управляющего параметра r при $a = 3.8$ и $\gamma = 0.04$. Штриховая линия соответствует тангенциальному ляпуновскому показателю. (б) Та же зависимость в увеличенном масштабе с областями управляемой синхронизации

График нормального ляпуновского показателя в зависимости от управляющего параметра r представлен на рис. 2.61а. Другие значения параметров соответствуют режиму несинхронного объединенного хаотического аттрактора (при $r = 0$). Переход к режиму противофазной синхронизации может быть осуществлен следующим образом. При фиксированных значениях $a = 3.8$ и $\gamma = 0.04$ система демонстрирует режим несинхронных хаотических колебаний (см. рис. 2.62а). Изображающая точка эволюционирует на объединенном хаотическом аттракторе, который включает в себя хаотические множества, расположенные в симметричном и антисимметричном подпространстве. В каждый момент времени проводилась оценка расстояния от изображающей точки до антисимметричного подпространства ($\rho = |x + y|$), и его сравнение с некоторым заданным пороговым значением δ . Если $\rho > \delta$, считалось, что изображающая точка находится далеко от антисимметричного подпространства, и управление не действовало. Когда изображающая точка входила в малую окрестность антисимметричного подпространства (для $\rho \leq \delta$), на систему начинали воздействовать управляющие возмущения. При этом, если выбранное значение параметра r располагалось в интервале, где $\Lambda_{\perp}^a \text{contr} < 0$, хаотическое

множество внутри антисимметричного подпространства становилось трансверсально устойчивым, и фазовая траектория притягивалась к подпространству. В этом случае управляющее воздействие устремлялось к нулю. В наших компьютерных экспериментах выбиралось значение $\delta = 0.01$. На рис. 2.62 представлены фазовые портреты и соответствующие временные реализации без управления и при управляющих воздействиях. Когда управление отсутствует ($r = 0$), траектория однородно покрывает область близкую по форме к квадрату (рис. 2.62а). При подаче управляющих воздействий, в этой области становится видимой диагональ $x = -y$ (рис. 2.62в), и наблюдаются интервалы синхронного поведения (рис. 2.62г). Наконец, если значение параметра r выбиралось таким, что значение трансверсального ляпуновского показателя было отрицательным, система демонстрировала режим полной синхронизации хаоса (рис. 2.62д,е).

На рис. 2.61б показаны интервалы значений параметра r , при которых достигается управляемая синхронизация при различных уровнях шума. Области с более темной штриховкой соответствуют большим интенсивностям шума. В отсутствие шума область управляемой синхронизации полностью совпадает с интервалом значений параметра r , где нормальный ляпуновский показатель принимает отрицательные значения. Добавление шума приводит к сжатию области управляемой синхронизации. В некоторых работах [162, 169, 291, 292], где исследовались механизмы потери полной синфазной синхронизации хаоса в симметрично связанных системах с удвоением периода, было показано, что процесс потери синхронизации происходит по определенному сценарию. На начальном этапе десинхронизации возникает “пузырящийся” аттрактор, когда в присутствии произвольно малого шума фазовые траектории время от времени покидают малую окрестность симметричного подпространства (турбулентные всплески) [295]. Эффект “пузырения” аттрактора может сменяться явлением “изрешечивания” бассейна притяжения синхронного хаотического аттрактора, когда вблизи хаотического аттрактора появляются области, принадлежащие бассейну притяжения другого аттрактора [296].

Естественно возникает вопрос: как происходит процесс потери управляемой противофазной синхронизации хаоса, сопровождается ли он явлениями “пузырения” аттрактора и “изрешечивания” бассейна притяжения? При исследовании этого процесса бы-

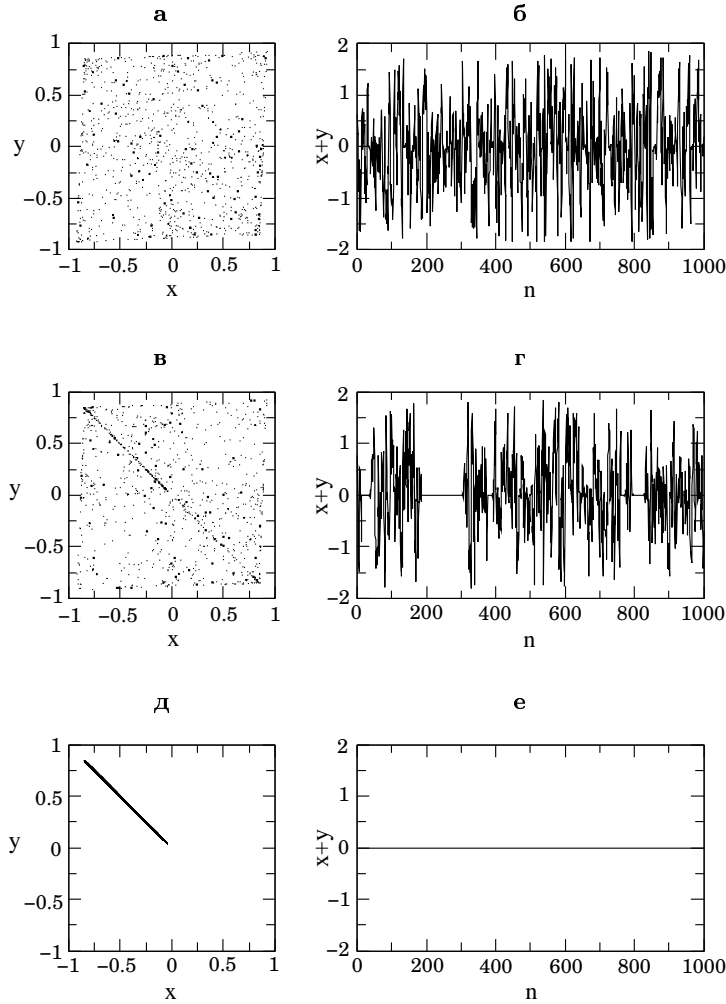


Рис. 2.62. Фазовые портреты и временные реализации (а,б) без управления ($r = 0$), (в,г) с частичным управлением ($r = -0.48$) и (д,е) в режиме управляемой синхронизации ($r = -0.5$)

ла рассмотрена эволюция синхронного хаотического аттрактора при изменении значений управляющего параметра r . При компьютерном моделировании начальные условия выбирались вблизи антисимметричного подпространства, и постоянно присутствовало управляющее воздействие. При значениях управляющего параметра $-1 < r < -0.525$, хаотический аттрактор, расположенный в антисимметричном подпространстве, является трансверсально устой-

чивым. Начальное возмущение затухает во времени, и фазовая траектория притягивается к подпространству. Добавление слабого шума не приводит к существенным изменениям в поведении системы. С ростом управляющего параметра r ($r > -0.525$) в системе наблюдается пузырящееся поведение. Хаотический аттрактор в антисимметричном подпространстве остается трансверсально устойчивым, однако длительность переходных процессов существенно увеличивается и становится сильно зависимой от начальных условий. При воздействии на систему шума малой интенсивности, ее поведение существенно меняется. Аттрактор увеличивается в размере в трансверсальном направлении. Изображающая точка начинает совершать перескоки между хаотическими множествами, расположенными в антисимметричном подпространстве, и временные реализации становятся характерными для процесса перемежающейся синхронизации (on-off intermittency [297]). На рис. 2.63а–г представлены фазовые портреты и соответствующие временные реализации, наблюдаемые в системе в отсутствие и при наличии шума.

Видно, что в последнем случае имеются длительные интервалы времени, в течение которых изображающая точка движется в окрестности антисимметричного подпространства, и короткие временные интервалы, когда изображающую точку выбрасывает далеко от этой окрестности и затем она вновь возвращается к антисимметричному подпространству. Средняя частота турбулентных всплесков нарастает при движении по параметру r к границе области синхронизации. Наконец, при $r = -0.406$ происходит бифуркация прорыва, когда хаотическое множество внутри антисимметричного подпространства больше не притягивает траектории в трансверсальном направлении и превращается в хаотическое седло [163]. Синхронные колебания больше не могут наблюдаться в системе и в отсутствие, и при наличии шума. Фазовый портрет хаотического аттрактора становится схожим с пузырящимся аттрактором (рис. 2.63е).

Когда управляющий параметр r уменьшается, т.е. $r < -1.472$, бассейн притяжения синхронного аттрактора в антисимметричном подпространстве становится изрешеченным “дырками”, которые принадлежат бассейну притяжения аттрактора на бесконечности. На рис. 2.64 показана часть бассейна притяжения хаотического аттрактора, расположенного в антисимметричном подпространстве (белый цвет). Черными точками показан бассейн притяжения

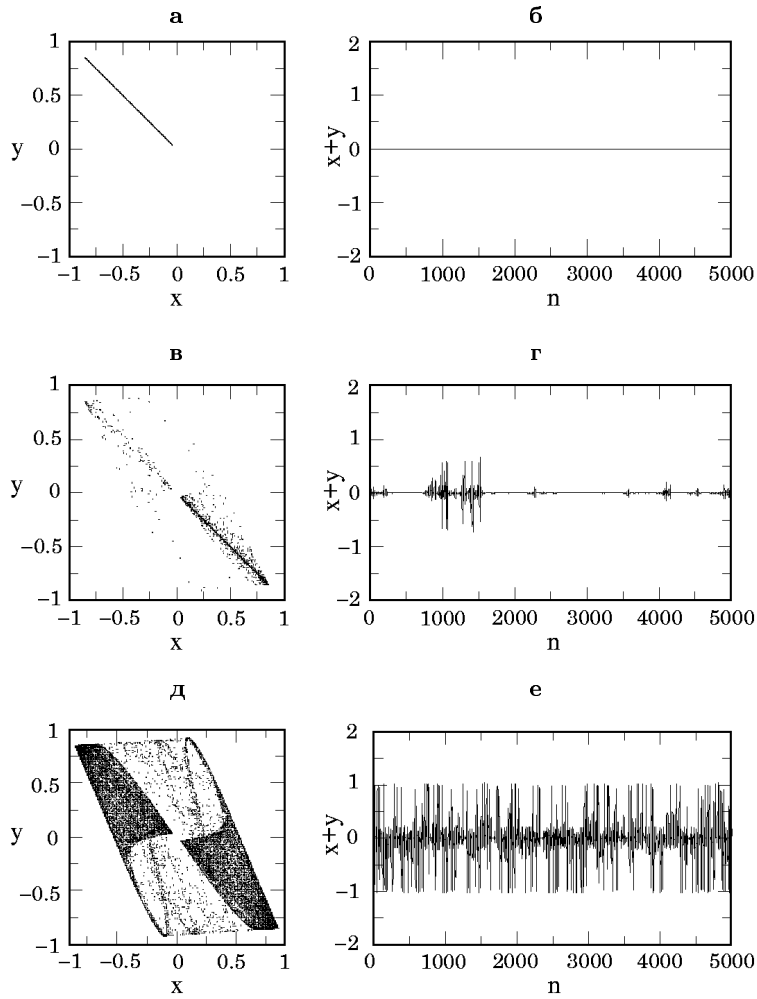


Рис. 2.63. Фазовые портреты и временные реализации противофазных колебаний (а,б) без воздействия шума, (в,г) при воздействии шума с интенсивностью 0.00001, и (д,е) после бифуркации прорыва

аттрактора на бесконечности. Антисимметричное подпространство ($u = 0$) помечено штриховой линией.

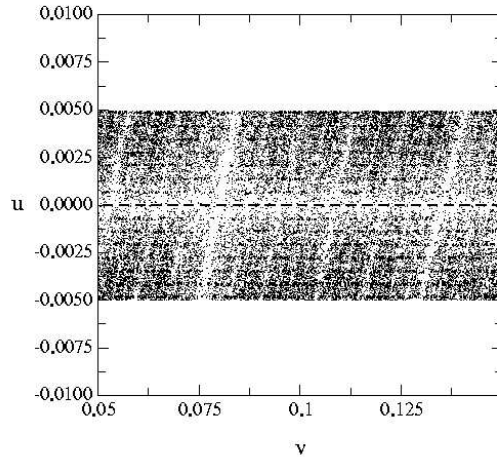


Рис. 2.64. Часть $(-0.005 \leq u \leq 0.005)$ бассейна притяжения (белый цвет) хаотического аттрактора внутри антисимметричного подпространства при $a = 3.8$, $\gamma = 0.04$ и $r = -1.485$. Траектории, стартующие от черных точек, уходят к аттрактору на бесконечности

2.6.3 Управление и синхронизация хаоса в системе взаимно связанных осцилляторов

Существует достаточно много способов управления, основная цель которых преобразовать хаотическое поведение в периодическое с помощью малых воздействий на систему. Методы, позволяющие стабилизировать седловые циклы, встроенные в хаотический аттрактор, зачастую представляют собой достаточно сложную процедуру, связанную с поиском седловых циклов, его многообразий и определением вида управляющего воздействия. Для системы двух взаимодействующих идентичных осцилляторов, имеющей несколько видов симметрии, при некоторых типах связи процедура стабилизации определенного подмножества седловых циклов может быть существенно упрощена.

Примером такой системы могут служить два связанных через емкость идентичных генератора Чуа [298]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1,2} &= \alpha [y_{1,2} - x_{1,2} - h(x_{1,2})], \\ \dot{y}_{1,2} &= x_{1,2} - y_{1,2} + z_{1,2} + \gamma [(x_{2,1} - x_{1,2}) - (y_{2,1} - y_{1,2}) + (z_{2,1} - z_{1,2})], \\ \dot{z}_{1,2} &= -\beta y_{1,2}, \end{aligned} \quad (2.110)$$

где $x_{1,2}$, $y_{1,2}$ и $z_{1,2}$ - динамические переменные парциальных систем; $h(x_{1,2}) = bx_{1,2} + 0.5(a-b)(|x_{1,2}+1| - |x_{1,2}-1|)$; α , β , a и b - параметры генератора; γ - коэффициент связи.

Система (2.110) является симметричной по отношению к замене переменных $\mathbf{X}_1 = (x_1, y_1, z_1) \longleftrightarrow \mathbf{X}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ и $\mathbf{X}_1 = (x_1, y_1, z_1) \longleftrightarrow -\mathbf{X}_2 = (-x_2, -y_2, -z_2)$. Ее поведение в зависимости от значений параметров α и γ при фиксированных $a = -8/7$, $b = -5/7$, $\beta = 22$ достаточно подробно описано в работе [298].

В данной системе с помощью малых управляющих воздействий на один из генераторов хаотическую фазовую траекторию можно стабилизировать в различных симметричных подпространствах объединенного фазового пространства взаимодействующих генераторов, осуществляя тем самым управляемые переходы от несинхронных хаотических колебаний к периодическим движениям и к режиму синхронизации хаоса в виде как синфазных, так и противофазных хаотических колебаний генераторов [299].

Возможность управляемого перехода от хаотических движений к регулярным обусловлена тем, что в рассматриваемой системе при конечной связи хаос возникает при значительно меньших значениях параметра парциального генератора (α), чем в отсутствие ее. Когда во взаимодействующих генераторах уже наблюдаются режимы развитых хаотических колебаний, в индивидуальной системе все еще существуют устойчивые циклы. Это означает, что они существуют и в системе взаимно связанных генераторов, но уже в неустойчивом виде. Располагаются эти циклы в симметричном подпространстве $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2$ полного фазового пространства связанных генераторов, являясь устойчивыми к симметричным и неустойчивыми к трансверсальным возмущениям. Если при конечной связи в системе сформировался хаотический аттрактор, в котором встроены данные седловые симметричные циклы, то фазовую траекторию можно будет легко стабилизировать в их окрестности. Для этого достаточно с помощью малых воздействий на один из генераторов стабилизировать фазовую траекторию в симметричном подпространстве $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2$. Поскольку интересующий нас седловой цикл устойчив к симметричным возмущениям, через некоторое время фазовая траектория обязательно подойдет к нему и будет эволюционировать на этом цикле, пока будет продолжаться управляющее воздействие. Определить вид возмущений, стабилизирующих фазовую траекторию в симметричном подпространстве,

существенно проще, чем вид возмущений, стабилизирующих ее в окрестности седлового цикла. Если в отсутствие связи парциальные системы демонстрируют хаотические колебания, то стабилизация фазовой траектории в данном симметричном подпространстве связанных систем приведет к режиму синхронизации хаоса.

Следует отметить, что в системах, подобных связанным идентичным генераторам Чуа, имеющих несколько видов симметрии, хаотическую траекторию можно стабилизировать в различных симметричных подпространствах, например, не только в $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2$, но и в $\mathbf{X}_1 = -\mathbf{X}_2$. Будут ли стабилизированные движения с указанными свойствами симметрии регулярными или хаотическими, зависит от того, имеются ли в этом подпространстве седловые циклы, устойчивые к симметричным возмущениям, или нет.

Для того чтобы определить условия, приводящие к стабилизации симметричных движений, перейдем к новым переменным $u = (x_1 - x_2)/2$, $v = (y_1 - y_2)/2$, $w = (z_1 - z_2)/2$, $u_1 = (x_1 + x_2)/2$, $v_1 = (y_1 + y_2)/2$, $w_1 = (z_1 + z_2)/2$, и перепишем систему (2.110) следующим образом:

$$\dot{u} = \alpha [v - u - c(u)], \quad (2.111)$$

$$\dot{v} = u - v + w - 2\gamma [u - v + w], \quad (2.112)$$

$$\dot{w} = -\beta v, \quad (2.113)$$

$$\dot{u}_1 = \alpha [v_1 - u_1 - c(u_1)], \quad (2.114)$$

$$\dot{v}_1 = u_1 - v_1 + w_1, \quad (2.115)$$

$$\dot{w}_1 = -\beta v_1, \quad (2.116)$$

где $c(u) = [h(x_1) - h(x_2)]/2$, $c(u_1) = [h(x_1) + h(x_2)]/2$.

В данной системе эволюция симметричных движений $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2$ [$\mathbf{X}_1 = -\mathbf{X}_2$] определяется уравнениями (2.114-2.116) [уравнениями (2.111-2.113)], а их устойчивость - уравнениями (2.111-2.113) [уравнениями (2.114-2.116)].

Рассмотрим случай стабилизации симметричных режимов $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2$. Добавим к уравнению (2.111) управляющее воздействие $F(u) = ru$, и определим с помощью критерия Рауса – Гурвица, при каких значениях r состояние равновесия $u = v = w = 0$ будет устойчивым. Тем самым мы определим условия стабилизации симметричных режимов системы (2.110).

Из анализа устойчивости следует, что хаотическая траектория может быть стабилизирована в подпространстве $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2$, когда

параметр r удовлетворяет неравенству

$$r < \alpha(c - 0.5) + 0.5\xi - \sqrt{0.25(\xi - \alpha)^2 - \xi(\beta - \alpha)}, \quad (2.117)$$

$$\xi = 1 - 2\gamma, \quad c = \begin{cases} 1 + a, & |x| \leq 1, \\ 1 + b, & |x| > 1. \end{cases}$$

Характер симметричных колебаний (регулярные или хаотические, период регулярных колебаний или тип хаотического аттрактора) определяется динамикой парциальной системы в отсутствие связи.

Добавив к уравнению (2.114) управляющее воздействие $F_1 = r_1 u_1$, аналогичным образом можно получить условия устойчивости состояния равновесия $u_1 = v_1 = w_1 = 0$. Тем самым мы определим условия стабилизации противофазных $\mathbf{X}_1 = -\mathbf{X}_2$ колебаний связанных генераторов (2.110).

Как уже отмечалось ранее, в связанных автоколебательных системах в некоторой области значений параметров наблюдаются хаотические аттракторы, при эволюции на которых изображающая точка время от времени попадает в малую окрестность одного из симметричных подпространств. Если в этот момент на одну из подсистем подать соответствующее воздействие, F или F_1 , то установятся симметричные движения.

Чтобы стабилизировать синхронные движения $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2$, управляющее воздействие $F = r(x_1 - x_2)$ добавлялось к первому уравнению первого генератора (2.110). Управление “включалось” в тот момент, когда изображающая точка попадала в заданную малую окрестность симметричного подпространства. Это означает, что величина управляющих воздействий всегда оставалась малой.

Рисунок 2.65 иллюстрирует управляемые переходы из режима хаоса к регулярным и хаотическим синфазным симметричным движениям при различных значениях α с коэффициентом связи $\gamma = 0.2$. Значения других параметров оставались фиксированными: $a = -8/7$, $b = -5/7$, $\beta = 22$.

Из рисунка видно, что с момента, когда изображающая точка входит в заданную ε -окрестность симметричного подпространства, на подсистему начинают действовать управляющие возмущения (см. зависимость $F(t)$). В результате фазовая траектория притягивается к симметричному подпространству и остается там.

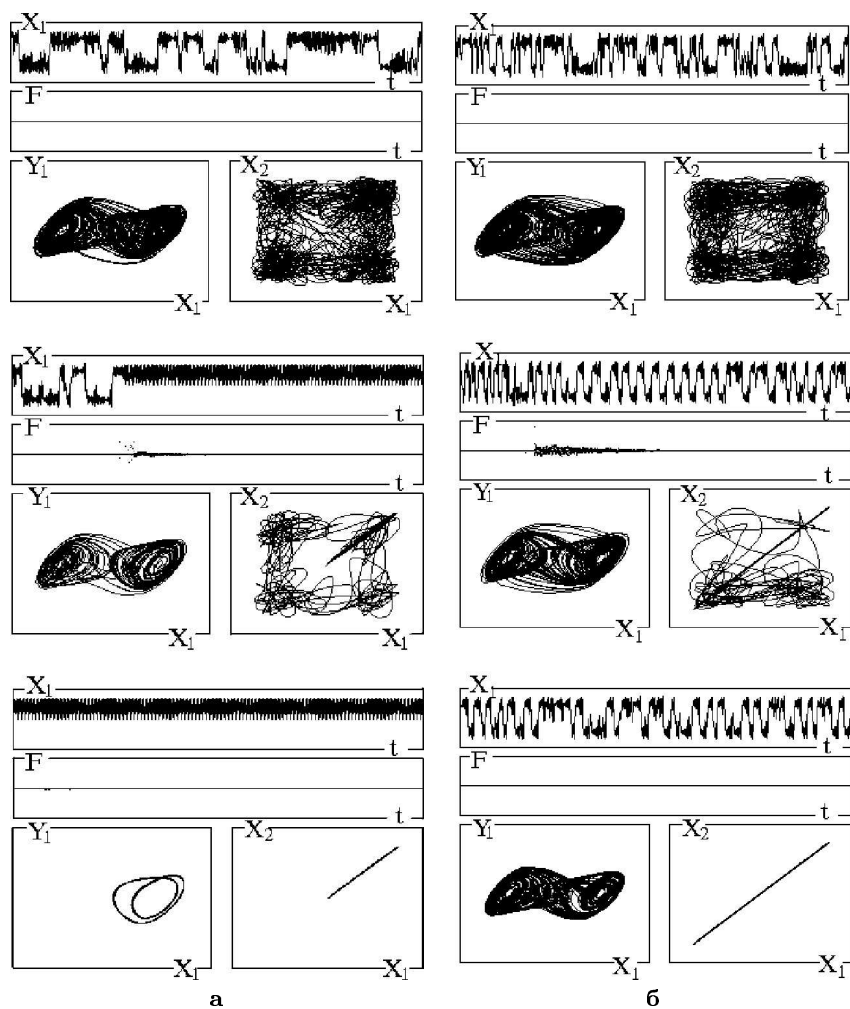


Рис. 2.65. Временные реализации $X_1(t)$, управляющие воздействия $F(t)$ и проекции фазовых портретов при управляемых переходах из режима хаоса (верхние панели) (а) к симметричному циклу периода 2 при $\alpha = 11.4$, $\gamma = 0.2$, и (б) к синхронным хаотическим движениям при $\alpha = 12.7$ и $\gamma = 0.2$ (нижние панели). Средние панели иллюстрируют промежуточные этапы управляемых переходов

В зависимости от значения параметра α наблюдаются управляемые переходы к симметричному циклу периода 2 (рис. 2.65а) и синхронным хаотическим движениям, которые соответствуют хаотическому аттрактору double scroll, расположенному в симметричном подпространстве (рис. 2.65б). Используемая процедура управления хаосом позволяет стабилизировать хаотическую траекторию в симметричном подпространстве, не оказывая влияния на динамику системы, когда она эволюционирует в этом подпространстве. Результатирующим будет то симметричное движение, которое является притягивающим в симметричном подпространстве. В зависимости от значения α это могут быть либо циклы различных периодов, либо хаотические аттракторы, что мы и наблюдали на представленных рисунках.

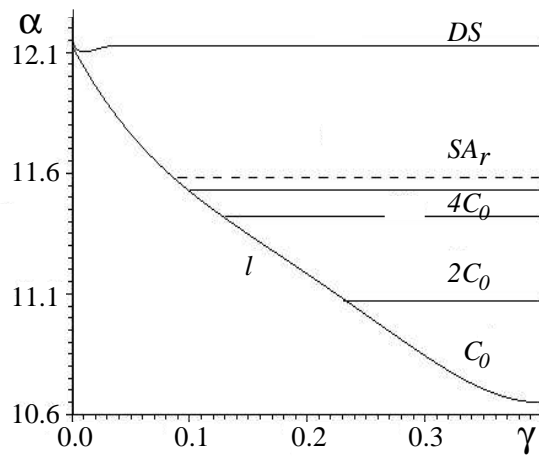


Рис. 2.66. Области симметричных режимов, возникающие в системе в результате управления

Более детальные исследования управляемых переходов в зависимости от значений параметров системы α и γ представлены на рис. 2.66. На плоскости параметров приближенно очерчена область значений (выше линии l), где в отсутствие управляющего воздействия наблюдаются режимы хаотических колебаний. При управлении устанавливаются симметричные циклы периода 1, 2, 4 (C_0 , $2C_0$, $4C_0$), симметричный хаотический аттрактор ресслеровского типа (SA_r) и расположенный в симметричном подпростран-

стве хаотический аттрактор double scroll (DS). В системе наблюдались также управляемые переходы на симметричные циклы более высокого периода (8, 16). Однако соответствующие области на плоскости параметров являются довольно узкими и на рисунке не выделены. Линия, выше которой наблюдаются синхронные хаотические движения, показана пунктиром.

В системе взаимно связанных генераторов в режиме развитого хаоса фазовая траектория время от времени входит в малую окрестность не только симметричного подпространства $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2$, но и $\mathbf{X}_1 = -\mathbf{X}_2$. Для того чтобы стабилизировать траекторию в этом подпространстве, в первое уравнение первого генератора системы (2.110) вводилось малое управляющее воздействие $F_1 = r_1(x_1 + x_2)$. На рис. 2.67 проиллюстрирован управляемый переход из режима развитого хаоса в режим симметричных противофазных хаотических колебаний. В отличие от предыдущего случая здесь при различных значениях α и γ управляемых переходов к регулярным движениям не наблюдалось. В результате управляющего воздействия всегда возникали синхронные противофазные хаотические движения.

Дело в том, что при значениях α и γ , соответствующих хаотическим режимам в связанных генераторах, в подпространстве $X_1 = -X_2$ отсутствуют седловые циклы, устойчивые к симметричным (в данном случае противофазным) возмущениям. Здесь уже образовалось хаотическое множество, притягивающее фазовые траектории данного подпространства, на которое и выходит система при “включении” управления. Формирование данного хаотического множества происходит через последовательность бифуркаций удвоения периода седловых циклов, устойчивых к указанным симметричным возмущениям. Исследование бифуркационных переходов неустойчивых движений осуществлялось следующим образом. Задавались начальные условия в окрестности исследуемого подпространства и подавалось управляющее воздействие F_1 . В результате при изменении значений параметров α и γ в системе можно было наблюдать только те колебательные режимы, которые являются устойчивыми к противофазным возмущениям. Этот результат указывает на возможность использования методов стабилизации движений в определенных подпространствах полного фазового пространства системы для бифуркационного анализа опре-

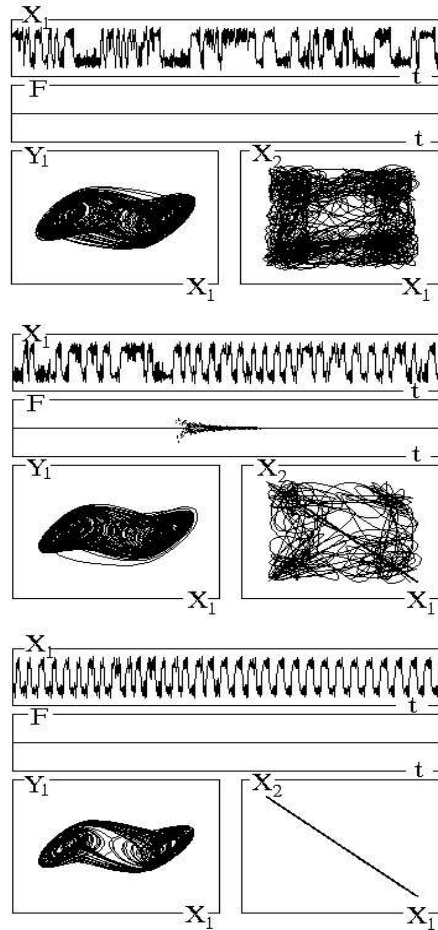


Рис. 2.67. Управляемый переход из режима развитого хаоса (DS) к режиму синхронных противофазных хаотических колебаний при $\alpha = 12.7$, $\gamma = 0.2$

деленного класса седловых движений. Такой подход может существенно расширить возможности натурального эксперимента.

Отметим, что воздействие малого аддитивного шума на систему (2.110) качественно не повлияло на полученные результаты.

2.6.4 Управляемая синхронизация хаоса методом периодических параметрических возмущений

Идея использования параметрического воздействия для синхронизации связанных хаотических систем базируется на хорошо извест-

ной классической задаче о маятнике с вибрирующей точкой подвеса [38, 300, 301]. В такой системе, начиная с некоторых пороговых значений амплитуды и частоты, параметрическое воздействие превращает неустойчивое состояние равновесия в устойчивое.

Рассмотрим два связанных идентичных неавтономных осциллятора [302, 303]:

$$\ddot{x}_{1,2} + \alpha \dot{x}_{1,2} + f(x_{1,2}) - \gamma(x_{2,1} - x_{1,2}) = B \sin(\omega t), \quad (2.118)$$

где $f(x) = (b - 1)x + 0.5(b - a)(|x - 1| - |x + 1|)$, α - параметр диссипации, γ - коэффициент связи, B и ω - амплитуда и частота внешнего воздействия, соответственно.

При $\gamma = 0$ получаем уравнение парциальной системы. В отсутствие внешнего воздействия ($B = 0$) это - нелинейный затухающий осциллятор с тремя состояниями равновесия: $P_1(x_1 = 0, y_1 = 0)$, $P_{2,3}(x_{2,3} = \pm(b - a)/(b - 1), y_{2,3} = 0)$. Если $0 < a < 1$, $b > (1 + \alpha^2/4)$, $\alpha > 0$, то P_1 является седлом, а $P_{2,3}$ - устойчивыми фокусами. При внешнем воздействии в некоторой области значений параметров нелинейный осциллятор демонстрирует хаотические колебания. В связанных осцилляторах ($\gamma > 0$) наблюдаются различные виды регулярных и хаотических движений, в том числе и режим несинхронных хаотических колебаний.

В системе (2.118) режим синхронизации хаотических колебаний осцилляторов можно обеспечить с помощью параметрического периодического воздействия на элемент связи. Предположим, что коэффициент связи γ можно менять периодическим образом во времени относительно некоторого постоянного уровня γ_0 , то есть

$$\gamma = \gamma_0 + F(t), \quad (2.119)$$

где $F(t)$ - периодическая функция с периодом $T = 2\pi/\Omega$ (Ω - частота параметрической накачки). Для того чтобы более наглядно проиллюстрировать механизм стабилизации симметричных движений, зададим параметрическое воздействие в виде

$$F(t) = \varepsilon \Omega^2 \operatorname{sgn}(\sin(\Omega t)), \quad (2.120)$$

где ε - амплитуда параметрического воздействия.

С учетом параметрической накачки (2.119, 2.120) перепишем уравнения связанных осцилляторов (2.118) следующим образом:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_{1,2} &= y_{1,2} \\
\dot{y}_{1,2} &= -\alpha y_{1,2} - f(x_{1,2}) + [\gamma_0 + \varepsilon \Omega^2 \operatorname{sgn}(\sin(\Omega t))] \\
&\quad \times (x_{2,1} - x_{1,2}) + B \sin(\omega t).
\end{aligned} \tag{2.121}$$

Используя замену переменных $u = (x_1 - x_2)/2$, $u_1 = (x_1 + x_2)/2$, $v = (y_1 - y_2)/2$, $v_1 = (y_1 + y_2)/2$ можно получить следующую систему уравнений:

$$\dot{u} = v, \tag{2.122}$$

$$\dot{v} = -\alpha v - \omega_0^2(t)u, \tag{2.123}$$

$$\dot{u}_1 = v_1, \tag{2.124}$$

$$\dot{v}_1 = -\alpha v_1 - f(u_1) + B \sin(\omega t), \tag{2.125}$$

где

$$\omega_0^2(t) = A + 2\gamma_0 + 2\varepsilon \Omega_0^2 \operatorname{sgn}(\sin(\Omega t)), \quad f(u_1) = (f(x_1) + f(x_2))/2,$$

$$A = \begin{cases} a - 1, & |x| \leq 1, \\ b - 1, & |x| > 1. \end{cases}$$

Уравнения (2.124), (2.125) описывают синхронные движения ($u = 0, v = 0$) связанных осцилляторов, а (2.122), (2.123) – эволюцию малых отклонений от синхронных движений или от состояния равновесия ($u = 0, v = 0$). Для того чтобы получить условия стабилизации симметричных движений хаотических осцилляторов, исследуем эволюцию малых возмущений в окрестности состояния равновесия ($u = 0, v = 0$) за период параметрического воздействия T . Это можно сделать, используя известные процедуры (см., например, [38]).

Период параметрического воздействия разделим на два интервала, а именно, $[0; T/2]$ и $[T/2; T]$. На каждом из этих интервалов уравнения (2.122, 2.123) являются линейными и могут быть решены аналитически. Возмущения в моменты времени 0 и $T/2$ и в моменты $T/2$ и T связаны матричными уравнениями

$$\begin{bmatrix} u(T/2) \\ v(T/2) \end{bmatrix} = [M_1] \begin{bmatrix} u(0) \\ v(0) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} u(T) \\ v(T) \end{bmatrix} = [M_2] \begin{bmatrix} u(T/2) \\ v(T/2) \end{bmatrix}.$$

Устойчивость решения ($u = 0, v = 0$) определяется собственными значениями матрицы $[M] = [M_2][M_1]$, которые имеют следующий вид

$$\mu_{1,2} = \exp(\alpha\pi/\Omega)(0.5S \pm \sqrt{0.25S^2 - 1}), \quad (2.126)$$

где

$$\begin{aligned} S &= 2(\cosh\beta_1 \cosh\beta_2 + K \sinh\beta_1 \sinh\beta_2), \\ \beta_1 &= (\pi/\Omega)\sqrt{0.25\alpha^2 - A - 2\gamma_0 - 2\varepsilon\Omega^2}, \\ \beta_2 &= (\pi/\Omega)\sqrt{0.25\alpha^2 - A - 2\gamma_0 + 2\varepsilon\Omega^2}, \\ K &= \frac{0.25\alpha^2 - A - 2\gamma_0}{\sqrt{(0.25\alpha^2 - A - 2\gamma_0)^2 - 4\varepsilon^2\Omega^4}}. \end{aligned}$$

Симметричные движения устойчивы, если $|\mu_{1,2}| < 1$. Причем это условие должно выполняться при любых значениях динамических переменных в окрестности симметричного подпространства, то есть и для $A = a - 1$, и для $A = b - 1$.

На рис. 2.68 на плоскости параметров $\varepsilon - \Omega$ (амплитуда и частота параметрического воздействия) выделена область, где выполняется условие устойчивости симметричных движений. Значения других параметров системы связанных осцилляторов ($B = 1.5, \alpha = 0.1, \omega = 1, \gamma = 0.1, a = 0.5, b = 2$) соответствуют случаю, когда в отсутствие параметрической накачки ($\varepsilon = 0$) наблюдается режим несинхронных хаотических колебаний.

Проведенные численные исследования системы (2.121) подтвердили, что режим синхронизации хаотических колебаний можно обеспечить с помощью периодического воздействия на элемент связи. Синхронизация хаотических колебаний происходит при тех значениях амплитуды и частоты параметрической накачки, которые были предсказаны результатами теоретического анализа. Численное моделирование проводилось следующим образом. При указанных выше значениях параметров выбирались начальные условия в малой окрестности симметричного подпространства: $x_1(0) = x_2(0) + \Delta x, y_1(0) = y_2(0) + \Delta y$. Обычно выбиралось $\Delta x = 0.02$ и $\Delta y = 0.02$. Затем строились проекции фазовых портретов и временные реализации колебательных режимов при различных значениях амплитуды ε и частоты Ω . В отсутствие параметрической накачки ($\varepsilon = 0$) фазовая траектория покидает окрестность симметричного подпространства и наблюдаются несинхронные хаоти-

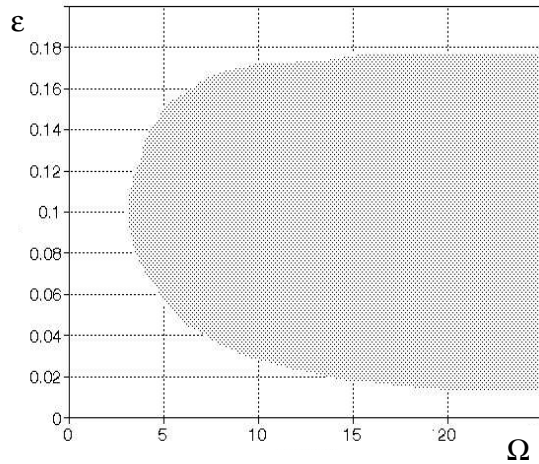


Рис. 2.68. Область устойчивости синхронных режимов на плоскости параметров “амплитуда – частота” параметрического воздействия

ческие колебания осцилляторов (рис. 2.69а). При параметрическом воздействии начальные отклонения Δx и Δy затухают, изображающая точка входит в симметричное подпространство и эволюционирует там (рис. 2.69б), если значения ε и Ω принадлежат выделенной на рис. 2.68 области. Если значения выбирались вне этой области, начальные отклонения нарастают во времени и синхронизация не наблюдалась.

Из рис. 2.68 видно, что эффект стабилизации симметричных движений имеет пороговый характер. Частота параметрических воздействий Ω должна в несколько раз превышать характерную частоту невозмущенных движений (в данном случае частоту $\omega = 1$). Чем меньше амплитуда параметрического воздействия, тем больше должна быть его частота Ω . В рассматриваемой системе для синхронизации хаотических осцилляторов достаточно незначительных возмущений коэффициента связи (ε порядка 20% от $\gamma_0 = 0.1$) на частоте Ω , в 15-20 раз превышающей частоту $\omega = 1$ (рис. 2.68).

Режим синхронизации хаоса возникает и в том случае, когда к моменту включения параметрической накачки изображающая точка находится далеко от симметричного подпространства. Однако в этом случае существенно возрастает время переходного процесса, после которого наблюдается режим установившихся синхронных ха-

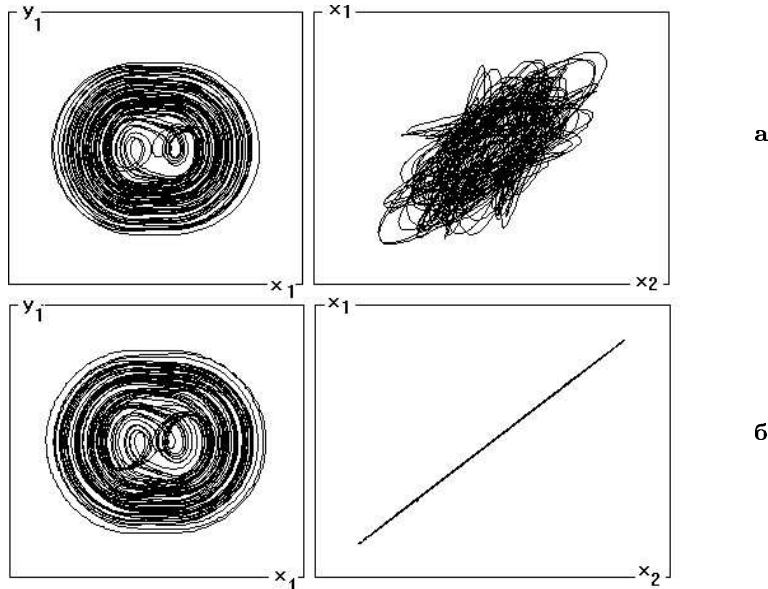


Рис. 2.69. Фазовые портреты колебательных режимов без параметрического воздействия (верхние рисунки) и с воздействием (нижние рисунки)

отических колебаний. Время достижения окрестности симметричного подпространства, где начинает работать механизм стабилизации симметричных движений, в возмущенной системе значительно больше, чем в невозмущенной.

2.6.5 Стабилизация пространственно-однородных движений посредством параметрического воздействия

В данном разделе рассматривается возможность синхронизации цепочки хаотических осцилляторов с помощью периодического параметрического воздействия на элементы связи.

Рассмотрим цепочку нелинейных идентичных неавтономных осцилляторов [304]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_m &= y_m, \\ \dot{y}_m &= -\alpha y_m - f(x_m) + (\gamma/2)(x_{m+1} - 2x_m + x_{m-1}) + B \sin(\omega t), \end{aligned} \quad (2.127)$$

с периодическими граничными условиями $x_0 = x_N$, $y_0 = y_N$, $x_{N+1} = x_1$, $y_{N+1} = y_1$, где $m = 1, \dots, N$ и N - число элементов в цепочке. В качестве элемента цепочки здесь мы используем точно та-

кой же нелинейный неавтономный осциллятор, как и в предыдущем разделе. Параметрическое воздействие задается соотношениями (2.119),(2.120). При $N = 2$ система (2.127) переходит в систему уравнений (2.121).

Для того чтобы определить условия устойчивости синхронных движений в зависимости от амплитуды и частоты параметрической накачки, линеаризуем уравнения цепочки (2.127) в окрестности пространственно - однородного состояния $x_m = \bar{x}$, $y_m = \bar{y}$. В результате получим уравнения для возмущений относительно \bar{x} и \bar{y} :

$$\dot{\eta}_m^{(1)} = \dot{\eta}_m^{(2)}, \quad (2.128)$$

$$\dot{\eta}_m^{(2)} = -\alpha\eta_m^{(2)} - [A + 2\Gamma(t)]\eta_m^{(1)} + \Gamma(t) [\eta_{m+1}^{(1)} + \eta_{m-1}^{(1)}], \quad (2.129)$$

где $\eta_m^{(1)} = x_m - \bar{x}$, $\eta_m^{(2)} = y_m - \bar{y}$, $\Gamma(t) = (1/2)[\gamma_0 + \varepsilon\Omega^2 \text{sgn}(\sin(\omega t))]$ и

$$A = f'(\bar{x}) = \begin{cases} a - 1, & |x| \leq 1, \\ b - 1, & |x| > 1. \end{cases}$$

Используя замену переменных

$$\xi_j^{(1)} = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N e^{-km} \eta_m^{(1)}, \quad \xi_j^{(2)} = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N e^{-km} \eta_m^{(2)},$$

где $k = i(2\pi j/N)$, $i^2 = -1$, $j = 1, \dots, N$ можно переписать уравнения (2.128,2.129) в виде

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_j^{(1)} &= \xi_j^{(2)}, \\ \dot{\xi}_j^{(2)} &= -\alpha\xi_j^{(2)} - \omega_0^2(t, j)\xi_j^{(1)}, \end{aligned} \quad (2.130)$$

где $\omega_0^2(t, j) = A + [\gamma_0 + \varepsilon\Omega^2 \text{sgn}(\sin(\Omega t))][1 - \cos(2\pi j/N)]$.

Уравнения (2.130) описывают динамику пространственных возмущений в окрестности синхронного состояния $x_m = \bar{x}$, $y_m = \bar{y}$. Пространственно - однородным возмущениям соответствует $j = N$, пространственно-неоднородным – $j = 1, \dots, N - 1$. Синхронное состояние будет устойчивым, если в цепочке все возможные несинфазные возмущения будут затухать.

Отметим, что уравнения (2.130) имеют такой же вид, как и уравнения (2.122,2.123), описывающих динамику трансверсальных к

симметричному подпространству возмущений в двух связанных осцилляторах, и полностью совпадают с ними при $N = 2$, $j = 1$. Следовательно, результаты полученные в предыдущем разделе могут быть использованы для определения собственных значений $\mu_{1,2}$, которые характеризуют эволюцию j -го трансверсального возмущения за период параметрического воздействия $T = 2\pi/\Omega$. Выражения для собственных значений имеют следующий вид:

$$\mu_{1,2}(j) = e^{-\alpha\pi/\Omega} \left[0.5S(j) \pm \sqrt{0.25S^2(j) - 1} \right], \quad (2.131)$$

где

$$\begin{aligned} S(j) &= 2\cosh[\beta_1(j)]\cosh[\beta_2(j)] + K(j)\sinh[\beta_1(j)]\sinh[\beta_2(j)], \\ \beta_{1,2}(j) &= (\pi/\Omega)\sqrt{C_1(j) \mp C_2(j)}, \\ K(j) &= \frac{2C_1(j)}{\sqrt{C_1^2(j) - C_2^2(j)}}, \\ C_1(j) &= \frac{\alpha^2}{4} - A - \gamma_0[1 - \cos(2\pi j/N)], \\ C_2(j) &= \varepsilon\Omega^2[1 - \cos(2\pi j/N)]. \end{aligned}$$

Синхронные движения в цепочке связанных хаотических осцилляторов будут устойчивыми, если для всех $j = 1, \dots, N$ выполняется условие $|\mu_{1,2}(j)| < 1$, как для $A = a - 1$, так и для $A = b - 1$.

На рис. 2.70 отрезками прямых вертикальных линий показаны области значений амплитуды параметрической накачки ε , где выполняются условия устойчивости синхронных движений в цепочках с различным числом элементов N при фиксированном $\Omega = 25$. Значения других параметров системы ($B = 1.5$, $\omega = 1$, $\alpha = 0.1$, $\gamma_0 = 0.1$, $a = 0.5$, $b = 2$) соответствуют случаю, когда в отсутствие параметрической накачки ($\varepsilon = 0$) наблюдаются режимы пространственно-временного хаоса.

Видно, что по мере увеличения числа элементов N область синхронизации постепенно уменьшается, ее нижняя граница смещается вверх по амплитуде. Когда цепочка содержит более 10 осцилляторов, параметрическое воздействие указанной частоты уже не обеспечивает подавления всего спектра трансверсальных возмущений. Дело в том, что стабилизация синхронного состояния по отношению к трансверсальному возмущению с определенным номером j происходит в определенном конечном интервале значений

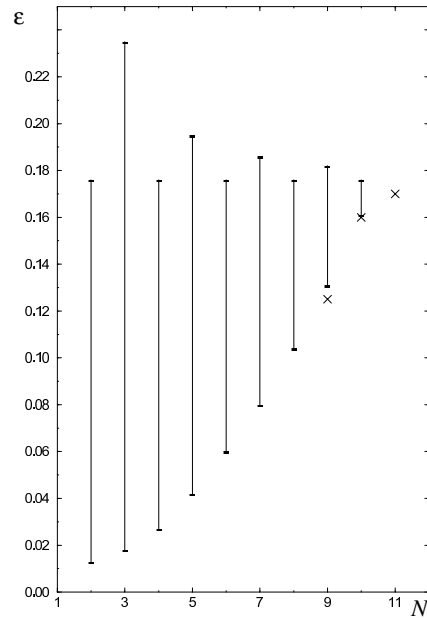


Рис. 2.70. Интервалы устойчивости режимов пространственно-однородных хаотических колебаний в цепочках различной длины

амплитуды воздействия ε . Границы этих интервалов не совпадают. Синхронизация в цепочке возможна только в том случае, если существует общая, принадлежащая каждому из этих интервалов область значений ε . При $N > 10$ часть интервалов не перекрывается.

Данные теоретические результаты находятся в хорошем соответствии с результатами компьютерных экспериментов. Практически все значения амплитуды, при которых наблюдается синхронизация в цепочке, лежат в интервалах устойчивости, построенных по результатам теоретического анализа. Отдельные точки (отмеченные на рис. 2.70 крестиками) располагаются за их пределами. Этот факт можно объяснить следующим образом. При анализе на устойчивость накладывалось условие, чтобы модуль собственных значений был меньше единицы как для $A = a - 1$, так и для $A = b - 1$, то есть в каждой точке фазовой траектории. Это является завышенным требованием. Для устойчивости однородного состояния достаточно, чтобы усредненные величины собственных значений были по модулю меньше единицы. По этой причине в численных экспе-

риментах получают более широкие области синхронизации, чем построенные теоретически.

Посредством периодической модуляции коэффициента связи можно обеспечить стабилизацию пространственно-однородных движений только в цепочках конечной длины. Максимальное число осцилляторов, для которых может наблюдаться синхронизация, зависит от частоты параметрического воздействия. Например, при $\Omega = 15; 25; 50; 100$ оно не превышает 8; 10; 15; 21 соответственно. В случае, когда длина цепочки больше, параметрическая накачка оказывает только частичное стабилизирующее воздействие. Пространственно-однородное состояние приобретает устойчивость по отношению только к некоторой части спектра трансверсальных возмущений.

2.6.6 Управление хаосом в решетках связанных отображений

Решетки связанных отображений являются наиболее простыми моделями пространственно-распределенных систем, которые в то же время способны демонстрировать многие типичные пространственно-временные явления, наблюдаемые в системах различной природы.

Достаточно эффективное управление пространственно-временным хаосом в цепочках и решетках можно обеспечить посредством малых пространственно-распределенных возмущений параметра системы. Такое локальное управление по элементам решетки (в литературе получившее название “pinning control”) позволяет осуществлять стабилизацию предварительно выбранных неустойчивых пространственно-временных структур.

Рассмотрим цепочки связанных логистических отображений с двумя видами связи [305, 306]:

$$x_{n+1}(i) = \alpha - x_n^2(i) + \gamma[2x_n^2(i) - x_n^2(i-1) - x_n^2(i+1)], \quad (2.132)$$

$$x_{n+1}(i) = \alpha - x_n^2(i) + \gamma[2x_n(i) - x_n(i-1) - x_n(i+1)], \quad (2.133)$$

где α – параметр нелинейности; γ – коэффициент связи; $x_n(i)$ – значение динамической переменной в точке с дискретной координатой i в дискретный момент времени n ; N – число элементов цепочки ($i = 1, 2, \dots, N$; $n = 0, 1, 2, \dots$). В данных системах с периодическими граничными условиями $x_n(1) = x_n(N+1)$ существу-

ют области значений параметров, где наблюдается развитый пространственно-временной хаос, которому предшествуют сложные бифуркационные переходы между различными пространственно-временными режимами [307–310].

Для того чтобы осуществить управляемые переходы из режима пространственно-временного хаоса к различным регулярным в пространстве и во времени структурам, управляющие воздействия в ансамбле взаимодействующих осцилляторов должны обеспечивать не только стабилизацию определенных периодических движений в каждом осцилляторе, но и синхронизацию этих движений в определенных фазах по всему ансамблю.

Предположим, что при значениях управляющих параметров, соответствующих развитому пространственно-временному хаосу, в цепочке существуют неустойчивые пространственно-однородные состояния с временным периодом $T = s$ и неустойчивые пространственно-периодические структуры с длиной волны $\lambda = 2$ и временным периодом $T = 2$, с $\lambda = 3$ и $T = 2$, с $\lambda = 5$ и $T = 4$.

Наиболее простыми являются пространственно-однородные режимы с некоторым временным периодом $T = s$. Предположим, что i -й элемент цепочки (2.132) попал в малую окрестность неподвижной точки \bar{x}_k орбиты периода s , и динамическую переменную можно представить в виде $x_{n+k-1}(i) = \bar{x}_k + \tilde{x}_{n+k-1}(i)$, $x_{n+s}(i) = \bar{x}_1 + \tilde{x}_{n+s}(i)$, $k = 1, \dots, s$, где $\tilde{x}_{n+k-1}(i)$ – малое возмущение динамической переменной в окрестности неподвижной точки \bar{x}_k . Предположим также, что существует возможность малых изменений параметра нелинейности элементов цепочки относительно некоторого номинального значения α_0 :

$$\alpha = \alpha_{n+k-1}(i) = \alpha_0 + \tilde{\alpha}_{n+k-1}(i), \quad k = 1, \dots, s. \quad (2.134)$$

С учетом сделанных предположений перепишем уравнение (2.132) следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{x}_{k+1} + \tilde{x}_{n+k}(i) = & \alpha_0 + \tilde{\alpha}_{n+k-1}(i) - [\bar{x}_k + \tilde{x}_{n+k-1}(i)]^2 + \gamma[2(\bar{x}_k + \\ & + \tilde{x}_{n+k-1}(i))^2 - 2\bar{x}_k^2] - \gamma[(x_{n+k-1}^2(i+1) - \bar{x}_k^2) + \\ & + (x_{n+k-1}^2(i-1) - \bar{x}_k^2)], \end{aligned} \quad (2.135)$$

где $k = 1, \dots, s$.

Полагая, что на этом этапе координаты соседних $(i - 1)$ -го и $(i + 1)$ -го элементов цепочки отличаются от координаты неподвижной точки \bar{x}_k на такие значения, что последнее слагаемое в уравнении (2.135) является величиной того же порядка малости, что и $\tilde{x}_{n+k-1}(i)$, запишем уравнение для неподвижной точки и уравнение для эволюции возмущения динамической переменной i -го элемента:

$$\bar{x}_{k+1} = \alpha_0 - \bar{x}_k^2, \quad \bar{x}_{s+1} = \bar{x}_1, \quad (2.136)$$

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{n+k}(i) = & \tilde{\alpha}_{n+k-1}(i) - 2\bar{x}_k(1 - 2\gamma)\tilde{x}_{n+k-1}(i) - \\ & - \gamma[(x_{n+k-1}^2(i+1) - \bar{x}_k^2) + (x_{n+k-1}^2(i-1) - \bar{x}_k^2)], \end{aligned} \quad (2.137)$$

где $k = 1, \dots, s$.

Будем считать, что возмущения параметра i -го элемента зависят от его координаты и координат двух соседних элементов следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{n+k-1}(i) = & a_1\tilde{x}_{n+k-1}(i) \\ & + a_2[(x_{n+k-1}^2(i+1) - \bar{x}_k^2) + (x_{n+k-1}^2(i-1) - \bar{x}_k^2)]. \end{aligned} \quad (2.138)$$

Подставляя (2.138) в (2.137), можно получить коэффициенты a_1 и a_2 , при которых возмущения динамической переменной i -го элемента будут затухать во времени. Вид возмущений по параметрам элементов цепочки (2.132), с помощью которых возможен управляемый переход из режима пространственно-временного хаоса к пространственно-однородным режимам с временным периодом $T = s$, будет следующим:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{n+k-1}(i) = & 2(1 - 2\gamma)\bar{x}_k(x_{n+k-1}(i) - \bar{x}_k) \\ & + \gamma[(x_{n+k-1}^2(i+1) - \bar{x}_k^2) + (x_{n+k-1}^2(i-1) - \bar{x}_k^2)], \end{aligned} \quad (2.139)$$

где $k = 1, \dots, s$.

С целью проверки полученных результатов были проведены компьютерные эксперименты на цепочке связанных логистических отображений (2.132). Предположим, что требуется преобразовать хаотическое поведение в пространственно-однородное с периодом $T = 1$. Задав значения параметров $\alpha = 1.6$ и $\gamma = 0.01$, которые соответствуют режиму пространственно-временного хаоса, и

определив из (2.136) значение неподвижной точки \bar{x}_1 , в пространственно-временной эволюции системы ожидаем тот момент, когда координата одного из элементов цепочки попадет в ε -окрестность точки \bar{x}_1 . После этого оценивается величина $\gamma[(x_n^2(i+1) - \bar{x}_1^2) + (x_n^2(i-1) - \bar{x}_1^2)]$. Если она не превышает заданной величины ε , то “включаются” возмущения параметра вида (2.139), воздействующие на этот элемент. Когда значения других элементов входят в заданную окрестность, на их параметры тоже начинает действовать возмущение, если выполняется указанное условие на координаты ближайших соседних элементов. При этом в пространстве наблюдается поэтапный переход элементов в требуемое состояние. Вначале образуются небольшие случайным образом распределенные пространственно-однородные участки. Затем они расширяются и в результате охватывают всю цепочку. В системе наблюдается установившийся пространственно-однородный режим. Процесс управления последовательно проиллюстрирован на рис. 2.71а. Если убрать возмущения параметра, система возвращается в режим пространственно-временного хаоса.

Аналогичным образом хаотическое поведение может быть преобразовано в пространственно-однородные режимы с большими временными периодами. В этом случае форма возмущений параметра становится более сложной, что видно из выражения (2.139). Чтобы осуществить переход системы к режиму с временным периодом 2, необходимо использовать два вида возмущений. Одно из них воздействует, когда элементы цепочки входят в окрестность точки \bar{x}_1 , второе начинает действовать на следующем временном шаге, когда они входят в окрестность точки \bar{x}_2 . Для стабилизации режима с временным периодом 4, используются четыре аналогичных выражения для возмущений, каждое из которых воздействует на параметр системы в определенные моменты времени и т.д. Переходы системы из режима пространственно-временного хаоса к пространственно-однородным режимам с временными периодами $T = 2$ и $T = 4$ проиллюстрированы на рис. 2.71б,в.

Следует отметить, что при управляемых переходах к пространственно-однородным режимам с временными периодами больше единицы обычно на цепочке формировались небольшие участки неоднородного поведения элементов, которые не реагировали на управление системой. После кратковременного шумового воздей-

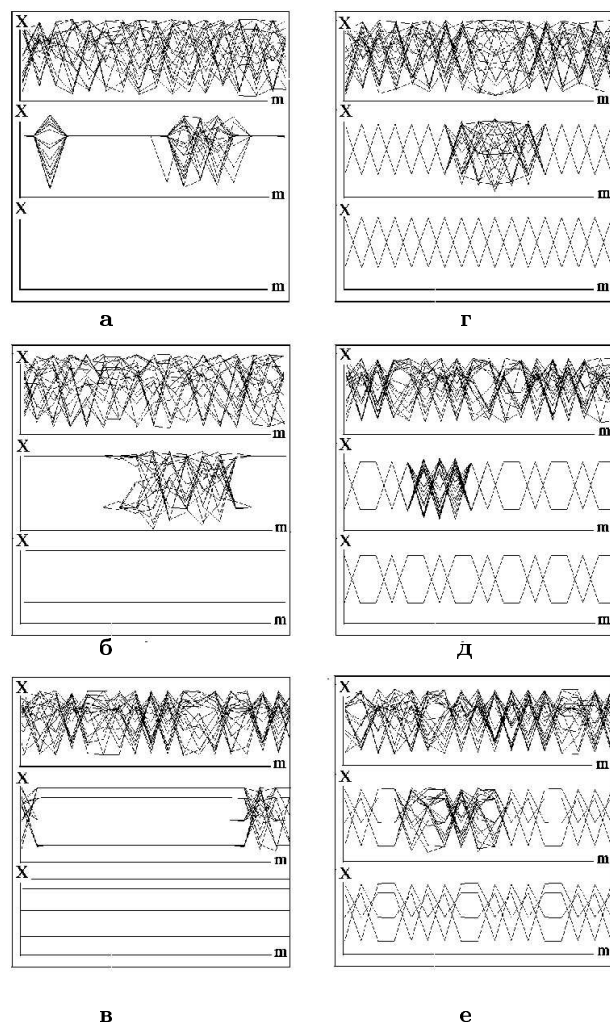


Рис. 2.71. Управляемые переходы из режима пространственно-временного хаоса к (а–в) пространственно-однородным и (г–е) пространственно-периодическим режимам

ствия на эти элементы подобные дислокации исчезают и вся цепочка переходит в режим пространственно-однородных движений.

Более сложными являются управляемые переходы к пространственно-периодическим структурам с $\lambda = 2$ и $T = 2$, с $\lambda = 3$ и $T = 2$, с $\lambda = 5$ и $T = 4$. Для того чтобы определить вид управляющих воздействий, поступим следующим образом. Разделим все элементы цепочки на λ групп. Элементы каждой такой группы располага-

ются на расстоянии $p\lambda$ ($p = 1, 2, \dots$) друг от друга и имеют равные значения динамической переменной $x_n(i) = x_n(i + p\lambda)$. Записывая уравнение (2.132) для каждой группы элементов, получим систему:

$$\begin{aligned} x_{n+1}(\lambda m + 1) &= \alpha - x_n^2(\lambda m + 1) + \gamma[2X_n^2(\lambda m + 1) - x_n^2(\lambda m + 2) - \\ &\quad - x_n^2(\lambda m)], \\ x_{n+1}(\lambda m + 2) &= \alpha - x_n^2(\lambda m + 2) + \gamma[2X_n^2(\lambda m + 2) - x_n^2(\lambda m + 3) - \\ &\quad - x_n^2(\lambda m + 1)], \\ x_{n+1}(\lambda m + \lambda) &= \alpha - x_n^2(\lambda m + \lambda) + \gamma[2x_n^2(\lambda m + \lambda) - x_n^2(\lambda m + \lambda + 1) - \\ &\quad - x_n^2(\lambda m + \lambda - 1)], \end{aligned} \quad (2.140)$$

($m = 0, 1, \dots, (N/\lambda) - 1$). Затем, используя систему (2.140) и применяя тот же подход, что и в случае пространственно-однородных режимов, к каждой такой группе элементов, получим выражения для возмущений параметра, с помощью которых возможен управляемый переход к перечисленным пространственно-периодическим структурам.

Например, для управляемого перехода к состоянию с $\lambda = 2$ и $T = 2$ можно использовать следующую форму управляющих возмущений:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_n(i) &= 2p_1(i)(1 - 2\gamma)[x_n(i) - p_1(i)] + \\ &\quad + \gamma[(x_n^2(i + 1) - p_2^2(i)) + (x_n^2(i - 1) - p_2^2(i))], \\ \tilde{\alpha}_{n+1}(i) &= 2p_{11}(i)(1 - 2\gamma)[x_{n+1}(i) - p_{11}(i)] + \\ &\quad + \gamma[(x_{n+1}^2(i + 1) - p_{21}^2(i)) + (x_{n+1}^2(i - 1) - p_{21}^2(i))], \\ p_1(i) &= \begin{cases} \bar{x}_1, \\ \bar{x}_2, \end{cases} & p_2(i) = \begin{cases} \bar{x}_2, & i = 2m + 1, \\ \bar{x}_1, & i = 2m + 2, \end{cases} \\ p_{11}(i) &= \begin{cases} \bar{x}_{11}, \\ \bar{x}_{21}, \end{cases} & p_{21}(i) = \begin{cases} \bar{x}_{21}, & i = 2m + 1, \\ \bar{x}_{11}, & i = 2m + 2, \end{cases} \end{aligned}$$

где $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_{11}, \bar{x}_{21}$ – значения неподвижных точек, $m = 0, 1, \dots, N/2 - 1$.

Формы возмущений параметра для перевода системы к пространственно-периодическим структурам с $\lambda = 3$ и $T = 2$, с $\lambda = 5$ и $T = 4$ могут быть получены аналогичным образом. На рис. 2.71г–е продемонстрированы результаты численного моделирования управляемых переходов от пространственно-временного хаоса к пространственно-периодическим структурам с $\lambda = 2, T = 2$ (рис. 2.71г),

с $\lambda = 3, T = 2$ (рис. 2.71д) и с $\lambda = 5, T = 4$ (рис. 2.71е). В принципе процедура управления такая же, как в случае стабилизации пространственно-однородных состояний. Здесь усложняется только форма возмущений параметра: чем сложнее вид выбранной структуры, тем сложнее характер возмущений. После попадания значения динамической переменной в окрестность неподвижной точки возмущение зависит и от пространственного индекса i , и от номера итерации n .

В рассмотренных ситуациях эффект управления достигается и в том случае, когда используется только часть условий для возмущения параметра. Однако в этом случае значительно увеличивается время установления соответствующего пространственно-временного режима.

Предложенный подход к управлению пространственно-временным хаосом может быть применен к цепочкам с другими типами связи. Например, нетрудно получить выражения для возмущений параметра α , с помощью которых можно обеспечить переходы к различным пространственно-однородным и пространственно-периодическим режимам в системе (2.133).

Численные исследования показали, что режим пространственно-временного хаоса в цепочке линейно связанных логистических отображений может быть преобразован к тем же пространственно-однородным и пространственно-периодическим состояниям, которые рассматривались в системе (2.132).

Эффективность управления пространственно-временным хаосом в цепочках связанных отображений (2.132) и (2.133) зависит от величины параметра нелинейности α и коэффициента связи γ . Например, управляемый переход системы (2.132) к пространственно-однородному режиму с временным периодом 1 в интервалах значений параметров $1.6 < \alpha < 1.9$ и $0 < \gamma < 0.4$ за 15000 итераций при $N = 20$ осуществлялся только в области значений параметров, выделенной штриховкой на рис. 2.72. При $\gamma > 0.04$ за указанное количество итераций перевести систему из хаотического к пространственно-однородному режиму не удастся. В то же время вне указанной области легко осуществляется переход системы к периодическим пространственно-временным структурам.

Очевидно, что возможность перехода системы из режима пространственно-временного хаоса к желаемой пространственно-временной структуре зависит от вероятности попадания элементов цепоч-

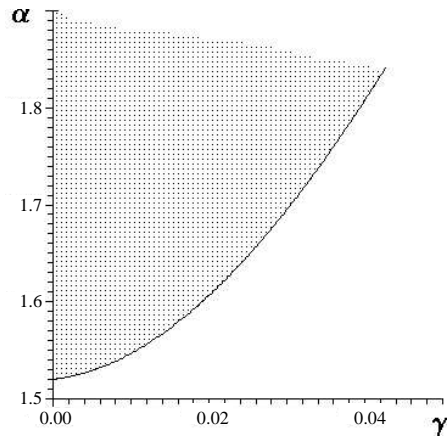


Рис. 2.72. Область на плоскости параметров $(\alpha-\gamma)$, где наблюдается управляемый переход к пространственно-однородному режиму с временным периодом 1

ки в ε -окрестность этой структуры. Из рис. 2.73 видно, что наибольшие значения плотности вероятности сосредоточены в области значений параметров, где наблюдается управляемый переход к пространственно-однородному режиму с $T = 1$ (см. рис. 2.72).

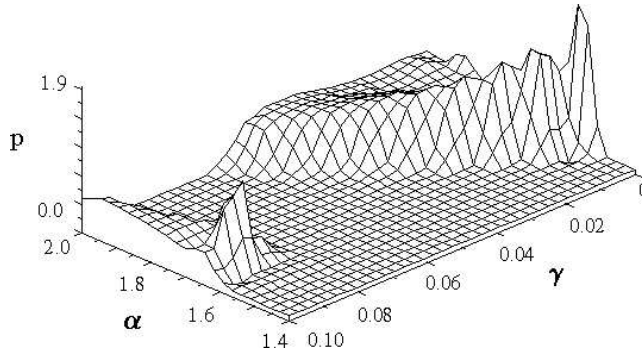


Рис. 2.73. Зависимость плотности вероятности нахождения элемента цепочки (2.132) в неподвижной точке \bar{x}_1 от значений параметров α и γ

Предложенный подход к управлению пространственно-временным хаосом может быть применен и к решеткам более высокой размерности.

Рассмотрим двумерную решетку связанных логистических отображений

$$x_{n+1}(i, j) = \alpha - x_n^2(i, j) + \gamma[4x_n^2(i, j) - x_n^2(i-1, j) - x_n^2(i+1, j) - x_n^2(i, j-1) - x_n^2(i, j+1)], \quad (2.141)$$

с периодическими граничными условиями $x_n(1, j) = x_n(N+1, j)$, $x_n(i, 1) = x_n(i, N+1)$, где $i, j = 1, 2, \dots, N$ и $N \times N$ – число элементов решетки.

При изменении параметров α и γ в решетке наблюдается сложная пространственно-временная динамика. Не останавливаясь на деталях, отметим, что здесь также существуют области значений параметров, где наблюдается развитый пространственно-временной хаос, которому предшествуют сложные бифуркационные переходы между различными пространственно-временными режимами [307, 308].

Для управляемого перехода в решетке от режима пространственно-временного хаоса к регулярным состояниям, можно определить форму возмущений параметра таким же образом, как и в случае цепочек. В качестве примера запишем виды возмущений, позволяющие перевести систему к пространственно-однородным режимам с временным периодом $T = s$ и так называемой “шахматной” структуре. В этом режиме соседние элементы решетки колеблются в противофазе и имеют временной период $T = 2$. Аналогом этого режима в цепочках является зигзаговая структура – пространственно-периодический режим с $\lambda = 2$ и $T = 2$.

Из анализа уравнений эволюции возмущений динамической переменной в окрестности перечисленных сосояний следует, что, добавляя к параметру нелинейности воздействие

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{n+k-1}(i, j) = & 2\bar{x}_k(1 - 4\gamma)(x_{n+k-1}(i, j) - \bar{x}_k) + \gamma((x_{n+k-1}^2(i-1, j) - \\ & - \bar{x}_k^2) + (x_{n+k-1}^2(i+1, j) - \bar{x}_k^2) + (x_{n+k-1}^2(i, j-1) - \bar{x}_k^2) + \\ & + (x_{n+k-1}^2(i, j+1) - \bar{x}_k^2)), \end{aligned} \quad (2.142)$$

(где $k = 1, 2, \dots, s$, \bar{x}_k – значения неподвижных точек орбиты периода $T = s$), в решетке (2.141) можно осуществить управляемый переход к неустойчивым пространственно-однородным режимам с временным периодом $T = s$.

Шахматную структуру можно стабилизировать возмущениями вида

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_n(i, j) = & 2p_1(i, j)(1 - 4\gamma)[x_n(i, j) - p_1(i, j)] + \gamma[[x_n^2(i + 1, j) - \\ & - p_2^2(i, j)] + [x_n^2(i - 1, j) - p_2^2(i, j)] + [x_n^2(i, j - 1) - p_2^2(i, j)] + \\ & + [x_n^2(i, j + 1) - p_2^2(i, j)]],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_{n+1}(i, j) = & 2p_{11}(i, j)(1 - 4\gamma)[x_{n+1}(i, j) - p_{11}(i, j)] + \\ & + \gamma[[x_{n+1}^2(i + 1, j) - p_{21}^2(i, j)] + [x_{n+1}^2(i - 1, j) - p_{21}^2(i, j)] + \\ & + [x_{n+1}^2(i, j + 1) - p_{21}^2(i, j)] + [x_{n+1}^2(i, j - 1) - p_{21}^2(i, j)] + \\ & + [x_{n+1}^2(i, j + 1) - p_{21}^2(i, j)]],\end{aligned}$$

$$p_1(i, j) = \begin{cases} \bar{x}_1, & p_2(i, j) = \begin{cases} \bar{x}_2, & (i + j) - \text{четное,} \\ \bar{x}_1, & (i + j) - \text{нечетное,} \end{cases} \\ \bar{x}_2, & \end{cases}$$

$$p_{11}(i, j) = \begin{cases} \bar{x}_{11}, & p_{21}(i, j) = \begin{cases} \bar{x}_{21}, & (i + j) - \text{четное,} \\ \bar{x}_{11}, & (i + j) - \text{нечетное} \end{cases} \\ \bar{x}_{21}, & \end{cases}$$

где $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_{11}, \bar{x}_{12}$ – значения неподвижных точек.

На рис. 2.74 и 2.75 представлены результаты численных экспериментов по управлению пространственно-временным хаосом в двумерной решетке связанных логистических отображений. Решетка состояла из 20×20 элементов. Были выбраны значения параметров $\alpha = 1.7$ и $\gamma = 0.01$, при которых наблюдается режим пространственно-временного хаоса (рис. 2.74а и 2.75а). Процедура управления в решетке такая же, как в цепочке. Отслеживая значения переменной каждого элемента решетки, ожидаем момент попадания значения динамической переменной какого-либо элемента в заданную окрестность и, если выполняются условия, накладываемые на координаты ближайших соседних элементов, вводим соответствующие возмущения параметра. На рисунках последовательно проиллюстрированы управляемые переходы от режима пространственно-временного хаоса к пространственно-однородному режиму (рис. 2.74г) и к шахматной структуре (рис. 2.75г). Процесс перехода выглядит так же, как и в цепочках. Вначале появляются небольшие случайным образом распределенные области заданного режима, затем они постепенно расширяются и в результате охватывают всю решетку.

2.6.7 Заключение

В этом разделе описаны некоторые задачи управления хаосом в связанных динамических системах.

Рассмотрена управляемая противофазная синхронизация хаоса в связанных кубических отображениях. Определены области устойчивости регулярных синхронных режимов и выведено соотношение между нормальным и тангенциальным ляпуновскими показателями. Показано, что диффузионно связанные дискретные отображения не могут демонстрировать режимы противофазной самосинхронизации хаоса. Используя в качестве примера систему связанных кубических отображений, описан метод управления противофазной синхронизацией хаоса в таких системах. Добавление слагаемого обратной связи к системе позволяет стабилизиро-

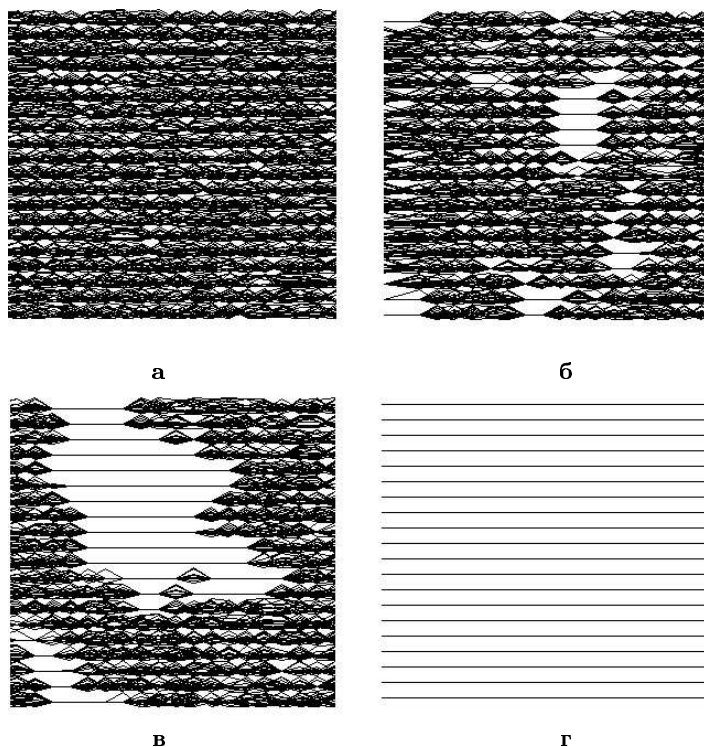


Рис. 2.74. Управляемый переход из режима пространственно-временного хаоса (а) к пространственно-однородному режиму с $T = 1$ (г) ((б) и (в) – промежуточные этапы)

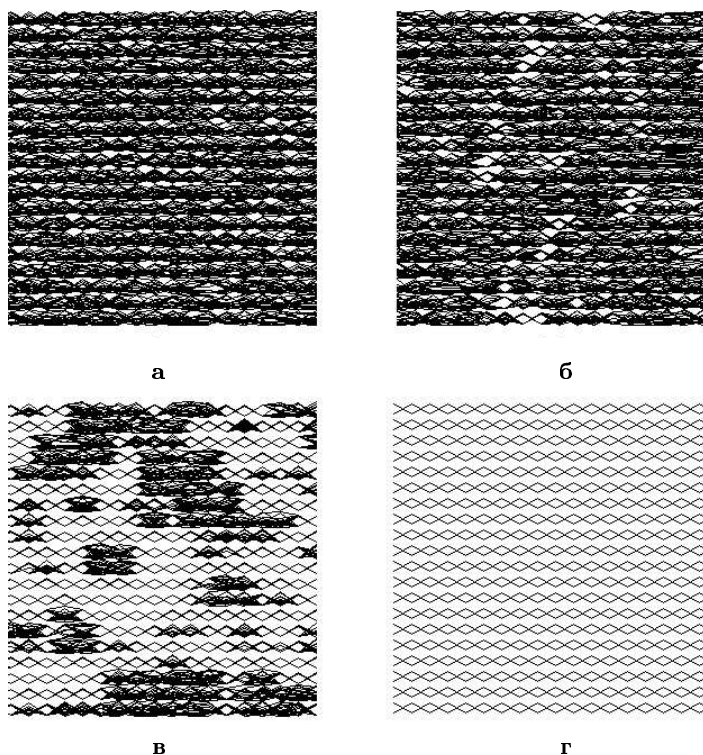


Рис. 2.75. Управляемый переход к пространственно-периодической структуре

вать противофазные хаотические колебания в ограниченной области параметра управления. Вне этой области режим синхронизации разрушается. Когда $r > -1$, процесс потери противофазной синхронизации сопровождается пузырением хаотического аттрактора и завершается бифуркацией прорыва. Когда $r < -1$, потеря синхронизации ведет к изрешечиванию бассейна притяжения аттрактора.

Для двух симметрично связанных автоколебательных систем показано, что с помощью малых управляющих воздействий на один из генераторов хаотическую фазовую траекторию можно стабилизировать в различных симметричных подпространствах полного фазового пространства взаимодействующих систем, осуществляя тем самым 1) управляемые переходы из режима несинхронного хаоса к режимам периодических колебаний и 2) режим синхронизации

ции хаоса в виде как синфазных, так и противофазных хаотических колебаний генераторов.

Представлены результаты, которые свидетельствуют, что синхронизация хаотических систем может быть обеспечена с помощью параметрического периодического воздействия на элементы связи. Для цепочки идентичных хаотических осцилляторов установлено, что при определенных значениях амплитуды и частоты параметрическое воздействие может стабилизировать пространственно-однородные движения, однако только в цепочках конечной длины.

Описан метод управления пространственно-временным хаосом в решетках связанных отображений. Исследованы переходы из режима пространственно-временного хаоса к заданным регулярным пространственно-временным структурам.

2.7 Реконструкция динамических систем

2.7.1 Введение

Один из способов изучения различных процессов и явлений реальной жизни состоит в построении и исследовании их математических моделей. Наличие модели исследуемой системы значительно расширяет возможности ее изучения, позволяя решать задачи предсказания ее поведения во времени и эволюции режимов функционирования при изменении управляющих параметров. Решение задачи моделирования теоретически не содержит проблем, если реальная динамическая система известна. Например, система представляет собой некую радиотехническую цепь. Обычно составляется принципиальная схема цепи, и на основе физических законов формулируются уравнения, которые в определенных приближениях описывают ее динамику и представляют собой модельную динамическую систему (ДС).

Однако при изучении процессов и явлений в окружающем нас мире исследователи постоянно оказываются в ситуации, когда нет возможности получить полную информацию о внутреннем устройстве и принципе функционирования изучаемого объекта в силу объективных причин. Более того, возникают проблемы адекватного определения переменных состояния системы, представляющих собой набор величин, меняющихся во времени. Эволюции состояния во времени в общем случае могут соответствовать случайные,

детерминированные процессы или их суперпозиция. Поэтому при формулировке понятия ДС необходимо это учитывать.

Можно выделить два подхода к определению динамических систем. Первое определение формулируется на языке математики и в соответствии с ним ДС – это эволюционный оператор для переменных состояния. В классической теории динамических систем ДС определялась конкретно как система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Для нее однозначно определено понятие состояния в виде совокупности независимых переменных в данный момент времени, а сама система уравнений задает оператор эволюции состояния во времени. Количество переменных состояния (или порядок системы уравнений) определяют размерность динамической системы.

Изучение реальных эволюционных процессов в естествознании требует расширения и обобщения классического понятия ДС. Более общее представление о ДС должно включать воздействие флуктуаций и допускать возможность использования в качестве эволюционных уравнения статистической теории. С физической точки зрения можно говорить о ДС даже в том случае, когда мы не способны записать уравнения системы, но экспериментально наблюдаем процесс изменения состояния системы во времени.

Под динамической системой с точки зрения экспериментатора мы понимаем *реально существующую систему*, для которой возможно ввести понятие состояния в каждый момент времени и предположить, что существует непрерывный или дискретный оператор, *приблизительно* описывающий его эволюцию (во времени и/или в пространстве). При этом под шумом можно понимать внутренние или внешние флуктуации или воздействие большого количества факторов, оказывающих слабое влияние на поведение системы и по этой причине не учтенных при задании состояния. Тогда минимальное количество независимых координат, достаточное для описания состояния системы в заданном приближении, можно назвать ее размерностью. В дальнейшем будем называть такие системы “реальными” динамическими системами (РДС).

На практике чаще всего нет возможности измерить зависимость от времени всех координат состояния системы. Типична ситуация, когда доступной для измерения является только одна из характеризующих процесс величин, одна из координат состояния $a(t)$. Зависимость величины, описывающей состояние системы, от неко-

торой независимой переменной, которая чаще всего является временем или пространственной координатой, называется реализацией (наблюдаемой) системы. Ситуация, при которой единственный способ получения представления об устройстве интересующей нас системы состоит в изучении ее реализаций, а любая другая информация является недоступной, привела к возникновению понятия “черного ящика”. Этим термином стали называть любые системы, единственной информацией о которых является сигнал, подаваемый на вход, и сигнал, измеряемый на выходе, причем существование первого сигнала не является обязательным. Зависящая от времени реализация (наблюдаемая), дискретизированная с некоторым шагом Δt , называется одномерным временным рядом $a(i\Delta t) = a_i$, $i = 1, \dots, N$. Реконструкция ДС собственно и состоит в восстановлении модельной системы по экспериментальному временному ряду a_i .

В настоящее время проблема реконструкции ДС охватывает достаточно широкий круг научных задач, решение которых направлено на получение частичной или возможно максимальной информации о свойствах “черного ящика” по одномерному временному ряду a_i , регистрируемому в эксперименте. К этой проблеме относятся задачи реконструкции (восстановления) аттракторов, топологически эквивалентных аттрактору исходной системы, определения ряда количественных характеристик режима функционирования системы (размерность аттрактора, показатели Ляпунова, вероятностная мера и др.) и, наконец, задача глобальной реконструкции изучаемой ДС. Глобальная реконструкция подразумевает восстановление модельных уравнений анализируемой системы, которые с заданной точностью способны воспроизводить экспериментально полученный временной ряд. В настоящей главе мы рассмотрим некоторые из перечисленных выше задач, приведем соответствующие алгоритмы реконструкции и на ряде примеров проиллюстрируем их применение.

2.7.2 Реконструкция аттракторов по временным рядам

Анализ непрерывных сигналов. Предположим, что зависимость $a(t)$ представляет собой одномерную проекцию фазовой траектории некоторой ДС, которая определена как система обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Предположим также, что фазовая траектория принадлежит аттрактору A системы,

размерность которого равна d . До 1980 г. считалось, что для описания нелинейных ДС в терминах фазового пространства необходимо знание временных зависимостей всех координат состояния. В 1980 г. была опубликована работа [312], в которой отмечалось, что фазовый портрет динамической системы может быть восстановлен по скалярному временному ряду a_i , если в качестве недостающих координат вектора состояния используется тот же самый ряд, взятый с некоторым запаздыванием. В 1981 г. появилась работа [313], где была доказана теорема, утверждавшая, что по одномерной реализации $a(t)$ ДС, обладающей аттрактором A , принадлежащим гладкому M -мерному многообразию, методом задержки можно получить n -мерную реконструкцию A_R исходного аттрактора как множество векторов $\mathbf{x}(t)$ в \mathbf{R}^n :

$$\mathbf{x}(t) = A_n[a(t)] = (a(t), a(t+\tau), \dots, a(t+(n-1)\tau)) = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (2.143)$$

При этом n удовлетворяет условию теоремы Мане [314]:

$$n \geq 2M + 1, \quad (2.144)$$

где M – ближайшее целое число к величине размерности аттрактора d . Согласно теореме Такенса, отображение $A_n : A \rightarrow A_R$ является гладким и обратимым на A_R почти при любой задержке τ (если число отсчетов $N \rightarrow \infty$). Число n называется размерностью вложения.

Данная теорема доказана при условиях, что изучаемая ДС автономна, не зашумлена, а временной ряд измерен абсолютно точно и на бесконечном интервале времени, т.е. формально не применима для РДС (т.е. для систем с шумом) и реальных условий эксперимента (любой временной ряд может быть измерен на конечном интервале времени и с конечной точностью). Несмотря на это, она с самого появления используется экспериментаторами для восстановления фазовых портретов и оценки на их основе различных характеристик аттракторов ДС. Только в 1997 г. Старком и др. [315] доказана теорема, являющаяся распространением теоремы Такенса на системы, находящиеся под внешним воздействием, и системы с шумом.

Появление теоремы Такенса открыло широкие возможности для решения на ее основе задач предсказания поведения системы [316–318], расчета метрических [319, 320] и динамических [321, 322]

характеристик аттрактора. В 1987 г. независимо были опубликованы работы [323] и [324], где предложен метод восстановления уравнений ДС по ее одномерной реализации (метод глобальной реконструкции), который будет подробно обсуждаться ниже.

Размерность вложения n можно определить по формуле (2.144), если известна размерность аттрактора d . На практике значение n , определяемое формулой (2.144), часто оказывается завышенным [325], и иногда можно ограничиться пространством меньшей размерности. Существуют также методы непосредственной оценки размерности вложения, не требующие знания размерности аттрактора и основанные на теореме Карунена - Лозва [326]. Для оценки размерности аттрактора d часто используют так называемую корреляционную размерность, которая определяется как

$$D_c = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\ln C(\varepsilon, N)}{\ln \varepsilon}. \quad (2.145)$$

Здесь $C(\varepsilon, N) = N^{-2} \sum_{i \neq j} v(\varepsilon - |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|)$ – корреляционный интеграл; ε – размер ячейки разбиения фазового пространства; N – число точек, используемых для оценки размерности; v – функция Хевисайда; $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}(i\Delta t)$; \mathbf{x} – реконструированный вектор в фазовом пространстве размерности n , где n варьируется от наименьшего возможного значения (например, от 2) до наибольшего, выбранного в качестве верхнего предела. Корреляционный интеграл есть фактически нормированное на N^2 количество пар точек, расстояние между которыми меньше ε . Для определения D_c строят зависимость $\ln C(\varepsilon, N)$ от $\ln \varepsilon$ и ищут на ней линейный участок, наклон которого и определяет искомое значение размерности. Кроме того, анализируют зависимость D_c от размерности вложения. Если размерность исходного аттрактора является конечной, то при увеличении n значение D_c испытывает насыщение.

Известно, что при вычислении корреляционной размерности существуют ограничения на величину ε . Если ε приближается к размерам аттрактора ε_{\max} , зависимость $\ln C(\varepsilon, N)$ от $\ln \varepsilon$ испытывает насыщение. Это объясняется тем, что когда ε больше размеров аттрактора, расстояния между всеми точками на аттракторе заведомо меньше, чем ε , и начиная с $\varepsilon = \varepsilon_{\max}$: $C(\varepsilon, N) = 1$, следовательно, $\ln C(\varepsilon, N) = 0$. С другой стороны, при заданном конечном N и уменьшении значения ε существует некоторое ε_{\min} ; такое, что для $\varepsilon < \varepsilon_{\min}$ структура аттрактора остается неразрешенной. Как следствие, зависимость $\ln C(\varepsilon, N)$ от $\ln \varepsilon$ снова становится нелинейной.

Несмотря на то, что теорема Такенса справедлива при любом τ , выбор задержки может оказывать существенное влияние на значение D_c . Чтобы получить приближенную к истине информацию о метрических характеристиках аттрактора, было предложено множество способов выбора оптимального τ , наиболее полный обзор которых приведен в работе [327]. Экспериментально было установлено, что если τ слишком мало, то i -я и $(i + 1)$ -я координаты фазовой точки практически неразличимы. Реконструированный аттрактор в этом случае располагается вблизи главной диагонали пространства вложения (“линии идентичности” [327]), что затрудняет его диагностику. При выборе слишком большого τ координаты оказываются некоррелированными, и реконструированный аттрактор не отражает истинной динамики [328]. Значение τ можно выбирать на основе расчета функции взаимной информации [329], первого минимума логарифма обобщенного корреляционного интеграла [330] и т.п. Иногда значение τ определяется менее строгим образом, исходя из геометрии реконструированного множества (чтобы аттрактор не был слишком вытянут ни в одном из направлений).

Другой проблемой при расчете размерности является выбор величин N и Δt . Целесообразнее их подбирать не по отдельности, а учитывать размер временного окна $N\Delta t$. При этом следует принимать во внимание существование фундаментальных ограничений на величину D_c [331], определяемых формулой

$$D_{\max} = \frac{2 \ln N}{\ln(1/r)}, \quad r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{\max}}. \quad (2.146)$$

Данная формула означает, что алгоритм расчета размерности не позволит получить значение больше, чем D_{\max} при заданном числе точек N . Иными словами, если $r = 0.1$ и $N = 1000$, то $D_{\max} \leq 6$; если $N = 100000$, то $D_{\max} \leq 10$. В результате возникают определенные сложности в случае, когда требуется отличить детерминированный процесс в системе с достаточно большим числом степеней свободы от истинно случайного процесса.

Согласно Такенсу, задать вектор состояния можно методом задержки (2.143) или последовательного дифференцирования:

$$\mathbf{x}(t) = \left(a(t), \frac{da(t)}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}a(t)}{dt^{n-1}} \right) = (x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (2.147)$$

Поскольку известны значения a_i только в дискретные моменты времени $i\Delta t$, координаты x_j вектора \mathbf{x} определяются путем численного дифференцирования исходного временного ряда по приближенным математическим формулам. Очевидно, что точность вычисления производных будет определяться малостью величины шага дискретизации Δt . Недостатком метода является повышенная чувствительность к шуму, что ограничивает его применимость для пространств вложения большой размерности (по крайней мере, без проведения предварительной фильтрации).

На настоящий момент разработан ряд способов задания вектора состояния, хороший обзор которых приведен в [332]. Из них отметим метод интегральной фильтрации [333], предполагающий восстановление фазовой координаты по формуле

$$x(t) = \int_0^t a(t_1) \exp\left(\frac{t-t_1}{\beta}\right) dt_1. \quad (2.148)$$

Этот метод обеспечивает сглаживание исходной реализации и фильтрацию шума. Аналогичным эффектом обладает также метод скользящего среднего [332]:

$$x_i(k) = \frac{1}{2k+1} \sum_{j=-k}^k a_{i+j}, \quad (2.149)$$

где k – постоянный параметр.

Анализ последовательностей межпиковых интервалов. Существуют два способа представления экспериментальных данных. Первый из них (традиционный) состоит в том, что накладывается условие на значение независимого параметра (времени). Например, фиксируется шаг выборки Δt и записываются значения наблюдаемой в моменты времени $i\Delta t$. Этот метод был рассмотрен выше. Второй подход состоит в введении некоторого условия на значение самой наблюдаемой $a(t)$ и записи интервалов времени между моментами выполнения данного условия. Последний способ представления экспериментальных данных традиционно используется при анализе систем, генерирующих “пики” (spikes). Такая динамика довольно часто встречается в биологии (“зажигания” нейронов [334], R-пики электрокардиограммы [335], “берстинг”-колебания мембранного потенциала [336]) и анализируется путем обработки интервалов времени между моментами генерации “пиков”, то есть последовательностей “межпиковых интервалов” (interspike intervals, или

ISI). При дальнейшем изложении мы будем использовать английские термины, поскольку соответствующая терминология в отечественной литературе еще не сформировалась.

В нейродинамике предложено большое количество моделей, описывающих генерацию “пиков”. В рамках модели *integrate-and-fire* (IF, в дословном переводе – “интегрируй и стреляй”) [337]– [341], сигнал $a(t)$, представляющий собой функцию переменных некоторой маломерной ДС, интегрируется с момента времени T_0 . Времена генерации “пиков” T_i определяются следующим условием:

$$\int_{T_i}^{T_{i+1}} a(t)dt = \theta, \quad I_i = T_{i+1} - T_i, \quad (2.150)$$

где θ – пороговый уровень, I_i – промежутки времени между “пиками” (IF ISI). При достижении заданного порога θ происходит генерация “пика” (рис. 2.76а), после чего значение интеграла обнуляется.

Модель *threshold-crossing* (ТС, дословно – “пересечение порога”) [339] предполагает наличие фиксированного уровня θ , задающего уравнение секущей плоскости $a = \theta$ [здесь $a(t)$ – переменная некоторой ДС], и измерение интервалов времени между последовательными пересечениями данного уровня сигналом $a(t)$ в одном направлении, например, снизу вверх (ТС ISI) (рис. 2.76б). С точки зрения теории ДС, ТС ISI представляют собой времена возврата фазовой траектории в секущую плоскость.

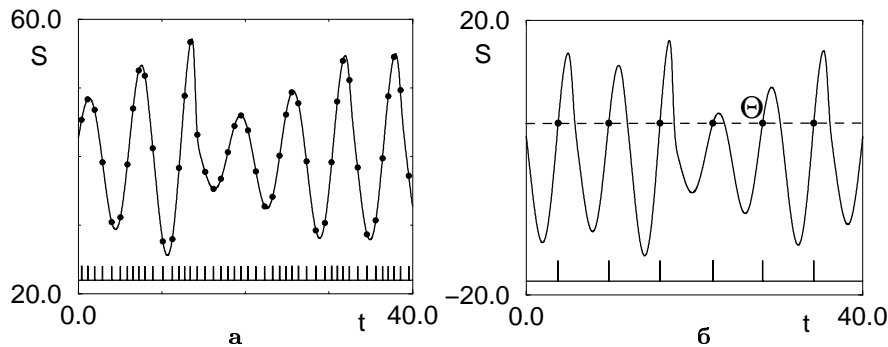


Рис. 2.76. Модели генерации “пиков”: (а) *integrate-and-fire*; (б) *threshold-crossing*. Черные точки обозначают моменты времени, в которые происходит достижение порога. Последовательность “пиков”, представляющая собой выходной сигнал, продемонстрирована внизу каждого рисунка.

Задача анализа ISI является актуальной в тех случаях, когда сигнал $a(t)$ (процесс на входе порогового устройства) не может быть записан, и требуется охарактеризовать его свойства, располагая записью выходного процесса. Классическим примером может служить кодирование информации сенсорным нейроном. Преобразование входного процесса $a(t)$ в последовательность “пиков” неоднократно исследовалось в рамках теории информации.

В очень упрощенном рассмотрении сенсорный нейрон представляет собой пороговое устройство, имеющее вход и выход: на вход поступает сигнал сложной структуры, а на выходе измеряется последовательность импульсов. Поскольку все импульсы идентичны, то информация о свойствах входного процесса кодируется только во временных интервалах между ними. Соответственно, возникает вопрос: можно ли охарактеризовать различные свойства входного процесса на основе анализа “межпиковых” интервалов? Данный вопрос в последнее время стал привлекать внимание исследователей с точки зрения возможности реконструкции ДС [337]– [343]. Для применения техники реконструкции к анализу точечных процессов (процессов, в которых носителями информации служат времена каких-то событий) необходимо ответить еще на один вопрос [338]: если точечный процесс отражает динамику некоторой детерминированной системы, можно ли из его анализа идентифицировать состояния этой системы? Иными словами, можно ли идентифицировать состояние детерминированной системы на входе порогового устройства по выходной последовательности ISI?

Ответ на этот вопрос впервые прозвучал в работе Зауэра [338]. Согласно этой работе, ISI можно рассматривать как новую переменную состояния, действительно позволяющую охарактеризовать маломерную динамику на входе порогового устройства. Это означает, что хаотический аттрактор детерминированной системы можно реконструировать, располагая лишь последовательностью ISI. Зауэром была доказана теорема вложения для IF ISI [337]. Согласно статье [342], данную теорему можно обобщить на случай времен возврата. Из работы [342] также следует, что отображение времен возврата (множество векторов, реконструированных из ТС ISI методом 2.143) топологически эквивалентно сечению Пуанкаре исходной системы. Детальное изучение отражения различных свойств хаотического процесса в выходной последовательности IF ISI было проведено в [341]. В статье [343] продемонстрирована возможность

вычисления старшего показателя Ляпунова хаотического режима динамики по последовательности времен возврата.

Чтобы объяснить наличие взаимосвязи между временами возврата и фазовыми переменными ДС, обратимся к понятию мгновенной фазы. В работе [173] предложены три возможных определения мгновенной фазы для хаотических колебаний. Первые два из них связаны с существованием проекции аттрактора системы на плоскость (x, y) , напоминающей “размазанный” предельный цикл. Если такая проекция существует, можно ввести секущую Пуанкаре, проходящую через состояние равновесия системы.

В соответствии с *первым определением* мгновенная фаза вводится следующим образом:

$$\varphi^m(t) = 2\pi \frac{t - T_i}{T_{i+1} - T_i} + 2\pi i, \quad T_i \leq t < T_{i+1}, \quad (2.151)$$

где T_i – моменты пересечения секущей поверхности в одном направлении.

Согласно *второму определению* мгновенная фаза вводится как:

$$\varphi^p = \arctan \left(\frac{y}{x} \right). \quad (2.152)$$

В общем случае значения φ^m и φ^p не совпадают.

Третье определение мгновенной фазы базируется на концепции аналитического сигнала и преобразовании Гильберта [344]. Преобразованием Гильберта действительного сигнала $a(t)$, определенного во временной области, называется определенный во временной же области действительный сигнал $a^H(t)$, такой, что сигнал $z(t) = a(t) + i a^H(t) = A(t) \exp(i \varphi^H(t))$ является аналитическим:

$$a^H(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a(\tau)}{t - \tau} d\tau, \quad (2.153)$$

$$A(t) = (aa + a^H a^H)^{1/2}, \quad \varphi^H(t) = \arctan \left(\frac{a^H(t)}{a(t)} \right). \quad (2.154)$$

В (2.153) интеграл вычисляется в смысле главного значения, т.е. предполагается, что предел $\lim_{A \rightarrow -\infty, B \rightarrow \infty} \int_A^B f(x) dx$ может не существовать, но существует $\lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A f(x) dx$. Модуль $A(t)$ сигнала $z(t)$ является огибающей исходной функции, а аргумент $\varphi^H(t)$ задает мгновенную фазу.

Известно, что преобразование Гильберта (2.153) осуществляет сдвиг каждой спектральной компоненты исходного сигнала на $-\pi/2$ [345]. Функция $a^H(t)$ представляет собой инерционное преобразование $a(t)$ и в принципе может быть использована для вложения, т.е. для реконструкции фазового портрета в пространстве переменных (a, a^H) .

В соответствии с теоремой Такенса можно восстановить аттрактор по реализации одной из фазовых переменных. В этом случае вместо проекции на плоскость (x, y) исходного аттрактора можно рассматривать проекцию на плоскость аттрактора, реконструированного по одномерной реализации $a(t)$. Если преобразование Гильберта $a^H(t)$ используется в качестве метода вложения, то два последних определения фазы совпадают.

Заметим, что рассмотрение мгновенных амплитуды и фазы (или мгновенной частоты)

$$\omega^H(t) = \frac{d\varphi^H(t)}{dt} = \frac{\dot{a}^H a - a \dot{a}^H}{a^2 + (a^H)^2} \quad (2.155)$$

в качестве новых независимых переменных вместо $a(t)$, $a^H(t)$ означает замену координат, которая является гладкой всюду, за исключением точки $(a(t) = 0, a^H(t) = 0)$. Если траектория не проходит через эту точку, такая замена ведет к топологической эквивалентности аттракторов в пространстве переменных (a, a^H) и (ω^H, A) . Следовательно, по одномерной временной зависимости как мгновенной частоты $\omega^H(t)$, так и мгновенной амплитуды $A(t)$ в соответствии с теоремой Такенса можно реконструировать аттрактор, топологически эквивалентный исходному.

Обратимся к экспериментальным данным, представляющим временные интервалы между пересечениями реализацией $a(t)$ некоторого порогового уровня θ . Предположим, что поверхность, определенная как $a(t) = \theta$, является секущей Пуанкаре. Тогда можно применить первый метод введения мгновенной фазы φ^i и частоты ω^i , т.е. приписать моменту T_i величину

$$\omega^i = \langle \omega^H(T_i) \rangle = \frac{2\pi}{I_i}, \quad (2.156)$$

где ω^i представляет собой усредненное за время I_i значение мгновенной частоты $\omega^H(t)$. Учитывая существование стандартного метода вложения (2.149), ω^i можно интерпретировать как точки но-

вой координаты, реконструированной по сигналу $\omega^H(t)$ с помощью метода (2.149) при варьировании временного окна.

Зная значения ω^i только в моменты T_i и стремясь получить качественное представление о поведении усредненной мгновенной частоты во времени, предлагается интерполировать значения $\omega^i(T_i)$ гладкой кривой. Интерполяция осуществляет качественное воспроизведение одной из координат ДС и, следовательно, позволяет приближенно реконструировать исходный аттрактор, его динамические и геометрические характеристики.

В качестве примера рассмотрим уравнения системы Ресслера:

$$\frac{dx}{dt} = -(y + z), \quad \frac{dy}{dt} = x + ay, \quad \frac{dz}{dt} = b + z(x - c), \quad (2.157)$$

в хаотическом режиме $a = 0.15$, $b = 0.2$, $c = 10.0$. Рассчитанные по координате $x(t)$ данной системы временные зависимости мгновенной частоты $\omega^H(t)$, а также ее усредненное значение

$$\langle \omega^H \rangle(t) = \frac{1}{I_i} \int_{T_i}^{T_{i+1}} \omega^H(t) dt, \quad (2.158)$$

представлены на рис. 2.77а. Рисунок 2.77б демонстрирует качественное соответствие сигналов $\omega^i(t)$ и $\langle \omega^H \rangle(t)$. Зависимость $\omega^i(T_i)$ показана для значений I_i , измеренных как интервалы времени между моментами пересечения сигналом $x(t)$ нулевого уровня; все точки соединены гладкой кривой методом сплайновой интерполяции. Реконструированные фазовые портреты в координатах $(a(t), a^H(t))$, $(A(t), \omega^H(t))$, и $(\omega^i(t), \omega^i(t + \tau))$ показаны на рис. 2.78.

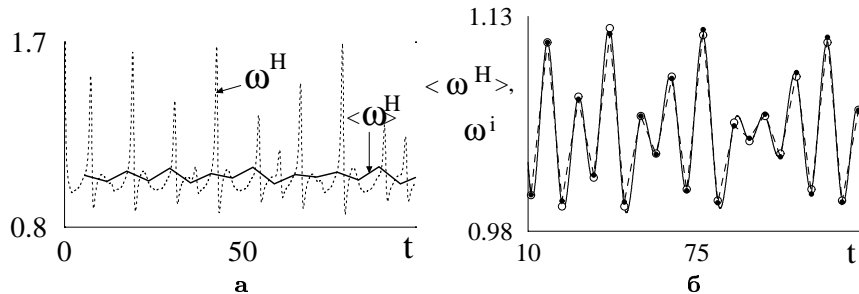


Рис. 2.77. (а) Временная зависимость мгновенной частоты ω^H , полученная с помощью преобразования Гильберта (пунктирная линия) и результат усреднения за время I_i ($\langle \omega^H \rangle$) (сплошная линия). (б) Черные кружки, соединенные пунктирной линией, – точки усредненной мгновенной частоты $\langle \omega^H \rangle$; белые кружки, соединенные сплошной линией, – результат интерполяции $\omega^i(t)$

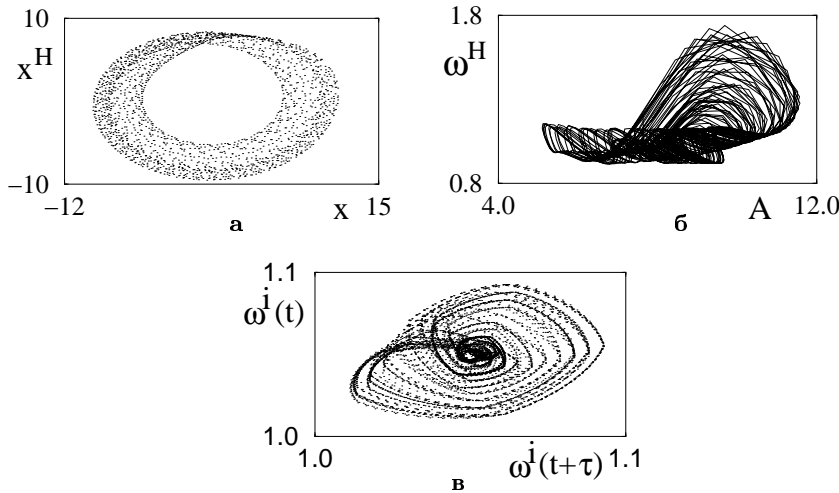


Рис. 2.78. Проекция фазовых портретов на плоскости (а) (x, x^H) , где x – первая координата системы (2.157) и x^H – преобразование Гильберта x ; (б) (A, ω^H) , где A и ω^H – мгновенные амплитуда и частота; (в) $(\omega^i(t), \omega^i(t + \tau))$, где $\omega^i(t)$ временная зависимость, полученная путем интерполяции

Для сравнения метрических характеристик аттракторов, реконструированных по одномерной реализации координаты x системы Ресслера и по сигналам $\omega^i(t)$, осуществлялся расчет фрактальной размерности методом [319]. На рис. 2.79а представлены зависимости $\log M(\log \varepsilon)$, где M – число заполненных ячеек, а ε – размер ячейки. Поскольку линейные участки этих двух графиков параллельны друг другу, размерности соответствующих аттракторов совпадают.

Помимо расчета метрических характеристик, был проведен анализ, как выбор порогового уровня θ (или выбор секущей плоскости) влияет на результаты расчета динамических характеристик по последовательности ТС ISI, в частности, старшего ляпуновского характеристического показателя (ЛХП) λ_1 . Обратимся к уравнениям системы Ресслера (2.157) и введем секущую плоскость $x = \theta$. Старший ЛХП, вычисленный по последовательности времен возврата (ТС ISI) при различных значениях порога, демонстрирует следующую зависимость от θ (см. рис. 2.79б). Значения λ_1 определялись следующим образом [343]. Вначале осуществлялся переход от последовательности временных интервалов $I_i = T_{i+1} - T_i$ к величинам $\omega(T_i) = 2\pi/I_i$, соответствующим значениям мгновенной

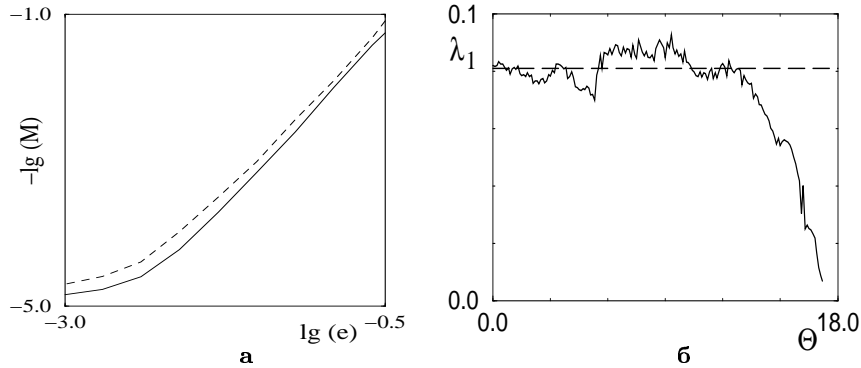


Рис. 2.79. (а) График для вычисления фрактальной размерности. *Сплошная линия* соответствует расчетам по координате x системы (2.157), *пунктирная линия* – по последовательности ISI. (б) Результаты расчета старшего показателя Ляпунова по ТС ISI в зависимости от порогового уровня

частоты, усредненной за время I_i . Здесь T_i соответствуют моментам превышения порогового уровня. Далее, точки $\omega(T_i)$ интерполировались гладкой функцией (кубическим сплайном) $\omega_{\text{int}}(t)$ для перехода к сигналу с постоянным шагом по времени. Затем проводился расчет λ_1 по сигналу $\omega_{\text{int}}(t)$ на основе алгоритма [321] с осуществлением перенормировок через фиксированные промежутки времени $\bar{T} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_i$. Динамические характеристики хаотического аттрактора могут быть определены с хорошей точностью, если $|\theta| \leq 13$ (ошибка нахождения λ_1 не превышает 12% и может быть меньше, если проводить расчеты по сигналам большей длительности. На рис. 2.79б представлены результаты расчета $\lambda_1(\theta)$, полученные при анализе последовательностей, состоящих из 2000 времен возврата. Можно сделать вывод, что последовательность ТС ISI отражает динамические характеристики хаотического аттрактора даже в том случае, когда часть фазовых траекторий не пересекает секущую плоскость. Таким образом, можно говорить о слабой чувствительности значения λ_1 к выбору секущей Пуанкаре при условии, что среднее время возврата I не превышает некоторый временной масштаб.

Данный вывод не является очевидным. В соответствии с рис. 2.80, смещение секущей плоскости приводит к значительным изменениям структуры отображения времен возврата. Если при корректном выборе секущей (когда все фазовые траектории ее пересекают) отображение времен возврата напоминает отображение Пуанкаре

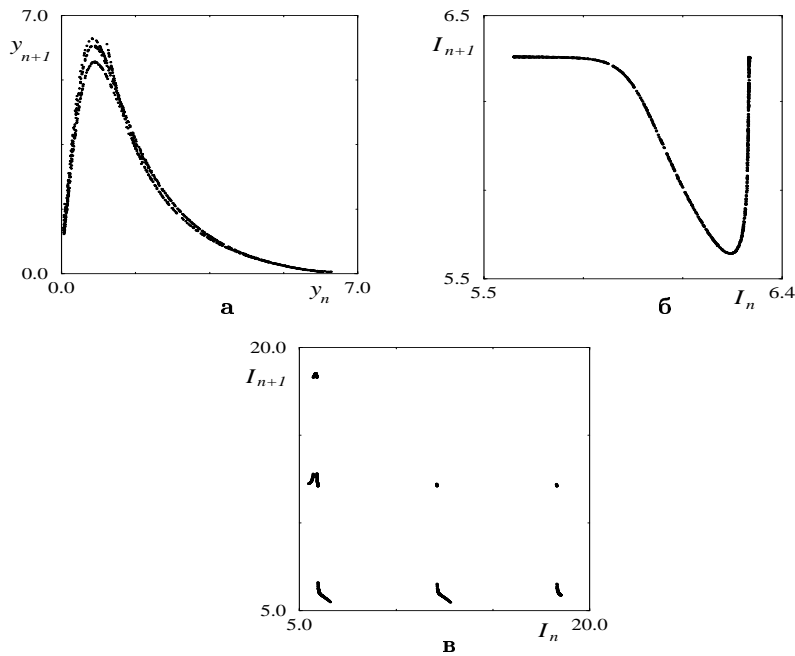


Рис. 2.80. (а) Отображение Пуанкаре системы Ресслера; (б) и (в) отображения времен возврата, соответствующие $\Theta = 0$ и 11

(рис. 2.80а,б), смещение порогового уровня существенно меняет вид отображения (рис. 2.80в).

Детальное объяснение данных результатов можно найти в работе [343]. Когда среднее время возврата I превышает некоторый характерный временной масштаб (примерно соответствующий времени предсказуемости [316]), становится невозможным вычисление старшего ЛХП.

2.7.3 Глобальная реконструкция ДС

Историческая справка и постановка задачи. Проблема определения вида динамической системы по ее одномерной реализации относится к классу задач синтеза или обратных задач. В отличие от задачи анализа, проблема синтеза неоднозначна, так как существует бесконечное множество динамических систем различного вида и различной сложности, способных воспроизвести имеющийся сигнал с заданной степенью точности. Задача исследователя, занимающегося поиском подходящего динамического описания исследуе-

мой реальной системы, состоит прежде всего в том, чтобы, опираясь на знание количественных характеристик исследуемых сигналов, задать приближенный вид одной из подходящих для этой цели ДС. К настоящему моменту разработаны лишь общие рекомендации, помогающие исследователю в ряде случаев (когда исходная система не является слишком сложной) выбрать одну из возможных моделей. Однако не существует единого подхода, способного привести к решению поставленной задачи в общем случае.

Первыми работами, в которых был предложен метод глобальной реконструкции уравнений динамической системы по ее одномерной реализации, были [323, 324]. Предложенный авторами алгоритм, который будет подробно описан ниже, состоит в следующем. По одномерной реализации процесса в некоторой системе, которая считается “черным ящиком”, восстанавливается фазовый портрет, топологически эквивалентный аттрактору исходной системы [313]. Затем априорно задается вид описывающих ее уравнений с набором неизвестных коэффициентов, которые находятся методом наименьших квадратов.

Позже появилось много работ, развивающих и совершенствующих предложенный метод. Например, в работе [318] для воссоздания динамических уравнений по экспериментальному временному ряду с широкополосным сплошным спектром использовалась дополнительная информация о динамических и статистических свойствах исходной системы, содержащаяся в реализации. А именно, при получении уравнений учитывались значения Ляпуновских показателей и плотности распределения вероятности, рассчитанные по исходному временному ряду. Однако результирующие эволюционные уравнения имели очень громоздкий вид, чрезвычайно неудобный для применения. В работе [346] для записи модельных уравнений использовались скрытые переменные. В [347] описывается метод синхронизации модели с исходными данными. В [348] описан алгоритм восстановления скалярного дифференциального уравнения для систем с задержкой. Использование описанных методов проиллюстрировано на примерах простых маломерных модельных систем, когда заранее известно, каким должен быть результат глобальной реконструкции. При этом не показаны существенные преимущества, даваемые каким-либо усовершенствованным (и, как правило, сильно усложненным алгоритмически) методом по сравнению с [323]. Описываемые алгоритмы тестируют-

ся на ряде широко известных модельных систем, имеющих малую размерность и достаточно простой вид правых частей уравнений, которые легко поддаются реконструкции и гораздо более простым способом [323]. Поэтому аргументация в пользу новых сложных алгоритмов не кажется убедительной до тех пор, пока их работоспособность не продемонстрирована на примере сложных временных рядов, генерируемых реальными “черными ящиками”. К сожалению, практически отсутствуют публикации, в которых описывается применение данных методик к сигналам, порожденным реальными системами, об операторе эволюции которых ничего неизвестно. На основании анализа имеющихся работ [349–354] можно утверждать, что наиболее эффективным при восстановлении динамических систем по реальным экспериментальным данным оказывается наиболее простой первоначально предложенный способ, подвергнутый самой незначительной модификации. Более полное описание методов реконструкции динамики систем можно найти в [355].

Описание алгоритма реконструкции. Целью данного алгоритма является построение математической модели исследуемой системы, которая предполагается динамической. Учитывая, что имеющийся временной ряд является дискретным, задать искомую ДС можно в виде n -мерного дискретного отображения:

$$\begin{aligned} x_{1,i+1} &= F_1(x_{1,i}, x_{2,i}, \dots, x_{n,i}) \\ &\dots\dots\dots \\ x_{n,i+1} &= F_n(x_{1,i}, x_{2,i}, \dots, x_{n,i}), \end{aligned} \tag{2.159}$$

где $x_{j,i}$ – координаты вектора состояния, рассмотренного в моменты времени $i\Delta t$; F_j – нелинейные функции.

Если размерность пространства вложения определена и фазовый портрет исходной системы восстановлен, основная проблема на данном этапе состоит в конкретизации вида функций F_j в правых частях искомого уравнений. Выбор вида функций F_j осуществляется априорно и достаточно произвольным образом. Ситуации, в которых вид оператора эволюции можно предугадать, используя дополнительные знания о системе, встречаются достаточно редко. Чаще всего информацию о том, какой конкретный вид функций F_j подходит для описания исходной системы, можно получить только опытным путем в результате перебора всевозможных известных

способов их представления. Обычно F_j представляются в виде суперпозиции некоторых базисных функций X_k :

$$F_j(x_{1,i}, x_{2,i}, \dots, x_{n,i}) = \sum_{k=1}^L C_{k,j} X_k(x_{1,i}, x_{2,i}, \dots, x_{n,i}). \quad (2.160)$$

Наиболее популярным является представление функций в правых частях уравнений в виде полиномов степени ν :

$$F_j(\mathbf{x}_i) = \sum_{l_1, l_2, \dots, l_n=0}^{\nu} C_{j, l_1, l_2, \dots, l_n} \prod_{k=1}^n x_{k,i}^{l_k}, \quad \sum_{k=1}^n l_k \leq \nu, \quad (2.161)$$

где $C_{j, l_1, l_2, \dots, l_n}$ – неизвестные коэффициенты, которые требуется найти. Этот способ базируется на теореме Тейлора, утверждающей, что любая функция может быть представлена в виде ряда Тейлора, являющегося полиномиальным, в окрестности некоторой точки \mathbf{x}^0 . При условии относительно небольшого конечного отклонения значений функции от заданной точки (это условие реализуется в автоколебательных системах, когда существует возвращаемость траектории в окрестность любой точки на аттракторе, а сам аттрактор занимает ограниченную область фазового пространства) можно ограничить ряд Тейлора до некоторого конечного количества слагаемых, отбросив оставшуюся часть членов ряда. Варьируя число оставляемых членов ряда, можно менять ошибку аппроксимации функции в окрестности заданной точки. Для аппроксимации применяются также полиномы Лежандра [323], либо может использоваться более сложная методика [351]. Для задания F_j мы ограничимся формулой (2.161).

Система уравнений (2.159) допускает запись для любого номера i . Для нахождения коэффициентов каждой функции F_j необходимо решить систему N линейных алгебраических уравнений

$$x_{j,i+1} = \sum_{l_1, l_2, \dots, l_n=0}^{\nu} C_{j, l_1, l_2, \dots, l_n} \prod_{k=1}^n x_{k,i}^{l_k}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.162)$$

с неизвестными C_{j, l_1, \dots, l_n} , в которой N – число точек скалярного временного ряда, используемых для аппроксимации правых частей (иногда используются не все доступные точки, а только выборочные), ν – степень полинома.

При заданных n и ν число коэффициентов K полиномов (2.161) в общем случае может быть определено по формуле $K =$

$(n + \nu)!/(n!\nu!)$. Как правило, $N \gg K$, поэтому для конкретизации эволюционного оператора система уравнений (2.162) решается методом наименьших квадратов. Получающаяся математическая модель является громоздкой, но при условии удачного выбора общего вида нелинейных функций ее решение воспроизводит сигнал с высокой степенью точности.

Аналогичным образом можно реконструировать ДС не только в виде дискретных отображений, но и в виде систем обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt} &= F_n(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (2.163)$$

Смысл функций в правых частях тот же, что и ранее. Осуществление на первом этапе алгоритма реконструкции фазовой траектории означает, что все x_i известны. Следовательно, можно численно определить производные от них. Поэтому (2.163) реально представляет собой систему алгебраических уравнений, линейных относительно неизвестных коэффициентов.

Если в качестве способа задания вектора состояния в фазовом пространстве используется метод последовательного дифференцирования, то математическую модель можно восстановить в более простом виде в силу того, что взаимосвязь между координатами однозначно задается равенством (2.147):

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_3, \quad \dots, \quad \frac{dx_n}{dt} = f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (2.164)$$

Таким образом, приведенный алгоритм позволяет поставить в соответствие скалярному временному ряду математическую модель. На рис. 2.81 и 2.82 представлены примеры восстановления динамических описаний для тестовых модельных систем: уравнений генератора Ван дер Поля,

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = a(1 - bx^2)y - x, \quad (2.165)$$

и системы Ресслера (2.157) в хаотическом режиме.

Детальное исследование самых различных тестовых моделей методом глобальной реконструкции можно найти, например, в [351].

Особенности и недостатки алгоритма реконструкции. Основной проблемой является выбор нелинейных функций в правых частях модельных уравнений. Если используется метод последовательного дифференцирования для задания координат вектора состояния, то математическая модель будет содержать только одну неизвестную функцию. Как уже отмечалось, наиболее простой способ задания нелинейности состоит в полиномиальной аппроксимации.

Возникает вопрос: а насколько это правомерно? Рассмотрим в качестве примера известную модель Ресслера. Как показано в [351], только для случая, когда считается заданной лишь вторая координата этой модели, система (2.157) путем замены переменных может быть сведена к виду (2.164), где f – полином, задаваемый формулой (2.161). Если в качестве исходной выбирается любая другая координата, то функция f будет представлять собой отношение полиномов P/Q .

Некоторые авторы [356] предлагают осуществлять поиск математической модели в форме:

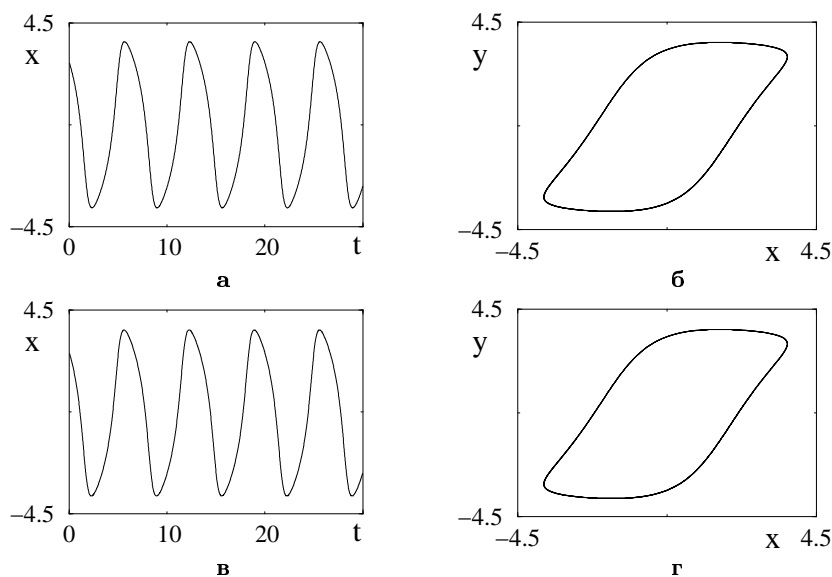


Рис. 2.81. Исходная реализация (а) и фазовый портрет (б) генератора Ван дер Поля; результат реконструкции (в,г) ($n = 2$, реконструкция по 1-й координате, $\Delta t = 0.01$, метод задержки, $\nu = 3$)

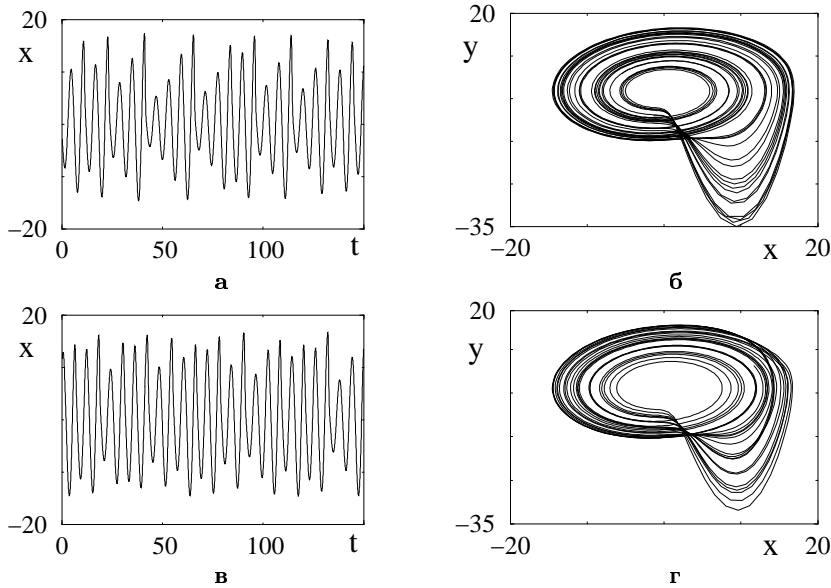


Рис. 2.82. Исходная реализация (а) и фазовый портрет (б) системы Реслера в хаотическом режиме; результат реконструкции (в,г) ($n = 4$, реконструкция по 1-й координате, $\Delta t = 0.01$, метод дифференцирования, $\nu = 3$)

$$g_j \frac{dx_j}{dt} = F_j(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (2.166)$$

Система (2.166) получается из (2.163) при умножении последней на $g_j = g_j(\mathbf{x})$, т.е. на одну из функций $1, x_j, x_j^2, x_j x_k$; $j, k = 1, 2, \dots, n$.

В ряде ситуаций такой подход может оказаться весьма полезным. Однако при работе с экспериментальными временными рядами, порожденными ДС с неизвестным оператором эволюции, проблема подбора нелинейностей остается очень сложной задачей.

Другая проблема состоит в необходимости работать с зашумленными данными при обработке экспериментальных временных рядов. С одной стороны, более желательным является использование метода последовательного дифференцирования для восстановления фазовой траектории, поскольку при этом можно получить модель, содержащую в общем случае приблизительно в n раз меньше коэффициентов при различных нелинейностях, чем при использовании задержки. Но дифференцирование неизбежно будет приводить к усилению шумовой компоненты в производных высокого порядка. Без предварительной фильтрации зависимость от времени уже второй производной может оказаться шумоподобным

процессом. Кроме того, традиционные методы вложения (2.143) и (2.147) имеют очевидные недостатки при анализе существенно неоднородных реализаций, т.е. сигналов, в которых участки с быстрым движением чередуются с участками медленных движений. Такие реализации типичны для систем с “паузами” и широко распространены в биологии и медицине.

Еще раз обратим внимание на то, что произвольный выбор нелинейностей не всегда позволяет осуществить удачную реконструкцию. В частности, в работе [351] указывается на наличие трех типичных случаев:

(1) Восстановленные уравнения локально описывают фазовую траекторию исходной системы. При этом реконструированная модель неустойчива в том смысле, что решение полученных уравнений воспроизводит исследуемый сигнал только в течение короткого промежутка времени;

(2) Имеет место плохая локальная предсказуемость фазовой траектории, однако наблюдается визуальное сходство фазовых портретов. Решение восстановленных уравнений устойчиво по Пуассону. В этом случае аттрактор реконструированной модели имеет метрические характеристики, близкие к характеристикам исходного аттрактора;

(3) Имеет место хорошая локальная предсказуемость фазовой траектории с любой ее точки на временах, превышающих характерное время корреляции. Фазовый портрет реконструированной модели идентичен исходному, а сама система является устойчивой по Пуассону.

Алгоритм глобальной реконструкции в последнее время стал использоваться не только для получения математической модели, но и для классификации динамических режимов [357–359]. Метод классификации предполагает переход из фазового пространства исходной динамической системы в пространство коэффициентов восстановленных уравнений. Особенность данного подхода состоит в том, что применение к экспериментальным данным алгоритма реконструкции не нацелено на получение модели, способной воспроизводить исходный режим. Коэффициенты в получаемых уравнениях являются количественными характеристиками, несущими информацию о линейных и нелинейных корреляциях в исходном сигнале. В результате аппроксимации коэффициентов по участкам реализации динамической системы исследователь получает мно-

жество точек в пространстве коэффициентов. Показано, что разным классам динамических систем отвечают непересекающиеся в данном пространстве области, что и дало основание использовать описанную методику в целях классификации.

2.7.4 Реконструкция по данным биологических экспериментов

Реконструкция по неоднородным реализациям. Как упоминалось в разделе 2.4.2, существуют различные методы восстановления фазовых портретов ДС. Наиболее распространенными являются метод задержки (2.143) и метод последовательного дифференцирования (2.147).

Рассмотрим различные методы восстановления фазовых портретов с точки зрения удобства применения в целях последующей глобальной реконструкции ДС. Метод численного дифференцирования является привлекательным, поскольку при его использовании искомая система имеет простейший вид (2.164). Однако очевидным недостатком метода является его свойство усиливать шумовую компоненту исходной реализации с каждым последующим шагом дифференцирования. Еще одна отрицательная особенность этого метода обнаруживается при работе с существенно неоднородными реализациями. Неоднородность состоит в чередовании участков с быстрыми и медленными движениями. Типичным примером является электрокардиограмма (ЭКГ) человека (рис. 2.83). Дифференцирование участков с быстрым движением (между зубцами P и T) дает участки с движением еще более быстрым, а дифференцирование “пауз” (между зубцами T и следующим P) дает участки еще более медленные. Поэтому каждая последующая фазовая координата, восстановленная методом (2.147), становится все более неоднородной. Следовательно, неоднородным будет и восстановленный фазовый портрет. Это приводит к тому, что основной вклад в аппроксимацию коэффициентов модели будет вносить область, где движение сильно замедлено, тогда как остальные области фазового пространства не окажут существенного влияния, хотя и будут являться зачастую наиболее информативными. Следовательно, для обеспечения эффективности работы метода наименьших квадратов требуется достаточная степень однородности исходного фазового портрета.

На рис. 2.84 приведены проекции фазовых портретов, восстановленных по электрокардиограмме (рис. 2.83) методами задержки и последовательного дифференцирования. Очевидна существенная неоднородность фазового портрета в случае дифференцирования (рис. 2.84а). Использование метода задержки с выбором малых значений τ (много меньших длительности “паузы”) также приводит к восстановлению неоднородного фазового портрета (рис. 2.84б). Снятие проблемы неоднородности путем специального выбора значения задержки приведет к новой проблеме. Как видно из рис. 2.84в, полученный фазовый портрет становится негладким в нескольких точках. Последнее означает, что для аппроксимации потока в этих точках требуется быстро меняющаяся функция в правой части искомых уравнений, которая при разложении ее в ряд Тейлора уже не позволяет ограничиться небольшим количеством членов разложения.

В работе [360] был описан и применен очень простой метод, позволяющий восстановить максимально однородный фазовый портрет и получить наиболее простую форму реконструируемых дифференциальных уравнений (2.164). Данный метод является предельным случаем метода интегральной фильтрации (2.148).

Увеличение эффективности метода для восстановления однородного фазового портрета достигается увеличением значения β . Предельным случаем является $\beta = \infty$, когда восстановленная координата есть интеграл с переменным верхним пределом от исходной реализации. Переход к пределу по β обладает важным преимуществом, которое состоит в существенном уменьшении количества вычислений, необходимых для восстановления координаты x , поскольку в подынтегральном выражении формулы (2.148) исчезает экспоненциальный множитель.

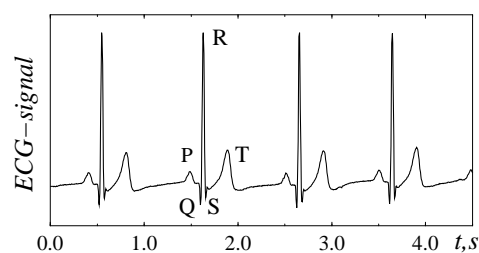


Рис. 2.83. Сигнал ЭКГ человека, отфильтрованный от шума

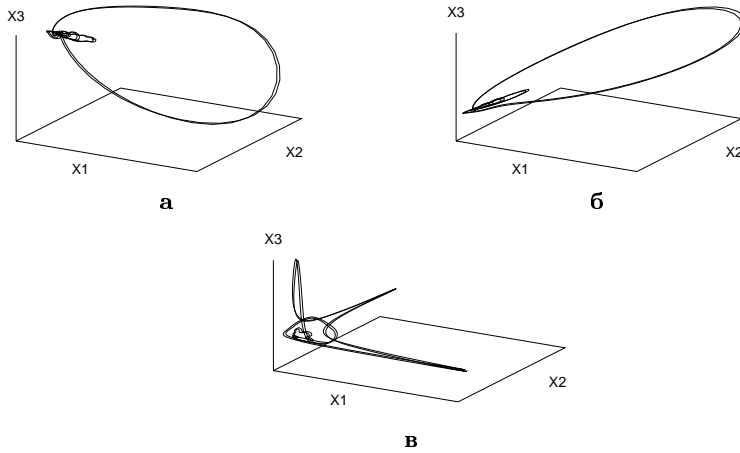


Рис. 2.84. Проекция фазовых портретов, восстановленных по ЭКГ методом последовательного дифференцирования (**а**) и методом задержки для малого (много меньше длительности "паузы") (**б**) и большого (превышающего длительность "паузы") (**в**) τ

Типичная экспериментальная реализация $a(t)$ может быть рассмотрена в виде суммы четырех слагаемых:

$$a(t) = O(t) + S(t) + \xi(t) + C, \quad (2.167)$$

где $O(t)$ – стационарная составляющая автоколебательного процесса, среднее по времени значение которой равно нулю; $S(t)$ – компонента, появляющаяся при нестационарности процесса и отвечающая за "плавание" среднего уровня, которое обычно является очень низкочастотным; $\xi(t)$ – аддитивный шум; C – постоянная составляющая сигнала $a(t)$.

После предварительной обработки экспериментальной реализации (фильтрации низкочастотной области спектра, что позволяет избавиться от тренда, фильтрации шума и приведения исходных данных к нулевому среднему) сигнал $a(t)$ будет содержать только компоненту $O(t)$. Если в качестве одной из координат вектора состояния рассмотреть интеграл с переменным верхним пределом от $a(t)$,

$$a_1(t) = \int_0^t a(t_1) dt_1 = \int_0^t O(t_1) dt_1, \quad (2.168)$$

то, поскольку интегрирование медленных участков даст более быстро меняющиеся зависимости и наоборот, фазовые портреты, восстановленные методами:

$$\mathbf{x}(t) = \left\{ \int_0^t a(t_1) dt_1, a(t), \frac{da(t)}{dt}, \dots, \frac{d^{n-2}a(t)}{dt^{n-2}} \right\} \quad (2.169)$$

или

$$\mathbf{x}(t) = \left\{ \int_0^t a(t_1) dt_1, a(t), a(t + \tau), \dots, a(t + (n - 2)\tau) \right\} \quad (2.170)$$

будут более однородными, чем при использовании формул (2.143) или (2.147). Кроме того, если используется метод вложения (2.169), то реконструированная система обыкновенных дифференциальных уравнений будет иметь наиболее простой вид (2.164).

Примеры реконструкции динамических систем по данным медико-биологических экспериментов. Для сигналов медико-биологических систем характерна неоднородность. Одним из наиболее простых примеров является реализация механических колебаний точки на поверхности изолированного сердца лягушки (рис. 2.85а). Данный сигнал, имеющий очень простую форму, неоднороден, хотя фазовая траектория проводит в медленном движении сравнительно небольшое время.

Для решения задачи глобальной реконструкции восстановим фазовый портрет системы методом (2.169) (рис. 2.85б) в 4-мерном пространстве. Реконструированная динамическая система имеет вид (2.164), а ее решение изображено на рис. 2.85в, г.

Обратимся к более сложному экспериментальному сигналу – ЭКГ человека. Из-за неоднородности сигнала ЭКГ более целесообразным является применение методов вложения (2.169) или (2.170) вместо (2.143) или (2.147). Ориентируясь на оценки фрактальной размерности аттрактора ЭКГ, сделанные в работе [236], необходимо увеличить размерность пространства вложения по крайней мере до 5. При восстановлении фазового портрета методами (2.143) или (2.170) увеличение размерности приводит к существенному усложнению модельных уравнений. Использование (2.147) или (2.169) даже для фильтрованных данных увеличивает ошибку за счет необходимости большего числа раз вычислять производные от исходного скалярного временного ряда, что создает проблемы при аппроксимации правых частей модели.

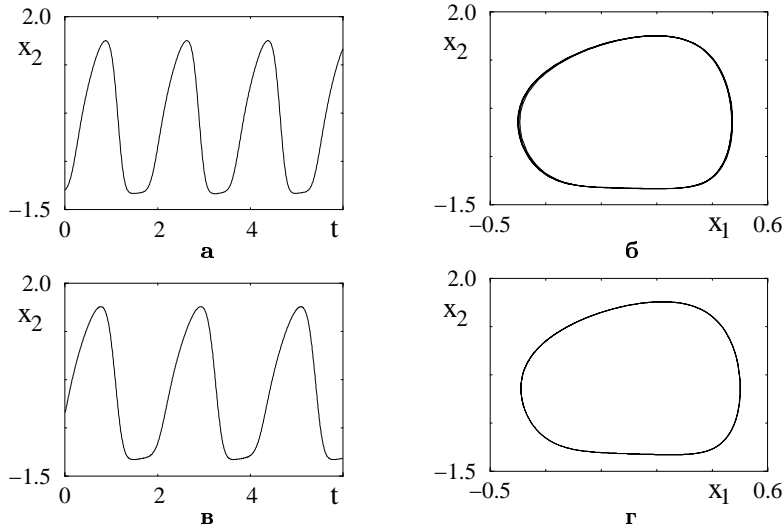


Рис. 2.85. Реализация механических колебаний точки на поверхности изолированного сердца лягушки (а); фазовый портрет, восстановленный методом (2.169) (б); решение реконструированной математической модели (в,г)

Одной из особенностей ЭКГ является то, что ее характерный период, т.е. повторяющаяся последовательность “зубцы P, Q, R, S, T – пауза” (см. рис. 2.83), содержит в себе всю информацию о структуре QRS – комплекса, P и T зубцов, которая достаточна для диагностики ряда патологических изменений. Поэтому на первом этапе можно ограничиться более простой задачей – смоделировать ДС, решением которой является периодический сигнал, с большой степенью точности воспроизводящий один период ЭКГ. Рассмотрим два различных сигнала ЭКГ, предварительно подвергнутые фильтрации шума (рис. 2.86а и 2.87а). Для каждого из них произвольным образом выберем один период и осуществим многократное повторение выбранных участков ЭКГ с целью получения периодических временных рядов. Исходному периоду каждой реализации соответствует интервал между двумя последовательными R -зубцами.

Для рассматриваемых в настоящем разделе примеров в отличие от (2.169) осуществим последовательное вычисление двух интегралов. Пусть $a(t)$ – исходный сигнал. Проводилось вычисление

$$b(t) = \int_0^t a(t_1) dt_1, \quad c(t) = \int_0^t b(t_1) dt_1. \quad (2.171)$$

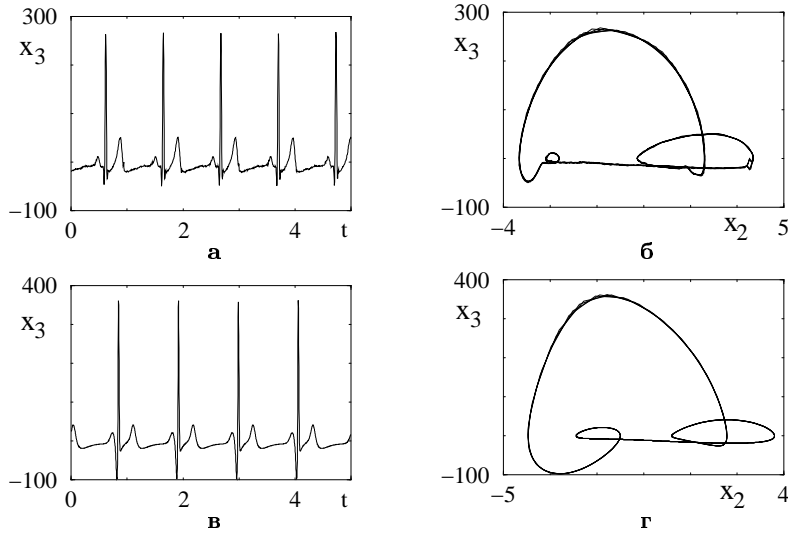


Рис. 2.86. Результаты реконструкции ДС по электрокардиограмме человека: (а) – сигнал, полученный путем многократного повторения одного периода ЭКГ; (б) – фазовый портрет, восстановленный методом (2.172); (в,г) – решение реконструированной 3-мерной математической модели

Зависимость $c(t)$ может использоваться в качестве исходной реализации. Методом последовательного дифференцирования восстановим остальные координаты вектора состояния, который будет иметь следующий вид:

$$\mathbf{x}(t) = \left\{ c(t), \frac{dc(t)}{dt}, \frac{d^2c(t)}{dt^2}, \dots, \frac{d^{n-1}c(t)}{dt^{n-1}} \right\}. \quad (2.172)$$

Ясно, что $d^2c(t)/dt^2$ есть исходный сигнал $a(t)$.

Приведенный способ позволяет получить более однородные фазовые портреты (рис. 2.86б и 2.87б) в сравнении с фазовыми портретами, восстановленными с помощью традиционных методов. Исходя из этого, применение метода наименьших квадратов для нахождения коэффициентов правых частей модели можно признать наиболее эффективным. По выбранным периодам от различных ЭКГ были восстановлены две модели (3- и 4-мерная соответственно) в виде систем ОДУ (2.164), решения которых приведены на рис. 2.86в,г и 2.87в,г.

Применение вышеописанной методики (использование двух интегралов с переменными верхними пределами от сигнала, полученного повторением одного периода ЭКГ) сделало возможным по-

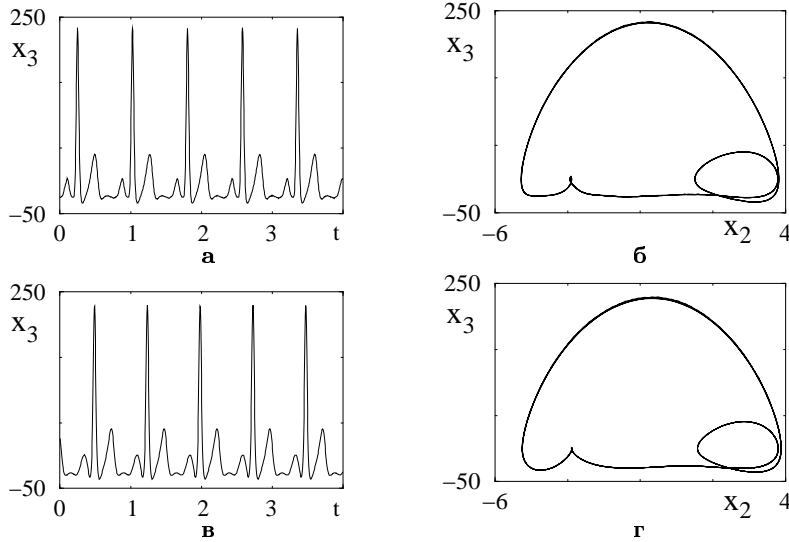


Рис. 2.87. Результаты реконструкции ДС по ЭКГ человека: (а) – сигнал, полученный путем многократного повторения одного периода ЭКГ; (б) – фазовый портрет, восстановленный методом (2.172); (в,г) – решение реконструированной 4-мерной математической модели

лучать грубые математические модели в виде систем дискретных отображений, моделировать некоторые патологии и т.д. Приведенные результаты наглядно демонстрируют преимущества используемого метода восстановления фазового портрета неоднородного аттрактора для решения задачи глобальной реконструкции.

2.7.5 Метод реконструкции в приложении к задаче защиты передаваемой информации

Рассмотрим частный случай задачи реконструкции динамических систем, когда имеет место наличие априорной информации об общем виде уравнений ДС, решением которых является исследуемый сигнал. Для дальнейшего изложения целесообразно записать исходный вид ДС, генерирующей обрабатываемый сигнал, следующим образом:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n, \quad \boldsymbol{\mu} \in \mathbf{R}^m, \quad (2.173)$$

где $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_m)$ – вектор управляющих параметров.

Предположим, что общий вид нелинейной вектор-функции $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu})$ известен. Задача глобальной реконструкции состоит в опре-

делении неизвестных значений параметров μ_i . Сделанное предположение выделяет частный случай рассматриваемого метода моделирования, который используется в ряде приложений. Одним из примеров является задача многоканальной скрытой передачи информации.

В последние годы был предложен ряд способов скрытой передачи информации, базировавшихся на применении в качестве несущего сигнала широкополосных колебаний генератора хаоса [259, 361–370]. Авторы работ по данной тематике с целью выделения информационного сигнала из хаотического обычно использовали явление хаотической синхронизации [142]. Методы, основанные на явлении синхронизации, имеют ряд недостатков, наиболее существенным из которых является требование идентичности генераторов хаотических колебаний в приемнике и передатчике. Если параметры соответствующих генераторов будут отличаться более чем на 2%, то, как отмечается в [370], данные алгоритмы становятся неэффективными.

Рассмотрим альтернативный метод многоканальной конфиденциальной передачи сообщений, основанный на технике глобальной реконструкции. Первые попытки применить метод реконструкции с целью передачи сообщений были предприняты в [371], однако в этой статье была обоснована возможность выделения только одного аддитивного воздействия на систему.

Предлагаемый в [372] способ является более универсальным. Аналогично изложенному в [366, 367], информационные сигналы осуществляют модуляцию параметров ДС. Отличие состоит в методе демодуляции. Вместо эффекта хаотической синхронизации [366, 367] применяется техника реконструкции [372].

Рассмотрим в качестве передающего устройства генератор динамического хаоса G_1 , математическая модель которого имеет вид (2.173). Ограничимся классом динамических систем, уравнения которых путем замен переменных могут быть преобразованы к виду (2.164). Этому требованию удовлетворяет ряд базовых моделей нелинейной динамики – системы Лоренца, Ресслера, Чуа и т.д. [351]. Будем осуществлять относительно медленную модуляцию параметров μ_i , что позволит передавать одновременно m сообщений:

$$\mu_i^*(t) = \mu_i^0 + \mu_i(t), \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.174)$$

В (2.174) μ_i^0 – постоянные значения параметров системы (2.164); $\mu_i(t)$ – информационные сигналы. Условие медленной модуляции может быть записано в виде:

$$\left| \frac{d\mu_i}{dt} \right| \ll \left| \frac{dx_j}{dt} \right|, \quad (2.175)$$

для любых i и j .

С учетом (2.174) уравнения генератора (2.173) приобретают вид

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}^*(t)). \quad (2.176)$$

Чтобы осуществить демодуляцию сообщений из принимаемого сигнала, которым является одномерная реализация $x_1(t)$ системы (2.176), получатель информации должен знать вид нелинейной вектор-функции $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu})$. Условие (2.175) позволяет выбрать размер временного окна t^* , в пределах которого значения параметров μ_i^* допустимо считать практически постоянными. Это означает, что в течение времени t^* неавтономность системы (2.176) может не приниматься в расчет. Скользя временным окном вдоль несущего сигнала $x_1(t)$, получатель информации, зная общий вид математической модели генератора G_1 , может осуществить выделение сигналов модуляции $\mu_i(t)$ в реальном времени.

На практике определение текущих значений $\mu_i(t)$ осуществляется следующим образом. Сигнал $x_1(t)$ генератора (2.176), рассмотренный в течение t^* , дифференцируется n раз для вычисления временных зависимостей $x_j(t)$, $j = 2, \dots, n$, и левых частей системы уравнений (2.164). Поскольку обрабатываемый сигнал представляет собой скалярный ряд чисел $x_{1,i} = x_1(i\Delta t)$, $i = 1, \dots, N^*$, $N^* = t^*/\Delta t$, все производные вычисляются в дискретные моменты времени $i\Delta t$ по приближенным формулам численного дифференцирования. В результате для определения значений параметров необходимо решить уравнение

$$\frac{dx_{n,i}}{dt} = f(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\mu}^*) \quad (2.177)$$

которое является алгебраическим, поскольку значение $dx_{n,i}/dt$ определяется путем n -кратного дифференцирования исходного сигнала. Записав (2.177) для $i = 1, \dots, N^*$ и решив полученную систему N^* алгебраических уравнений с m неизвестными методом наименьших квадратов $N^* \gg m$, получатель информации определит текущие значения μ_i^* .

Вышесказанное справедливо и для дискретных ДС, преимущество работы с которыми состоит в том, что для них не нужно учитывать влияние ошибок численного дифференцирования. По аналогии с потоковыми системами введем ограничение на математическую модель, которая должна допускать преобразование к виду

$$x_{n+1,1} = x_{n,2}, x_{n+1,2} = x_{n,3}, \dots, x_{n+1,n} = f(\mathbf{x}_n, \boldsymbol{\mu}). \quad (2.178)$$

В качестве первого примера рассмотрим отображение Хенона

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + y_n, \quad y_{n+1} = bx_n. \quad (2.179)$$

Предполагая, что наблюдателю доступна последовательность чисел y_i , $i = 1, \dots, N^*$, перепишем (2.179) следующим образом:

$$y_{n+1} = z_n, \quad z_{n+1} = b - az_n^2/b + by_n. \quad (2.180)$$

Для определения неизвестных значений параметров a и b достаточно знать величины y_n, y_{n+1}, y_{n+2} и y_{n+3} . То есть априорная информация об общем виде математической модели позволяет решить задачу глобальной реконструкции для очень короткого скалярного временного ряда.

Пример многоканальной передачи информации на базе отображения Хенона приведен на рис. 2.88. Два хаотических сигнала (координаты $x(t)$ и $y(t)$, полученные при интегрировании системы Ресслера) осуществляют модуляцию параметров a и b уравнений (2.179) по закону, представленному на рис. 2.88а,б. Восстановленные сигналы приведены на рис. 2.88г,д.

Обратимся к системам с непрерывным временем и выберем в качестве тестовой модели модифицированный генератор с инерционной нелинейностью, записав его уравнения следующим образом:

$$\frac{dx}{dt} = m_0x + y - xz, \quad \frac{dy}{dt} = -x, \quad \frac{dz}{dt} = -g_0z + 0.5g_0(x + |x|x) \quad (2.181)$$

Считая, что несущим сигналом генератора (2.181) является одномерная реализация $y(t)$, осуществим преобразование системы (2.181) к виду:

$$\frac{dY}{dt} = Z, \quad \frac{dZ}{dt} = X, \quad \frac{dX}{dt} = f(X, Y, Z, \boldsymbol{\mu}), \quad \boldsymbol{\mu} = (m_0, g_0) \quad (2.182)$$

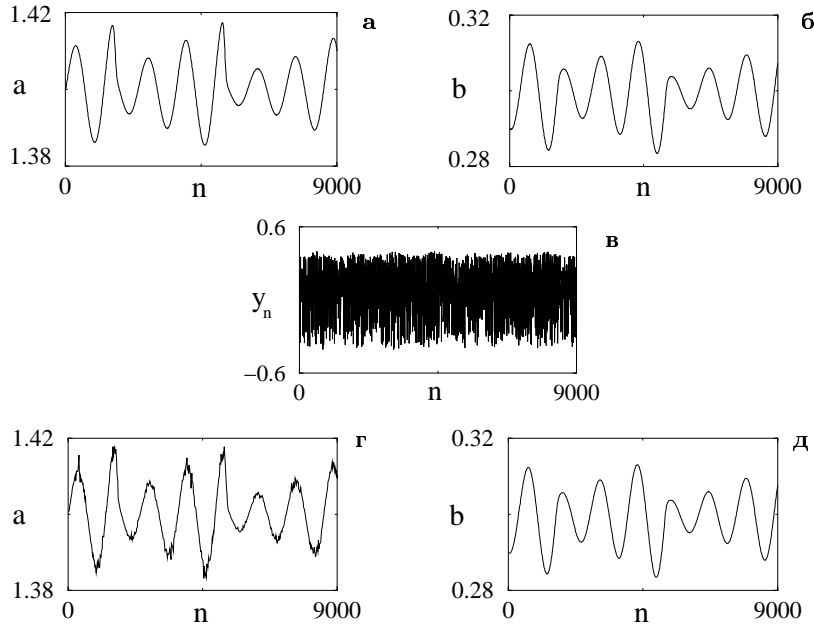


Рис. 2.88. Пример многоканальной передачи информации на базе отображения Хенона: (а,б) – информационные сигналы; (в) – сигнал в канале связи; (г,д) – восстановленные сигналы

$$f(X, Y, Z, \mu) = \frac{X(X + Y)}{Z} + (m_0 g_0 - 1)Z - g_0(X + Y) + 0.5g_0(|Z| - Z)Z^2, \quad (2.183)$$

с помощью замены переменных:

$$Y = y, \quad Z = -x, \quad X = -m_0 x - y + xz. \quad (2.184)$$

Проиллюстрируем возможность одновременной передачи двух независимых сообщений в одном несущем. С этой целью будем модулировать параметр m_0 широкополосным хаотическим сигналом системы Ресслера, а параметр g_0 – гармоническим сигналом. Для тестирования предложенного метода на устойчивость его работы в присутствии флуктуаций различного происхождения осуществим добавление нормально распределенных случайных величин с дисперсией 10^{-5} как в уравнения генератора (2.181), так и аддитивно к параметрам.

Зависимости во времени параметров генератора с инерционной нелинейностью проиллюстрированы на рис. 2.89а,б. Результаты де-

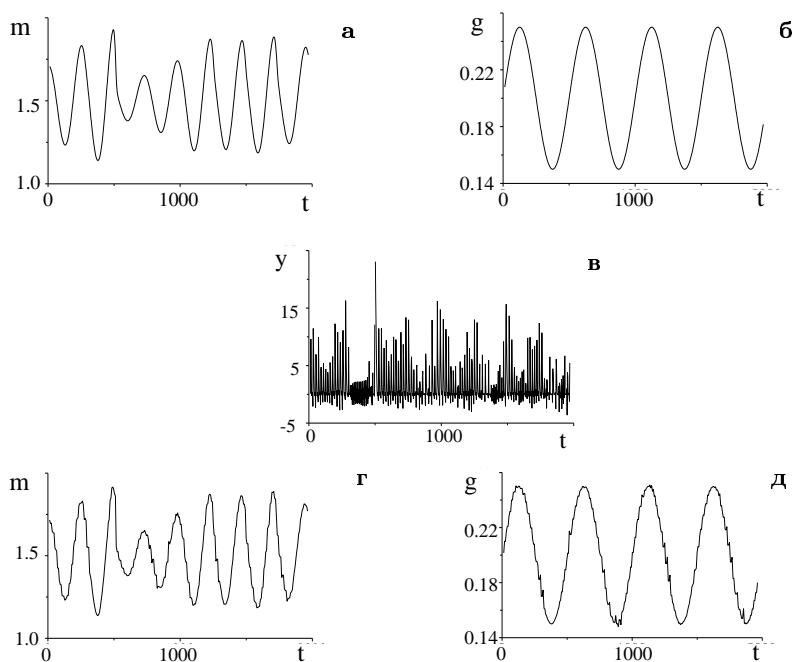


Рис. 2.89. Двухпараметрическая модуляция уравнений генератора (2.181). (а) и (б) – информационные сигналы; (в) – сигнал в канале связи; (г) и (д) – восстановленные сигналы

модуляции, приведенные на рис. 2.89г,д, подтверждают работоспособность метода в случае одновременной передачи двух независимых сообщений при наличии флуктуаций.

Более наглядную демонстрацию работоспособности используемого метода можно осуществить при передаче графических изображений. В качестве информационных выбраны сигналы, полученные при сканировании с разрешением 200×250 двух фрагментов картины Леонардо да Винчи “Мадонна в гроте” (рис. 2.90а,б). Модулирующие сигналы были представлены в виде ступенчатых временных зависимостей, высота каждой ступеньки которых соответствовала оттенку цвета черно-белого изображения (диапазон изменения каждого управляющего параметра разбивался на 256 поддиапазонов). Сигнал в канале связи (рис. 2.90в) представляет собой координату $y(t)$ системы Ресслера. На рис. 2.90г,д изображены восстановленные с применением техники глобальной реконструкции фрагменты картины.

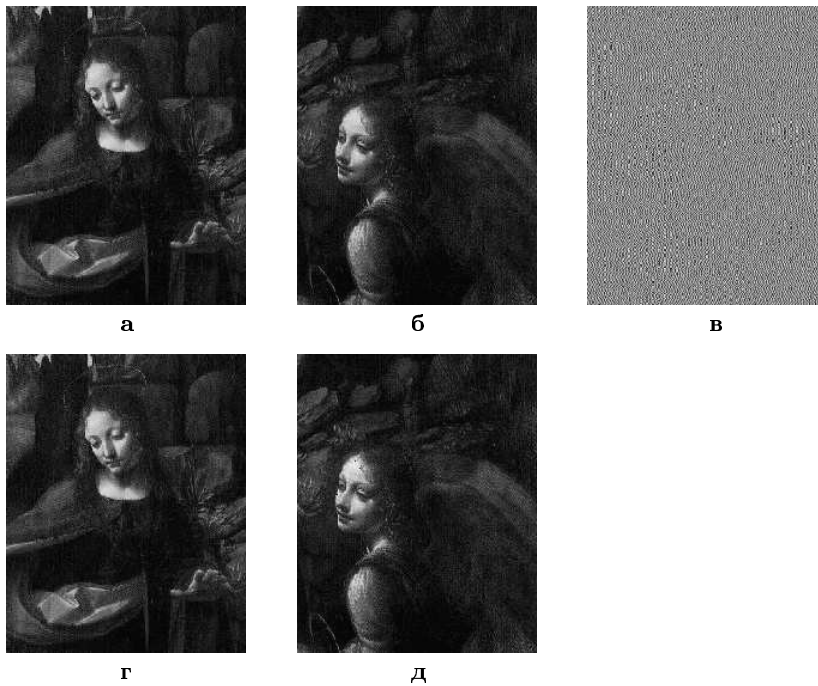


Рис. 2.90. Одновременная передача двух фрагментов картины в одном несущем сигнале путем модуляции параметров b и c системы Ресслера: (а,б) – исходные фрагменты картины; (в) – сигнал в канале связи; (г,д) – восстановленные изображения

Для практической реализации используемого метода демодуляции сообщений получатель информации должен иметь специализированный процессор или компьютер и аналого-цифровой преобразователь (АЦП). Предполагается, что подобный метод многоканальной передачи сообщений может найти свое эффективное применение при обмене информацией на относительно небольших расстояниях с использованием кабельной сети, чтобы не создавать помех в эфире.

2.7.6 Заключение

В данной главе изложен алгоритм глобальной реконструкции и продемонстрирована принципиальная возможность восстановления грубых динамических систем по сигналам как тестовых моделей, так и реализациям, полученным в реальных медико-биологических экспериментах. Разумеется, в рамках одной главы удалось рассмот-

реть только ограниченный круг вопросов, связанных с проблемой реконструкции ДС, которые представляются достаточно перспективными.

В последние годы наметилась явная тенденция роста интереса со стороны специалистов в области нелинейной динамики к объектам биологического происхождения. Биологические системы представляют собой обширную область, где достижения теории динамических систем могут находить свое практическое применение. Кроме того, сложная форма и наличие специфических особенностей сигналов данных систем могут служить стимулом к развитию и совершенствованию методов анализа временных рядов, в том числе и методов реконструкции ДС. По этой причине достаточно большое внимание в главе было уделено проблеме реконструкции применительно к существенно неоднородным реализациям, столь широко распространенным среди сигналов медико-биологического происхождения, и электрокардиограмме человека в частности.

Заметим, что возможности техники глобальной реконструкции в настоящий момент только еще начинают исследоваться. Подтверждением этому служит тот факт, что большинство упомянутых работ по математическому моделированию методом реконструкции ДС представляют собой исследования тестовых систем. Применение данного алгоритма к экспериментальным сигналам осуществляется пока еще редко (и не всегда успешно) в связи со сложностью и неоднозначностью задачи синтеза динамических систем. Актуальной проблемой на сегодняшний день является поиск потенциальных приложений методов реконструкции ДС и, в частности, поиск прикладных аспектов техники реконструкции в исследованиях объектов биологического происхождения. Одним из них является задача медико-биологической диагностики. Данная задача тесно связана с построением моделей, поскольку диагностика может проводиться по самым различным признакам – будь то коэффициенты аппроксимации нелинейностей в восстанавливаемых уравнениях или какие-либо характеристики, отражающие особенности сигнала.

В связи с этим большой интерес вызывает задача исследования данных типа ISI. Проблема реконструкции аттрактора по набору временных интервалов в последние годы только начинает обсуждаться в печати [337–342] и представляет собой открытое поле деятельности для специалистов по нелинейной динамике.

Рассмотренный в настоящей главе переход от последовательности дискретных значений к гладкой реализации, имеющей смысл усредненной мгновенной частоты, и возможность вычисления метрических и динамических характеристик для принципиально дискретных сигналов позволяют надеяться на то, что методы нелинейной динамики пополнят набор количественных характеристик, традиционно вычисляемых по данным типа ISI в целях диагностики. Иными словами, исследование данных сигналов может способствовать упрочению роли нелинейной динамики при решении задач численного анализа временных рядов самого различного происхождения.

Литература

1. Л.Д. Ландау, ДАН СССР **44**, 339 (1944).
2. E.A. Norf, Commun. Pure Appl. Math. **1**, 303 (1948).
3. Д. Рюэль, Ф. Такенс, О природе турбулентности. В сб. "Странные аттракторы" (Мир, Москва 1981) с. 117–151.
4. S. Newhouse, D. Ruelle, F. Takens, Commun. Math. Phys. **64**, 35 (1979).
5. J.P. Gollub, S.V. Benson, J. Fluid Mech. **100**, 449 (1980).
6. А. Лихтенберг, М.А. Либерман, *Регулярная и хаотическая динамика* (Мир, Москва 1984).
7. Г. Шустер, *Детерминированный хаос* (Мир, Москва 1988).
8. В.С. Анищенко, *Сложные колебания в простых системах* (Наука, Москва 1990).
9. П. Берже, И. Помо, К. Видаль, *Порядок в хаосе* (Мир, Москва 1991).
10. R.M. May, Nature **261**, 459 (1976).
11. P.A. Lindsay, Phys. Rev. Lett. **47**, 1349 (1981).
12. K.H. Simoyi, A. Wolf, H.L. Swinney, Phys. Rev. Lett. **49**, 245 (1982).
13. J. Testa, J. Perez, C. Jeffries, Phys. Rev. Lett. **48**, 714 (1982).
14. В.С. Анищенко, В.В. Астахов, Т.Е. Летчфорд, Радиотехника и Электроника **27**, 1972 (1982).
15. В.С. Анищенко, В.В. Астахов, Радиотехника и Электроника **28**, 1109 (1983).
16. В.С. Анищенко, В.В. Астахов, Т.Е. Летчфорд, М.А. Сафонова, Изв. Вузов. Сер. Радиофизика **26**, 169 (1983).
17. A. Libchaber, S. Fauve, C. Laroche, Physica D **7**, 73 (1983).
18. M. Henon, Commun. Math. Phys. **50**, 69 (1976).
19. М. Фейгенбаум, УФН **141**, 343 (1983).
20. M.J. Feigenbaum, J. Stat. Phys. **19**, 25 (1978).
21. M.J. Feigenbaum, J. Stat. Phys. **21**, 669 (1979).
22. В. Ну, Phys. Rep. **91**, 233 (1982).
23. В. Ну, J.M. Mao, Phys. Lett. A **25**, 3259 (1982).
24. В. Ну, I. Satija, Phys. Lett. A **98**, 143 (1983).
25. J.P. Van der Welle, H.W. Cape, R. Kluiving, Phys. Lett. A **119**, 1 (1986).
26. D.V. Lubimov, M.A. Zaks, Physica D **9**, 52 (1983).
27. В.А. Huberman, J. Rudnik, Phys. Rev. Lett. **45**, 154 (1980).
28. В.С. Анищенко, М.А. Сафонова, ЖТФ **33**, 391 (1988).

29. А.Н. Шарковский, Укр. Матем. журнал **26**, 61 (1964).
30. T.Y. Li, J.A. Yorke, Am. Math. Mon. **82**, 985 (1975).
31. Y. Pomeau, P. Manneville, Commun. Math. Phys. **74**, 189 (1980).
32. P. Manneville, Y. Pomeau, Physica D **74**, 219 (1980).
33. С. Grebogi, E. Ott, J.A. Yorke, Physica D **7**, 181 (1983).
34. В.С. Афраймович, "Внутренние бифуркации и кризис аттракторов", в кн. *Нелинейные волны. Структуры и бифуркации*, под ред. А.В. Гапонова-Грехова и М.И. Рабиновича (Наука, Москва 1987) с. 189.
35. P. Berge, P. Dubois, P. Manneville, Y. Pomeau, J. Phys. Lett. **41**, L341 (1980).
36. M. Dubois, M.A. Rubio, P. Berge, Phys. Rev. Lett. **51**, 1446 (1983).
37. L.P. Shilnikov, "Bifurcation Theory and Turbulence", In: *Nonlinear and Turbulent Processes*, Vol. 2 (Gordon and Breach, Harward Academic Publishers 1984) p. 1627.
38. V.I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (Springer, Berlin, Heidelberg 1974).
39. В.И. Арнольд, "Потеря устойчивости автоколебаниями вблизи резонансов", в кн.: *Нелинейные волны*, под ред. А.В. Гапонова-Грехова (Наука, Москва 1979) с. 116.
40. В.С. Афраймович, Л.П. Шильников, ДАН СССР **24**, 739 (1974).
41. В.С. Афраймович, Л.П. Шильников, "Инвариантные двумерные торы, их разрушение и стохастичность", в кн. *Методы качественной теории дифференциальных уравнений* (Горьк. ун-т, Горький 1983) с. 3.
42. V.S. Afraimovich, L.P. Shilnikov, "Strange Attractors and Quasiattractors", In: *Nonlinear Dynamics and Turbulence*, ed. by G.I. Barenblatt, G. Iooss, and D.D. Joseph (Pitman, Boston 1983) p. 1-34.
43. В.С. Афраймович, "Принцип кольца и квазиаттракторы", в кн. *Труды Межд. конф. по нелинейным колебаниям*, Т. 2 (Наукова Думка, Киев 1984) с. 34.
44. J. Maurer, A. Libchaber, J. Phys. Lett. **40** L419 (1979).
45. D.G. Aranson, M.A. Chori, G.R. Hall, R.P. McGenehe, Commun. Math. Phys. **83**, 303 (1982).
46. V. Franceschini, Physica D **6**, 285 (1983).
47. В.С. Анищенко, Т.Е. Летчфорд, М.А. Сафонова, Изв. Вузов. Сер. Радиофизика **28**, 1112 (1985).
48. J. Stavans, Phys. Rev. A **35**, 4314 (1987).
49. J.A. Glazier, A. Libchaber, IEEE Trans. Circuit. Syst. **35**, 790 (1988).
50. В.С. Анищенко, М.А. Сафонова, Радиотехника и Электроника **32**, 1207 (1987).
51. В.С. Анищенко, Т.Е. Летчфорд, Д.М. Сонечкин, ЖТФ **33**, 517 (1988).
52. Н.В. Бутенин, Ю.И. Неймарк, Н.А. Фуфаев, *Введение в теорию нелинейных колебаний* (Наука, Москва 1987).
53. А.Г. Майер, Научные заметки Горьковского университета (Горьк. ун-т, Горький 1939).
54. А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов, И.Р. Сатаев, Регулярная и хаотическая динамика **2**, 90 (1997).
55. S.J. Shenker, Physica D **5**, 405 (1982).
56. S. Ostlund, D. Rand, J. Sethna, E.D. Siggia, Physica D **8**, 303 (1983).
57. J. Stavans, F. Heslot, A. Libchaber, Phys. Rev. Lett. **55**, 596 (1985).
58. S. Martin, W. Martienssen, "Transition from Quasiperiodicity Into Chaos in the Periodically Driven Conductivity of BSN Crystals", In: *Dimensions and Entropies in Chaotic Systems*, ed. by G. Mayer-Kress (Springer, Berlin, Heidelberg 1986) p. 191.
59. M.J. Feigenbaum, L.P. Kadanoff, S.J. Shenker, Physica D **5**, 370 (1982).

60. B.I. Shraiman, Phys. Rev. A **29**, 3464 (1984).
61. M.H. Jensen, P. Bak, T. Bohr, Phys. Rev. A **30**, 1960 (1984).
62. J.D. Farmer, F. Satiggia, Phys. Rev. A **31**, 3520 (1985).
63. P. Cvitanović, B. Shraiman, B. Söderberg, Phys. Scr. **32**, 263 (1985).
64. D.I. Biswas, R.G. Harrison, Phys. Rev. A **32**, 3835 (1985).
65. G.A. Held, C. Jeffries, Phys. Rev. Lett. **56**, 1183 (1986).
66. P.S. Lindsay, A.W. Cumming, Physica D **40**, 196 (1989).
67. В.С. Анищенко, Т.Е. Летчфорд, М.А. Сафонова, Письма в ЖТФ **11**, 536 (1985).
68. В.С. Анищенко, Т.Е. Летчфорд, ЖТФ **31**, 1347 (1986).
69. C. Giberti, R. Zanasi, Physica D **65**, 300 (1993).
70. U. Feudel, W. Jansen, J. Kurths, Int. J. Bifurc. Chaos **3**, 131 (1993).
71. V.S. Anishchenko, M.A. Safonova, U. Feudel, J. Kurths, Int. J. Bifurc. Chaos **4**, 595 (1994).
72. U. Feudel, M.A. Safonova, J. Kurths, V.S. Anishchenko, Int. J. Bifurc. Chaos **6**, 1319 (1995).
73. C. Vaesens, J. Guckenheimer, S. Kim, R.S. MacKay, Physica D **49**, 387 (1991).
74. C. Grebogi, E. Ott, S. Pelikan, J.A. Yorke, Physica D **13**, 261 (1984).
75. C. Grebogi, E. Ott, J.A. Yorke, Physica D **15**, 354 (1985).
76. В.И. Арнольд, *Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений* (Наука, Москва 1978).
77. J.D. Farmer, E. Ott, J.A. Yorke, Physica D **7**, 153 (1983).
78. P.M. Battelino, C. Grebogi, E. Ott, J.A. Yorke, Physica D **39**, 299 (1989).
79. F.J. Romeiras, E. Ott, Phys. Rev. A **35**, 4404 (1987).
80. M. Ding, C. Grebogi, E. Ott, Phys. Rev. A **39**, 2593 (1989).
81. T. Kapitaniak, E. Ponce, J. Wojewoda, J. Phys. A **23**, L383 (1990).
82. J.F. Heagy, S.M. Hammel, Physica D **70**, 140 (1994).
83. U. Feudel, J. Kurths, A.S. Pikovsky, Physica D **88**, 176 (1995).
84. O. Sosnovtseva, U. Feudel, J. Kurths, A. Pikovsky, Phys. Lett. A **218**, 255 (1996).
85. V.S. Anishchenko, T.E. Vadivasova, O.V. Sosnovtseva, Phys. Rev. E **53**, 4451 (1996).
86. A.S. Pikovsky, U. Feudel, Chaos **5**, 253 (1995).
87. A.S. Pikovsky, U. Feudel, J. Phys. A **27**, 5209 (1994).
88. S.P. Kuznetsov, Phys. Lett. A **169**, 438 (1992).
89. Г.М. Заславский, *Стохастичность динамических систем* (Наука, Москва 1984).
90. Р. Боуэн, *Методы символической динамики* (Мир, Москва 1979).
91. D. Ruelle, Am. J. Math. **98**, 619 (1976).
92. D. Ruelle, Commun. Math. Phys. **125**, 239 (1989).
93. F. Christiansen, G. Paladin, H.H. Rugh, Phys. Rev. Lett. **63**, 2087 (1990).
94. V. Liverani, Ann. Math. **142**(2), 239 (1995).
95. G. Froyland, Commun. Math. Phys. **189**, 237 (1997).
96. A. Ostruszka, K. Zyczkowski, Phys. Lett. A **289**, 306 (2001).
97. R. Bowen, D. Ruelle, Inventiones Math. **29**, 181 (1975).
98. V.S. Anishchenko, T.E. Vadivasova, G.A. Okrokvertskhov, G.I. Strelkova, Physica A **325**(1-2), 199 (2003).
99. В.С. Анищенко, Т.Е. Вадивасова, Г.А. Окрокверцхов, Г.И. Стрелкова, Радиотехника и электроника **48**(7), 824 (2003).
100. Р.Л. Стратонович, *Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике* (Сов. радио, Москва 1961).
101. А.Н. Малахов, *Флуктуации в автоколебательных системах* (Наука, Москва 1968).

102. С.М. Рытов, *Введение в статистическую радиофизику* (Наука, Москва 1966).
103. H.A. Kramers, *Physica*. **7**, 284 (1940).
104. P. Hänggi, P. Talkner, M. Borkovec, *Rev. of Modern Physics* **62**, 2 (1990).
105. В.И. Тихонов, М.А. Миронов, *Марковские процессы* (Сов. радио, Москва 1977).
106. O.E. Rössler, *Phys. Lett. A* **57**, 397 (1976).
107. I.D. Farmer, *Phys. Rev. Lett.* **47**(3), 179 (1981).
108. *Chua's circuit: A paradigm for chaos*, ed. by Madan R.N. (World Scientific, Singapore 1993).
109. V.S. Anishchenko, T.E. Vadivasova, A.S. Kopeikin, J. Kurths, G.I. Strelkova, *Phys. Rev. E* **65**, 036206 (2002).
110. V.S. Anishchenko, T.E. Vadivasova, A.S. Kopeikin, J. Kurths, G.I. Strelkova, *Phys. Rev. Lett.* **87**(5), 4101 (2001).
111. P. Jung, *Phys. Rep.* **234**, 175 (1993).
112. E.A. Jackson, *Perspectives of Nonlinear Dynamics*, Vol. 1(1989), 2(1991) (Cambridge University Press).
113. Э. Лоренц, "Детерминированное неперидическое течение", в сб. *Странные аттракторы* (Мир, Москва 1981). С. 88–116.
114. L.P. Shilnikov, *J. Bifurcation and Chaos* **7**(9), 1953 (1997).
115. В. Van der Pol, *Radio Rev.* **1**, 701 (1920).
116. В.И. Гапонов В.И. *ЖТФ* **6**(5), 801 (1936).
117. К.Ф. Теодорчик, *ДАН СССР* **40**(2), 63 (1943).
118. Р.В. Хохлов, *ДАН СССР* **97**(6), 411 (1954).
119. А.А. Андронов, А.А. Витт, К теории захватывания Ван дер Поля. В собр. тр. А.А. Андропова. (Изд-во АН СССР, Москва 1956) с. 51.
120. И.И. Минакова, К.Ф. Теодорчик, *ДАН СССР* **106**(4), 658 (1956).
121. Т. Хаяси, *Нелинейные колебания в физических системах* (Мир, Москва 1968).
122. И.И. Блехман, *Синхронизация динамических систем* (Наука, Москва 1971).
123. И.И. Блехман, *Синхронизация в природе и технике* (Наука, Москва 1981).
124. П.С. Ланда, Е.Г. Ларионцев, *Радиотехника и электроника* **15**(6), 1214 (1970).
125. Ю.М. Романовский, *Изв. вузов. Сер. Радиофизика* **15**(5), 718 (1972).
126. А.Г. Демьянченко, *Синхронизация генераторов гармонических колебаний* (Энергия, Москва 1976).
127. В.Ф. Скупой, В.П. Копылов, *Радиотехника и электроника* **24**(7), 1374 (1979).
128. П.С. Ланда, *Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы* (Наука, Москва 1980).
129. А. Пиковский, М. Розенблюм, Ю. Куртс, *Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление* (Техносфера, Москва 2003).
130. В.С. Анищенко, Т.Е. Вадивасова, *Радиотехника и электроника* **47**(2), 133 (2002).
131. I.I. Blekhnman, P.S. Landa, M.G. Rosenblum, *Applied Mechanics Rev.* **48**(11), 733 (1995).
132. В.Д. Шалфеев, Г.В. Осипов, А.К. Козлов, А.Р. Волковский, *Успехи современной радиоэлектроники* **10**, 27 (1997).
133. Ю.А. Кузнецов, П.С. Ланда, А.Ф. Ольховой, С.М. Перминов, *ДАН СССР* **281**(2), 1164 (1985).
134. П.С. Ланда, Ю.С. Рендель, В.Ф. Шер, *Изв. вузов. Сер. Радиофизика* **32**(9), 1172 (1989).

135. G. Dykman, P. Landa, Yu. Neimark, *Chaos, Solitons and Fractals* **1**(4), 339 (1992).
136. H. Fujisaka, Y. Yamada, *Progr. Theor. Phys.* **69**, 32 (1983).
137. A.S. Pikovsky, *Z. Phys. B.* **55**, 149 (1984).
138. С.П. Кузнецов, *Изв. вузов. Сер. Радиофизика* **28**(8), 991 (1985).
139. В.В. Астахов, Б.П. Безручко, Ю.В. Гуляев, Е.П. Селезнёв, *Письма в ЖТФ* **15**(3), 60 (1988).
140. В.С. Афраймович, Н.Н. Веричев, М.И. Рабинович, *Изв. вузов. Сер. Радиофизика* **29**(9), 1050 (1986).
141. А.Р. Волковский, Н.Ф. Рульков, *Письма в ЖТФ* **15**(7), 5 (1989).
142. L. Pecora, T. Carroll, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 821 (1990).
143. L. Chua, M. Itoh, L. Kocarev, K. Eckert, *Chaos synchronization in Chua's circuit*, In: *Chua's Circuit: A Paradigma for Chaos*, ed. R.N. Madan (World Scientific, Singapore 1993) p. 309.
144. В.С. Анищенко, Д.Э. Постнов, *Письма в ЖТФ* **14**(6), 569 (1988).
145. V.S. Anishchenko, T.E. Vadivasova, D.E. Postnov, M.A. Safonova, *Int. J. of Bifurcation and Chaos* **2**(3), 633 (1992).
146. В.С. Анищенко, Т.Е. Вадивасова, Д.Э. Постнов, М.А. Сафонова, *Радиотехника и электроника* **36**(2), 338 (1991).
147. V.S. Anishchenko, T.E. Vadivasova, D.E. Postnov, *Synchronization of chaos // Proc. of the 1-st Int. Conf. on Applied Synergetics and Synergetic Engineering, 1994. P. 200-206.*
148. A. Arneodo, P. Collet, C. Tresser, *Commun. Math. Phys.* **79**, 573 (1981).
149. M. Rosenblum, A. Pikovsky, J. Kurths, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 1804 (1996).
150. A. Pikovsky, M. Rosenblum, J. Kurths, *IEEE Trans. CAS-I* (1997).
151. V.D. Shalfeev, G.V. Osipov, *Proc. of 5-th Int. Specialist Workshop on Nonlinear Dinamics of Electronic Systems, 1997. P. 139-144.*
152. N.F. Rulkov, M.M. Sushchik, L.S. Tsimring, H.D.I. Abarbanel, *Phys. Rev. E* **51**, 980 (1995).
153. L. Kocarev, U. Parlitz, *Phys. Rev. Lett.* **76**(11), 1816 (1996).
154. H.D.I. Abarbanel, N.F. Rulkov, M.M. Sushchik, *Phys. Rev. E* **53**, 4528 (1996).
155. V.S. Anishchenko, A.N. Silchenko, I.A. Khovanov, *Phys. Rev. E* **57**(1), 316 (1998).
156. A.B. Neiman, *Phys. Rev. E.* **49**, 3483 (1994).
157. B.V. Shulgin, A.B. Neiman, V.S. Anishchenko, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4157 (1995).
158. M.G. Rosenblum, A.S. Pikovsky, J. Kurths, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 4193 (1997).
159. В.В. Астахов, Б.П. Безручко, В.И. Пономаренко, Е.П. Селезнёв, *Изв. вузов. Сер. Радиофизика* **31**(5), 627 (1988).
160. В.В. Астахов, Б.П. Безручко, Е.Н. Ерастова, Е.П. Селезнёв, *ЖТФ* **60**(10), 19 (1990).
161. V.S. Anishchenko, V.V. Astakhov, T.E. Vadivasova, O.V. Sosnovtseva, C.W. Wu, L.O. Chua, *Int. J. of Bifurcation and Chaos* **5**(6), 1677 (1995).
162. V. Astakhov, M. Hasler, T. Kapitaniak, A. Shabunin, V. Anishchenko, *Phys. Rev. E* **58**(5), 5620 (1998).
163. P. Ashwin, J. Buescu, I. Stewart, *Nonlinearity* **9**, 703 (1994).
164. E. Ott, J.C. Sommerer, *Phys. Lett. A* **188**, 39 (1994).
165. M. Hasler, Y. Maistrenko, *IEEE Trans. on Circuits and Systems. Fundamental Theory and Applications* **44**, 856 (1997).
166. Y. Maistrenko, T. Kapitaniak, *Phys. Rev. E.* **54**, 3285 (1996).
167. A. Pikovsky, P. Grassberger, *J. Phys. A: Math. Gen.* **24**, 4587 (1991).
168. M. Sushchik, N.F. Rulkov, H.D.I. Abarbanel, *IEEE Trans. on Circuits and Systems* **44**(10), 867 (1997).

169. V. Astakhov, A. Shabunin, T. Kapitaniak, V. Anishchenko, Phys. Rev. Lett. **79**(6), 1014 (1997).
170. J. Milnor, Commun. Math. Phys. **99**, 177 (1985).
171. A. Pikovsky, G. Osipov, M. Rosenblum, M. Zaks, J. Kurths, Phys. Rev. Lett. **79**, 47 (1997).
172. А.Г. Баланов, Т.Е. Вадивасова, Д.Э. Постнов, О.В. Сосновцева, Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика **10**(5), 31 (1997).
173. A.S. Pikovsky, M.G. Rosenblum, G.V. Osipov, J. Kurths, Physica D **104**, 219 (1997).
174. E. Rosa, E. Ott, M.H. Hess, Phys. Rev. Lett. **80**(8), 1642 (1998).
175. Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence* (Springer, Berlin 1984).
176. П.С. Ланда, *Нелинейные колебания и волны* (Наука, Москва 1997).
177. V.S. Afraimovich, V.I. Nekorkin, G.V. Osipov, V.D. Shalfeev, *Stability, Structures and Chaos in Nonlinear Synchronization Networks* (World Scientific, Singapore 1995).
178. В.С. Анищенко, Д.Э. Постнов, М.А. Сафонова, Письма в ЖТФ **12**(24), 1505 (1985).
179. В.С. Анищенко, И.С. Арансон, Д.Э. Постнов, М.И. Рабинович, ДАН СССР **286**(5), 1120 (1986).
180. P. Hadley, M.R. Beasley, K. Wiesenfeld, Phys. Rev. B **38**, 8712 (1988).
181. S.H. Strogatz, R.E. Mirollo, Physica D **31**, 143 (1988).
182. S.H. Strogatz, R.E. Mirollo, J. Phys. A **21**, L699 (1988).
183. K. Wiesenfeld, P. Hadley, Phys. Rev. Lett. **62**, 1335 (1989).
184. V.N. Belykh, N.N. Verichev, L.J. Kocarev, L.O. Chua, Int. J. Bifurcation and Chaos **3**(2), 579 (1993).
185. Y. Braiman, J.F. Linder, W.L. Ditto, Nature **378**, 465 (1995).
186. Y. Braiman, W.L. Ditto, K. Wiesenfeld, M.L. Spano, Phys. Lett. A **206**, 54 (1995).
187. Ю.М. Романовский, Н.В. Степанова, Д.С. Чернавский, *Математические модели в биофизике* (Наука, Москва 1975).
188. Ю.М. Романовский, Н.В. Степанова, Д.С. Чернавский, *Математическая биофизика* (Наука, Москва 1984).
189. A.T. Winfree, *The geometry of biological time*. (Springer, New York 1980).
190. Y. Kuramoto, Progr. Theor. Phys. **79**, 212 (1984).
191. J.D. Murray, *Mathematical Biology* (Springer, Berlin, Heidelberg 1989).
192. *Modelling the Dynamics of Biological Systems*, ed. by E. Mosekilde and O.G. Mouritsen (Springer, Berlin 1995).
193. H. Haken, *Principles of brain functioning* (Springer, Berlin, Heidelberg 1996).
194. Г.Д.И. Абарбанель, М.И. Рабинович, А. Сильверстон, М.В. Баженов, Р. Хуэрта, М.М. Суцник, Л.Л. Рубчинский, УФН **166**(4), 365 (1996).
195. E. Mosekilde, Yu. Maistrenko, D. Postnov, *Chaotic Synchronization. Applications to Living Systems* (World Scientific, Singapore 2002).
196. В.М. Малафеев, М.С. Полякова, Ю.М. Романовский, Изв. вузов. Сер. Радиофизика **13**(6), 936 (1970).
197. И.К. Костин, Ю.М. Романовский, Вестник МГУ. Сер. физ. и астр. **13**(6), 698 (1972).
198. Y. Aizawa, Progr. Theor. Phys. **56**(3), 703 (1976).
199. K. Wiesenfeld, C. Bracikowski, G. James, R. Ray, Phys. Rev. Lett. **65**(14), 1749 (1990).
200. G.V. Ermentrout, N. Kopell, SIAM J. Math. Ann. **15**, 215 (1984).
201. H. Sakaguchi, S. Shinomoto, Y. Kuramoto, Progr. Theor. Phys. **77**, 1005 (1987).

202. V. Hakim, W.-J. Rappel, Phys. Rev. A **46**(12), R7347 (1992).
203. P. Tass, Phys. Rev. E **56**(2), 2043 (1997).
204. G.V. Osipov, M.M. Sushchik, Phys. Rev. E **58**(6), 7198 (1998).
205. Г.В. Осипов, М.М. Сущик, Вестник Нижегородского ун-та "Нелинейная динамика и хаос, 1997. С. 5–23.
206. Y. Yamaguchi, H. Shimizu, Physica D **11**, 212 (1984).
207. G.B. Ermentrout, W.C. Troy, SIAM J. Appl. Math. **39**, 623 (1986).
208. G.B. Ermentrout, Physica D **41**, 219 (1990).
209. P.C. Matthews, S.H. Strogatz, Phys. Rev. Lett. **65**, 1701 (1990).
210. В.В. Астахов, Б.П. Безручко, В.И. Пономаренко, Изв. вузов. Сер. Радиофизика **34**(1), 35 (1991).
211. E. Mosekilde et al., Int. J. Bif. Chaos **8**(5), 1003 (1998).
212. A. Amengual et al., Phys. Rev. Lett. **78**(28), 4379 (1997).
213. S. Boccaletti, J. Bragard, T.F. Arecchi, Phys. Rev. E **59**(6), 6574 (1999).
214. S. Boccaletti et al., Phys. Rev. Lett. **38**(3), 536 (1999).
215. A.S. Pikovsky, M.G. Rosenblum, J. Kurths, Europhys. Lett. **34**(3), 165 (1996).
216. G.V. Osipov, A.S. Pikovsky, M.G. Rosenblum, J. Kurths, Phys. Rev. E **55**, 2353 (1997).
217. Т.Е. Vadivasova, G.I. Strelkova, V.S. Anishchenko, Phys. Rev. E **63**, 036225 (2001).
218. Т.Е. Vadivasova, V.S. Anishchenko, G.I. Strelkova, A.I. Fomin, Izv. VUZ – Applied Nonlinear Dynamics **10**(3), 110 (2002).
219. D.G. Aranson, G.B. Ermentrout, N. Kopell, Physica D **41**, 403 (1990).
220. А.И. Фомин, Т.Е. Вадивасова, О.В. Сосновцева, В.С. Анищенко, Изв. вузов – Прикладная нелинейная динамика **8**(4), 103 (2000).
221. М. Komuro, R. Tokunaga, T. Matsumoto, L.O. Chua, A. Hotta, Int. J. Bifurcation and Chaos **1**(1), 139 (1991).
222. V.S. Anishchenko, V.V. Astakhov, V.V. Nikolaev, A.V. Shabunin, J. Commun. Technol. Electron. **45**(2), 179 (2000).
223. A. Perez-Munuzuri, V. Perez-Munuzuri, V. Perez-Villar, L.O. Chua, IEEE Trans. Circuits Syst. I: Fund. Th. Appl. **40**(11), 872 (1993).
224. А.А. Alexeyev, G.V. Osipov, V.D. Shalfeev, IEEE Trans. Circuits Syst. I: Fund. Th. Appl. **42**(10), 700 (1995).
225. M.A. Matias, V. Perez-Munuzuri, I.P. Marino, M.N. Lorenzo, V. Perez-Villar, Europhys. Lett. **37**(6), 379 (1997).
226. I.P. Marino, V. Perez-Munuzuri, V. Perez-Villar, E. Sanchez, M.A. Matias, Physica **D128**, 224 (2000).
227. A. Shabunin, V. Astakhov, V. Anishchenko, Int. J. of Bifurcation and Chaos **12**(8), 1895 (2002).
228. A. Neiman, X. Pei, D. Russell, W. Wojtenek, L. Wilkens, F. Moss, H. Braun, M.T. Huber, K. Voigt Phys. Rev. Lett. **82**, 660 (1999).
229. R.W. Murray, The ampullae of Lorenzini, in *Electroreceptors and Other Specialized Receptors in Lower Vertebrates* (Handbook of Sensory Physiology, vol. III/3), ed. A. Fessard (Springer-Verlag, Berlin 1974) pp. 25–146.
230. L.A. Wilkens, D.F. Russell, X. Pei, C. Gurgens, Proc. Roy. Soc. (London) B **264**, 1723 (1997).
231. A. Neiman, D.F. Russell, Phys. Rev. Lett. **86**, 3443 (2001).
232. R.L. Stratonovich, *Topics in the Theory of Random Noise* (Gordon and Breach, New York 1967), Vol. 2.
233. C. Schäfer, M.G. Rosenblum, H. Abel, J. Kurths, Phys. Rev. E **60** 857 (1998).
234. A. Neiman, D.F. Russell, Phys. Rev. Lett. **88**, 138103 (2002).
235. Л. Гласс, М. Мэки, *От часов к хаосу: Ритмы жизни* (Мир, Москва 1991).
236. A. Babloyantz, A. Deslexhe, Biol. Cybernetics **58**, 203 (1988).

237. P.I. Spararin et al., Phys. Rev. E **54**(1), 1 (1996).
238. А.Н. Павлов, Н.Б. Янсон, Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика **5**(1), 91 (1997).
239. V.S. Anishchenko et al., Discrete Dynamics in Nature and Society, (2000).
240. V.S. Anishchenko, et al., Int. J. of Bifurcation and Chaos **10**(10), 2339 (2000).
241. C. Schäfer, M.G. Rosenblum, J. Kurths, H.H. Abel, Nature **392**(6672), 239 (1998).
242. M. Rosenblum et al., IEEE Eng. in Medicine and Biology Magazin **17**(6), 46 (1998).
243. A.W. Hübler, E. Luscher, Naturwissenschaft **76**, 67 (1989).
244. E.A. Jackson, Physica D **50**, 341 (1991).
245. E.A. Jackson, Phys. Lett. A **151**, 478 (1990).
246. E. Ott, C. Grebogi, J.A. Yorke, Phys. Rev. Lett. **64**, 1196 (1990).
247. T. Shinbrot, C. Grebogi, E. Ott, J.A. Yorke, Nature **363**, 411 (1993).
248. K. Pyragas, Phys. Lett. A **170**, 421 (1992).
249. W.L. Ditto, S.N. Raueo, M.L. Spano, Phys. Rev. Lett. **65**, 3211 (1990).
250. T. Shinbrot, E. Ott, C. Grebogi, J.A. Yorke, Phys. Rev. Lett. **65**, 3215 (1990).
251. J. Singer, Y. Wang, H. Bau, Phys. Rev. Lett. **66**, 1123 (1991).
252. F.J. Romeiras, C. Grebogi, E. Ott, W.P. Dayawasn, Physica D **58**, 165 (1992).
253. T. Shinbrot, W. Ditto, C. Grebogi, E. Ott, M. Spano, J.A. Yorke, Phys. Rev. Lett. **68**, 2868 (1992).
254. T. Shinbrot, E. Ott, C. Grebogi, J.A. Yorke, Phys. Rev. A **45**, 4165 (1992).
255. A. Garfinkel, M. Spano, W. Ditto, J. Weiss, Science **257**, 1230 (1992).
256. V. Petrov, V. Gaspar, J. Masere, K. Showalter, Nature **361**, 240 (1993).
257. Y.C. Lai, C. Grebogi, Phys. Rev. E **49**, 1094 (1994).
258. S.J. Schiff, K. Jerger, D.H. Duong, T. Chang, M.L. Spano, W.L. Ditto, Nature **360**, 615 (1994).
259. S. Hayes, C. Grebogi, E. Ott, A. Mark, Phys. Rev. Lett. **73**, 1781 (1994).
260. M. Spano, E. Ott, Phys. Today, **48**, 34 (1995).
261. V. In, W.L. Ditto, Phys. Rev. E **51**, 2689 (1995).
262. E. Ott, M. Spano, "Controlling chaos". In: *Chaotic, Fractal and Nonlinear Signal Processing*, ed. by R.A. Katz. AIP Conf. Proc., Vol. 375 (AIP Press, New York 1995) p. 92.
263. E. Baretto, C. Grebogi, Phys. Rev. E **52**, 3553 (1995).
264. L. Poon, C. Grebogi, Phys. Rev. Lett. **75**, 4023 (1995).
265. G. Chen, X. Dong, *From Chaos to Order, Perspectives, Methodologies, and Applications* (World Scientific, Singapore 1998).
266. A.L. Fradkov, A.Yu. Pogromsky, *Introduction to Control of Oscillations and Chaos* (World Scientific, Singapore 1999).
267. K. Judd, A. Mees, K.L. Teo, T. Vincent (eds.), *Control and Chaos: Mathematical Modeling* (Birkhauser, Boston 1997).
268. T. Kapitaniak, *Chaos for Engineers: Theory, Applications, and Control* (Springer, New York 1998).
269. M. Lakshmanan, K. Murali, *Chaos in Nonlinear Oscillators: Controlling and Synchronization* (World Scientific, Singapore 1996).
270. M.J. Ogorzalek, IEEE Trans. Circuit. Systems I Fundamental Theor. Appl. **40**, 693 (1993).
271. G. Chen, X. Dong, Int. J. Bifurc. Chaos **3**, 1363 (1993).
272. Y.C. Lai, C. Grebogi: Phys. Rev. E **47**, 2357 (1993).
273. T.C. Newell, P.M. Alsing, A. Gavrielides, V. Kovanis, Phys. Rev. E **49**, 313 (1994).
274. M. Bernardo, Int. J. Bifurc. Chaos **6**, 557 (1995).
275. J.A.K. Suykens, P.F. Curran, L.O. Chua, Int. J. Bifurc. Chaos **7**, 671 (1996).

276. J.H. Peng, E.J. Ding, M. Ding, W. Yang, Phys. Rev. Lett. **76**, 904 (1996).
277. G. Malescio, Phys. Rev. E **53**, 2949 (1996).
278. C.K. Duan, S.S. Yang, Phys. Lett. A **229**, 151 (1997).
279. J. Yang, G. Hu, J. Xiao, Phys. Rev. Lett. **80**, 496 (1998).
280. H. Gang, Q. Zhilin, Phys. Rev. Lett. **72**, 68 (1994).
281. D. Auerbach, Phys. Rev. Lett. **72**, 1184 (1994).
282. I. Aranson, H. Levine, L. Tsimring, Phys. Rev. Lett. **72**, 2561 (1994).
283. R.V. Sole, L.M. Prida, Phys. Lett. A **199**, 65 (1995).
284. D. Battogtokh, A. Mikhailov, Physica D **90**, 84 (1996).
285. R.O. Grigoriev, M.C. Cross, H.G. Schuster, Phys. Rev. Lett. **79**, 2795 (1997).
286. M.K. Ali, J. Fang, Discrete Dyn. Nat. Soc. **1**, 179 (1997).
287. P. Parmananda, Yu. Jiang, Phys. Lett. A. **231**, 159 (1997).
288. G. Hu, Z. Qu, K. He, Int. J. Bifurc. Chaos, **5**, 901 (1995).
289. G.V. Osipov, V.D. Shalfeev, IEEE Trans. Circuit. Syst. **42**, 687 (1995).
290. G.V. Osipov, V.D. Shalfeev, J. Kurths, "Asimmetry of Coupling in a Chain of Discrete Phase-Locked Loops as a Reason of Chaos Suppression", In: *Proc. of Int. Conference on Control of Oscillations and Chaos*, ed. by F.L. Chernousko and A.L. Fradkov (Inst. Problems of Mech. Engineering of RAS, St. Petersburg 1997).
291. Т. Капитаниак, Yu. Maistrenko, Physica D **126**, 18 (1999).
292. В.В. Астахов, А.В. Шабунин, В.С. Анищенко, Изв. Вузов – Прикладная нелинейная динамика **7**, 3 (1999).
293. В.В. Астахов, А.В. Шабунин, П.А. Стальмахов, А.В. Климшин, Изв. Вузов – Прикладная нелинейная динамика **8**, 91 (2000).
294. L.-Y. Cao, Y.-C. Lai, Phys. Rev. E **58**, 382 (1998).
295. P. Ashwin, J. Buescu, and I. Stewart, Phys. Lett. A **193**, 126 (1994).
296. Y.-Ch. Lai, C. Grebogi, J.A. Yorke, S.C. Venkataramani, Phys. Rev. Lett. **77**, 55 (1996).
297. N. Platt, E.A. Spiegel, C. Tresser, Phys. Rev. Lett. **70**, 279 (1993).
298. В.В. Астахов, А.В. Шабунин, А.Н. Сильченко, Г.И. Стрелкова, В.С. Анищенко, Радиотехника и Электроника **42**, 320 (1997).
299. В.В. Астахов, А.Н. Сильченко, Г.И. Стрелкова, А.В. Шабунин, В.С. Анищенко, Радиотехника и Электроника **41**, 1323 (1996).
300. П.Л. Капица, ЖЭТФ **21**, 588 (1951).
301. П.Л. Капица, УФН **44**, 7 (1951).
302. V.V. Astakhov, V.S. Anishchenko, A.V. Shabunin, "Stabilization of In-Phase Motions in Symmetrically Coupled Oscillators by Parametric Perturbations", In: *Proc. of 1-st Int. Conf. on Control of Oscillations and Chaos*, Vol. 2, ed. by F.L. Chernousko and A.L. Fradkov (Inst. Problems of Mech. Engineering of RAS, St. Petersburg 1997) p. 374.
303. V.V. Astakhov, V.S. Anishchenko, Т. Капитаниак, А.В. Шабунин, Physica D **109**, 11 (1997).
304. В.В. Астахов, А.В. Шабунин, Изв. Вузов – Прикладная нелинейная динамика **5**, 15 (1997).
305. V.V. Astakhov, V.S. Anishchenko, A.V. Shabunin, IEEE Trans. Circuit. Syst. **42**, 352 (1995).
306. V.V. Astakhov, V.S. Anishchenko, G.I. Strelkova, A.V. Shabunin, "Controlling Spatiotemporal Chaos in One- and Two-Dimensional Coupled Logistic Map Lattices", In: *Chaotic, Fractal and Nonlinear Signal Processing*, ed. by R.A. Katz. AIP Conf. Proc., Vol. 375 (AIP Press, New York 1995) p. 104.
307. J.P. Crutchfield, K. Kaneko, "Phenomenology of spatio-temporal chaos", in: *Direction in chaos*, ed. by H. Bai-lin (World Scientific, Singapore 1987) p. 272.

308. А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов, Изв. вузов. Сер. Радиофизика **34**(10-12), 1079 (1991).
309. I. Waller, R. Kapral, Phys. Rev. A **30**, 2047 (1984).
310. K. Kaneko, Physica D **34**, 1 (1989).
311. J.P. Crutchfield, K. Kaneko, "Phenomenology of Spatiotemporal Chaos". In: *Directions in Chaos*, ed. by H. Bai-lin (World Scientific, Singapore 1987) p. 272.
312. N.H. Packard, J.P. Crutchfield, J.D. Farmer, R.S. Shaw, Phys. Rev. Lett. **45**, 712 (1980).
313. F. Takens, "Detecting Strange Attractors in Turbulence", In: *Dynamical Systems and Turbulence*, ed. by D. Rang and L.S. Young. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 898 (Springer, Berlin, Heidelberg 1980) p. 366.
314. R. Mane, "On the dimension of the compact invariant sets of certain nonlinear maps", In: *Dynamical Systems and Turbulence*, ed. by D. Rang and L.S. Young. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 898 (Springer, Berlin Heidelberg 1980) p. 230.
315. J. Stark, D.S. Broomhead, M.E. Davies, J. Huke, "Takens Embedding Theorems for Forced and Stochastic Systems", In: *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*. Proc. of 2nd Congress of Nonlinear Analysis, Vol. 30 (Elsevier, Amsterdam 1997) p. 5303.
316. J.D. Farmer, J.J. Sidorowich, Phys. Rev. Lett. **59**, 845 (1987).
317. M. Casdagli, Physica D **35**, 335 (1989).
318. H.D.I. Abarbanel, R. Brown, J.B. Kadtke, Phys. Rev. A **41**, 1782 (1990).
319. P. Grassberger, I. Procaccia, Phys. Rev. Lett. **50**, 346 (1983).
320. P. Grassberger, I. Procaccia, Physica D **9**, 189 (1983).
321. A. Wolf, J.B. Swift, H.L. Swinney, J.A. Vastano, Physica D **16**, 285 (1985).
322. J.P. Eckmann, S.O. Kamphorst, D. Ruelle, D. Gilberto, Phys. Rev. A **34**, 4971 (1986).
323. J. Cremers, A. Hübler, Z. Naturforschung A **42**, 797 (1987).
324. J.P. Crutchfield, B.S. McNamara, Complex Syst. **1**, 417 (1987).
325. T. Sauer, J.A. Yorke, M. Casdagli, J. Stat. Phys. **65**, 579 (1991).
326. D.S. Broomhead, G.P. King, Physica D **20**, 217 (1986).
327. M.T. Rosenstein, J.J. Collins, C.J. De Luca, Physica D **73**, 82 (1994).
328. T.S. Parker, L.O. Chua, *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems* (Springer, New York 1989) p. 191.
329. A.M. Fraser, H.L. Swinney, Phys. Rev. A **33**, 1134 (1986).
330. W. Liebert, H.G. Schuster, Phys. Lett. A **142**, 107 (1989).
331. J.P. Eckmann, D. Ruelle, Physica D **56**, 185 (1992).
332. J.L. Breeden, N.H. Packard, Int. J. Bifurc. Chaos **4**, 311 (1994).
333. G.B. Mindlin, H.G. Solari, M.A. Natielo, R. Gilmore, X.-J. Hou, J. Nonlinear Sci. **1**, 147 (1991).
334. H.C. Tuckwell, *Introduction to Theoretical Neurobiology*, Vols. 1 and 2 (Cambridge University Press, Cambridge 1988).
335. Task Force of the European Society of Cardiology and the North American Society of Racing and Electrophysiology, Circulation **93**, 1043 (1996).
336. A. Sherman, Bull. Math. Biol. **56**, 811 (1994).
337. T. Sauer, "Reconstruction of Integrate-and-Fire Dynamics", In: *Nonlinear Dynamics and Time Series*, ed. by C. Cutler and D. Kaplan. Fields Institute Communications, Vol. 11 (American Mathematical Society, Providence 1997) p. 63.
338. T. Sauer, Phys. Rev. Lett. **72**, 3911 (1994).
339. R. Castro, T. Sauer, Phys. Rev. E **55**, 287 (1997).
340. R. Castro, T. Sauer, Phys. Rev. Lett. **79**, 1030 (1997).
341. D.M. Racicot, A. Longtin, Physica D **104**, 184 (1997).

342. R. Hegger, H. Kantz, *Europhys. Lett.* **38**, 267 (1997).
343. N.B. Janson, A.N. Pavlov, A.B. Neiman, V.S. Anishchenko, *Phys. Rev. E* **58**, R4 (1998); A.N. Pavlov, O.V. Sosnovtseva, E. Mosekilde, V.S. Anishchenko, *Phys. Rev. E* **61**, 5033 (2000); A.N. Pavlov, O.V. Sosnovtseva, E. Mosekilde, V.S. Anishchenko, *Phys. Rev. E* **63**, 036205 (2001).
344. D. Gabor, *J. IEEE Lond.* **93**, 429 (1946).
345. P. Panter, *Modulation, Noise, and Spectral Analysis* (McGraw-Hill, New York 1965).
346. J.L. Breeden, A. Hübler, *Phys. Rev. A* **42**, 5817 (1990).
347. R. Brown, N.F. Rulkov, E.R. Tracy, *Phys. Rev. E* **49**, 3784 (1994).
348. M.J. Büchner, M. Popp, Th. Meyer, A. Kittel, U. Rau, J. Parisi, *Phys. Lett. A* **211**, 345 (1996).
349. E.J. Kostelich, J.A. Yorke, *Physica D* **41**, 183 (1990).
350. G. Gouesbet, J. Maquet, *Physica D* **58**, 202 (1992).
351. G. Gouesbet, C. Letellier, *Phys. Rev. E* **49**, 4955 (1994).
352. K. Judd, A. Mees, *Physica D* **82**, 426 (1995).
353. E. Baake, M. Baake, H.G. Bock, K.M. Briggs, *Phys. Rev. A* **45**, 5524 (1992).
354. C.S.M. Lainscsek, F. Schürerer, J. Kadtko, *Int. J. Bifurc. Chaos* **8**, 905 (1998).
355. H. Haken, *Information and Self-Organization*, 2nd ed. (Springer, Berlin 1999).
356. O.L. Anosov, O.Ya. Butkovskii, Yu.A. Kravtsov, E.D. Surovyatkina, "Predictable Nonlinear Dynamics: Advances and Limitations", In: *Chaotic, Fractal and Nonlinear Signal Processing*, ed. by R.A. Katz. AIP Conf. Proc., Vol. 375 (AIP, New York 1995) p. 71.
357. J. Kadtko, *Phys. Lett. A* **203**, 196 (1995).
358. M. Kremliovskiy, J. Kadtko, M. Inchiosa, P. Moore, *Int. J. Bifurc. Chaos* **8**, 813 (1998).
359. J.S. Brush, "Classifying Transient Signals With Nonlinear Dynamic Filter Banks", In: *Chaotic, Fractal and Nonlinear Signal Processing*, ed. by R.A. Katz. AIP Conf. Proc., Vol. 375 (AIP, New York 1995) p. 145.
360. N.B. Janson, A.N. Pavlov, V.S. Anishchenko, *Int. J. Bifurc. Chaos* **8**, 825 (1998).
361. L. Kocarev, K.S. Halle, K. Eckert, L.O. Chua, U. Parlitz, *Int. J. Bifurc. Chaos* **2**, 709 (1992).
362. K.M. Cuomo and A.V. Oppenheim, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 65 (1993).
363. K.M. Cuomo, A.V. Oppenheim, S.H. Strogatz, *IEEE Trans. Circuit. Syst.* **40**, 626 (1993).
364. H. Dedieu, M.P. Kennedy, M. Hasler, *IEEE Trans. Circuit. Syst.* **40**, 634 (1993).
365. U. Parlitz, L.O. Chua, L. Kocarev, K.S. Halle, A. Shang, *Int. J. Bifurc. Chaos* **2**, 973 (1992).
366. U. Parlitz, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 1232 (1996).
367. U. Parlitz, L. Kocarev, *Int. J. Bifurc. Chaos* **6**, 581 (1996).
368. H.D.I. Abarbanel, P.S. Linsay, *IEEE Trans. Circuit. Syst.* **40**, 643 (1993).
369. A.S. Dmitriev, "Application Maps with Stored Information in CDMA Communication Systems", In: *Proc. of the 1-st Int. Conf. on Control of Oscillations and Chaos*, Vol. 2, ed. by F.L. Chernousko and A.L. Fradkov (Inst. Problems of Mech. Engineering of RAS, St. Petersburg 1997) p. 211.
370. S.O. Starkov, S.V. Yemetz, "Digital Communication Systems, Using Chaos", In: *Proc. of the 1-st Int. Conf. on Control of Oscillations and Chaos*, Vol. 2, ed. by F.L. Chernousko and A.L. Fradkov (Inst. Problems of Mech. Engineering of RAS, St. Petersburg 1997) p. 207.

371. D.A. Gribkov, V.V. Gribkova, Yu.I. Kuznetsov, A.G. Rzhakov, "Global Dynamical Modeling of Time Series and Application to Restoration of Broadband Signal Characteristics", In: *Chaotic, Fractal and Nonlinear Signal Processing*, ed. by R.A. Katz. AIP Conf. Proc., Vol. 375 (AIP, New York 1995) p. 181.
372. V.S. Anishchenko, A.N. Pavlov, Phys. Rev. E **57**, 2455 (1998).

3. Стохастическая динамика

3.1 Стохастический резонанс

3.1.1 Введение

Понятие "шум" на быденном уровне обычно воспринимается как "помеха", наличие которой может только ухудшить функционирование любой системы. Хорошо известны классические проблемы радиофизики, связанные с существованием предела чувствительности усилителей и конечностью ширины спектральной линии генераторов, обусловленных воздействием естественных и технических шумов [1–3] (см. для сравнения раздел 1.3).

Было установлено, что источники шума в нелинейных динамических системах могут индуцировать принципиально новые режимы функционирования, не реализуемые в отсутствие шума, например, индуцированные шумом незатухающие колебания [4]. Эти эффекты получили название индуцированных шумом переходов [5]. Многообразие и сложность таких переходов в нелинейных динамических системах вызвали постановку удивительных до недавнего времени вопросов: всегда ли воздействие шума приводит к ухудшению характеристик динамических систем и возможны ли случаи, когда действие шума вызывает увеличение степени упорядоченности движений в системе или улучшение ее основных рабочих характеристик? Исследования последних лет убедительно показали, что в нелинейных системах воздействие шума может индуцировать новые более упорядоченные режимы, приводить к образованию более регулярных временных и пространственных структур, увеличивать степень когерентности, вызывать усиление слабых сигналов, сопровождающееся увеличением отношения сигнал/шум, или индуцировать направленные движения в системах в условиях чрезвычайно слабых внешних воздействий. Другими словами, в нелинейных системах шум может играть конструктивную или полезную роль.

Одним из наиболее ярких и относительно простых примеров указанного типа поведения нелинейных систем является эффект стохастического резонанса (СР). Термин *стохастический резонанс* был введен авторами работ [6–8] в 1981–1982 гг. на основе исследований модели бистабильного осциллятора, предложенной для описания периодичности в наступлении ледниковых периодов на Земле. Модель описывала движение частицы в симметричном двухямном потенциале под действием периодической силы в условиях большого трения. Устойчивые положения частицы соответствовали ледниковому периоду и нормальному климату Земли. Периодическая сила соответствовала колебаниям эксцентриситета орбиты Земли, изменяя энергетический баланс с периодом в 10^5 лет.

Расчеты показали, что реальная амплитуда периодической силы оказалась мала и не обеспечивала переключений системы из одного состояния в другое. Возможность переключений была достигнута введением дополнительной случайной силы (флуктуации атмосферы). Подобно прыжкам броуновских частиц в двухямном силовом поле из одного устойчивого состояния в другое, атмосферные флуктуации индуцировали климатические изменения (переходы) от устойчивого холодного периода к теплому и наоборот. Фундаментальным результатом при исследовании данной модели явилось то, что авторам удалось найти последовательность упорядоченных во времени переходов. Климат практически следовал за чрезвычайно малым внешним периодическим возмущением при конечной интенсивности шума в атмосфере.

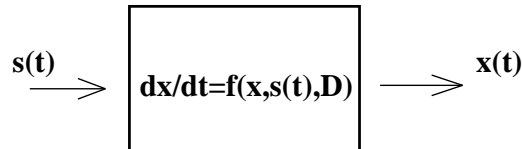


Рис. 3.1. Общая схема стохастического резонатора: нелинейная зашумленная система с временным масштабом, определяемым интенсивностью шума D , под воздействием упорядоченного сигнала $s(t)$. Отклик системы управляется входным сигналом при оптимально выбранных уровнях шума

Общая схема стохастического резонанса показана на рис. 3.1. Этот эффект определяет группу явлений, при которых упорядо-

ченный отклик нелинейной системы на слабые внешние сигналы заметно усиливается при оптимальной (отличной от нуля) интенсивности шума. Интегральные характеристики процесса, такие как коэффициент усиления, отношение сигнал/шум или значение входной/выходной взаимной корреляции, при достижении оптимального уровня шума имеют на выходе системы отчетливо выраженный максимум. В то же время энтропия как мера степени беспорядка достигает минимума, свидетельствуя о возрастании степени индуцированного шумом порядка [9].

В настоящее время эффект СР представляет собой хорошо известное поведение нелинейных стохастических систем [10–18]. Он был обнаружен и исследован во многих бистабильных системах: триггере Шмитта [19], кольцевом лазере [20], магнитных системах [21], пассивных оптических бистабильных системах [22], системах с электронным парамагнитным резонансом [23], экспериментах с броуновскими частицами [24], экспериментах с магнитоэластичной лентой [25], туннельном диоде [26], сверхпроводящих квантовых интерферометрах (SQUID) [27], ферромагнетиках и сегнетоэлектриках [28–30]. СР наблюдался также в химических системах [31–33]. Наиболее яркие приложения эффекта СР были продемонстрированы в биологических системах. СР наблюдался на уровне отдельных сенсорных нейронов [34–36] и даже на уровне ионных каналов [37]. СР был исследован в психофизике человека [38] и поведенческих экспериментах на животных [39, 40].

Эффект СР был реализован в бистабильных [6, 41] и моностабильных осцилляторах [42], а также в динамике возбудимых сред и нединамических пороговых системах [43–45], и в хаотических системах [46, 47].

В настоящем разделе будут рассмотрены главным образом бистабильные модели. В следующих разделах будут обсуждаться различные аспекты СР в зашумленных возбудимых системах и зашумленных средах или связанных сетях стохастических резонаторов.

3.1.2 Физические основы эффекта СР

Физическая картина явления СР достаточно наглядна и проста. В отличие от линейной системы, нелинейная система по определению всегда имеет различные частоты или различные временные масштабы. Добавление шума, даже аддитивного, может выделять

различные моды с различной вероятностью, что является отличительной особенностью от традиционно изучаемых линейных систем. Таким образом, воздействие и изменение уровня шума может изменить поведение нелинейной системы.

Специфика эффекта СР заключается в том, что один из характерных временных масштабов системы зависит от интенсивности шума. В случае бистабильной передемпфированной системы, путем изменения интенсивности шума можно управлять частотой переключений между двумя метастабильными состояниями. Задача выхода была детально рассмотрена в разделе 1.2.6.

Рассмотрим качественно движение броуновской частицы в системе с симметричным бистабильным потенциалом типа $U(x) = -0.5x^2 + 0.25x^4$ в условиях действия слабого периодического возмущения $A \sin \omega t$. Система имеет два временных масштаба. Один обусловлен случайными блужданиями частицы в окрестности одного из состояний равновесия, которые называются внутриямной или локальной динамикой. В случае глубоких потенциальных ям и не слишком большого шума этот временной масштаб не зависит от уровня шума.

Второй масштаб характеризует среднее время перехода через потенциальный барьер (глобальная динамика). В частотной области ему отвечает средняя скорость (или частота) выхода из метастабильного состояния – скорость Крамерса [48, 49].

Для случая белого шума, параболических потенциальных ям и относительно высоких потенциальных барьеров скорость Крамерса дается законом Аррениуса:

$$r = \nu \exp(-\Delta U_0/D).$$

Префактор ν – коэффициент, определяемый кривизной потенциальных ям и барьера. Он также определяет скорость релаксации в линейном режиме в окрестности одного из состояний равновесия. Из этого следует, что время релаксации всегда меньше в сравнении с глобальной динамикой. Разделение двух временных масштабов и, следовательно, нелинейный режим, который строго зависит от уровня шума, достигаются при условии, что высота потенциального барьера ΔU_0 больше интенсивности шума D .

Амплитуда периодического воздействия A предполагается малой настолько, что исключает переходы через барьер в отсутствие шума. Однако малое периодическое воздействие всегда при-

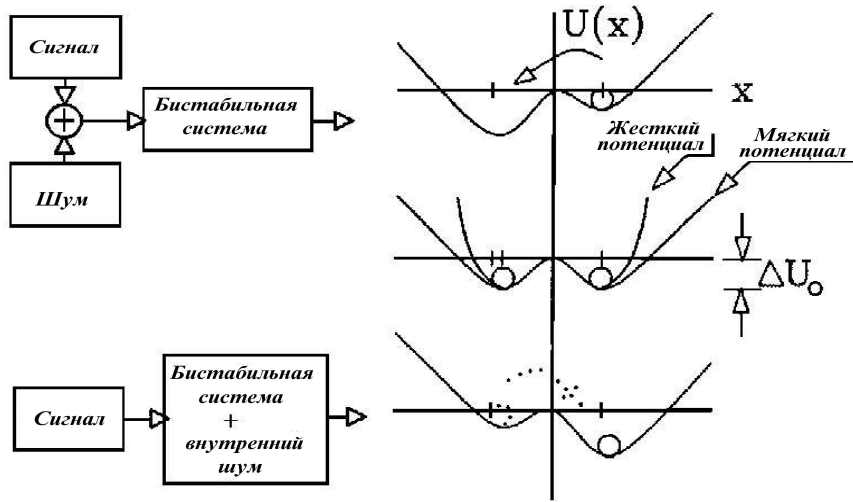


Рис. 3.2. Бистабильный потенциал под действием слабой периодической модуляции. Потенциал может иметь как "жесткую", так и "мягкую" формы. Частица, отмеченная шариком, может преодолеть потенциальный барьер ΔU_0 только при наличии внешнего или внутреннего шума

водит к малой модуляции высоты потенциального барьера ($\Delta U \simeq \Delta U_0 + A \sin \omega t$) (рис. 3.2), что проявляется вследствие экспоненциальной зависимости нелинейной модуляции скоростей (частот). На рис. 3.3 представлены сигналы на выходе бистабильной системы и спектр мощности отфильтрованного сигнала. В результате в спектре мощности выходного сигнала на частоте модуляции и ее нечетных гармониках (в случае симметричного потенциала) четко регистрируется δ -пик. Даже при малых амплитудах внешнего воздействия выходной сигнал включает периодическую компоненту.

В общем случае это неудивительно, так как любая динамика, даже линейная, имеет периодический отклик на периодическое воздействие. Однако, поведение отклика немонотонно. В нелинейной системе максимальная периодическая компонента наблюдается при конечной оптимальной интенсивности шума.

График зависимости отклика системы от интенсивности шума напоминает резонансную кривую для линейного диссипативного осциллятора. По этой причине рассматриваемый эффект получил название стохастического резонанса. Интенсивность шума играет

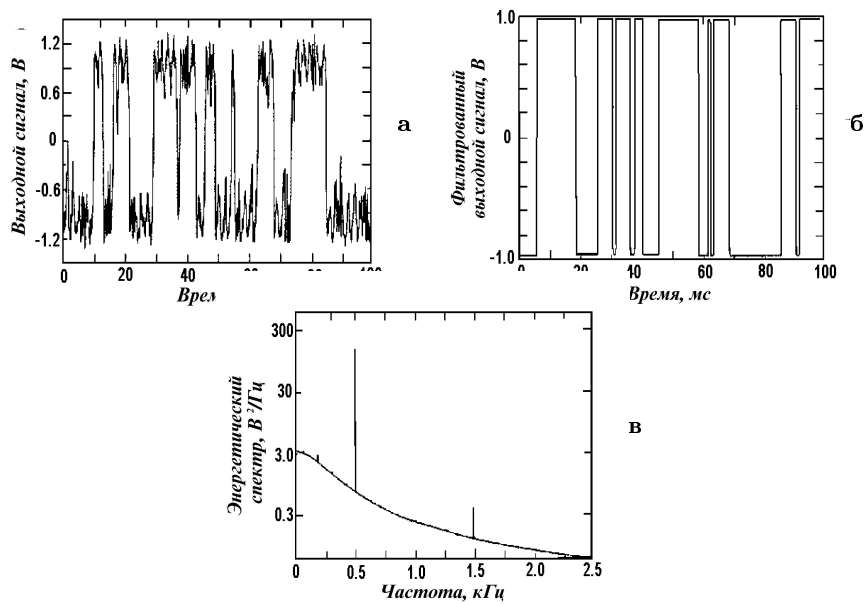


Рис. 3.3. Полный сигнал на выходе бистабильной системы с учетом внутриянной динамики (а), сигнал, отфильтрованный методом двух состояний, (б) и спектр мощности отфильтрованного сигнала (в)

роль разности между частотой воздействия и собственной частотой системы.

Данная замена имеет смысл, так как изменение уровня шума приводит к совпадению временных масштабов на низких частотах, меньших скорости релаксации. Рассмотрим невозмущенный временной масштаб $1/r_K$ как функцию интенсивности шума D . При малой интенсивности шума средние времена выхода достаточно велики и намного превышают период сигнала модуляции. При высоком уровне шума за время одного периода сигнала система с высокой степенью вероятности совершит многократные переключения. Варьируя интенсивность шума, можно обеспечить режим, когда среднее время переходов через барьер будет близко к периоду модулирующего сигнала. Переключения системы будут происходить в среднем с частотой внешней периодической силы. Таким образом, путем изменения уровня шума можно настроить стохастическую бистабильную систему в режим максимального усиления модулирующего сигнала и отношения сигнал/шум.

Это было подтверждено теоретически и экспериментально во многих случаях для достаточно слабых сигналов. Отметим, что в этом приближении собственная динамика системы не зависит от значения амплитуды внешнего воздействия, как и в случае обычного резонанса в линейном осцилляторе. В разделе 3.3 будут приведены ограничения на данное рассмотрение, включая случай, когда внешняя динамика модулирует внутреннюю.

3.1.3 Характеристики эффекта СР

Трактовка физического механизма СР и его определение во многом зависят от того, какие количественные характеристики этого явления вычисляются аналитически, моделируются на компьютере или измеряются в физическом эксперименте. В данном разделе мы рассматриваем гармоническое воздействие на зашумленную бистабильную систему. В этом случае в качестве основных характеристик СР используются коэффициент усиления по мощности η [50, 51], отношение сигнал/шум (SNR) [19] и плотность распределения времен пребывания частицы в одной из потенциальных ям $p(\tau)$ [52, 53]. Отметим, что для получения стационарных значений перечисленные величины нужно усреднить по начальной фазе входного гармонического сигнала (см. для сравнения раздел 1.2.2).

При аналитических расчетах усиление определяется как отношение мощности сигнала на выходе к мощности сигнала на входе:

$$\eta = P_{\text{out}}/P_{\text{in}}, \quad (3.1)$$

где P дается множителями при δ -функциях на частоте сигналов выхода и входа соответственно.

В случае слабого входного гармонического сигнала частоты Ω спектральная мощность на выходе представляется в виде сигнальной части и шумового пьедестала $G_{x,x}^{(0)}(\omega)$. Сигнальная составляющая имеет вид дельта-функций с центром на частотах $\pm\Omega$: $\delta(\omega - \Omega) + \delta(\omega + \Omega)$. В этом случае P_{out} – это интегральная плотность мощности, содержащаяся в дельта-пиках на частотах $\pm\Omega$ в спектре мощности выходного сигнала. Общая мощность входного сигнала $P_{\text{in}} = A^2$.

В численном и физическом экспериментах мощности сигнала определяются как интеграл от спектральной плотности мощности в полосе измеряемых частот. В экспериментах с гармоническими сигналами полоса частот соответствует $\Omega \pm \Delta\omega$, где частота

$\Delta\omega$ определяет частотное разрешение в измерениях. Спектральная плотность мощности на частоте сигнала Ω представляется в форме регулярной и шумовой компонент. Мощность сигнала находится соответствующим вычитанием: $P_s = 2[G_{x,x}(\Omega) - \langle G_{x,x}^{(0)} \rangle] \Delta\omega$, где $\langle G_{x,x}^{(0)} \rangle$ – спектральная плотность шума, получаемая усреднением по соседним частотам.

Отношение сигнал/шум (SNR) определяется как отношение спектральных плотностей мощности сигнала и шума на частоте сигнала [12]. В случае гармонического сигнала имеем

$$\text{SNR} = \frac{1}{G_{x,x}^{(0)}(\Omega)} 2 \int_{\Omega-\Delta\omega}^{\Omega+\Delta\omega} G_{x,x}(\omega) d\omega, \quad (3.2)$$

где шумовой пьедестал $G_{x,x}^{(0)}$ вычисляется на частоте сигнала $\omega = \Omega$. При аналитических расчетах в выражении для SNR используется предел $\Delta\omega \rightarrow 0$. При гармоническом сигнале на входе такому определению в эксперименте отвечает отношение высоты спектральной линии сигнала модуляции над шумовым основанием к высоте шумового основания в спектре выходного сигнала. Результаты представляются либо в линейном (в единицах), либо в логарифмическом (децибелы) масштабах.

В результате случайных переключений сигнал на выходе стохастической бистабильной системы (без учета движений внутри потенциальной ямы) представляет собой случайный телеграфный процесс (см. рис. 3.3(б)). Время пребывания в одной из потенциальных ям – случайная величина, плотность распределения вероятностей которой $p(\tau)$ в отсутствие модуляции есть экспоненциально спадающая функция [52]. Введение сигнала модуляции приводит к структурированию плотности распределения $p(\tau)$, приобретающей вид последовательности гауссообразных пиков, максимумы которых расположены над значениями времени $\tau = nT_s/2$, $n = 1, 3, 5, \dots$, где T_s – период сигнала модуляции. Максимумы $p(\tau)$ экспоненциально спадают с ростом n , и в режиме СР наибольшему максимуму отвечает условие $n = 1$. При этом, естественно, среднее время пребывания $\langle \tau \rangle$ будет наиболее близко к полупериоду сигнала модуляции. Таким образом, описание СР на основе распределения времен пребывания отражает эффект синхронизации переключений системы внешним периодическим воздействием [53, 54]. Так как статистические свойства телеграфного сигнала зависят от

интенсивности шума, структурой плотности распределения можно управлять путем вариации шума. Отсюда возникает иной, альтернативный, подход к анализу механизмов эффекта СР, основанный на исследовании статистики времен пребывания.

Характеристики и свойства СР, безусловно, должны зависеть от структуры сигналов, воздействующих на нелинейную систему. Это в одинаковой степени относится как к информационному сигналу, так и к шумовому. Сигнал модуляции может быть гармоническим или многочастотным, а может представлять собой узкополосный случайный процесс [55] или быть чисто шумовым. Шумовой сигнал может по своим статистическим свойствам быть близким к белому шуму, а может иметь конечное время корреляции и ограниченный спектр [56, 57]. В зависимости от свойств сигнала, шума и конкретных свойств нелинейных систем эффект СР будет характеризоваться специфическими свойствами. В то же время, независимо от свойств системы и структуры сигналов, явлению СР присущи общие фундаментальные свойства, проявляющиеся в увеличении степени порядка в выходном сигнале в сравнении с сигналом на входе [9, 15, 58].

3.1.4 Отклик на слабый сигнал. Теоретические подходы

Рассмотрим модель передемпфированного бистабильного осциллятора, ставшую канонической для исследования СР. Уравнение движения в безразмерных переменных имеет вид

$$\dot{x} = x - x^3 + A \cos(\Omega t + \phi) + \sqrt{2D} \xi(t) \quad (3.3)$$

и описывает движение броуновской частицы (в пределе большого трения) в двухямном потенциале $U_0(x) = -x^2/2 + x^4/4$ под действием белого шума $\xi(t)$ интенсивности D и периодической силы $f(t) = A \cos(\Omega t + \phi)$. Соответствующее уравнение Фоккера – Планка (УФП) для плотности вероятности $p(x, t; \phi)$ имеет вид

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [(x - x^3 + A \cos(\Omega t + \phi))p] + D \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}. \quad (3.4)$$

Это уравнение может быть записано в операторной форме:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = [\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{ext}}(t)] p, \quad (3.5)$$

где $\mathcal{L}_0 = -\frac{\partial}{\partial x}(x - x^3) + D \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ – невозмущенный оператор Фоккера – Планка ($A = 0$), а $\mathcal{L}_{\text{ext}}(t) = -A \cos(\Omega t + \phi) \frac{\partial}{\partial x}$ описывает периодическое возмущение.

Бурное развитие исследований в области СР потребовало создания общей теории стохастических диффузионных процессов с периодически меняющимися коэффициентами сноса и диффузии. Такая теория была предложена в работах [51, 59, 60]. Она представляла собой расширение теории Флоке на случай УФП с периодическими коэффициентами. Одним из основных выводов этой теории является тот факт, что вероятность в асимптотическом пределе $t_0 \rightarrow -\infty$ может быть представлена в виде ряда Фурье:

$$p_{\text{as}}(x, t; \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(x) \exp[i(n\Omega t + \phi)]. \quad (3.6)$$

Неоднородность во времени исключается путем усреднения по равномерно распределенной начальной фазе с результатом $\langle p_{\text{as}} \rangle_{\phi} = a_0(x)$. Трудности, связанные с периодической нестационарностью, формально могут быть преодолены путем расширения фазового пространства системы с помощью дополнительной переменной $\theta = \Omega t + \phi$. Формально процесс становится стационарным по (x, θ) , и его стационарная плотность согласуется с предыдущим результатом, если проинтегрировать по θ .

Асимптотическое, но зависящее от времени среднее $\langle x(t) \rangle$ или нелинейный отклик стохастической системы на гармоническое воздействие, может быть представлен, исходя из (3.6), в следующем виде:

$$\langle x(t) \rangle_{\text{asy}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} M_n \exp[i(n\Omega t + \phi)], \quad (3.7)$$

где комплекснозначные амплитуды M_n являются функциями интенсивности шума, частоты сигнала Ω и его амплитуды A . Таким образом, нелинейный отклик стохастической системы на гармоническое воздействие представляет собой квазипериодический процесс с частотами, кратными частоте вынуждающей силы. Выходная мощность на основной частоте определяется $|M_1|^2$ для положительных и отрицательных Ω . Следовательно, коэффициент усиления по мощности η имеет вид [50]:

$$\eta = \left(\frac{2|M_1|}{A} \right)^2. \quad (3.8)$$

Аналитические выражения для коэффициента усиления и отношения сигнал/шум удается получить с помощью ряда приближений. Одним из основных является приближение малого сигнала, когда отклик стохастической системы на внешнюю силу можно считать линейным. Другие приближения накладывают ограничения на частоту сигнала. Ниже мы рассмотрим две приближенные теории СР: теорию двух состояний, предложенную в работе [61], и теорию линейного отклика [62–65].

3.1.5 Теория двух состояний

Теория двух состояний, или адиабатическая теория [61], явилась первым теоретическим описанием эффекта СР. Благодаря своей универсальности, простоте и элегантности она используется во многих исследованиях по СР.

Рассмотрим симметричную бистабильную систему, переменная состояния которой может принимать только два дискретных значения: $\sigma(t) = \pm x_m$.

$$p(x, t|x_0, t_0) = p(\sigma, t|\sigma_0, t_0) \delta(\sigma - x_m) + p(-\sigma, t|\sigma_0, t_0) \delta(\sigma + x_m). \quad (3.9)$$

$p(\sigma, t|\sigma_0, t_0)$ – условные вероятности нахождения системы в одном из состояний σ в момент времени t , удовлетворяющие условиям нормировки.

Обозначив через $W_\sigma(t)$ вероятности переходов из одного состояния в другое в единицу времени, получим управляющее уравнение (сравни с (1.65)):

$$\frac{dp(\sigma, t|\sigma_0, t)}{dt} = -W_\sigma(t) p(\sigma, t|\sigma_0, t) + W_{-\sigma}(t) p(-\sigma, t|\sigma_0, t). \quad (3.10)$$

Используя условия нормировки, это уравнение может быть решено аналитически при заданной начальной плотности.

В предположении достаточно низких частот по сравнению с локальной динамикой вероятности переходов для бистабильной динамики в присутствии периодического воздействия имеют следующий вид:

$$W_\sigma(t) = r_K \exp\left(-\frac{A\sigma}{D} \cos \Omega t\right). \quad (3.11)$$

В отсутствие сигнала ($A = 0$) плотности вероятностей переходов совпадают со скоростью Крамерса r_K . Для модели передемпфиро-

ванного бистабильного осциллятора (3.3), скорость Крамерса описывается законом

$$r_K = \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \exp\left(-\frac{1}{4D}\right). \quad (3.12)$$

Выражение (3.11) напоминает скорость Крамерса с периодически модулированным потенциалом $\Delta U_{\text{эф}} = \Delta U_0 \pm Ax_m \cos \Omega t$. Достаточно малые амплитуды $\Delta U_0 - A \ll D$ по-прежнему обеспечивают разделение временных масштабов между локальной и глобальной динамикой.

Знание условных вероятностей позволяет вычислить автокорреляционную функцию. Для упрощения исследования [61] сигнал предполагается слабым, $Ax_m \ll D$, что накладывает ограничение на D . В этом случае выражение (3.11) можно разложить в ряд Тейлора и удержать лишь линейные по амплитуде сигнала члены. В результате для условной вероятности получается выражение

$$p(\sigma, t | \sigma_0, t_0) = \frac{1}{2} \left[\exp[-2r_K(t - t_0)] \left\{ 2\delta_{\sigma_0, \sigma} - 1 - \frac{2r_K Ax_m \cos(\Omega t_0 + \psi)}{D\sqrt{4r_K^2 + \Omega^2}} \right\} + 1 + \frac{2r_K Ax_m \cos(\Omega t + \psi)}{D\sqrt{4r_K^2 + \Omega^2}} \right], \quad (3.13)$$

где $\psi = -\arctan(\Omega/2r_K)$.

Наибольший интерес представляют среднее значение, характеризующее отклик системы, и спектральная плотность, необходимая для оценки отношения сигнал/шум. Из (3.9) можно получить первый условный момент $\langle x(t) | x_0, t_0 \rangle = \int xp(x, t | x_0, t_0) dx$. В асимптотическом пределе $t_0 \rightarrow -\infty$ периодический отклик имеет вид:

$$\langle x(t) \rangle_{\text{ас}} = A_1(D) \cos[\Omega t + \psi(D)]. \quad (3.14)$$

Амплитуда $A_1(D)$ и фазовый сдвиг $\psi(D)$ зависят от интенсивности шума и определяются выражениями

$$A_1(D) = \frac{Ax_m^2}{D} \frac{2r_K(D)}{\sqrt{4r_K^2(D) + \Omega^2}}, \quad (3.15)$$

$$\psi(D) = -\arctan \frac{\Omega}{2r_K(D)}. \quad (3.16)$$

Зная амплитуду отклика на выходе, определяем коэффициент усиления по мощности:

$$\eta = \frac{4r_K^2 x_m^4}{D^2(4r_K^2 + \Omega^2)}. \quad (3.17)$$

Нетрудно видеть, что коэффициент усиления как функция интенсивности шума D имеет единственный максимум.

Таким же образом находится условная автокорреляционная функция $\langle x(t + \tau)x(t)|x_0, t_0 \rangle = \int \int xyp(x, t + \tau|y, t)p(y, t|x_0, t_0)dx dy$ и ее асимптотический предел при $t_0 \rightarrow -\infty$. Однако в силу периодической модуляции плотностей вероятности переходов даже в асимптотическом пределе автокорреляционная функция зависит не только от временного сдвига τ , но и периодически от времени t . Поэтому для вычисления спектральной плотности необходимо провести дополнительное усреднение по периоду внешней силы. Отметим, что такая процедура эквивалентна усреднению по ансамблю случайной начальной фазы сигнала и соответствует экспериментальным методам измерения спектральных плотностей и корреляционных функций. После преобразования Фурье выражение для спектральной плотности $G_{\sigma, \sigma}(\omega)$ имеет вид

$$G_{\sigma, \sigma}(\omega) = G_{\sigma, \sigma}^{(0)}(\omega) + \frac{\pi}{2} A_1^2(D) [\delta(\omega - \Omega) + \delta(\omega + \Omega)]. \quad (3.18)$$

Она содержит две составляющие: периодическую, представленную дельта-функцией с весом, пропорциональным коэффициенту усиления, и шумовую $G_{\sigma, \sigma}^{(0)}(\omega)$:

$$G_{\sigma, \sigma}^{(0)}(\omega) = \frac{4r_K x_m^2}{4r_K^2 + \omega^2} \left(1 - \frac{A_1^2(D)}{2x_m^2} \right). \quad (3.19)$$

Как видно из последнего выражения, шумовой пьедестал в свою очередь представлен суммой невозмущенного спектра (при $A = 0$) и некоторым дополнительным членом порядка A^2 . Появление дополнительного члена происходит вследствие наличия сигнала, понижающего шумовой пьедестал. Это возникает в силу использования теоремы Парсеваля в теории двух состояний.

Отношение сигнал/шум для модели двух состояний получается в виде

$$\text{SNR} = \pi \left(\frac{Ax_m}{D} \right)^2 r_K \quad (3.20)$$

и имеет единственный максимум при $D = D_{max}^{SNR} = \Delta U/2 = 1/4$. Последнее выражение не дает динамического объяснения совпадения временных масштабов в случае максимального усиления сигнала, как показывалось выше. В пределах низких и высоких частот выражения для коэффициента усиления имеют вид соответственно:

$$\eta_{\Omega \rightarrow 0} = \frac{4x_m^4}{D^2}, \quad \eta_{\Omega \rightarrow \infty} = \frac{4r_K^2 x_m^4}{D^2 \Omega^2}. \quad (3.21)$$

Получаемая на выходе кривая зависимости $\eta(D)$ в соответствии с (3.17) всегда находится ниже этих двух пределов. Совпадение пределов можно использовать для аппроксимации положения максимума коэффициента усиления, дающего $2r_K^2 = \Omega$ с результирующей D_{max}^{SPA} , который явно показывает динамическую природу [12].

Теория линейного отклика. Согласно теории линейного отклика, отклик нелинейной стохастической системы $\langle x(t) \rangle$ на слабое внешнее воздействие $f(t)$ в асимптотическом пределе больших времен определяется линейным интегральным соотношением [62, 63, 66]

$$\langle x(t) \rangle_{asy} = \langle x \rangle_{st} + \int_{-\infty}^{\infty} \kappa(t - \tau, D) f(\tau) d\tau. \quad (3.22)$$

где $\langle x \rangle_{st}$ – среднее значение невозмущенной переменной состояния системы ($f(t) = 0$), а $f(t)$ – внешняя возмущающая сила. Положим для простоты $\langle x \rangle_{st} = 0$, что выполняется для симметричных относительно начала координат бистабильных систем и, в частности, для базовой модели (3.3). Функция $\kappa(t)$ в (3.22) является функцией отклика, а сделанное предположение является основополагающим в теории линейного отклика.

Отношение (3.22) имеет место для произвольно слабых возмущений, но без потери общности можно рассматривать и случай гармонического воздействия. Так как $\kappa(s) = 0$ для $s < 0$, то отклик системы выражается через восприимчивость $\chi(\omega)$, которая является Фурье-образом функции отклика:

$$\langle x(t) \rangle = A |\chi(\omega)| \cos(\Omega t + \psi), \quad (3.23)$$

где фазовый сдвиг ψ определен выражением

$$\psi = -\arctan \frac{\text{Im} \chi(\Omega)}{\text{Re} \chi(\Omega)}. \quad (3.24)$$

Коэффициент усиления определяется как

$$\eta = |\chi(\omega)|^2. \quad (3.25)$$

Как и в рамках теории двух состояний, спектральная плотность мощности состоит из шумового пьедестала $G_{xx}^{(0)}(\omega)$ без учета подавления сигнала и периодического выходного сигнала. Последний определяет δ -пики с весом, равным усилению, и для спектральной плотности мощности получаем:

$$G_{x,x}(\omega) = G_{x,x}^{(0)}(\omega) + \frac{\pi}{2} A^2 |\chi(\Omega)|^2 [\delta(\omega - \Omega) + \delta(\omega + \Omega)]. \quad (3.26)$$

Мощность на частоте $\omega = \Omega > 0$ представляет собой сумму множителей перед δ -пиками для $\pm\Omega$. В рамках теории линейного отклика SNR находится в соответствии с (3.2)

$$\text{SNR} = \frac{\pi A^2 |\chi(\Omega)|^2}{G_{x,x}^{(0)}(\Omega)}, \quad (3.27)$$

и восприимчивость $\chi(\omega)$ используется во всех выражениях как основная величина.

Теория линейного отклика представляет элегантное решение для определения $\chi(\omega)$. Это решение может быть получено через флуктуационно–диссипационную теорему (ФДТ). В работе Кубо [66] было впервые показано, что для равновесных систем функция отклика в случае слабых возмущений связана с корреляционной функцией *невозмущенной* системы. Позже это важное соотношение обобщили Хенги и Томас [63] на широкий класс стохастических процессов, когда в соответствующем управляющем уравнении используется оператор возмущения градиентного типа, как в выражении (3.4). Таким образом, теория линейного отклика должна быть применима к эффекту СР, что было доказано многочисленными исследованиями. Рассмотрим приложение теории линейного отклика для случая передемпфированного бистабильного осциллятора (3.3).

Функция отклика $\kappa(t)$ связана с автокорреляционной функцией $c_{x,x}^{(0)}(t)$ невозмущенной системы следующим соотношением [50, 51]:

$$\kappa(t) = -\frac{\Theta(t)}{D} \frac{d}{dt} c_{x,x}^{(0)}(t), \quad (3.28)$$

где $\Theta(t)$ – функция Хевисайда. Таким образом, ФДТ связывает два принципиально различных процесса: статистические свойства в возмущенном состоянии с линейным откликом на внешнее воздействие. Для вычисления восприимчивости необходимо получить выражение для невозмущенной автокорреляционной функции $c_{x,x}^{(0)}(\tau, D)$.

Точное выражение для невозмущенной автокорреляционной функции $c_{x,x}^{(0)}(\tau, D)$ получить не удастся, однако существует несколько подходов для ее приближенной оценки. Наиболее точный основан на разложении по собственным функциям оператора Фоккера – Планка [41, 67]. При этом корреляционная функция представляется в виде ряда экспонент $g_j \exp(-\lambda_j \tau)$, где λ_j – собственные значения оператора Фоккера – Планка, g_j – коэффициенты, вычисляемые усреднением соответствующих собственных функций по невозмущенному равновесному распределению.

В простейшем случае при расчете корреляционной функции можно учесть наименьшее ненулевое собственное значение λ_m , которое связано со скоростью Крамерса выхода из потенциальной ямы:

$$\lambda_m = 2r_K = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \exp\left(-\frac{1}{4D}\right). \quad (3.29)$$

Выражения для корреляционной функции и спектральной плотности невозмущенной системы в этом случае принимают вид

$$c_{x,x}^{(0)}(\tau, D) \approx \langle x^2 \rangle_{st} \exp(-\lambda_m \tau), \quad G_{x,x}^{(0)}(\omega) = \frac{2\lambda_m \langle x^2 \rangle_{st}}{\lambda_m^2 + \omega^2}, \quad (3.30)$$

где $\langle x^2 \rangle_{st}$ – стационарное значение второго кумулянта невозмущенной системы. Такая аппроксимация соответствует приближению двух состояний и учитывает лишь динамику переходов между метастабильными состояниями системы.

Учет внутриямной динамики в корреляционной функции осуществляется путем включения экспоненциального члена в выражение (3.30), описывающее быстрые флуктуации внутри потенциальных ям. В этом случае корреляционная функция описывает как глобальную (показатель λ_m), так и локальную внутриямную динамику [51]:

$$c_{x,x}^{(0)}(\tau, D) = g_1 \exp(-\lambda_m \tau) + g_2 \exp(-\alpha \tau), \quad (3.31)$$

где показатель α определяет скорости релаксации в минимумах потенциала. Для конкретного примера (3.3) $\alpha = 2$. Коэффициенты $g_{1,2}$ в формуле (3.31) определяются из выражения для корреляционной функции и ее производной при $\tau = 0$ и имеют вид [51]

$$g_1 = \langle x^2 \rangle_{st} - g_2, \quad g_2 = \frac{\lambda_m \langle x^2 \rangle_{st}}{\lambda_m - \alpha} + \frac{\langle x^2 \rangle_{st} - \langle x^4 \rangle_{st}}{\lambda_m - \alpha}. \quad (3.32)$$

Для восприимчивости в приближении двух состояний получаем выражение

$$\chi(\omega, D) = \frac{1}{D} \frac{\lambda_m \langle x^2 \rangle_{st}}{\lambda_m^2 + \omega^2} (\lambda_m - i\omega), \quad (3.33)$$

а с учетом внутриямной динамики – выражение

$$\chi(\omega, D) = \frac{1}{D} \left(\frac{g_1 \lambda_m^2}{\lambda_m^2 + \omega^2} + \frac{g_2 \alpha^2}{\alpha^2 + \omega^2} \right) - i\omega \left(\frac{g_1 \lambda_m}{\lambda_m^2 + \omega^2} + \frac{g_2 \alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \right). \quad (3.34)$$

Зная восприимчивость и спектральную плотность невозмущенной системы, легко получить соотношения для коэффициента усиления (3.25) и отношения сигнал/шум (3.27) [51]. В приближении двух состояний они имеют такой же вид, как и в адиабатической теории двух состояний ((3.17,3.20):

$$\eta(\Omega, D) = \frac{1}{D^2} \frac{(\langle x^2 \rangle_{st} \lambda_m)^2}{\lambda_m^2 + \Omega^2}, \quad \text{SNR} = \frac{\pi A^2}{2D^2} \langle x^2 \rangle_{st} \lambda_m. \quad (3.35)$$

С учетом внутриямной динамики выражения для коэффициента усиления и отношения сигнал/шум приобретают вид [51]

$$\eta(\Omega, D) = \frac{(g_1 \lambda_m)^2 (\alpha^2 + \Omega^2) + (g_2 \alpha)^2 (\lambda_m^2 + \Omega^2) + 2g_1 g_2 \alpha \lambda_m (\alpha \lambda_m + \Omega^2)}{D^2 (\lambda_m^2 + \Omega^2) (\alpha^2 + \Omega^2)}, \quad (3.36)$$

$$\text{SNR} = \frac{\pi A^2}{2D^2} \frac{(g_1 \lambda_m)^2 (\alpha^2 + \Omega^2) + (g_2 \alpha)^2 (\lambda_m^2 + \Omega^2) + 2g_1 g_2 \alpha \lambda_m (\alpha \lambda_m + \Omega^2)}{g_2 \alpha (\lambda_m^2 + \Omega^2) + g_1 \lambda_m (\alpha^2 + \Omega^2)}. \quad (3.37)$$

Как видно из рис. 3.4а, оба приближения дают одинаковые результаты в области максимальных значений усиления. Различия появляются лишь при малых интенсивностях шума. Теория, принимающая во внимание только глобальную динамику переходов,

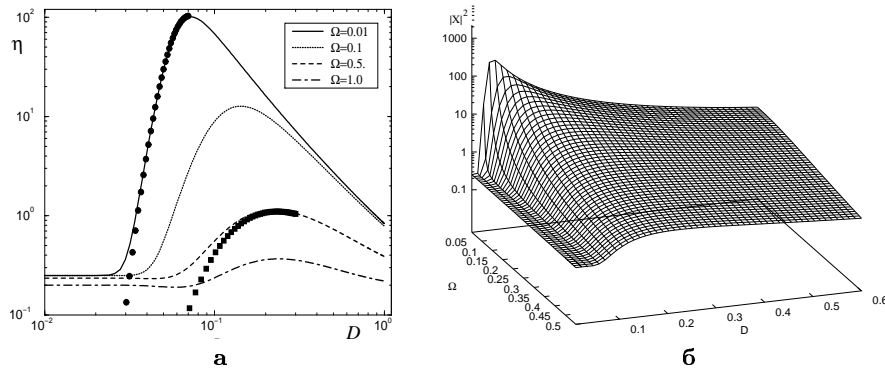


Рис. 3.4. (а) Зависимость коэффициента усиления (3.36) от интенсивности шума для разных значений частоты внешнего периодического воздействия (а) (зависимости, определяемые без учета внутриямной динамики (3.35), показаны символами \bullet и \blacksquare); (б) зависимость модуля восприимчивости от интенсивности шума D и частоты сигнала Ω

дает нулевое значение η при $D \rightarrow 0$. Учет внутриямной динамики дает правильный предел: $\eta(\Omega, D \rightarrow 0) = 1/(\alpha^2 + \Omega^2)$. В этом пределе среднее время перехода из одной потенциальной ямы в другую астрономически велико и за время, равное большому количеству периодов внешней силы, система не успевает переключиться. Таким образом, коэффициент усиления ведет себя согласно $1/(\alpha^2 + \Omega^2)$, как и в случае линейной системы с характерным временным масштабом $1/\alpha$.

При уменьшении частоты внешнего воздействия максимум усиления сдвигается в сторону меньших значений интенсивности шума. В случае малой интенсивности шума модуляция скорости перехода (но не барьера!) становится заметно сильнее, и, следовательно, сам коэффициент усиления увеличивается. На рис. 3.4б коэффициент усиления (3.36) (или квадрат абсолютного значения восприимчивости) показан как функция интенсивности шума и частоты внешнего сигнала. Из рис. 3.4 следует, что амплитудно-частотная характеристика системы имеет подъем в области низких частот. Это свойство определяется физической природой флуктуационных процессов в бистабильных системах, где энергия шума преобразуется в низкочастотную динамику случайных переходов между метастабильными состояниями. В результате спектр флуктуаций в области низких частот на выходе имеет вид Лоренциана с шириной, определяемой средней скоростью переходов Крамерса, которая ограничивается сверху временем релаксации внутри ям.

Зависимость отношения сигнал/шум от интенсивности шума (3.37) представлена на рис. 3.5. При малых значениях D SNR расходится, что объясняется вкладом модулируемой сигналом локальной динамики внутри потенциальных ям [61]. Для достаточно низкочастотных воздействий максимум отношения сигнал/шум достигается при $D \approx 1/8$ и практически не зависит от Ω . Однако с увеличением частоты Ω эффект СР вообще пропадает, так как отношение сигнал/шум становится монотонно убывающей функцией. Мы видим, что две различные меры СР – коэффициент усиления и отношение сигнал/шум – демонстрируют различное поведение при изменении частоты сигнала. Коэффициент усиления имеет максимум даже на достаточно высоких частотах сигнала, регистрируя СР, тогда как SNR показывает наличие эффекта лишь для достаточно низких частот.

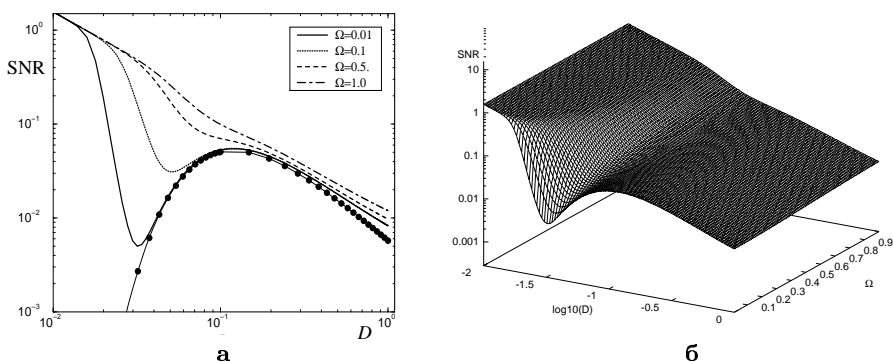


Рис. 3.5. (а) Зависимость отношения сигнал/шум (3.37) от интенсивности шума для разных значений частоты внешнего периодического воздействия (зависимость, определяемая без учета внутриямной динамики (3.33), показана символами \bullet); (б) зависимость отношения сигнал/шум от D и Ω

3.1.6 Усиленный массивом стохастический резонанс

На практике очень часто встречается ситуация, когда рассматриваются ансамбли связанных систем. В сравнении с предыдущим случаем, величина связи здесь выступает как новый управляющий параметр. Возникает вопрос: каким образом связь может оказывать влияние на характеристики СР?

Безусловно, для различных систем мы получим различные ответы. Но в ряде работ было показано, что при наличии параллельной

связи между стохастическими бистабильными системами коэффициент усиления мощности и SNR могут быть усилены [68–74]. В работе [75] введено понятие “усиленного массивом стохастического резонанса”, использованного для описания эффекта индуцированного наличием связи увеличения SNR, которое достигает максимума при конечной величине связи. Как и в случае большого шума, отклик системы становится слабым при сильной связи. Но помимо интенсивности шума в отдельном стохастическом резонаторе, величина связи также управляет СР.

Усиленный связью отклик в цепочках спинов. Проиллюстрируем данный эффект на основе результатов, полученных при исследовании цепочки связанных через ферромагнитное поле резонаторов с двумя состояниями [76, 77]. В данном случае широко используется динамика Глаубера стохастической модели Изинга [78].

Действительно, система связанных магнитных спинов явно демонстрирует эффект СР, как было показано в [79–81]. Связь создает барьер для переключений спинов. Таким образом, если на систему воздействует периодическая сила при данном значении степени связи, то для получения наилучшего периодического отклика системы необходимо выбрать оптимальную температуру. Однако с ростом степени связи величина пика в спектре мощности монотонно уменьшается, поэтому наилучший эффект достигается при слабой связи.

Альтернативный подход заключается в том, что связанная цепочка резонаторов с двумя состояниями может быть рассмотрена как модель связанных бистабильных элементов. В этом случае для отдельного несвязанного элемента существует барьер ΔU . Для каждого элемента справедлива вероятность перехода (3.11), которая периодически модулируется и зависит от шума. Связь между бистабильными элементами может быть введена в соответствии с Глаубером, который определяет параллельную (при $\gamma > 0$) и антипараллельную (при $\gamma < 0$) конфигурацию состояний.

Скорости для перехода $\sigma_i \rightarrow -\sigma_i$ i -го спина цепочки имеют вид

$$W_i(\sigma_i) = r_K(D) \left(1 - \sigma_i \frac{A}{D} \cos(\Omega t + \varphi_0) \right) \left(1 - \frac{\gamma}{2} (\sigma_{i-1} + \sigma_{i+1}) \sigma_i \right). \quad (3.38)$$

Они определяют динамику цепочки и должны быть учтены в управляющем уравнении:

$$\dot{p}(\bar{\sigma}) = \sum_k W_k(-\sigma_k) p(\dots, -\sigma_k, \dots) - \sum_k W_k(\sigma_k) p(\dots, \sigma_k, \dots), \tag{3.39}$$

где $p(\bar{\sigma}, t)$ – функция вероятности нахождения цепочки в конкретном состоянии $\bar{\sigma} = (\dots, \sigma_{k-1}, \sigma_k, \sigma_{k+1}, \dots)$ в момент времени t . Введем параметр связи спинов J через $\gamma = \tanh 2J/D$, который в отсутствие возмущений задает стационарное распределение модели Изинга.

Стохастический процесс может быть легко смоделирован численно. На рис. 3.6 приведены полученные численно реализации [82] (см. также [11]). Наилучший периодический отклик цепочки наблюдается, если $\Delta U = 0.25$ при $D \propto 0.5$ и $J \propto 0.6$.

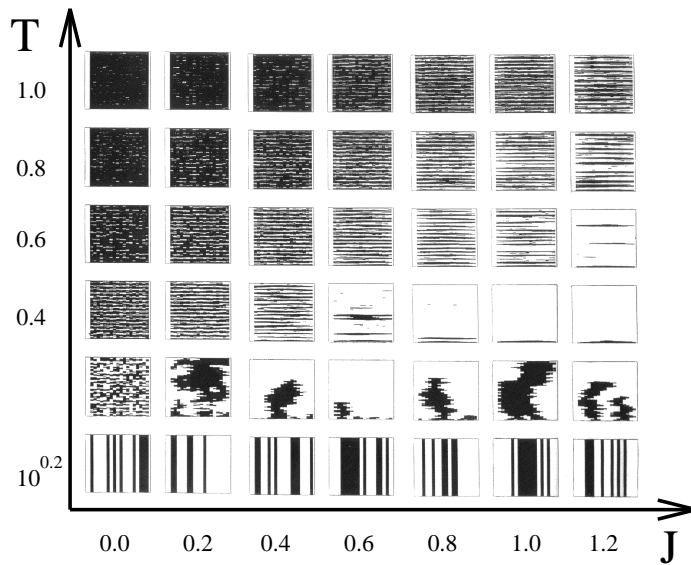


Рис. 3.6. Численные результаты для цепочки спинов в соответствии с вероятностями переходов (3.38). На каждой панели представлена цепочка, состоящая из ста элементов, во времени, изменяющемся снизу вверх. Темные и белые области соответствуют положению спинов, направленных соответственно вверх и вниз [9, 82]

Из управляющего уравнения можно определить коэффициент усиления, а корреляционная функция в невозмущенном случае дается динамикой Глаубера [78]. В свою очередь оба выражения получаются через уравнение для условного среднего из (3.39)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2r_K} \frac{d}{dt} \langle \sigma_i(t) | \bar{\sigma} \rangle &= -\langle \sigma_i(t) | \bar{\sigma} \rangle + \frac{\gamma}{2} [\langle \sigma_{i+1}(t) | \bar{\sigma} \rangle + \langle \sigma_{i-1}(t) | \bar{\sigma} \rangle] \\ &+ \frac{A}{D} \left(1 - \frac{\gamma}{2} (r_{i-1,i} + r_{i,i+1}) \right) \cos(\Omega t + \varphi_0). \end{aligned} \quad (3.40)$$

с зависящим от времени $r_{i,j}(t) = \langle \sigma_i(t) \sigma_j(t) \rangle$.

Остановимся кратко на невозмущенном случае ($A = 0$). Решение уравнения (3.40) ($\tau \geq 0$) есть

$$\langle \sigma_i(t + \tau) | \bar{\sigma}(t) \rangle = \exp(-2r_K \tau) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sigma_m(t) I_{i-m}(2\gamma r_K \tau), \quad (3.41)$$

где I_n – модифицированная функция Бесселя. Если подставить (3.41) в уравнение

$$\langle \sigma_i(t) \sigma_j(t + \tau) \rangle = \sum_{\bar{\sigma}} \langle \sigma_j(t + \tau) | \bar{\sigma}(t) \rangle \sigma_i p(\bar{\sigma}, t), \quad (3.42)$$

то получим

$$\langle \sigma_i(t) \sigma_j(t + \tau) \rangle = \exp(-2r_K \tau) \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{i,m}(t) I_{i-m}(2\gamma r_K \tau). \quad (3.43)$$

Если $i \neq j$ ($r_{i,i} = 1$), то для вторых моментов в пределе $A = 0$ можно получить

$$\frac{1}{2r_K} \frac{d}{dt} r_{i,j} = -2r_{i,j} + \frac{\gamma}{2} (r_{i,j-1} + r_{i,j+1} + r_{i-1,j} + r_{i+1,j}). \quad (3.44)$$

В предположении изотропии и переводной инвариантности $r_{i,j}$ можно считать только функциями $\Delta = |i - j|$. Тогда (3.44) имеет вид

$$\frac{1}{2r_K} \frac{d}{dt} r_{\Delta} = -2r_{\Delta} + \gamma (r_{\Delta-1} + r_{\Delta+1}) \quad (3.45)$$

и $r_0 = 1$. В асимптотическом стационарном пределе данное выражение дает рекуррентное соотношение, которое разрешается относительно $r_{\Delta} = \rho^{\Delta}$, где ρ определяется из уравнения

$$\rho^2 - 2\gamma^{-1}\rho + 1 = 0. \quad (3.46)$$

С физической точки зрения решение имеет вид [78]

$$\rho = (1 - \sqrt{1 - \gamma^2})\gamma^{-1} = \tanh(J/T). \quad (3.47)$$

Стационарная корреляционная функция Глауберовой цепочки спинов может быть записана для произвольного τ следующим образом:

$$\langle \sigma_i(t) \sigma_j(t + \tau) \rangle = \exp(-2r_K |\tau|) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \eta^{|i-j+m|} I_m(2\gamma r_K |\tau|). \quad (3.48)$$

Полученное выражение после преобразования Фурье дает спектр шумового пьедестала.

Условные средние вычисляются асимптотически при $t_0 \rightarrow -\infty$. Так как $r_{i,j}$ в (3.40) умножаются на A/D , то в рамках теории линейного отклика достаточно получить их асимптотические выражения из (3.47). Тогда в асимптотическом пределе решения $\langle \sigma_i(t) \rangle_{\text{asy}}$ условных средних можно записать в следующем виде:

$$\langle \sigma_i(t) \rangle_{\text{asy}} = A_1(D) \cos(\Omega t + \varphi_0 + \psi(D)). \quad (3.49)$$

Амплитуда $A_1(D)$ колебаний есть

$$A_1(D) = \frac{A}{D} \frac{2r_K \sqrt{1-\gamma^2}}{\sqrt{\Omega^2 + [4r_K(1-\gamma)]^2}}, \quad (3.50)$$

и фазовый сдвиг $\psi(D)$ определяется как

$$\tan \psi(D) = \frac{\Omega}{2r_K(1-\gamma)}. \quad (3.51)$$

Отклик локального спина, встроенного в цепочку, можно привести к результату, полученному в рамках приближения двух состояний (3.15), если произвести замену скорости $r_K \rightarrow r_K(1-\gamma)$ и нормировать все выражение на $\sqrt{(1+\gamma)/(1-\gamma)}$.

Коэффициент усиления приведен на рис. 3.7 и может быть записан в следующем виде:

$$\eta = \frac{\eta_s}{1 + \frac{\Omega^2}{4r_K^2 [1 - \tanh(\frac{2J}{D})]^2}}, \quad (3.52)$$

где

$$\eta_s = \frac{1}{D^2} \exp\left(\frac{4J}{D}\right) \quad (3.53)$$

представляет собой статический отклик цепочки на постоянное воздействие. С увеличением связи J статический отклик растет, тогда

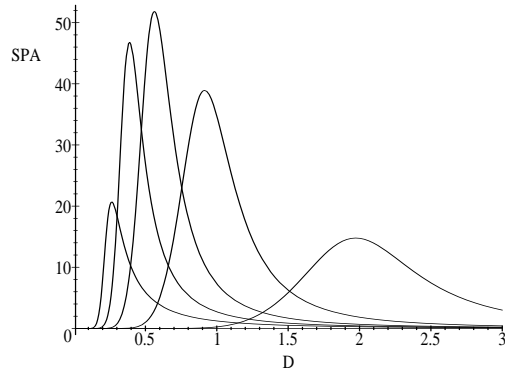


Рис. 3.7. Коэффициент усиления как функция интенсивности шума D для различных значений параметра связи J . Слева направо: $J = 0, 0.25, 0.5, 1.0, 2.5$ ($\Omega = 0.02$)

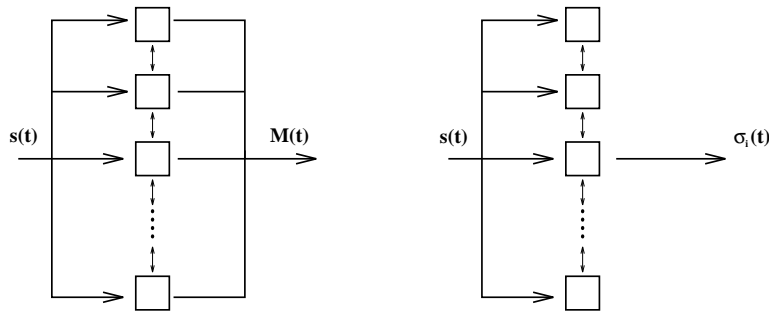


Рис. 3.8. Различные схемы связанных осцилляторов. Тогда как на левой схеме для глобального выходного сигнала SNR уменьшается монотонно, отклик отдельного элемента цепочки с ростом связи демонстрирует оптимальную степень связи для наилучшего SNR

как второй член в (3.52) оказывается неспособным следовать сигналу. Чем больше частота, тем меньше вес дельта-пики в спектре. Обе зависимости имеют колоколообразную форму для коэффициента усиления, так как статический префактор растет линейно по γ , а динамический отклик уменьшается пропорционально γ^{-2} .

При рассмотрении отношения сигнал/шум необходимо принять во внимание две различных схемы расположения отклика, как показано на рис. 3.8.

Для суммарного выходного сигнала

$$M(t) = \sum_i^N \sigma_i(t) \quad (3.54)$$

шумовая часть спектра может быть явно вычислена [78] в пределе бесконечной цепочки $N \rightarrow \infty$. SNR для каждого элемента монотонно уменьшается с увеличением связи

$$\text{SNR}_M = \pi \frac{A^2}{D^2} r_K \sqrt{1 - \gamma^2}. \quad (3.55)$$

На рис. 3.9 представлены зависимости SNR отдельного элемента цепочки от интенсивности шума для различных значений степени связи. Можно наблюдать усиленный массивом отклик. При среднем значении параметра связи отдельный элемент цепочки демонстрирует большую величину отношения сигнал/шум по сравнению с несвязанным резонатором $J = 0$, что является результатом теории МакНамара–Вейзенфельда (3.33).

Для низко-частотного и высоко-частотного пределов отношение сигнал/шум отдельного элемента цепочки дается следующими выражениями:

$$\text{SNR}_{\Omega \rightarrow 0} = \text{SNR}_0 (1 + \gamma)^2 = \text{SNR}_0 \left(\tanh \left(\frac{2J}{D} \right) + 1 \right)^2, \quad (3.56)$$

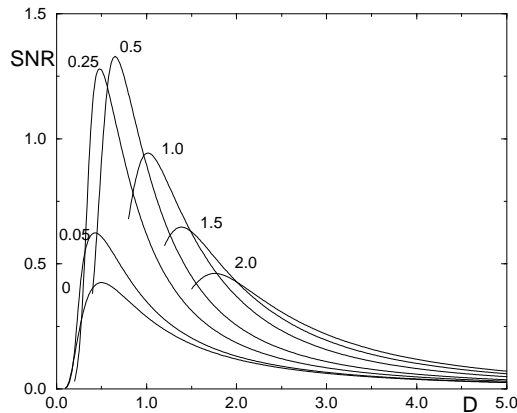


Рис. 3.9. SNR отдельного элемента, вложенного в бесконечную цепочку, как функция D для различных значений параметра связи J ($\Omega = 0.02$)

$$\text{SNR}_{\Omega \rightarrow \infty} = \text{SNR}_0 \sqrt{1 - \gamma^2} = \text{SNR}_0 \cosh^{-1} \left(\frac{2J}{D} \right), \quad (3.57)$$

где SNR_0 есть отношение сигнал/шум для исчезающе малой связи и идентичен отношению сигнал/шум в рамках модели двух состояний. Так как SNR для конечных частот не сможет никогда превысить значение выражения для низких частот, то можно найти верхний предел индуцированного массивом CP. Индуцированное массивом улучшение SNR ограничивается величиной 4 по сравнению с несвязанным элементом.

Стохастический резонанс движения фронта. Типичной ситуацией, которая наблюдается в системах с двумя устойчивыми фазами или в бистабильной диффузионно связанной динамике, является распространение фронта. Фронт представляет собой волну перехода между двумя состояниями, разделяющую две фазы узкой движущейся границей. В рамках данной модели исследуются многочисленные проблемы физики высоких энергий, структурных фазовых переходов, химической динамики и динамики магнетизма [83–89].

Рассмотрим бистабильную систему "реакция–диффузия", идентичную уравнению Ландау–Гинзбурга:

$$\tau \frac{\partial u(r, t)}{\partial t} = f(u) + r_0^2 \frac{\partial^2 u(r, t)}{\partial r^2} = 2u(r, t)(1 - u(r, t)^2) + r_0^2 \frac{\partial^2 u(r, t)}{\partial r^2}. \quad (3.58)$$

Обозначим плотность бистабильной среды через $u(r, t)$, которая имеет две однородные устойчивые неподвижные точки $u_{1,3} = \pm 1$ и одну неустойчивую $u_2 = 0$. В уравнении (3.58) τ обозначает характерный временной масштаб эволюции, а r_0 – величину диффузии.

При наложении граничных условий $u(r \rightarrow \pm\infty) = u_{1,3}$ можно установить одиночный фронт перехода от u_1 к u_3 [84, 88, 89]. Узкая граница (интерфейс), имеющая толщину l порядка r_0 , разделяет две области с однородными u_1 и u_3 и движется со скоростью c . Общее выражение для скорости имеет вид [90]:

$$c = \frac{\int_{u_1}^{u_3} f(u) du}{\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial u^0}{\partial r} \right)^2 dr}, \quad (3.59)$$

где u^0 – решение уравнения (3.58) с заданными граничными условиями. Если задать функцию $f(u)$ в виде полинома третьей степени, то решение хорошо известно [91]:

$$u^0(r, t) = u_1 + (u_3 - u_1) \frac{1}{1 + \exp[(r - ct)/l]}. \quad (3.60)$$

Скорость может быть вычислена как $c = \frac{r_0}{\tau}(u_3 + u_1 - 2u_2)$, и толщина границы $-l = r_0/(u_1 - u_3)$. При определенном выборе функций в уравнении (3.58) фронт будет находиться в состоянии покоя, $c = 0$, $u^0 = u^0(r) = \tanh(r/r_0)$, и ширина границы l определяется величиной диффузии через выражение $l = r_0/2$.

Решение (3.60) устойчиво относительно флуктуаций стационарного профиля фронта и особенно устойчиво к сдвигам положения фронта. Оба условия определяются спектром собственных значений в рамках линейной теории устойчивости решения для фронта. В результате получаем одно исчезающе малое собственное значение, принадлежащее моде Голдстоуна $u_r^0 = \partial u^0/\partial r$. Другое дискретное собственное значение и непрерывный спектр, описывающий отклонения фронта, строго отличны от нуля [84, 129].

Неудивительно, что дополнительное шумовое воздействие сначала оказывает влияние на положение фронта, который не имеет восстанавливающей силы. Скорость (3.59) становится стохастическим процессом, зависящим от времени, $c_\eta = c(\eta(t))$ с заданными свойствами, зависящими от налагаемого шума. В предположении слабого шума можно получить индуцированный шумом сдвиг и отличные от нуля вторые моменты, которые определяют диффузию положения фронта [92–95]. Таким образом, в первом приближении положение фронта ведет себя как броуновская частица.

Второй составляющей, управляющей положением фронта, являются стационарные неоднородности, например, неоднородности коэффициентов скорости, присутствующие в уравнении (3.58). Они могут удерживать фронт по центру или усиливать движение от отталкивающих областей. Сведя описание снова к положению фронта, получаем картину движения частицы во внешнем силовом поле.

В качестве “канонического” примера, введем двухямную модель неоднородности, с помощью которой моделируются две смежные притягивающиеся неоднородности. Данный тип неоднородности является типичным для различных физических ситуаций [96–99]. Вводя дополнительное шумовое воздействие, можно получить задачу Крамерса для положения фронта. Шум генерирует переходы интерфейса между двумя неоднородностями. Скорость переходов можно выразить через закон Аррениуса в случае достаточно силь-

ных неоднородностей и если расстояние между двумя центрами больше толщины фронта.

При добавлении временных периодических воздействий ситуация, описанная выше, представляет собой хороший прототип эффекта СР в распределенных системах. Эта задача была исследована в [100,101], а эффект был назван *солитонным стохастическим резонансом* [102]. Так как движение фронтов часто сопровождается излучением, то этот эффект может быть реализован в эксперименте. Механизм упорядоченных перескоков фронтов между центрами может быть использован в устройствах для передачи периодических сигналов и таким образом можно получать экспериментальные данные о существующих дефектах в исследуемой физической системе.

Две смежные области, притягивающие фронт, вводятся неоднородным членом в уравнении (3.58). Предположим, что локализованный двухямный потенциал определяется как

$$h(r) = \varepsilon \left(-\delta^2 r^2/2 + r^4/4 - 2\delta^4 \right), \quad |r| < 2\delta, \quad (3.61)$$

или равен 0. Параметр δ обозначает расстояние между двумя ямами и ε определяет глубину. Для достижения устойчивости в профиле фронта степень неоднородности $\varepsilon\delta^4$ должна быть мала, т.е. $2\varepsilon\delta^4 \ll 1$. Схема фронта в неоднородном потенциале $h(r)$ показана на рис. 3.10а.

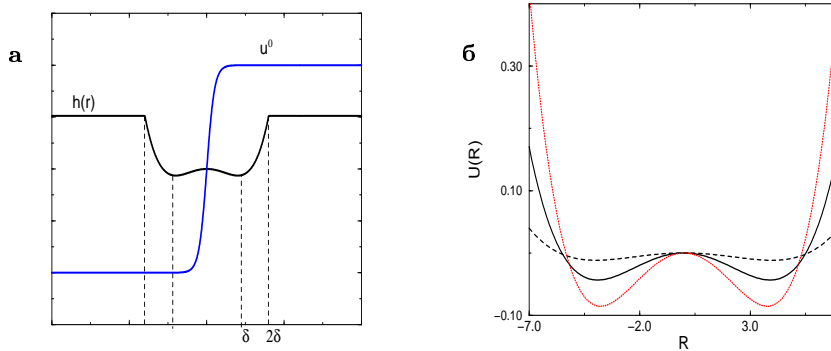


Рис. 3.10. (а) Схема фронта в неоднородном потенциале $h(r)$ (3.61); (б) потенциал $U(R)$ для $\delta = 4$: $r_0 = 0.5$ (пунктир), $r_0 = 1.0$ (сплошная линия), $r_0 = 1.5$ (точечная линия)

Эффект СР движения фронта можно реализовать, если дополнить модель гауссовым белым шумом и периодическими воздействиями. В итоге получим

$$\tau \frac{\partial u}{\partial t} = 2u(1 - u^2) + r_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 2h(r)u + A \cos(\Omega t + \varphi_0) + \sqrt{2D}\xi(t). \quad (3.62)$$

Фронты как броуновские частицы. Движение фронтов в диссипативных бистабильных средах во многом схоже с движением солитонов [84, 103–106]. Подобно солитонам, солитонное поведение фронтов является грубым относительно медленно меняющихся внешних полей и пространственных возмущений, у которых характерные масштабы протяженности больше, чем толщина границы раздела решения фронта [107]. Соответствующие эксперименты приведены в работе [108].

Положение фронта $R(t)$ можно определить из расположения неустойчивого значения, т.е. $u(R(t), t) = u_2$. Если взять производную по времени, то получим

$$\frac{\partial}{\partial t} u(R, t) + \frac{\partial}{\partial R} u(R, t) \dot{R} = 0. \quad (3.63)$$

Таким образом, достаточно знать производные $r = R(t)$, чтобы определить скорость движения фронта \dot{R} .

Обозначим через $\phi = r - R(t)$ относительную координату в системе находящегося в состоянии покоя фронта. Привести динамику к $R(t)$ можно несколькими способами, одним из которых является умножение (3.62) на моду Голдстоуна $u_r^0(\phi)$ в предположении стационарности фронта $u(r, t) \rightarrow u^0(\phi)$. Тогда в первом приближении все функции зависят от времени через $R(t)$. Для крутых границ раздела, $(u_r(\phi))^2$ отлично от нуля только в том случае, если положение фронта $r = R$ или $\phi = 0$, и тогда можно приближенно записать

$$\int_{-\infty}^{\infty} dr \frac{\partial u^0}{\partial t} \frac{\partial u^0}{\partial r} = \int_{-\infty}^{\infty} dr \frac{\frac{\partial u^0(r, t)}{\partial t}}{\frac{\partial u^0(r, t)}{\partial r}} \left(\frac{\partial u^0}{\partial r} \right)^2 \approx -\dot{R} \int_{-\infty}^{\infty} dr (u_r^0)^2. \quad (3.64)$$

В результате, (3.62) и (3.64) дают следующие выражения в первом приближении:

$$\tau \dot{R} = \frac{2 \int_{-\infty}^{+\infty} dr u_r^0(\phi) u^0 h(r)}{\int_{-\infty}^{+\infty} dr (u_r^0)^2} + \tilde{A} \cos(\Omega t + \varphi_0) + \sqrt{2\tilde{D}}\eta(t), \quad (3.65)$$

где $\tilde{D} = 9r_0^2 D/4$ – перенормированная интенсивность шума, $\tilde{A} = 3r_0 A/2$ – амплитуда. Напомним, что в данном случае детерминированная скорость стремится к нулю, $c = 0$. Первый член в выражении можно трактовать как внешнюю силу

$$\tau \dot{R} = -\frac{dU_{r_0}(R)}{dR} + \tilde{A} \cos(\Omega t + \varphi_0) + \sqrt{2\tilde{D}}\eta(t). \quad (3.66)$$

Потенциал по-прежнему зависит от $R(t)$ через $\phi(t)$ и определяется следующим образом:

$$-\frac{dU_{r_0}(R)}{dR} = \frac{3}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} h(r) \operatorname{sech}^3(\phi/r_0) \sinh(\xi/r_0) dr. \quad (3.67)$$

Эта зависимость вычисляется явно. Произведя в (3.65) замену $u_r^0(r-R)$ на $-u_R^0(r-R)$, производную можно вынести из-под знака интеграла. В результате для потенциала получаем

$$U_{r_0}(R) = \frac{3r_0^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} h(r) \frac{1}{2r_0} \operatorname{sech}^2[(r-R)/r_0] dr, \quad (3.68)$$

где опущены постоянные компоненты. Для малых $r_0 \rightarrow 0$ второе выражение под интегралом представляет собой функцию Дирака $\operatorname{sech}^2[(r-R)/r_0]/2r_0 \rightarrow \delta(r-R)$. В пределе стремящихся к нулю r_0 , это дает $U_0(R) = 3r_0^2 h(R)/2$. Можно также определить потенциал для отличных от нуля r_0 . Подставляя в (3.68) $x = (r-R)/r_0$, получим ($R < 2\delta$)

$$U_{r_0}(R) = \frac{3}{2} \varepsilon r_0^2 \left[-\frac{1}{2} \left(\delta^2 - \frac{3r_0^2 \pi}{12} \right) R^2 + \frac{R^4}{4} \right]. \quad (3.69)$$

Так как неоднородный член возмущения $h(r)$ имеет форму двух ям, то потенциал $U_{r_0}(R)$ достигает двухямной структуры при условии, что r_0 меньше $2\delta/\sqrt{\pi}$. Если $R > 2\delta$, потенциал есть константа. На рис. 3.10б показан потенциал для различных r_0 .

Отношение сигнал-шум. Движение фронта напоминает поведение передемпфированной броуновской частицы, движущейся в периодически модулированном двухямном потенциале. Оценим сначала среднюю скорость выхода из метастабильного состояния потенциала (3.69) в отсутствие периодического поля. Для случая слабого шума используем формулу Крамерса (1.218), которая дает

$$r_K = \frac{r_0^2}{2\sqrt{2}\tau\pi} \varepsilon (4\delta^2 - \pi r_0^2) \exp \left[-\frac{1}{6D} \tau \varepsilon \left(\delta^2 - \frac{\pi}{4} r_0^2 \right)^2 \right]. \quad (3.70)$$

Подставим (3.70) в выражение для отношения сигнал/шум (3.20), полученного в рамках теории двух состояний. В этом случае получим

$$\text{SNR} = \frac{A^2 \tau^2}{6D^2 \sqrt{2}} \varepsilon (4\delta^2 - \pi r_0^2) \exp \left(-\frac{\tau \varepsilon}{6D} \left[\delta^2 - \frac{\pi}{4} r_0^2 \right]^2 \right). \quad (3.71)$$

На рис. 3.11а приведена теоретическая зависимость для SNR. Видно, что SNR достигает максимума при

$$D_{\max} = \frac{1}{12} \tau \varepsilon \left(\delta^2 - \frac{\pi}{4} r_0^2 \right)^2, \quad (3.72)$$

которое сдвигается в сторону меньших значений D с ростом связи r_0 . Как и в случае усиленного массивом SR, максимальное значение растет с увеличением связи.

Из рис. 3.11б видно, что результаты численного моделирования находятся в хорошем качественном соответствии с теоретическими данными. Слабая зависимость SNR от степени связи r_0 объясняется увеличением границы раздела фронта (3.60) с ростом r_0 . Фронты

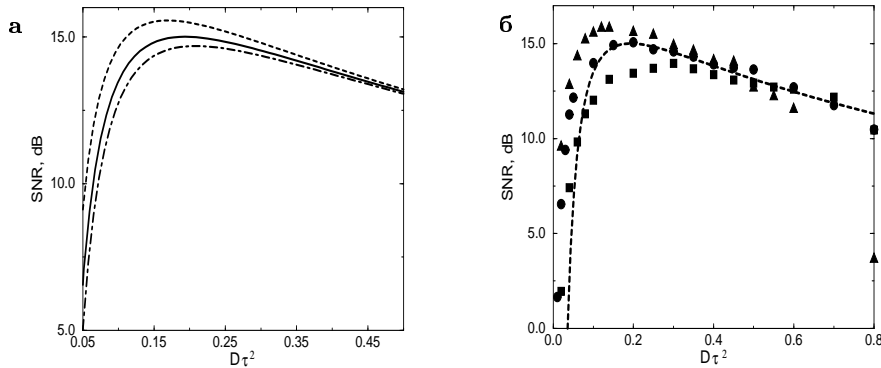


Рис. 3.11. (а) SNR для трех различных значений r_0 (слева направо): $r_0 = 1.5$; 1 (сплошная линия), 0.5; (б) Численные результаты расчетов зависимости SNR как функции D для различных значений степени связи: $r_0^2 = 1.5$ (\blacktriangle), $r_0^2 = 1$ (\circ), $r_0^2 = 0.5$ (\blacksquare). Пунктирной линией показана теоретическая оценка, полученная из адиабатической теории для $r_0 = 1$. Значения других параметров: $D = 0.2$, $\delta = 4$, $\varepsilon = 0.0005$, $A = 0.01$, $\Omega = 0.1$ и $\tau = 0.05$

с конечными границами разделов более чувствительны к флуктуациям. Основным результатом является сдвиг минимума эффективного потенциала $U_{r_0}(R)$, если толщина границы раздела приближается к расстоянию минимума внешней неоднородности δ . Следовательно, фронт может легко преодолеть барьер между двумя неоднородностями, поэтому средняя скорость выхода увеличивается с ростом степени связи [см., например, (3.70)]. Как следствие, условие совпадения для SR (совпадение среднего времени выхода и половины периода периодической силы) достигается для меньшей интенсивности шума, тогда как SNR имеет пики при больших значениях. Таким образом, выходное значение SNR должно расти с увеличением степени связи.

3.1.7 Удвоенный стохастический резонанс в системах с индуцированным фазовым переходом

В данном разделе рассматривается связь эффекта CP с индуцированными шумом переходами в системах с мультипликативным шумом. Такой тип шума был хорошо исследован в 1970-х и 1980-х годах. Как было показано в главе 1, мультипликативный шум приводит к появлению новых максимумов в распределении вероятностей и не имеет аналога в детерминированном описании [5]. Возбуждение индуцированных шумом колебаний [109–111] также принадлежит к классу систем с нулевой размерностью.

Возникновение индуцированного шумом среднего поля в пространственно распределенных системах является следующим новым примером, когда шум способствует формированию пространственных структур [95, 112–129]. В [130–134] представлены различные экспериментальные приложения. Возникновение различных индуцированных шумом неоднородных структур хорошо описано в [95].

Известно, что индуцированная шумом бистабильность в системах с нулевой размерностью не может рассматриваться как стохастический резонатор. Эффективные барьеры, определяющие скорости переходов между двумя состояниями, настолько малы, что неспособны продемонстрировать значительный отклик на изменение сигнала и внешнего шума. Однако, как было отмечено в [135], бистабильные индуцированные шумом состояния в распределенных системах обладают временными масштабами, которые значительно отличаются от времен релаксации. Это объясняется суще-

ствованием сильного взаимодействия между связанными или соседними ячейками в среде, которое также служит одним из условий индуцированного шумом фазового перехода.

Рассмотрим кратко систему с двумя индуцированными шумом фазами, находящуюся под внешним периодическим воздействием. Время переходов между двумя состояниями контролируется аддитивным шумом. Эффект СР, реализующийся в данном случае, называется двойным стохастическим резонансом, так как фазы индуцируются мультипликативным шумом, а аддитивный шум приводит к эффекту СР.

Индукцированные шумом фазовые переходы. Сначала рассмотрим случай возникновения индуцированных шумом фазовых переходов. Для этой цели мы исследуем нелинейную решетку связанных стохастических передемпфированных осцилляторов [117, 122, 127]:

$$\dot{x}_i = f(x_i) + \sqrt{2D_m}g(x_i)\xi_i(t) + \frac{\gamma}{2d} \sum_j (x_j - x_i) + \sqrt{2D_a}\zeta_i(t). \quad (3.73)$$

В системе связанных уравнений Ланжевена $x_i(t)$ – состояние i -го осциллятора. $i = 1, \dots, L^d$ обозначает $N = L^d$ ячеек кубической решетки, имеющей размерность $L \times d$. Суммирование в (3.73) производится по ближайшим соседям, а параметр γ отвечает за степень связи. $\xi_i(t)$ и $\zeta_i(t)$ – взаимно некоррелированные источники гауссовского шума с нулевым средним и несвязанные в пространстве и времени,

$$\langle \xi_i(t)\xi_j(t') \rangle = \delta_{i,j}\delta(t-t'), \quad \langle \zeta_i(t)\zeta_j(t') \rangle = \delta_{i,j}\delta(t-t'). \quad (3.74)$$

Первое выражение задает мультипликативный шум, отвечающий за фазовый переход, второе выражение вводит аддитивный шум, который управляет временами выхода между двумя притягивающими состояниями, индуцированными мультипликативным шумом.

Функции $f(x)$ и $g(x)$ задаются в следующем виде [117]:

$$f(x) = -x(1+x^2)^2, \quad g(x) = 1+x^2. \quad (3.75)$$

Отметим, что данный тип динамики не приводит к появлению новых максимумов в системе с нулевой размерностью.

В рамках теории среднего поля [88,95] модель (3.73) может быть исследована аналитически. Приближение среднего поля состоит в замене соседних состояний x_j глобальным средним системы m . В этом случае получается одномерное уравнение Фоккера–Планка, имеющее параметрическую зависимость от m и, следовательно, включающее нарушение симметрии. Предполагая быструю релаксацию к значению $m = \text{const}$, можно получить следующее стационарное распределение вероятностей P_{st} :

$$P_{\text{st}}(x, m) = \frac{C(m)}{\sqrt{D_m g^2(x) + D_a}} \exp\left(\int_0^x \frac{f(y) - \gamma(y - m)}{D_m g^2(y) + D_a} dy\right), \quad (3.76)$$

где $C(m)$ – постоянная нормировки. Теперь можно получить уравнение для среднего поля m , которое зависит от интенсивности шума и степени связи:

$$m = \int_{-\infty}^{\infty} x P_{\text{st}}(x, m) dx, \quad (3.77)$$

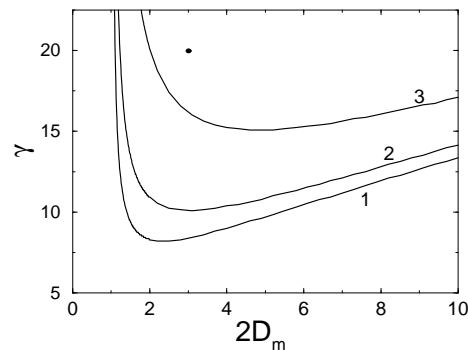


Рис. 3.12. Границы переходов между упорядоченной и неупорядоченной фазами на плоскости параметров $(D_m; \gamma)$ для различных интенсивностей аддитивного шума: $D_a = 0$ (1), 0.5 (2), и 2.5 (3). Отличное от нуля среднее поле существует выше показанных кривых. Черная точка имеет координаты $\gamma = 20$, $D_m = 1.5$

Решая численно уравнение (3.77) относительно m , можно определить переходы между упорядоченной ($m \neq 0$) и неупорядоченной ($m = 0$) фазами. Границы переходов между различными фазами

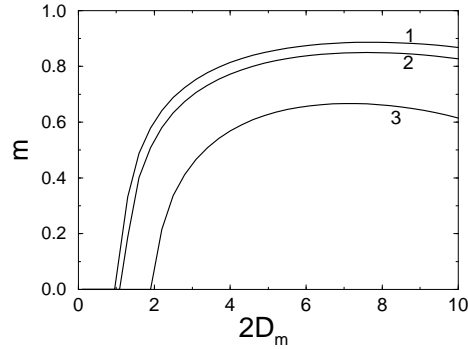


Рис. 3.13. Параметр упорядоченности $|m|$ как функция интенсивности мультипликативного шума для $\gamma = 20$ и $D_a = 0$ (1), 0.5 (2) и 2.5 (3)

показаны на рис. 3.12, а соответствующая зависимость параметра упорядоченности от D_m представлена на рис. 3.13. Как видно из последнего рисунка, влияние аддитивного шума приводит к сдвигу этой зависимости. Для $D_a = 0$ увеличение мультипликативного шума вызывает фазовый переход "беспорядок–порядок", за которым следует переход к беспорядку [117]. В режиме упорядоченной фазы система находится в одном из двух симметричных состояний со средними полями $m_1 = -m_2 \neq 0$, зависящими от начальных условий. Отметим, что хотя фазовый переход индуцирован мультипликативным шумом, этот эффект отличается от случая систем с нулевой размерностью и исчезает с уменьшением связи.

Удвоенный стохастический резонанс. Вернемся к задаче об отклике системы (3.73) на периодическое воздействие:

$$\dot{x}_i = f(x_i) + \sqrt{2D_m}g(x_i)\xi_i(t) + \frac{\gamma}{2d} \sum_j (x_j - x_i) + \sqrt{2D_a}\zeta_i(t) + A \cos(\Omega t + \varphi_0) \quad (3.78)$$

где A – амплитуда, Ω – частота и φ – случайная начальная фаза. В работе [135] набор значений параметров $(D_m; \gamma)$ задавался в области двух сосуществующих упорядоченных состояний с ненулевым средним полем, в частности, выбирались значения, соответствующие точке на рис. 3.12. Численное моделирование проводилось на двумерной решетке $L^2 = 18 \times 18$ осцилляторов в присутствии гармонического внешнего воздействия. Результаты усреднялись по равномерно распределенным начальным фазам.

На рис. 3.14 приведены временные реализации среднего поля и соответствующий входной периодический сигнал для трех различных значений D_a . Текущее среднее поле вычисляется по формуле

$$m(t) = \frac{1}{L^2} \sum_{i=1}^N x_i(t).$$

Как видно из рисунка, временные реализации напоминают картину в случае СР. Для малых значений D_a переходы между двумя симметричными состояниями m_1 и m_2 происходят редко и не связаны с внешней силой. Для среднего уровня шума переходы наблюдаются с периодичностью внешней силы. При дальнейшем увеличении D_a упорядоченная временная последовательность разрушается.

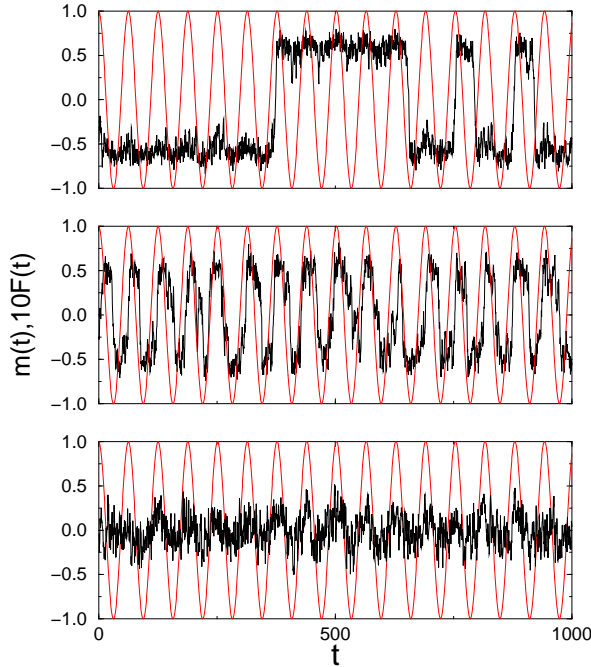


Рис. 3.14. Пример входной/выходной синхронизации. Эволюция во времени текущего среднего поля (выход) и внешней периодической силы $F(t)$ (вход) для различных значений интенсивности аддитивного шума (сверху вниз): $D_a = 0.005, 0.5$ и 2.5 . Если интенсивность шума приближается к оптимальному значению (средний график), то перескоки происходят с периодом внешней силы. Значения остальных параметров: $A = 0.1$, $\Omega = 0.1$, $\gamma = 20$ и $D_m = 1.5$

Из рис. 3.14 следует, что аддитивный шум способен оптимизировать обработку сигнала в системе (3.78). Для характеристики данного эффекта СР вычислялось отношение сигнал/шум по спектральной плотности мощности $S(\omega)$. На рис. 3.15 приведены зависимости SNR от интенсивности аддитивного шума, полученные для непрерывной динамики и в рамках приближения двух состояний, где $m(t)$ принимало значение $m(t) = +1$ или $m(t) = -1$, соответственно. Обе кривые демонстрируют хорошо известную колоколообразную зависимость от D_a , которая является типичной для эффекта СР.

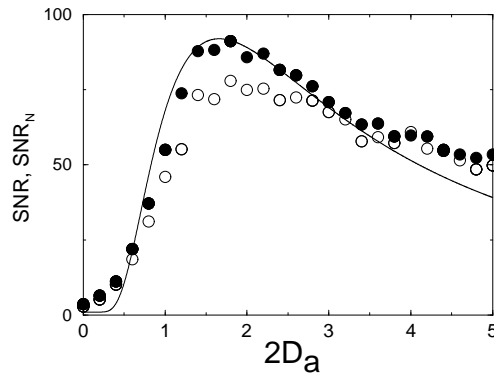


Рис. 3.15. Численные результаты зависимости SNR от интенсивности аддитивного шума (для непрерывной динамики (●) и в приближении двух состояний (○)) и их сравнение с аналитической оценкой SNR_N (сплошная линия). Значения параметров как на рис. 3.14

Эффективный потенциал и отношение сигнал/шум. Рассмотрим вначале ситуацию в отсутствие сигнала и аддитивного шума, т.е., когда A и D_a стремятся к нулю. В случае сильной связи первый момент может считаться однородным и его эволюция во времени описывается компонентом сноса в соответствующем УФП:

$$\langle \dot{x} \rangle = \langle f(x) \rangle + D_m \langle g(x)g'(x) \rangle. \quad (3.79)$$

В связанных системах механизм индуцированного шумом перехода объясняется с помощью приближения малой эволюции [122]. Начиная с начальной δ -функции Дирака, уравнение для $m(t)$ записывается следующим образом

$$\dot{m} = f(m) + D_m g(m) g'(m), \quad (3.80)$$

где средние значения произведений заменены на произведения средних. Это справедливо, если $f(\langle x \rangle) \gg \langle \delta x^2 \rangle f''(\langle x \rangle)$. Требуемое подавление флуктуаций вновь обусловлено сильной связью [124]. Динамика хорошо аппроксимируется гауссовскими распределениями, максимумы которых определяются по формуле (3.80), представляющей собой уравнение диссипативной системы с одной или тремя неподвижными точками.

Введем дополнительно эффективный потенциал $U_{\text{eff}}(m)$:

$$U_{\text{eff}}(m) = U_0(m) + U_{\text{noise}} = - \int^m dm' f(m') - \frac{D_m g^2(m)}{2}, \quad (3.81)$$

где $U_0(m)$ – моностабильный потенциал. U_{noise} обозначает влияние мультипликативного шума и демонстрирует бимодальность потенциала выше критического значения D_m в данном приближении. Видно, что потенциал (3.81) имеет сильное сходство с эффективным потенциалом маятника Матье–Калицы [136].

Возвращаясь к случаю внешнего аддитивного воздействия с малой амплитудой A и меняя интенсивность шума D_a , можно реализовать типичный эффект СР. Рассмотрим ситуацию, когда уровень мультипликативного шума достаточно большой. Это означает, что в отсутствие аддитивного шума времена переходов между двумя индуцированными шумом состояниями намного превышают период внешнего воздействия $T_{\text{per}} = 2\pi/\Omega$. Безусловно, увеличение уровня аддитивного шума приведет к уменьшению времен выхода, и, если они принимают значения порядка периода воздействия, то реализуется эффект СР.

Применение адиабатической теории двух состояний [61] без учета внутриямной динамики позволяет записать выражение для SNR в рамках теории линейного отклика в следующем виде:

$$\text{SNR}_1 = \frac{\pi A^2}{D_a^2} r_K, \quad (3.82)$$

где r_K – скорость Крамерса

$$r_K = \frac{\sqrt{U_{\text{eff}}''(m_{\min})|U_{\text{eff}}''(m_{\max})}}{2\pi} \exp\left(-\frac{\Delta U_{\text{eff}}}{D_a}\right) \quad (3.83)$$

для преодоления потенциального барьера ΔU_{eff} с помощью аддитивного шума. Перенормировка этого значения на число осцилляторов N в решетке [76] и учет скорости обработки G и ширины

полосы Δ в спектральной плотности мощности [61] приводит к следующему виду отношения сигнал/шума для N элементов

$$\text{SNR}_N = \text{SNR}_1 \frac{NG}{\Delta} + 1. \quad (3.84)$$

Данная зависимость показана на рис. 3.15 и находится в хорошем соответствии с результатами численного моделирования, несмотря на грубую аппроксимацию. Почти точное соответствие отмечается в точке максимума и для некоторых значений SNR.

Необходимо отметить, что аддитивный шум также влияет на свойства эффективной бистабильной системы (см. рис. 3.12 и 3.13), что приводит к ограничениям. Вследствие этого амплитуда выходного сигнала уменьшается и даже бистабильность может исчезнуть при больших значениях интенсивности шума D_a . Экспериментальные данные по этой интересной задаче представлены в [137].

3.1.8 Стохастический резонанс для сигналов сложного спектрального состава

В большинстве работ по СР в качестве внешней силы рассматривается воздействие гармонического сигнала малой амплитуды. Естественно, возникает задача исследовать отклик системы на многочастотные и шумовые сигналы. Это особенно важно применительно к биологическим системам. Сигналы, воспринимаемые живыми организмами, чаще всего являются шумовыми и, как правило, не содержат строго периодических компонент. Наиболее реальным является исследование отклика системы на квазигармонический сигнал с конечной шириной спектральной линии, обусловленной действием флуктуаций.

Достоинством теории линейного отклика является возможность естественного расширения ее на случай сигналов со сложным спектральным составом [138]. Спектральная плотность на выходе имеет вид

$$G_{x,x}(\omega) = G_{x,x}^{(0)}(\omega) + |\chi(\omega)|^2 G_{s,s}(\omega), \quad (3.85)$$

где $G_{s,s}(\omega)$ – спектр сигнала. Ниже мы рассмотрим ряд практически важных примеров.

Отклик стохастической бистабильной системы на многочастотный сигнал. Рассмотрим слабый сигнал, имеющий дискретный спектр. Внешнюю силу $s(t)$ представим в виде ряда Фурье:

$$s(t) = A \sum_{k=1}^M b_k \cos \Omega_k t, \quad (3.86)$$

где $Ab_k \ll 1$ – малые амплитуды гармоник, а Ω_k – их частоты. Согласно теории линейного отклика, отклик системы есть

$$\langle x(t) \rangle = A \sum_{k=1}^M b_k |\chi(\Omega_k, D)| \cos [(\Omega_k + \psi_k) t]. \quad (3.87)$$

Отклик $\langle x(t) \rangle$ (3.87) содержит те же спектральные компоненты (3.86), однако с другими амплитудами и фазами. В формуле (3.87) фазовые сдвиги ψ_k для каждой из гармоник выражаются через восприимчивость как

$$\psi_k(\Omega_k, D) = -\arctan \frac{\operatorname{Im} \chi(\Omega_k, D)}{\operatorname{Re} \chi(\Omega_k, D)}. \quad (3.88)$$

Меры СР, такие как коэффициент усиления и отношение сигнал/шум (SNR), определяются согласно теории линейного отклика как [51, 64]

$$\eta(\Omega_k, D) = |\chi(\Omega_k, D)|^2, \quad (3.89)$$

$$\operatorname{SNR}(\Omega_k, D) = \frac{\pi (A b_k)^2 |\chi(\Omega_k, D)|^2}{G_{x,x}^{(0)}(\Omega_k, D)}. \quad (3.90)$$

Зависимость восприимчивости от частоты свидетельствует о наличии частотных искажений выходного сигнала. Величину этих искажений можно найти, используя отношение амплитуд различных гармоник на выходе и на входе:

$$E(\Omega_k, \Omega_j, D) = \frac{|\chi(\Omega_k, D)|}{|\chi(\Omega_j, D)|}. \quad (3.91)$$

Как следует из выражений (3.33)–(3.35), бистабильный осциллятор (3.3) представляет собой усилитель с низкочастотной фильтрацией сигнала на выходе. Параметры усилителя (коэффициент усиления и отношение сигнал/шум) управляются интенсивностью внешнего шума. Возникает вопрос, можно ли с помощью такого устройства обеспечить усиление информационных сигналов (например, сигналов с амплитудной или частотной модуляцией) без существенных искажений? Эта задача решена в работах [139, 140],

где дан положительный ответ на поставленный вопрос. Если обеспечены условия реализации эффекта СР в малосигнальном приближении для составляющей спектра сигнала на частоте несущей и если эффективная полоса частот информационного сигнала не превышает 25% от частоты несущей, то все частотные компоненты информационного сигнала будут усиливаться почти одинаково и выходной сигнал практически не будет содержать линейных искажений [141]. Естественно, что требования безыскаженного усиления ведут к конкретным ограничениям на диапазон частот амплитудной модуляции (или на величину индекса частотной модуляции), от которых зависит эффективная ширина полосы частот информационного сигнала.

Стохастический резонанс для сигналов с конечной шириной спектральной линии. Реальные сигналы всегда имеют конечную ширину спектральной линии, обусловленную наличием флуктуаций амплитуды и фазы генератора. Будет ли СР наблюдаться для таких сигналов и к каким особенностям приводит учет конечной ширины спектральной линии? Ответ на эти вопросы имеет важное значение в практических приложениях.

В качестве модели сигнала с конечной шириной спектральной линии мы рассмотрим так называемый "гармонический шум" [142–148], который представляет собой двумерный процесс Орнштейна–Уленбека и описывается системой двух стохастических дифференциальных уравнений (СДУ):

$$\dot{s} = y, \quad \dot{y} = -\Gamma y - \Omega^2 s + \sqrt{2\varepsilon\Gamma} \xi_2(t), \quad (3.92)$$

где $\xi(t)$ – гауссов белый шум, $\langle \xi_2(t)\xi_2(t') \rangle = \delta(t - t')$; Γ – параметр диссипации и ε – интенсивность гармонического шума. Спектральная плотность $G_{s,s}(\omega)$ известна и имеет форму линии Лоренца:

$$G_{s,s}(\omega) = \frac{2\varepsilon\Gamma}{\omega^2\Gamma^2 + (\omega^2 - \Omega^2)^2}. \quad (3.93)$$

При выполнении условия $\Omega > \Gamma/2$ спектральная плотность (3.93) имеет пик на частоте

$$\omega_p = \sqrt{\Omega^2 - \Gamma^2/2} \quad (3.94)$$

и характеризуется шириной (определяемой на высоте, равной половине максимальной высоты пика) $\Delta\omega_{in}$:

$$\Delta\omega_{\text{in}} = \sqrt{\omega_p^2 + \Gamma\omega_1} - \sqrt{\omega_p^2 - \Gamma\omega_1}, \quad \omega_1 = \sqrt{\Omega^2 - \Gamma^2/4}. \quad (3.95)$$

Другой величиной, характеризующей спектр (3.93), является добротность. Она определяется как отношение частоты пика к ширине спектральной линии $\Delta\omega$:

$$Q_{\text{in}} = \frac{\omega_p}{\sqrt{\omega_p^2 + \Gamma\omega_1} - \sqrt{\omega_p^2 - \Gamma\omega_1}}. \quad (3.96)$$

Вновь рассмотрим в качестве стохастического резонатора бистабильный передемпфированный осциллятор, описываемый в данном случае СДУ [55]:

$$\dot{x} = x - x^3 + \sqrt{2D}\xi_1(t) + s(t), \quad (3.97)$$

где $\xi_1(t)$ не зависит от $\xi_2(t)$. Системы СДУ (3.92), (3.97) описывают трехмерный марковский процесс, которому соответствует следующее УФП для плотности вероятности $p(x, s, y, t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} = & -\frac{\partial}{\partial x}[(x - x^3 + s)p] - \frac{\partial}{\partial s}(yp) + \frac{\partial}{\partial y}[(\Gamma s + \Omega^2 y)p] \\ & + D\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \varepsilon\Gamma\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}. \end{aligned} \quad (3.98)$$

Предыдущий случай (3.4) соответствовал неоднородному во времени случайному процессу, тогда как УФП (3.98) описывает однородный случайный процесс, который имеет стационарные статистические характеристики.

В предположении слабого сигнала $\varepsilon \ll 1$, согласно теории линейного отклика, для спектральной плотности на выходе получаем выражение

$$G_{x,x}(\omega) = G_{x,x}^{(0)}(\omega, D) + |\chi(\omega, D)|^2 G_{s,s}(\omega). \quad (3.99)$$

Ограничимся учетом только глобальной динамики переходов между потенциальными ямами в режиме СР. При этом восприимчивость и корреляционная функция невозмущенной системы определяется выражениями (3.33) и (3.30) соответственно. Спектральная плотность на выходе бистабильной системы, таким образом, есть

$$G_{x,x}(\omega) = \frac{2\langle x^2 \rangle_{\text{st}} \lambda_m}{\omega^2 + \lambda^2} \left(1 + \frac{\langle x^2 \rangle_{\text{st}} \lambda_m}{D^2} \frac{\varepsilon \Gamma}{\omega^2 \Gamma^2 + (\omega^2 - \Omega^2)^2} \right). \quad (3.100)$$

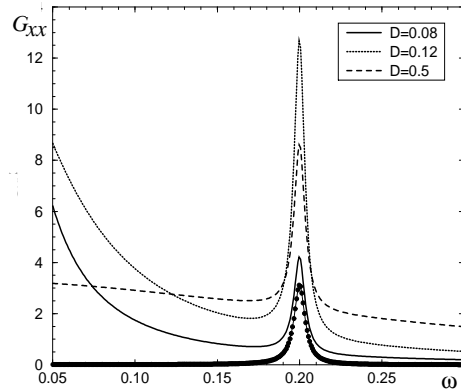


Рис. 3.16. Спектральная плотность на выходе и на входе (показана символами \bullet) при различных значениях интенсивности шума; параметры гармонического шума: $\varepsilon = 10^{-3}$, $\Omega = 0.2$, $\Gamma = 0.008$

Как видно из рис. 3.16, спектр выходного сигнала также имеет максимум на некоторой частоте ω_m . Видно, что СР реализуется для гармонического шума: высота пика наибольшая при некотором оптимальном значении интенсивности шума D .

Исследуем свойства выходного спектра более детально. Так как амплитудно-частотные свойства бистабильного осциллятора существенно зависят от интенсивности шума, частота ω_m , на которой появляется пик в спектре выходного сигнала, и ширина линии $\Delta\omega_{\text{out}}$ также являются функциями D . Для количественной оценки параметров спектральной линии на выходе введем величину R как отношение ширины линии на выходе $\Delta\omega_{\text{out}}$ к ширине линии на входе $\Delta\omega_{\text{in}}$:

$$R(D) = \frac{\Delta\omega_{\text{out}}(D)}{\Delta\omega_{\text{in}}}. \quad (3.101)$$

Эта величина определяется из выражения для спектральной плотности (3.100).

Относительная ширина спектральной линии R имеет минимум при некоторой оптимальной интенсивности шума (рис. 3.17а). Величина этой интенсивности зависит от коэффициента затухания Γ . При уменьшении Γ , что приближает нас к случаю периодического сигнала, эти зависимости нивелируются. Для сигнала, представленного в виде гармонического шума, возникает некоторая неоднозначность в определении отношения сигнал/шум, так как

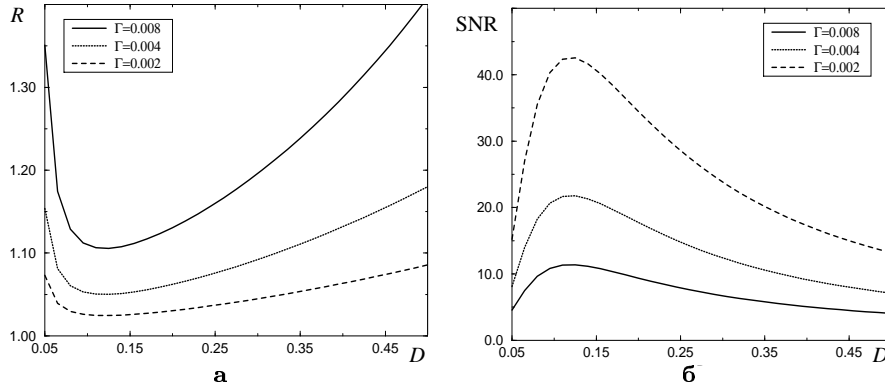


Рис. 3.17. Относительная ширина спектральной линии R (а) и SNR (3.103) (б) как функции интенсивности шума для различных значений Γ . Параметры гармонического шума: $\varepsilon = 10^{-3}$, $\Omega = 0.2$

сигнал сам является узкополосным случайным процессом. Введем в рассмотрение другую характеристику – произведение добротности Q_{out} на высоту пика h :

$$C(D) = Q_{\text{out}}(D) \cdot h(D), \quad (3.102)$$

которую называют мерой когерентности. Зависимость меры когерентности $C(D)$ от интенсивности шума имеет характерный максимум, типичный для явления СР. Усиление эффекта СР достигается увеличением добротности входного сигнала.

В данном случае отношение сигнал/шум определяется как отношение высоты пика к значению невозмущенной спектральной плотности на частоте пика:

$$\text{SNR} = 1 + \frac{\langle x^2 \rangle_{st} \lambda_m}{D^2} \frac{\varepsilon \Gamma}{\omega_m^2 \Gamma^2 + (\omega_m^2 - \Omega^2)^2}. \quad (3.103)$$

Его зависимость от интенсивности шума D , показанная на рис. 3.17б, характеризуется наличием максимума, типичного для режима СР.

Апериодический стохастический резонанс. Понятие стохастического резонанса можно расширить на случай чисто стохастических сигналов. Это было сделано в [149], и эффект был назван *апериодическим* стохастическим резонансом (АСР). В этом случае, когда сигнал не имеет пиков в спектральной плотности мощности, удобнее использовать взаимные корреляционные функции входа-выхода вместо обычных характеристик СР, таких как коэффициент усиления и отношение сигнал/шум.

Для слабого аperiodического сигнала $s(t)$ эффект АСР можно описать в рамках теории линейного отклика [150]. Тогда спектральная плотность мощности на выходе $G_{x,x}(\omega)$ выражается через (3.85), и для взаимного спектра $G_{s,x}(\omega)$ между входом и выходом имеем следующее выражение:

$$G_{s,x}(\omega) = \chi(\omega)G_{s,s}(\omega), \quad (3.104)$$

где $\chi(\omega)$ – восприимчивость системы. Мерой АСР, т.е. коэффициентом корреляции, является величина

$$C = \frac{\langle sx \rangle}{\sqrt{\langle x^2 \rangle \langle s^2 \rangle}}, \quad (3.105)$$

где $\langle sx \rangle = \int_0^\infty G_{s,x}(\omega) d\omega$. В частности, для симметричной бистабильной системы с восприимчивостью (3.33) и экспоненциально коррелированным гауссовским сигналом $s(t)$ (процесс Орнштейна–Уленбека, см. раздел 1.2.3), имеющего спектральную плотность $G_{s,s}(\omega) = \gamma Q / (\gamma^2 + \omega^2)$, получаем следующее простое выражение для коэффициента корреляции (в пределе слабого сигнала, $Q \rightarrow 0$) [150]:

$$C = \frac{\lambda_m Q}{D(\gamma + \lambda_m)}, \quad (3.106)$$

где λ_m определяется по формуле (3.29). Зависимость коэффициента корреляции (3.106) от интенсивности шума D имеет единственный максимум и, следовательно, свидетельствует о существовании эффекта АСР.

Усиление стохастического резонанса с помощью аддитивного шума. В работах [151, 152] исследовалось использование двух различных сигналов в зашумленной динамике с целью управления СР. Как было показано, два гармонических входных сигнала, имеющие одну и ту же частоту и модулирующие порог системы, способны усиливать различные типы поведения системы. Изменение в сдвиге фаз между этими двумя сигналами приводило либо к усилению, либо к подавлению отклика системы.

Известная способность варьировать скорости стохастический пороговой системы с помощью дихотомического шума [153, 154] открывает другую возможность для управления СР. В этом случае используются два некоррелированных входных сигнала [155]. Первый быстрый телеграфный сигнал оказывает влияние на скорости

зашумленной нелинейной системы, вызывая тем самым лучшее или худшее усиление второго гармонического сигнала на низких частотах.

Фактически, модель имеет два статистически независимых от шума источника: 1 – “термальный” белый шум, который отвечает за стохастические переключения между метастабильными состояниями, и 2 – дихотомический шум, влияющий на моменты переключений между состояниями системы. Уровень дихотомического шума всегда мал, так что он не может сам индуцировать переключения, поэтому необходимо присутствие термального шума.

Анализ динамики бистабильной системы можно проводить, если свести ее вновь к случаю двух симметричных состояний $\sigma(t) = \pm 1$, которые определяют положение частицы в правой или левой ямах бистабильного потенциала с барьером ΔU . Дихотомический шум $\lambda(t) = \pm 1$ величины B и скорость перескоков $0 < \gamma \ll a_0$ модифицируют скорость перехода [156, 157]:

$$W_0(\sigma, \lambda) = a_0 \exp\left(-\frac{\Delta U + \sigma \lambda B}{D}\right). \quad (3.107)$$

Мы получаем систему с 4-мя состояниями, по два на входе и на выходе, которая описывается следующим управляющим уравнением:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p(\sigma, \lambda) = & -W_0(\sigma, \lambda) p(\sigma, \lambda) + W_0(-\sigma, \lambda) p(-\sigma, \lambda) \\ & + \gamma [p(\sigma, -\lambda) - p(\sigma, \lambda)]. \end{aligned} \quad (3.108)$$

Затем в систему добавляется слабый периодический сигнал $s(t) = A \cos(\Omega t + \varphi_0)$. Если скорость перескоков достаточно медленная ($\Omega < \gamma \ll a_0$) и амплитуда воздействия мала $A \ll \Delta U - B$, то гармоническая сила в рамках теории нелинейного отклика приводит к следующим зависящим от времени скоростям [155]:

$$\begin{aligned} W(\sigma, \lambda) = & W_0 \exp\left(-\frac{A\sigma}{D} \cos(\Omega t + \varphi_0)\right) \\ \approx & W_0 \left(1 - \frac{A\sigma}{D} \cos(\Omega t + \varphi_0)\right). \end{aligned} \quad (3.109)$$

Автокорреляционная функция, состоящая из амплитудно-независимой шумовой части и сигнальной компоненты порядка $\propto (A/D)^2$, может быть получена из уравнений для условного среднего и

взаимно-корреляционной функции $\langle \sigma(t)\lambda(t') \rangle$. Оба уравнения должны быть решены с начальными условиями $\langle \sigma(t) \rangle = 1$ и стационарным коррелятором [156]

$$\langle \sigma \lambda \rangle_{\text{stat}} = \frac{a_2 - a_1}{a_1 + a_2 + 2\gamma}. \quad (3.110)$$

В последнем соотношении введены обозначения ($a_0 = 1$):

$$a_{1,2} = \exp[-(\Delta U \pm B)/D]. \quad (3.111)$$

После усреднения по начальной фазе φ_0 и преобразования Фурье автокорреляционной функции получаем спектр мощности $G_{\sigma,\sigma}(\omega) = G_{\sigma,\sigma}^{(0)}(\omega) + A^2\pi\eta\delta(\omega - \Omega)$ [155], имеющий пьедестал

$$G_{\sigma,\sigma}^{(0)}(\omega) = 4 \frac{a_1 + a_2}{(a_1 + a_2)^2 + \omega^2} \left(1 + \frac{(a_2 - a_1)^2}{4\gamma^2 + \omega^2} \right) - 4 \frac{(a_2 - a_1)^2}{(a_1 + a_2 + 2\gamma)(4\gamma^2 + \omega^2)} \quad (3.112)$$

и коэффициент усиления

$$\eta = \frac{1}{D^2} \left(a_1 + a_2 - \frac{(a_2 - a_1)^2}{(a_1 + a_2 + 2\gamma)} \right)^2 \frac{1}{(a_1 + a_2)^2 + \Omega^2}. \quad (3.113)$$

Коэффициент усиления мощности и отношение сигнал/шум приведены на рис. 3.18 в зависимости от интенсивности термального шума и для фиксированных значений скорости перескоков γ и частоты сигнала Ω , но для различного уровня дихотомического шума. Из представленных результатов ясно следует, что и коэффициент усиления, и SNR усиливаются при достаточно большом B по сравнению с обычным случаем, когда дихотомический шум отсутствует ($B = 0$). Оптимальное значение интенсивности шума, при котором достигают максимумов коэффициент усиления и SNR, сдвигается в сторону меньших значений с ростом уровня дихотомического шума. Более того, поведение коэффициента усиления и SNR в зависимости от термального шума качественно отличается от обычного случая, так как обе характеристики демонстрируют два максимума.

Усиление и наличие двух максимумов можно интерпретировать, если рассмотреть среднюю скорость выхода между двумя состояниями в присутствии дихотомического процесса [153, 154]. Для этой цели удобно проанализировать два предельных случая. При быстром дихотомическом шуме выход происходит главным образом с

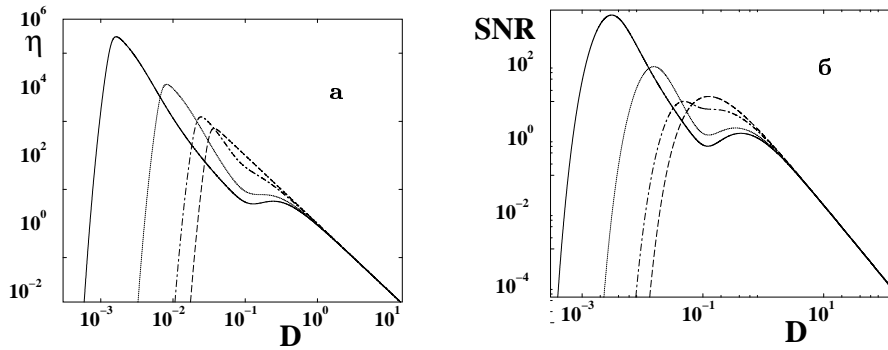


Рис. 3.18. Коэффициент усиления (а) и SNR (б) как функции интенсивности шума D для различных значений величины дихотомического шума B : 0 (пунктирная кривая), 0.1 (пунктирно-точечная кривая), 0.2 (точечная кривая) и 0.24 (сплошная кривая). Значения других параметров: $\gamma = 0.1$ и $\Omega = 0.001$

большой скоростью a_2 и с меньшей высотой барьера $\Delta U - B$. При меньших барьерах условие слияния между частотой входного сигнала сдвигается в сторону меньшего уровня шума и проявляется лучше, как показано ранее для модели двух состояний. По этой причине и происходит значительное усиление эффекта СР. Данный факт объясняет первый усиленный максимум в зависимостях коэффициента усиления и SNR. Напротив, для чрезвычайно низкого уровня дихотомического шума, большой интенсивности шума и $\gamma \ll a_1, a_2$ система демонстрирует множество переходов в статическом асимметричном потенциале в течение одного цикла дихотомического шума. Переходы в прямом и обратном направлениях происходят с одинаковой скоростью $\propto \exp(-\Delta U/D) / \cosh(B/D) \approx a_1$. Это объясняет появление второго максимума. Однако, хорошо известно, что с увеличением степени асимметрии бистабильной системы режим СР постепенно подавляется и положение максимума не зависит от частоты сигнала [158].

3.1.9 Стохастический резонанс в хаотических системах с сосуществующими аттракторами

Для систем с квазиаттрактором, демонстрирующих динамический хаос, типично сосуществование в фазовом пространстве аттракторов различного типа [159]. Области притяжения различных аттракторов разделяются в фазовом пространстве сепаратрисными

гиперповерхностями. В отсутствие внешнего шума фазовая траектория будет достигать того или иного аттрактора в зависимости от начальных условий. Воздействие внешнего шума приведет к возникновению случайных переключений между сосуществующими аттракторами системы, статистика которых, естественно, будет определяться свойствами шума и самой динамической системы.

Теоретическое рассмотрение влияния внешнего шума на режимы динамического хаоса возможно в пределах малого [160, 161] и большого [162] гауссова шума. Теория малых случайных возмущений динамических систем [163], основанная на понятии квазипотенциала, была недавно распространена на системы со сложной динамикой [164–166]. Предположим, что динамическая система имеет аттрактор в N -мерном фазовом пространстве и существует инвариантная вероятностная мера на этом аттракторе. Пусть система возмущается слабым гауссовым белым шумом интенсивности D и описывается СДУ вида

$$\dot{x}_i = f_i(x) + \xi_i(t), \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.114)$$

где $\langle \xi_i(t)\xi_j(0) \rangle = 2D \delta_{i,j} \delta(t)$. Тогда инвариантная мера или стационарная плотность вероятности $p(x)$ выражается через квазипотенциал (или неравновесный потенциал) $\Phi(x)$ следующим образом:

$$p(x) \propto \exp \left[-\frac{\Phi(x)}{D} \right]. \quad (3.115)$$

Квазипотенциал, являющийся аналогом свободной энергии [167] для неравновесного стационарного состояния, зависит только от переменных состояния и параметров системы и не зависит от интенсивности шума D . Квазипотенциал принимает минимальные значения на аттракторе. Если в системе сосуществует несколько аттракторов (для определенности будем считать количество аттракторов равным двум), то $\Phi(x)$ будет иметь локальные минимумы, соответствующие этим аттракторам. В этом случае при слабом шуме возможна постановка задачи Крамерса о выходе из области притяжения аттрактора. При $D \ll 1$ движение такой системы будет содержать медленный временной масштаб, связанный со средним временем выхода из области притяжения аттрактора. Зависимость среднего времени выхода от интенсивности шума характеризуется экспоненциальным законом вида $\nu(D) \times \exp(\Delta\Phi/D)$. Если дополнительно к внешнему шуму на систему подается слабый

периодический сигнал, не вызывающий переходов в области притяжения других аттракторов, то мы вправе ожидать проявление СР [46, 47]: отклик системы на слабое периодическое воздействие будет усилен.

Для систем с хаотической динамикой недавно был открыт принципиально иной эффект, так называемый *детерминированный стохастический резонанс* [46, 47]. Известно, что при вариации управляющих параметров квазигиперболических систем имеют место кризисы аттракторов. Примером кризиса может служить явление объединения двух аттракторов с возникновением динамической перемежаемости типа "хаос – хаос" [168], когда фазовая траектория пребывает длительное время на каждом из объединившихся аттракторов и совершает нерегулярные переходы между ними. Отметим, что такие случайные переключения осуществляются в отсутствие внешнего шума и управляются детерминированным законом [169, 170]. Для систем с перемежаемостью типа "хаос – хаос" среднее время T_i нахождения фазовой траектории на аттракторе подчиняется универсальным закономерностям вида [169, 171]

$$T_i \propto (a - a_{cr})^\gamma, \quad (3.116)$$

где a – параметр системы; a_{cr} – пороговое бифуркационное значение параметра, при котором реализуется кризис и возникает перемежаемость; γ – универсальная постоянная. Таким образом, роль интенсивности шума здесь играет параметр системы, контролирующий медленный временной масштаб и, следовательно, ее спектральные свойства [171]. При воздействии на систему медленного периодического сигнала можно путем изменения управляющего параметра добиться примерного совпадения периода сигнала и среднего времени переключения с одного аттрактора на другой, т.е. условий СР. Отметим, что режимы перемежаемости экспоненциально чувствительны к внешнему шуму [170, 171], что делает возможным реализацию классического явления СР.

Проиллюстрируем вышесказанное на простом, но типичном примере дискретной системы с кризисом хаотических аттракторов:

$$x_{n+1} = (ax_n - x_n^3) \exp(-x_n^2/b) + A \sin \omega n + \sqrt{2D}\xi(n). \quad (3.117)$$

Система (3.117) представляет собой одномерное кубическое отображение, возмущаемое слабым периодическим сигналом ($A \ll 1$) и δ -коррелированным шумом интенсивности D . Экспоненциальный

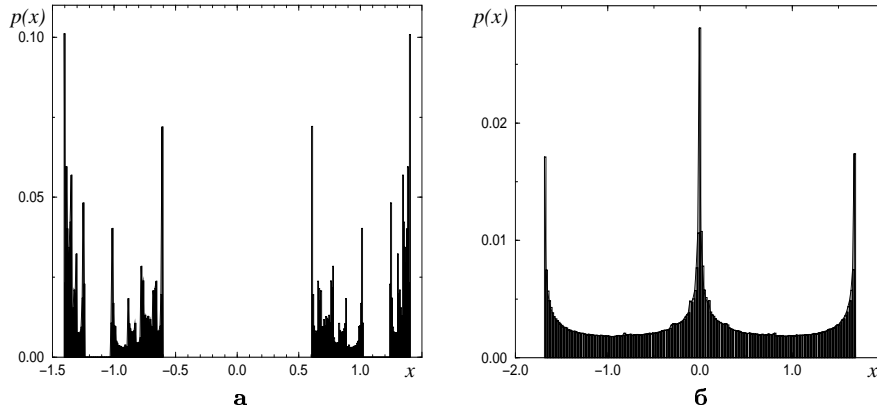


Рис. 3.19. Стационарная плотность распределения вероятности траекторий на аттракторах отображения (3.117) при $A = D = 0$, $b = 10$ для значений параметра a : **(а)** 2.5 ; **(б)** 2.84

множитель введен с целью избежать ухода траектории на бесконечность. Рассмотрим свойства отображения в отсутствие возмущений.

При значении параметра $a < a_{\text{кр}} = 2.839\dots$ в системе сосуществуют два хаотических аттрактора, разделенных седловой точкой $x_n = 0$. При достижении параметром критического значения $a_{\text{кр}}$ реализуется кризис и аттракторы объединяются с рождением эффекта динамической перемежаемости типа "хаос – хаос", как это видно из рис. 3.19.

Вначале исследуем эффект СР в режиме до кризиса $a < a_{\text{кр}}$, когда процесс переключений будет индуцироваться и управляться внешним шумом. Как видно из результатов расчета (рис. 3.20а), коэффициент усиления и отношение сигнал/шум достигают максимумов при оптимальных уровнях шума. Налицо типичный эффект СР. Расчеты свидетельствуют о том, что оптимальному уровню шума ($D = D_{\text{opt}}$) отвечает частота Крамерса, близкая к частоте внешнего сигнала ω .

Теперь исключим шумовое воздействие ($D = 0$) и рассмотрим реакцию системы (3.117) на периодическое возмущение в режиме перемежаемости типа "хаос – хаос", когда параметр a превышает значение критического ($a > a_{\text{кр}}$). По данным расчетов средняя частота переключений монотонно растет с увеличением параметра a . На рис. 3.20б представлены зависимости коэффициента усиления и отношения сигнал/шум от величины параметра a , иллюстриру-

ющие эффект детерминированного СР: максимума коэффициент усиления и отношение сигнал/шум достигают в области значений параметра $2.85 < a < 2.88$, когда частота Крамерса близка к частоте внешнего сигнала.

Описанные эффекты носят фундаментально общий характер, что подтверждается результатами их наблюдения в различных дискретных и дифференциальных системах, демонстрирующих как индуцированный шумом эффект перемежаемости, так и кризис [46]. Например, рассмотрим СР в модели Лоренца [172] в режиме индуцированной шумом перемежаемости. Система Лоренца является очень удобной для исследования влияния шума на хаотическую динамику. Для нее возможно корректное введение источников шума в уравнения модели [173]. В работе [174] доказана эргодичность стохастической модели Лоренца. Более того, в пространстве параметров этой системы есть области существования как аттрактора типа Лоренца, так и квазиаттрактора [175]. Стохастическая модель Лоренца описывается системой СДУ:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\sigma x + \sigma y + \xi_1(t), \\ \dot{y} &= -y + r x - x z + \xi_2(t), \\ \dot{z} &= -b z + x y + \xi_3(t), \\ \langle \xi_i(t) \xi_j(0) \rangle &= D \delta_{i,j} \delta(t). \end{aligned} \quad (3.118)$$

Как было показано в [176], в области значений параметров $\sigma = 10$, $r = 210$, $b = 8/3$, соответствующей существованию квазиат-

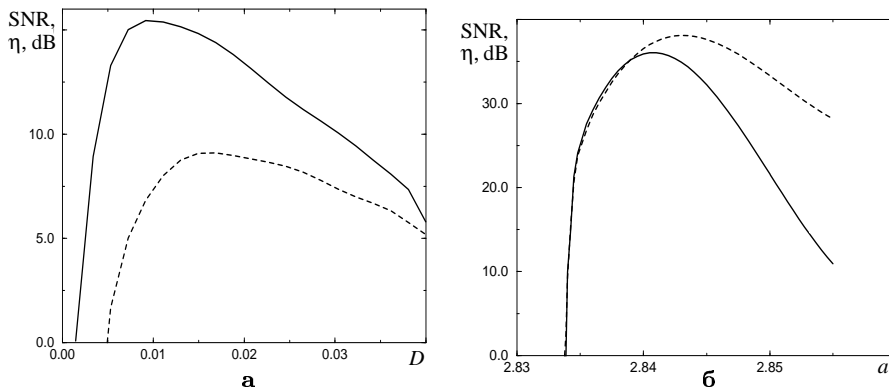


Рис. 3.20. Зависимость отношения сигнал/шум (сплошная линия) и коэффициента усиления (пунктир) (а) от интенсивности шума при $a = 2.5$, $A = 0.05$, $\Omega = 0.1$ и (б) от управляющего параметра при $D = 0$, $A = 0.005$, $\Omega = 0.1$

трактора, реализуется индуцированный шумом режим перемежаемости типа "хаос – хаос" между двумя симметричными аттракторами.

В отсутствие шума (т.е. в чисто динамическом случае) фазовое пространство системы содержит два симметричных аттрактора. Начальные условия определяют, на какой из них попадет фазовая траектория. При наличии шума аттракторы объединяются. Если шум слабый, то фазовая траектория долгое время находится на каждом из аттракторов и совершает редкие переходы между ними. Это ведет к появлению медленного временного масштаба – среднего времени нахождения фазовой траектории на одном из объединившихся аттракторов, которое при $D \ll 1$ зависит от интенсивности шума по закону Аррениуса. Наличие медленного временного масштаба, естественно, приводит к качественному изменению структуры спектра мощности, который эволюционирует в область низких частот; его низкочастотная часть имеет форму лоренциана [176].

С учетом только стохастической динамики переходов между аттракторами (приближение двух состояний) корреляционная функция является экспоненциально спадающей: $c_{x,x}(\tau) \propto \exp(-2r(D)\tau)$. Восприимчивость системы Лоренца может быть оценена таким же выражением, как и для бистабильного осциллятора.

Рассмотрим теперь совместное действие шума и слабого периодического сигнала $A \sin(\Omega t)$, включенного в первое уравнение системы (3.118). Спектральная плотность в этом случае будет содержать δ -пик на частоте сигнала.

Простейшая оценка для отношения сигнал/шум на выходе системы имеет вид

$$\text{SNR} \propto \frac{r(D)}{D^2} = \frac{1}{D^2} \exp\left(-\frac{\Delta\Phi}{D}\right), \quad (3.119)$$

где $\Delta\Phi$ – высота барьера соответствующего эффективного потенциала.

Результаты вычисления отношения сигнал/шум путем численного моделирования СДУ (3.118) и аппроксимация по формуле (3.119) представлены на рис. 3.21. Как видно из рисунка, формула (3.119), являющаяся универсальной для систем, демонстрирующих СР, прекрасно описывает эффект и для системы со сложной динамикой. Отметим, что динамические уравнения системы могут быть

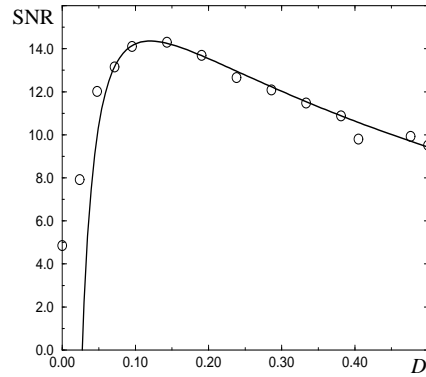


Рис. 3.21. Зависимость отношения сигнал/шум от интенсивности шума для системы Лоренца при $A = 1.0$, $\Omega = 0.1$. Символами \circ показаны результаты численного моделирования; сплошная линия соответствует аппроксимации (3.119) с $\Delta\Phi = 0.24$

трансформированы к виду бистабильного осциллятора с инерционной нелинейностью [159, 177]:

$$\begin{aligned} \ddot{u} + \gamma \dot{u} + u^3 + (v - 1)u &= 0, \\ \dot{v} &= h(\beta u^2 - \alpha v), \end{aligned} \quad (3.120)$$

где $\gamma = (1 + \sigma)/\sqrt{\sigma(r - 1)}$; $h = (r - 1)^{-1/2}$; $\beta = (2\sigma - b)/\sqrt{\sigma}$; $\alpha = b/\sqrt{\sigma}$. Для больших значений $r \gg 1$ переменная $v(t)$ является медленной. Исключая ее из (3.120), получаем уравнение бистабильного осциллятора уже без нелинейного инерционного члена:

$$\ddot{u} + \gamma \dot{u} + \frac{\alpha + \beta}{\alpha} u^3 - u = 0. \quad (3.121)$$

Таким образом, в пределах больших значений r система Лоренца допускает описание в виде бистабильного осциллятора, что гарантирует наличие СР.

3.1.10 Физический эксперимент

Первые результаты экспериментальных исследований эффекта СР были получены в измерениях зависимости SNR от интенсивности шума в триггере Шмитта [19] и в кольцевом лазере [20]. Эксперименты подтвердили наличие СР и показали хорошее совпадение экспериментальных данных с выводами адиабатической теории

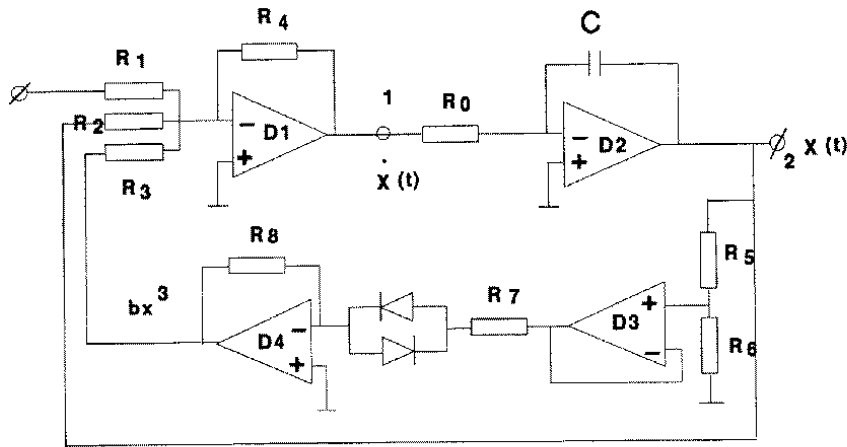


Рис. 3.22. Электронный аналог передемпфированного бистабильного осциллятора (номиналы элементов схемы: $R_0 - 5.11 \text{ k}\Omega$, $R_{1,4,6} - 10 \text{ k}\Omega$, $R_2 - 51.2 \text{ k}\Omega$, $R_3 - 2.2 \text{ k}\Omega$, $R_5 - 0.5 \text{ k}\Omega$, $R_7 - 1.1 \text{ k}\Omega$, $R_8 - 57 \text{ k}\Omega$, $C = 150 \text{ пФ}$)

двух состояний [61]. Позже эффект СР был многократно подтвержден экспериментально в бистабильных системах самой различной природы [58]. В большинстве экспериментальных работ измерялись зависимости SNR от интенсивности шума на выходе системы и проводилось сравнение с выводами теории. И это естественно, так как именно вид этой зависимости послужил основанием для определения эффекта СР.

Как было показано выше, эффект СР в равной степени характеризуется и резонансной зависимостью усиления входного сигнала от интенсивности шума (см. (3.17), (3.35)). В связи с этим рассмотрим результаты физических измерений коэффициента усиления гармонического сигнала малой амплитуды при вариации интенсивности шума в электронной цепи, моделирующей классический бистабильный осциллятор (3.3) [178–180]. На рис. 3.22 приведена принципиальная схема электронной цепи, представляющей аналоговую модель стохастической системы (3.3).

Схема содержит операционные усилители $D1 - D4$ типа К157УД2, резисторы $R_0 - R_8$, емкость C и два диода типа $D9$, включенные противофазно. Сигнал на входе, представляющий собой сумму гармонического $A \sin(2\pi ft)$ и шумового $\xi(t)$ сигналов, подается на резистор R_1 . В качестве источников соответствующих сигналов использовались стандартные генераторы. На выходе схемы измерял-

ся результирующий сигнал отклика системы $x(t)$. Основной проблемой эксперимента являлась задача аппроксимации вида нелинейной функции, определяющей форму бистабильного потенциала $U(x)$. Противофазное включение двух идентичных диодов и соответствующий подбор номиналов резисторов схемы обеспечивали возможность моделирования характеристики, с высокой степенью точности аппроксимирующей классический бистабильный потенциал в интервале изменений переменной состояния $-1.5 < x < 1.5$ (переменная x нормирована):

$$-\frac{dU(x)}{dx} = ax - bx^3. \quad (3.122)$$

Коэффициент a в этом уравнении зависит от номинала резистора R_2 , а коэффициент b определяется номиналами резисторов R_3 , R_5 , R_8 [180].

Для корректного сравнения результатов эксперимента с теорией (3.17) необходимо обеспечить выполнение условия адиабатического приближения с целью применения метода двух состояний:

$$2\pi f_0 \ll \tau^{-1} = U''(x_{\min}), \quad (3.123)$$

где τ – время релаксации осциллятора (3.3). Период внешней силы должен существенно превышать время релаксации. Условие (3.123) накладывает ограничения на значения коэффициентов a и b в (3.122) и соответственно на номиналы резисторов схемы. Для указанных на рис. 3.22 значений номиналов резисторов из условия (3.123) следует ограничение на частоту внешнего сигнала $f \ll 12.5$ кГц, которое в эксперименте было выполнено.

Теоретические и экспериментальные результаты определения зависимостей коэффициента усиления от интенсивности внешнего шума и частоты воздействия прекрасно соответствуют друг другу качественно, но различаются количественно за счет ошибки измерений, составлявшей примерно $\pm 5\%$ (рис. 3.23а). Следует, однако, отметить, что эти различия в среднем несколько превышают указанную погрешность измерений, по крайней мере, по двум причинам: во-первых, из-за имеющегося отличия нелинейной характеристики реальной схемы от кубического полинома (3.122), хотя специальные измерения показали, что это отличие в рабочем диапазоне $|x| \leq 2$ незначительное (не превышает 1%); во-вторых, из-за внутреннего шума схемы, влияние которого в экспериментах не учитывалось. Реальную возможность полностью исключить

вышеуказанные причины дает метод прямого численного моделирования динамики системы (3.3). Результаты расчетов приведены на рис. 3.23б в сравнении с данными теории. Как видно из графиков, различия между теоретическими и расчетными данными здесь существенно меньше и полностью укладываются в ошибку численного счета, обусловленную конечностью временных рядов, используемых при их статистической обработке.

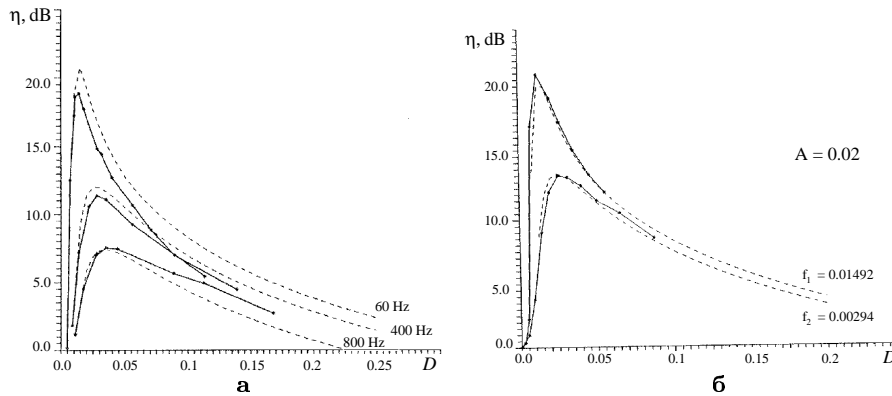


Рис. 3.23. Зависимость коэффициента усиления от интенсивности шума для различных значений частоты входного сигнала (**а**) по результатам измерений (сплошные кривые) и теоретическим данным (пунктир) и (**б**) по результатам численного моделирования динамики системы (3.3) (сплошные кривые) и данным теории (пунктир). Амплитуда сигнала на входе $A = 20$, нормированные значения частот f_1 и f_2 соответствуют в физическом эксперименте частотам 60 Гц и 400 Гц

3.1.11 Заключение

Результаты, приведенные в данной главе, наглядно иллюстрируют один из интересных эффектов нелинейной динамики стохастических систем – стохастический резонанс как индуцированный шумом переход в бистабильных системах, при котором некоторые характеристики системы могут быть оптимизированы путем варьирования интенсивности шума. Количественные меры эффекта СР, безусловно, зависят от структуры сигнала воздействия, статистических свойств шума и динамических свойств бистабильной системы. Однако физическая суть явления при этом принципиально не меняется. Одно из характерных времен системы нелинейным образом должно зависеть от интенсивности шума. В таком случае

естественно, что откликом системы на внешнее воздействие можно управлять путем изменения интенсивности шума, добиваясь оптимального результата.

Понимание физики явления СР позволило вначале предположить, а затем и экспериментально доказать возможность реализовать подобный эффект в детерминированных хаотических бистабильных системах. Среднее время переключений в режиме пережаемости типа "хаос – хаос" в таких системах нелинейным образом зависит не от величины шума, а от величины управляющего параметра. Изменяя параметр, можно управлять откликом хаотической системы на внешнее воздействие и аналогичным образом наблюдать эффект типа СР в отсутствие внешнего шума.

Представленные результаты в основном иллюстрируются на простейшей модели одномерного передемпфированного осциллятора. Для этой модели можно дать наиболее полное теоретическое описание эффекта СР, провести прямые численные расчеты и поставить адекватный физический эксперимент. Сравнение теоретических, численных и экспериментальных результатов для передемпфированного бистабильного осциллятора демонстрирует удивительно хорошее соответствие. Можно надеяться, что представленные результаты послужат стимулом для исследований эффекта СР и других явлений в более сложных нелинейных стохастических системах.

3.2 Синхронизация стохастических систем

3.2.1 Введение

Одной из основных целей нелинейной динамики является обобщение понятия *синхронизации* на случай связанных или находящихся под внешним воздействием хаотических и стохастических систем. Интуитивно явление синхронизации понимается как согласование ритмов связанных систем при их взаимодействии. Это согласование определяется различными критериями. Оно сопровождается подавлением некоторых колебательных мод, сокращением возможных путей фазовых траекторий в фазовом пространстве и приводит к уменьшению числа степеней свободы, необходимых для описания динамики системы.

В основном существуют два различных источника возникновения колебаний в простой зашумленной диссипативной динамике. Первым источником выступает внутренняя детерминированная динамика системы или какое-либо внешнее периодическое воздействие. В этом случае присутствие шума уширяет спектральные пики затухающего или автоколебательного детерминированного периодического движения, поэтому обычно шум нарушает когерентность колебаний. Шум также разрушает синхронизацию для данного типа систем, представителем которого является генератор Ван дер Поля.

Во втором случае колебания индуцируются шумом. Например, можно рассмотреть передемпфированную систему с одним или несколькими аттракторами, находящимися друг от друга на конечном расстоянии. Такие системы не имеют детерминированных собственных частот, а только времена релаксации. Как и в предыдущем случае, источники шума усиливают непрерывный спектр, соответствующий ряду стохастических движений. Особенности динамики таких систем являются переходы через энергетические барьеры. Время возврата зависит от уровня шума. При слабом периодическом сигнале эффект СР дает усиление слабого периодического сигнала при оптимальной интенсивности шума (см. раздел 3.1). Интуитивно, система при оптимальном уровне шума должна демонстрировать стохастические процессы переключений, которые происходят синфазно с сигналом.

Как согласуется описанная выше картина с понятием синхронизации? Теория линейного отклика не внесла достаточного понимания в ответ на этот вопрос. Однако существует ряд других подходов, которые показывают, что в условиях усиления процессов переключений другие движения подавляются. Одним из таких подходов является теория нелинейного отклика, где сигнал подавляет шумовой пьедестал [181]. Другое проявление эффекта синхронизации основано на использовании плотности времен ожидания [182] и называется *bona fide резонанс* или "*настоящий*" *стохастический резонанс* [54]. Пик на первых гармониках достигает максимума, уменьшая вероятность появления более быстрых и медленных процессов.

Исследования, проводимые в рамках теории нелинейных колебаний, свидетельствуют о том, что эффект СР сопровождается синхронизацией [156, 157, 183–185]. Основой исследований является

введение мгновенной фазы для стохастических траекторий, как и в случае синхронизации хаоса. Такое описание открывает возможность рассматривать эффект синхронизации как явление соотношения фаз между взаимодействующими системами.

В данном разделе будет показано, что стохастические процессы переключений могут быть *захвачены* периодическими силами. Приводятся критерии, механизмы и закономерности этого эффекта. В силу того, что динамика полностью индуцируется действующим шумом и не разрушается в пределах большой области значений интенсивности шума, этот эффект называют *стохастической синхронизацией*.

3.2.2 Синхронизация и стохастический резонанс

Рассмотрим передемпфированную бистабильную систему, которая является базовой моделью в исследовании эффекта СР. Добавление гауссовского белого шума качественно меняет ситуацию по сравнению со случаем без шума. Стохастическая система приобретает новую физическую особенность: в присутствии шума частица начинает совершать перескоки из одного детерминированного притягивающего состояния в другое и обратно. Несмотря на то, что перескоки происходят согласно пуассоновскому распределению времен ожидания, эти процессы можно рассматривать как стохастические автоколебания. Случайные колебания генерируются постоянно и их статические свойства в асимптотическом пределе не зависят от начальных условий.

Естественным образом возникает вопрос: возможно ли синхронизовать случайные колебания в бистабильной динамике с помощью дополнительного гармонического воздействия? Если да, то в чем состоят особенности этого эффекта?

Приближение аналитического сигнала для передемпфированного осциллятора Крамерса. Для ответов на поставленные выше вопросы и доказательства существования синхронизации в стохастических осцилляторах с периодическим воздействием обратимся снова к передемпфированному осциллятору Крамерса и применим приближение аналитического сигнала, описанное в главе 1.

Стохастические дифференциальные уравнения (СДУ), описывающие данную модель, имеют вид:

$$\dot{x} = \alpha x - \beta x^3 + \sqrt{2D} \xi(t) + A \cos(\Omega t + \varphi_0). \quad (3.124)$$

Система (3.124) не имеет собственной детерминированной частоты, ее спектр (в отсутствие модуляции) представляет собой лоренциан, т.е. является сплошным. В то же время система характеризуется управляемым шумом временным масштабом – средним временем выхода из потенциальной ямы, которому в частотной области отвечает средняя частота переключений. Периодический сигнал амплитуды A по отношению к бистабильному осциллятору представляет собой как бы внешние "часы" с частотой Ω и начальной фазой φ_0 . (Далее производилось усреднение по равномерно распределенной фазе φ_0 .)

Будем полагать, что в СДУ (3.124) $\alpha, \beta > 0$, $\varphi_0 = 0$ и амплитуда модуляции A является малой, так что в отсутствие шума процессы переключений не происходят. Более того, полагаем, что частота модуляции мала по сравнению со скоростью релаксации внутри ям.

Введем в рассмотрение аналитический сигнал $w(t) = x(t) + iy(t)$, где $y(t)$ – преобразование Гильберта исходного процесса $x(t)$:

$$y(t) = H[x] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x(t - \tau) - x(t + \tau)}{\tau} d\tau. \quad (3.125)$$

Мгновенные амплитуда и фаза процесса определяются соответственно как абсолютное значение и аргумент комплексной функции $w(t)$:

$$w(t) = R(t) \exp[i\Phi(t)]. \quad (3.126)$$

Применяя концепцию аналитического сигнала к (3.124), получим следующее СДУ для аналитического сигнала $w(t)$:

$$\dot{w} = \alpha w - \frac{\beta}{4} (3R^2 w + w^3) + \psi(t) + A \exp(i\Omega t), \quad (3.127)$$

где $\psi(t) = \xi(t) + i\eta(t)$ – аналитический шум, $\eta(t)$ – преобразование Гильберта от $\xi(t)$. Из уравнения (3.127) легко записать СДУ для мгновенных амплитуды и фазы:

$$\begin{aligned} \dot{R} &= \alpha R - \frac{\beta}{2} R^3 [1 + \cos^2(\phi + \Omega t)] + A \cos \phi + \xi_1(t), \\ \dot{\phi} &= -\Omega - \frac{A}{R} \sin \phi - \frac{\beta}{4} R^2 \sin[2(\phi + \Omega t)] + \frac{1}{R} \xi_2(t), \end{aligned} \quad (3.128)$$

где $\phi(t) = \Phi(t) - \Omega t$ есть мгновенная разность фаз. Источники шума $\xi_{1,2}(t)$ определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned}\xi_1(t) &= \xi(t) \cos \Phi + \eta(t) \sin \Phi, \\ \xi_2(t) &= \eta(t) \cos \Phi - \xi(t) \sin \Phi.\end{aligned}\quad (3.129)$$

Второе уравнение в (3.128), описывающее эволюцию разности фаз, сходно по структуре с соответствующим уравнением для синхронизованного генератора Ван дер Поля с шумом (1.268). Отличие заключается в том, что в этом уравнении, естественно, отсутствует член, отражающий наличие расстройки по частоте. Вместо него присутствует только член Ω . Это является еще одним фактором, свидетельствующим об отсутствии детерминированного временного масштаба в системе. Соответствующая компонента вращения содержится в (3.128) неявным образом и проявляется после процедуры усреднения.

Фазовая синхронизация процессов переключения периодическим сигналом. Зависимость разности фаз от времени, вычисленная в рамках концепции аналитического сигнала, представлена на рис. 3.24а для различных значений интенсивности шума. Наклон кривых дает разность между мгновенной частотой процесса x и Ω . Видно, что существует оптимальный уровень шума, при котором разность фаз равна нулю. Кроме этого, для данной интенсивности шума и заданной амплитуды воздействия фаза оказывается захваченной в течение времени наблюдения.

Отклонения от оптимального уровня шума приводят к разности фаз и появлению сбоев фаз, что ведет к постоянному отличному от нуля наклону зависимостей $\Phi(t)$. Зависимости средних частот, определяемых по формуле $\langle \omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{d\Phi(t)}{dt} dt$, от интенсивности шума приведены на рис. 3.24б для различных значений амплитуды сигнала A . Представленные результаты наглядно свидетельствуют об эффекте захвате средней частоты выходного сигнала $\langle \omega \rangle$ при некотором оптимальном уровне шума. Этот эффект был впервые установлен в работе [184] для случая стохастического триггера Шмитта (см. раздел 3.2.3).

Рисунок 3.24б иллюстрирует как наличие порога синхронизации, так и расширение области синхронизации с ростом амплитуды модуляции. В отсутствие воздействия ($A = 0$) средняя частота монотонно растет в соответствии с законом Крамерса. При значении $A \geq 1$ на графике зависимости $\langle \omega \rangle$ от D появляется слабо заметный изгиб; при $A = 2$ становится четко заметной "полочка",

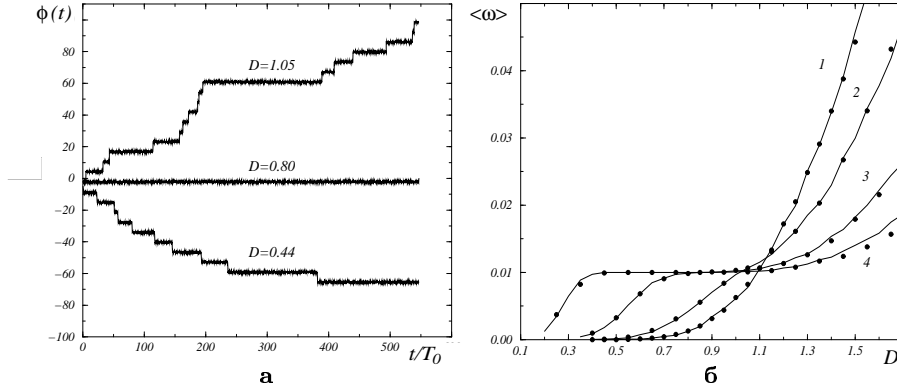


Рис. 3.24. (а) Зависимость мгновенной разности фаз ϕ от времени для указанных значений интенсивности шума и для $A = 3$; (б) средняя частота (сплошная линия) и средняя частота переключений (●) как функции интенсивности шума для различных значений амплитуды воздействия: 1 – $A = 0$, 2 – $A = 1$, 3 – $A = 2$, and 4 – $A = 3$. Значения остальных параметров: $\alpha = 5$, $\beta = 1$ и $\Omega = 0.01$ [185]

где $\langle \omega \rangle$ не зависит от D . Дальнейший рост амплитуды $A = 3$ ведет к расширению зоны синхронизации [184, 185].

Как показывалось выше, совпадение частот сопровождается по крайней мере малым числом сбоев фаз. Поэтому наряду с захватом средней частоты флуктуации разности фаз становятся минимальными. В соответствии с введенным определением (см. раздел 1.3.5) можно сказать, что процесс x эффективно синхронизован с внешней периодической силой.

Теперь необходимо рассчитать коэффициент эффективной диффузии:

$$D_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\langle \phi^2(t) \rangle - \langle \phi(t) \rangle^2]. \quad (3.130)$$

Как уже обсуждалось в главе 1, D_{eff} отвечает за качество синхронизации: чем меньше коэффициент эффективной диффузии, тем больше продолжительность интервалов времени захвата фаз. Результаты численных вычислений представлены на рис. 3.25. Как видно из графиков, с ростом амплитуды воздействия зависимости D_{eff} от интенсивности шума все более четко демонстрируют наличие минимума. Количественные значения D_{eff} в области синхронизации свидетельствуют о том, что эффект захвата частоты и фазы имеет место на временах, превышающих период внешней силы бо-

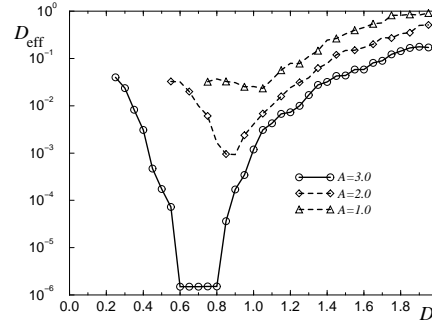


Рис. 3.25. Коэффициент эффективной диффузии как функция интенсивности шума для различных значений амплитуды воздействия (параметры: $\alpha = 5$, $\beta = 1$, $\Omega_0 = 0.01$) [185]

лее чем в 10^3 раз. Таким образом, наличие эффективной синхронизации на основном тоне установлено для стандартного примера СР. Этот эффект проявляется в захвате средней частоты внешним сигналом и минимизации коэффициента диффузии. Важно отметить, что добавление шума в систему приводит к упорядочиванию ее фазовой динамики: увеличение интенсивности шума вызывает уменьшение диффузии разности фаз.

Описание эффекта синхронизация в приближении двух состояний. Выражения для зависящих от времени скоростей (3.11) в модели двух состояний, использованной МакНамарой и Вейзенфельдом [61], можно переписать, чтобы показать их явную зависимость от разности фаз $\phi(t)$ между фазой дихотомического выходного сигнала $\Phi_{\text{out}}(t) = N(t)\pi$ и фазой входного сигнала $\Phi_{\text{in}}(t) = \Omega t$

$$\phi(t) = \Phi_{\text{out}}(t) - \Phi_{\text{in}}(t). \quad (3.131)$$

Так как фаза выходного сигнала Φ_{out} принимает значения, кратные π , то после применения тригонометрической теоремы, получаем

$$\cos(\Phi_{\text{out}}) \cos(\Phi_{\text{in}}) = \frac{1}{2} [\cos(\phi) + \cos(2\Phi_{\text{out}} - \phi)] = \cos(\phi). \quad (3.132)$$

Таким образом, для динамики двух состояний (3.11) скорости переключений на выходе в зависимости от разности фаз ϕ имеют вид [157]:

$$W_{\phi}^{\text{out}}(t) = r_K(D) \exp\left(-\frac{A}{D} \cos[\phi(t)]\right), \quad (3.133)$$

где A – амплитуда сигнала на входе.

Будем считать, что на вход также подаются дихотомические сигналы. Это ограничение определяет систему с 2×2 состояниями [см. (3.107)], если разность фаз полагается равной $\text{mod}(2\pi)$. В данном случае фаза представляет собой последовательность

$$\phi(t) = k(t)\pi, \quad (3.134)$$

а $k(t)$ определяется простым марковским процессом рождения и гибели, $k \rightarrow k + 1$ – переключения на выходе и $k \rightarrow k - 1$ – изменения на входе соответственно. Обозначим через $p_k(t)$ вероятность наблюдения разности фаз $k\pi$ в момент времени t (при условии, что $\phi_0 = 0$ при $t_0 = 0$).

Стохастическая динамика описывается следующим управляющим уравнением:

$$\frac{\partial p_k(t)}{\partial t} = W_{k+1}^{\text{in}} p_{k+1} - W_k^{\text{in}} p_k + W_{k-1}^{\text{out}} p_{k-1} - W_k^{\text{out}} p_k. \quad (3.135)$$

Выходной сигнал и, соответственно, входной, имеют по два состояния. Для изменений на выходе имеем две частоты переходов (вероятности переходов за единицу времени), зависящие от шума:

$$W_{k_{\text{even}}}^{\text{out}} = a_1 = r_K(D) \exp\left(-\frac{A}{D}\right), \quad W_{k_{\text{odd}}}^{\text{out}} = a_2 = r_K(D) \exp\left(\frac{A}{D}\right), \quad (3.136)$$

которые соответствуют синхронным и асинхронным переходам в силу переключений на выходе $k \rightarrow k + 1$.

Первые два слагаемых в правой части уравнения (3.135) соответствуют k , изменяющемуся в обратном порядке, при изменении входного сигнала и не зависят от k . В случае дихотомического периодического воздействия имеем

$$W_k^{\text{DPP}}(t, \varphi_0) = \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{n\pi + \varphi_0}{\Omega}\right). \quad (3.137)$$

Нестационарная частота перехода явно зависит от начальной фазы сигнала φ_0 . Усреднение по начальной фазе в итоге дает стационарный процесс, имеющий частоту перехода

$$\langle W_k^{\text{DPP}} \rangle_{\varphi_0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} W_{\pm}^{\text{DPP}}(t, \varphi_0) d\varphi_0 = \Omega. \quad (3.138)$$

Подобное определение частоты переходов применимо и для случая аperiодического воздействия в виде дихотомического марковского процесса. Обозначив через γ величину, обратную среднему времени τ , за которое происходит одно изменение стохастического входного сигнала, запишем выражение для средней угловой скорости:

$$W_k^{\text{DMP}} = \frac{2\pi}{2\tau} = \pi\gamma. \quad (3.139)$$

Обе стационарные скорости являются постоянными величинами, что позволяет провести общий анализ их средней частоты. Исключением является вычисление коэффициента эффективной диффузии фаз, так как вторые моменты для дихотомического периодического процесса (ДПП) и дихотомического марковского процесса (ДМП) различаются даже в стационарном пределе [157].

Индукцированный шумом захват частоты. Из уравняющего уравнения (3.135) можно вычислить среднюю частоту $\langle \dot{\phi} \rangle$

$$\left\langle \frac{d}{dt} \phi \right\rangle = -\langle \omega_{\text{in}} \rangle + \langle \omega_{\text{out}} \rangle = -\langle \omega_{\text{in}} \rangle + \frac{\pi}{2}(a_1 + a_2) - \frac{\pi}{2}(a_2 - a_1) \langle \cos(\phi) \rangle, \quad (3.140)$$

где $\langle \omega_{\text{in}} \rangle = \gamma\pi$ для ДМП и $\langle \langle \omega_{\text{in}} \rangle \rangle_{\varphi_0} = \Omega$ для ДПП.

Уравнение (3.140) аналогично усредненному уравнению Адлера (1.268). При сравнении этих двух уравнений можно видеть, что разница частот соответствует величине

$$\Delta = \pi \frac{a_1 + a_2}{2} - \langle \omega_{\text{in}} \rangle, \quad (3.141)$$

тогда как разность $\pi(a_2 - a_1)/2$ есть аналог параметра нелинейности μ . Отметим, что оба параметра зависят от шума, что объясняет тот факт, что захват частот индуцирован шумом. Более того, зависимость μ от отношения A/D является нелинейной.

Первый член в (3.141) определяет требуемую частоту стохастической бистабильной динамики под внешним воздействием. В отсутствие шума он равен нулю и монотонно возрастает с увеличением уровня шума. Для чрезвычайно малых амплитуд $a_1 = a_2 = r_K$. Таким образом, по аналогии с осцилляторами скорость Крамерса, умноженную на π , можно назвать *собственной частотой* стохастических колебаний в рамках модели двух состояний.

В общем случае член $\langle \cos \phi \rangle$ зависит от времени и его эволюция определяется начальными условиями. Однако асимптотическое значение является единственным и может быть получено

как стационарное значение соответствующего управляющего уравнения

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle \cos(\phi) \rangle = \langle \sigma^{\text{stat}} \rangle = \frac{a_2 - a_1}{2 \frac{\langle \omega_{\text{in}} \rangle}{\pi} + a_1 + a_2}. \quad (3.142)$$

Как было показано в [156], это значение равно коэффициенту стационарной корреляции входа и выхода в модели, имеющей 2×2 состояния.

Подставляя (3.142), получаем выражение для асимптотической средней частоты выхода:

$$\langle \omega_{\text{out}}^{\text{stat}} \rangle = \frac{\pi}{2} \left(a_1 + a_2 - \frac{(a_2 - a_1)^2}{2 \frac{\langle \omega_{\text{in}} \rangle}{\pi} + a_1 + a_2} \right). \quad (3.143)$$

Ее зависимость (в единицах π) от интенсивности шума D показана на рис. 3.26 для дихотомического марковского процесса с $\gamma = 0.001$ и для трех значений амплитуды $A_{1,2,3} < \Delta U = 0.25$.

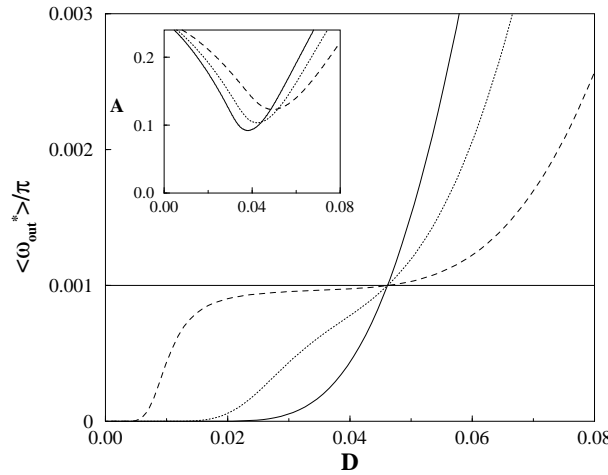


Рис. 3.26. Средняя частота выхода (3.140) в единицах π в зависимости от D для ДМП с $\gamma = 0.001$ и для ДПП с $\Omega/\pi = 0.001$ для трех значений амплитуды: $A_1 = 0$ (сплошная линия), $A_2 = 0.1$ (точечная линия) и $A_3 = 0.2$ (пунктир). Для достаточно больших амплитуд (с $\alpha_0 = 1$ и $\Delta U = 0.25$) формируется плато вблизи $\gamma = \Omega/\pi$, которое, при соответствующем определении, приводит к структуре в форме "языка" синхронизации, показанной на внутреннем рисунке

При достаточно больших амплитудах формируется плато вблизи частоты входного сигнала. Эта картина напоминает график захвата частоты в зашумленных автоколебательных осцилляторах. Область значений интенсивности шума, соответствующих плато, – критерий, который накладывается для получения малого наклона, – в зависимости от амплитуды сигнала A отвечает структурам, похожим на языки, которые показаны на внутреннем рисунке рис. 3.26. Эти результаты одинаково применимы и к случаю дихотомического периодического процесса при $\Omega/\pi = \gamma$. Отметим, что соответствия со случаем нелинейных осцилляторов становятся полными, если построить график зависимости не от интенсивности шума, а от собственной частоты πr_K , зависящей от шума.

Индукцированная шумом фазовая синхронизация. Пусть коэффициент диффузии разности фаз определяется выражением

$$D_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\langle \phi^2 \rangle - \langle \phi \rangle^2) = \frac{\pi^2}{2} \frac{d}{dt} (\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2). \quad (3.144)$$

В принципе коэффициент диффузии вычисляется довольно просто, исходя из управляющего уравнения (3.135). Однако в случае периодического воздействия существует некоторая математическая тонкость. Она проявляется в том, что в то время как для ДМП среднее значение функций от ϕ гладко зависит от времени, соответствующие средние значения в случае ДПП по-прежнему дискретны относительно моментов перескоков t_n [157].

В результате получаем следующие выражения для ДМП и ДПП:

$$D_{\text{eff}}^{\text{DMP}} = \frac{\pi^2}{2} \left(\gamma + \frac{\langle \omega_{\text{out}}^{\text{stat}} \rangle}{\pi} - (2\gamma - (a_1 + a_2)) \langle \sigma^{\text{stat}} \rangle^2 - \frac{1}{2} (a_2 - a_1) \langle \sigma^{\text{stat}} \rangle (1 + \langle \sigma^{\text{stat}} \rangle^2) \right),$$

$$D_{\text{eff}}^{\text{DPP}} = \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{\langle \omega_{\text{out}}^{\text{stat}} \rangle}{\pi} - \left(2\frac{\Omega}{\pi} - (a_1 + a_2) \right) \langle \sigma^{\text{stat}} \rangle^2 - \frac{1}{2} (a_2 - a_1) \langle \sigma^{\text{stat}} \rangle (1 + \langle \sigma^{\text{stat}} \rangle^2) + \frac{\Omega}{\pi} \langle \sigma^{\text{stat}} \rangle \right).$$

Их общая структура выглядит как $D_{\text{eff}} = D_{\text{in}} + D_{\text{out}} - D_{\text{coh}}$, где последний когерентный член изменяется пропорционально $\langle \sigma^{\text{stat}} \rangle^n$

($n = 1, 2, 3$). Только этот член может вызывать уменьшение коэффициента эффективной диффузии фазы при оптимальной интенсивности шума.

Эффективная фазовая синхронизация проявляется в увеличении продолжительности процессов захвата фаз. Среднюю продолжительность захвата $\langle T_{\text{lock}} \rangle$ можно определить из следующего выражения:

$$\langle \phi^2 \rangle = \left\langle \frac{d\phi}{dt} \right\rangle^2 \langle T_{\text{lock}} \rangle^2 + 2D_{\text{eff}} \langle T_{\text{lock}} \rangle = \pi^2. \quad (3.145)$$

Отсюда находим

$$\langle T_{\text{lock}} \rangle = D_{\text{eff}} \left\langle \frac{d\phi}{dt} \right\rangle^{-2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{D_{\text{eff}}} \left\langle \frac{d\phi}{dt} \right\rangle^2 \right)^2} - 1 \right]. \quad (3.146)$$

На рис. 3.27 построены графики зависимости $\langle T_{\text{lock}} \rangle$ от интенсивности шума D для ДМП и ДПП. Оба случая демонстрируют наличие максимумов в окрестности значений интенсивностей шума, при которых реализуется захват фазы, определяя тем самым

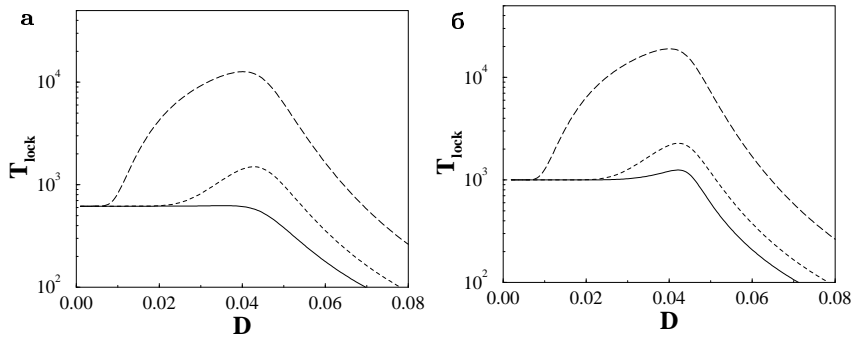


Рис. 3.27. Средняя продолжительность процесса захвата фазы $\langle T_{\text{lock}} \rangle$ [см. (3.146)] для (а) ДМП и (б) ДПП при различных значениях амплитуды сигнала: $A_1 = 0$ (сплошная линия), $A_2 = 0.1$ (точечная линия) и $A_3 = 0.2$ (пунктир). Ярко выраженные максимумы в логарифмическом масштабе возникают вблизи значений интенсивности шума, которые совпадают с условием захвата частоты (см. рис. 3.26). Для ДПП максимум существует даже для $A \rightarrow 0+$ вблизи значения интенсивности шума, при котором частота Крамерса совпадает с частотой сигнала, т.к. коэффициент диффузии фазы растет довольно медленно

область эффективной фазовой синхронизации. Отметим, что появление фазовой синхронизации вызывается резким увеличением $\langle \sigma^{\text{stat}} \rangle$. Однако даже выше области эффективной фазовой синхронизации коррелятор сохраняет большое значение; таким образом, он не является эквивалентной мерой стохастической синхронизации.

3.2.3 Внешняя стохастическая синхронизация триггера Шмитта

Данный параграф посвящен экспериментальному исследованию индуцированной шумом синхронизации в стохастическом триггере Шмитта под действием слабого периодического сигнала. Триггер Шмитта представляет собой один из лучших теоретически и экспериментально изученных примеров нелинейной стохастической динамики, который демонстрирует явление СР [19, 186].

Результаты экспериментальных измерений и численные расчеты средней скорости переключений в триггере Шмитта приведены в работе [184]. На триггер Шмитта с порогом срабатывания $\Delta U = 150$ мВ подавался шумовой сигнал с частотой среза $f_c = 100$ кГц и периодический сигнал с частотой $f_0 = 100$ Гц.

По выходному сигналу, представляющему собой телеграфный процесс и отцифровываемому в компьютере, измерялась средняя частота переключений $\langle f \rangle = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \frac{\pi}{t_{k+1} - t_k}$. Результаты измерений показаны на рис. 3.28а. При слабом сигнале зависимость средней частоты от интенсивности шума следует закону Аррениуса, экспоненциально возрастающая с ростом интенсивности шума. С увеличением амплитуды сигнала эта зависимость становится качественно иной: появляется область значений интенсивности шума, в которой средняя частота практически не меняется с ростом шума и в пределах погрешности эксперимента остается равной частоте сигнала. Наблюдается эффект захвата средней частоты переключений [184].

Повторяя измерения средней частоты для разных значений амплитуды и частоты сигнала, можно получить области синхронизации на плоскости параметров “интенсивность шума – амплитуда сигнала”, в которых средняя частота равна частоте сигнала. Области синхронизации, напоминающие языки Арнольда, показаны на рис. 3.29. Как видно из рисунка, существует пороговое значение амплитуды сигнала A_{th} , начиная с которого наблюдается эф-

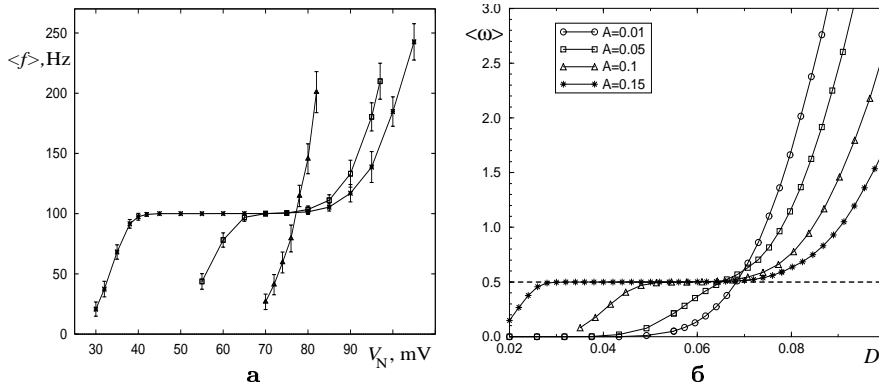


Рис. 3.28. Зависимости средней частоты выходного сигнала триггера Шмитта от интенсивности шума для амплитуд сигнала $A = 0$ мВ (Δ), $A = 60$ мВ (\square), $A = 100$ мВ (\star), полученные в физическом эксперименте (а) и численным моделированием системы (3.147) (б). Порог срабатывания триггера $K = 0.2$, частота сигнала $\Omega = 0.5$

факт захвата средней частоты. При достижении порога периодический сигнал начинает эффективно управлять стохастической динамикой переходов. С ростом частоты сигнала эффект синхронизации ухудшается: во-первых, сужаются области синхронизации, во-вторых, увеличиваются пороговые значения амплитуды сигнала (см. рис. 3.29).

На рис. 3.30 показана плотность вероятности времен пребывания $p(t)$ триггера в одном из метастабильных состояний при раз-

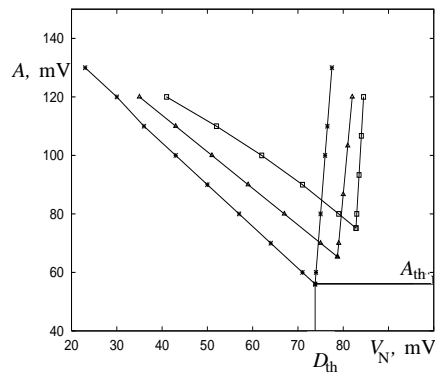


Рис. 3.29. Области синхронизации для триггера Шмитта (эксперимент) для разных частот сигнала: $f_0 = 100$ Гц (\star), $f_0 = 250$ Гц (Δ), $f_0 = 500$ Гц (\square)

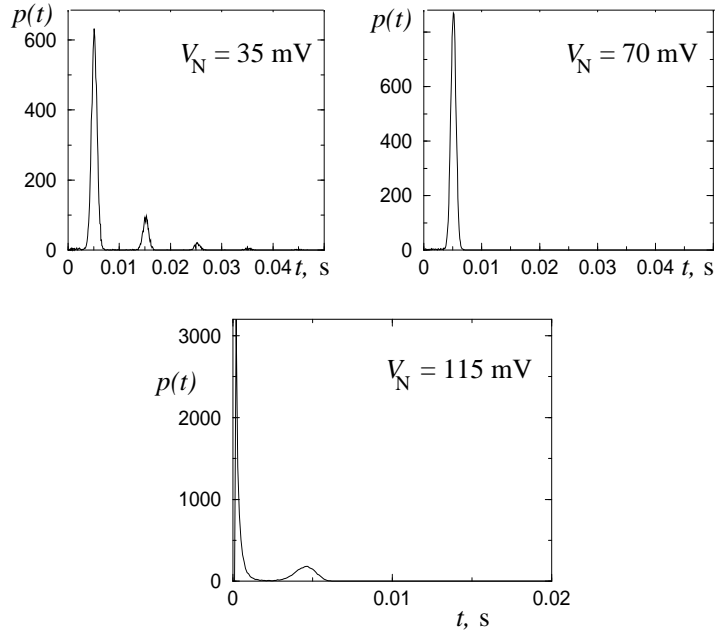


Рис. 3.30. Плотность вероятности времен пребывания триггера Шмитта в одном из состояний; амплитуда сигнала $A = 100$ мВ, частота сигнала $f_0 = 100$ Гц

личных уровнях шума. При слабом шуме ($V_N = 35$ мВ) $p(t)$ содержит несколько пиков на временах, кратных половине периода сигнала. В области синхронизации ($V_N = 70$ мВ) среднее время нахождения триггера в одном из состояний совпадает с половиной периода и плотность вероятности времен нахождения содержит ярко выраженный пик при $t = T_0/2$. При большом шуме ($V_N = 115$ мВ), вне области синхронизации, среднее время, необходимое для переключения, много меньше половины периода. За период система успевает многократно переключиться из одного состояния в другое и появляется пик, соответствующий малым временам переключений. Пик, соответствующий половине периода сигнала, размывается и когерентность выходного сигнала разрушается.

Триггер Шмитта моделируется следующим выражением:

$$x(t + \Delta t) = \text{sign} [K x(t) - D y(t) - A \sin(\Omega t)]. \quad (3.147)$$

Параметр $K = 0.2$ характеризует порог срабатывания триггера, $\xi(t)$ – экспоненциально коррелированный шум с временем корреля-

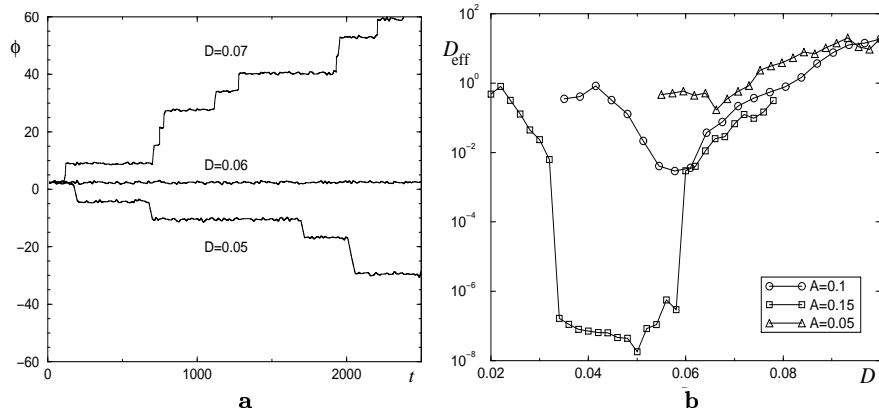


Рис. 3.31. (а) Временная эволюция разности фаз при $A = 0.1$, $\Omega = 0.5$ для различных значений интенсивности шума; (б) зависимость коэффициента диффузии D_{eff} триггера Шмитта при $K = 0.2$, $\Omega = 0.5$ для разных значений амплитуды сигнала

ции $\tau_c = 10^{-2}$ и интенсивностью D , описываемый процессом Орнштейна – Уленбека.

Результаты расчетов средней частоты как функции интенсивности шума, проведенных по уравнению (3.147), показаны на рис. 3.28б и демонстрируют поведение, идентичное измеренному в эксперименте (рис. 3.28а). На рис. 3.31а показана эволюция мгновенной разности фаз ϕ триггера и входного сигнала, вычисленная по определению (1.286) для случая $A = 0.1$. При оптимальном уровне шума ($D = 0.06$) разность фаз остается постоянной в течение времени наблюдения. Вне области синхронизации ($D = 0.04$, $D = 0.08$) скачки фазы гораздо более частые, что приводит к быстрой диффузии фазы и, следовательно, к отсутствию синхронизации.

В случае малой амплитуды сигнала ($A \leq A_{\text{th}}$) явление захвата средней частоты отсутствует. Результаты расчета мгновенной разности фаз свидетельствуют также об отсутствии фазовой синхронизации: наблюдается значительная диффузия фазы и временная реализация мгновенной разности фаз представляет собой пример случайного блуждания [185].

Результаты расчета коэффициента диффузии разности фаз показаны на рис. 3.31б. Зависимость $D_{\text{eff}}(D)$ характеризуется минимумом, что является следствием эффекта стохастической синхронизации.

Полученные данные свидетельствуют о том, что внешний периодический сигнал достаточной амплитуды синхронизирует стохастическую динамику переходов. Это явление сопровождается захватом мгновенной разности фаз и средней частоты.

3.2.4 Взаимная стохастическая синхронизация связанных бистабильных систем

Рассмотрим простейший случай – систему двух симметрично связанных передемпфированных бистабильных осцилляторов, СДУ которых имеют вид [70, 183]:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha x - x^3 + \gamma(y - x) + \sqrt{2D}\xi_1(t), \\ \dot{y} &= (\alpha + \Delta)y - y^3 + \gamma(x - y) + \sqrt{2D}\xi_2(t).\end{aligned}\quad (3.148)$$

В СДУ (3.148) параметр α определяет частоту Крамерса первой подсистемы в отсутствие связи, Δ – параметр расстройки второй системы относительно первой, γ – коэффициент связи. Источники белого шума $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ предполагаются статистически независимыми: $\langle \xi_i(t)\xi_j(t+\tau) \rangle = \delta_{i,j} \delta(\tau)$. Последнее означает, что при $\gamma = 0$ случайные процессы в подсистемах $x(t)$ и $y(t)$ также будут статистически независимыми. Будем считать интенсивности некоррелированных шумов одинаковыми: $D_1 = D_2 = D$.

Уравнениям (3.148) соответствует уравнение Фоккера – Планка (УФП) для плотности вероятности $p(x, y, t)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial t} &= - \frac{\partial}{\partial x} [\alpha x - x^3 + \gamma(y - x)] p \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial y} [(\alpha + \Delta)y - y^3 + \gamma(x - y)] p + D \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right).\end{aligned}\quad (3.149)$$

Стационарное решение УФП $p(x, y)$ в данном случае может быть найдено аналитически, поскольку коэффициенты диффузии и сноса УФП (3.149) удовлетворяют потенциальным условиям [67, 187]:

$$\begin{aligned}p(x, y) &= C \exp\left(-\frac{U(x, y)}{D}\right), \\ U(x, y) &= -\alpha \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} - (\alpha + \Delta) \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4} + \frac{\gamma}{2} (x - y)^2,\end{aligned}\quad (3.150)$$

где C – константа нормировки. Таким образом, СДУ (3.148) и УФП (3.149) описывают броуновское движение в двумерном потенциале

$U(x, y)$. Потенциальность исследуемой системы облегчает бифуркационный анализ, так как в этом случае качественные изменения структуры плотности вероятности (изменение количества и характера экстремумов) соответствуют бифуркациям детерминированной системы, $D = 0$ (см. раздел 1.2.5).

Так как парциальные подсистемы являются бистабильными, то будем считать процессы подсистем $x(t)$ и $y(t)$ синхронизованными в случае, если переходы из положительной области значений $x(t)$ в отрицательную имеют место в одни и те же моменты времени, что и для $y(t)$. На рис. 3.32 представлены временные реализации процессов в подсистемах для двух значений параметра связи. Значение параметра расстройки $\Delta = -0.5$ определяет более быстрое движение во второй подсистеме – $y(t)$. При малой связи процессы в подсистемах несинхронизованы. С ростом коэффициента связи процесс во второй подсистеме замедляется и при достаточной величине γ процессы в подсистемах становятся когерентными.

Для количественной оценки синхронизации используем функцию когерентности, которая определяется выражением

$$\Gamma^2(\omega) = \frac{|G_{x,y}(\omega)|^2}{G_{x,x}(\omega) G_{y,y}(\omega)}, \quad (3.151)$$

где $G_{x,y}(\omega)$ – взаимная спектральная плотность процессов $x(t)$, $y(t)$, а $G_{x,x}(\omega)$ и $G_{y,y}(\omega)$ – их спектры мощности.

Функция когерентности, полученная численным моделированием СДУ (3.148), показана на рис. 3.33а для различных значений коэффициента связи. С увеличением коэффициента связи γ случайные процессы $x(t)$ и $y(t)$ становятся когерентными в низкочастотной области, которая соответствует частотам Крамерса подсистем.

Рассмотрим эволюцию частот Крамерса подсистем с изменением коэффициента связи. При $\gamma = 0$ частоты Крамерса r_x и r_y подсистем будут следующими:

$$r_x = \frac{\sqrt{2}\alpha}{\pi} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{4D}\right), \quad r_y = \frac{\sqrt{2}(\alpha + \Delta)}{\pi} \exp\left(-\frac{(\alpha + \Delta)^2}{4D}\right). \quad (3.152)$$

Рассмотрим средние частоты переключения отдельно в подсистемах с учетом связи. Эти величины можно получить численно, фиксируя моменты времени t_i^x , t_j^y пересечения нулевой оси в положительном направлении процессами $x(t)$ и $y(t)$ соответственно:

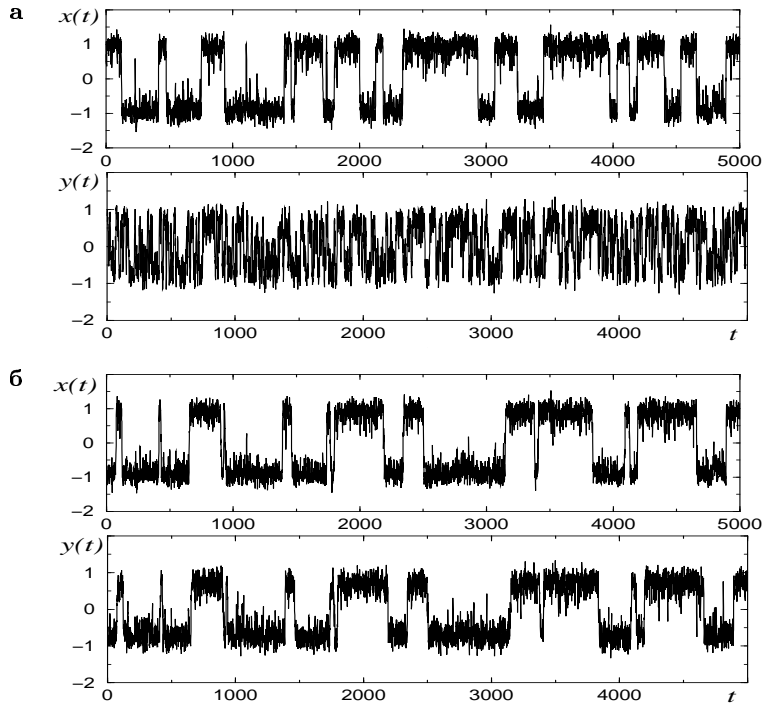


Рис. 3.32. Временные реализации $x(t)$, $y(t)$ системы (3.148) для $\gamma = 0.05$ (а) и $\gamma = 0.5$ (б); параметры: $\alpha = 1.0$, $\Delta = -0.5$, $D = 0.07$

$$r_{x,y} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{2\pi}{t_{i+1}^{x,y} - t_i^{x,y}}. \quad (3.153)$$

Зависимость средних частот переключений от γ показана на рис. 3.33б. С ростом связи проявляется эффект затягивания частоты: собственные частоты парциальных подсистем сближаются.

Функция когерентности характеризует лишь степень линейной зависимости и не содержит информацию о фазах процессов. Мгновенная фаза процессов в подсистемах может быть введена на основе времен переключения (t_i^x, t_j^y) аналогично предыдущему разделу:

$$\begin{aligned} \Phi_x(t) &= 2\pi \frac{t - t_i^x}{t_{i+1}^x - t_i^x} + 2\pi i, & t_i^x < t < t_{i+1}^x, \\ \Phi_y(t) &= 2\pi \frac{t - t_j^y}{t_{j+1}^y - t_j^y} + 2\pi j, & t_j^y < t < t_{j+1}^y. \end{aligned} \quad (3.154)$$

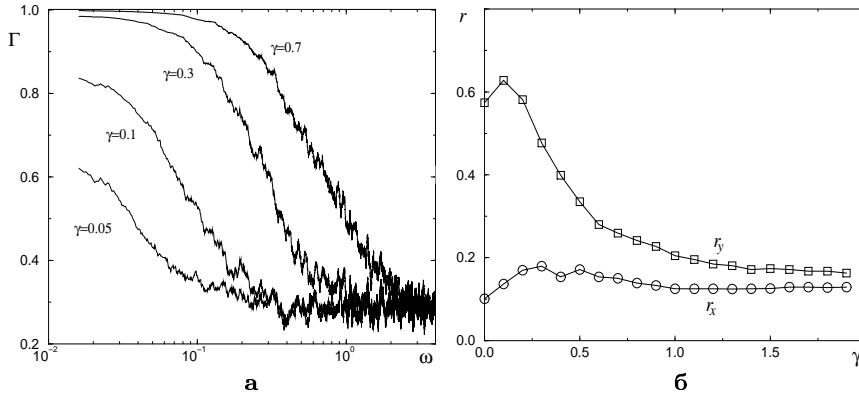


Рис. 3.33. (а) Функция когерентности $\Gamma(\omega)$ системы (3.148) для разных значений коэффициента связи, (б) зависимость средних частот переключений $r_{x,y}$ от коэффициента связи при $\alpha = 1.0$, $\Delta = -0.5$, $D = 0.1$

Численным моделированием динамики мгновенной разности фаз, $\phi(t) = \Phi_x(t) - \Phi_y(t)$, установлено, что при $\gamma > 1$ имеет место фазовая синхронизация: разность фаз остается постоянной в течение длительных промежутков времени.

3.2.5 Внешняя и взаимная синхронизация переключений в хаотических системах

В хаотических системах в режимах перемежаемости типа "хаос – хаос" реализуется эффект детерминированного стохастического резонанса. При этом средняя частота нерегулярного процесса переключений, в отличие от интенсивности шума, контролируется управляющим параметром (см. раздел 3.1).

Если эти явления объединяет глубокая физическая общность, то в хаотических системах при сильных взаимодействиях должен наблюдаться эффект синхронизации процесса переключений, качественно эквивалентный описанному для стохастических бистабильных систем. Это действительно так. Для иллюстрации рассмотрим внешнюю и взаимную синхронизации процессов переключений в системах с детерминированной хаотической динамикой [9, 188].

Внешняя синхронизация. Обратимся к отображению

$$x_{n+1} = (ax_n - x_n^3) \exp(-x_n^2/b) + A \sin(\Omega n) \tag{3.155}$$

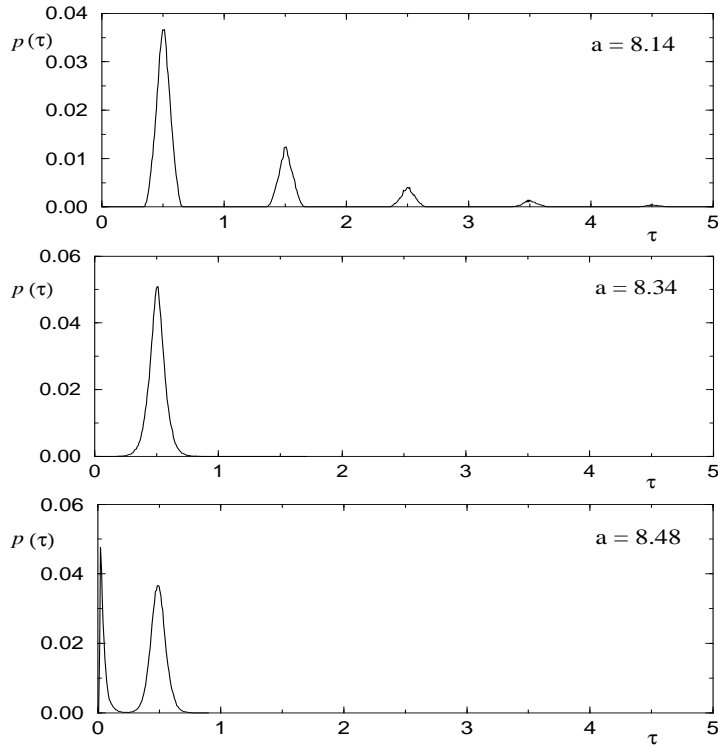


Рис. 3.34. Плотность вероятности времен пребывания в одной из потенциальных ям для отображения (3.117) для трех различных значений управляющего параметра a . Зависимости напоминают соответствующие графики для триггера Шмитта (см. рис. 3.30). τ измеряется в единицах периода внешней силы

в режиме перемежаемости "хаос – хаос" при $a > a_{\text{cr}} = 2.839\dots$ Рассмотрим динамику системы в отсутствие внешнего шума для достаточно больших значений амплитуды внешней силы A . При этом процесс переключений принципиально нелинеен, его статистика будет существенно зависеть от параметра a . Используя метод двух состояний, вычислим эволюцию плотности времен пребывания $p(\tau)$ в отдельно взятой потенциальной яме при вариации параметра a . Результаты представлены на рис. 3.34 и качественно повторяют данные, полученные для триггера Шмитта (рис. 3.30). При оптимальном значении $a = 8.34$ распределение имеет единственный гауссообразный пик с максимумом при $\tau = 0.5$, что соответствует равенству средней частоты переключений между хаотическими аттракторами частоте внешней силы.

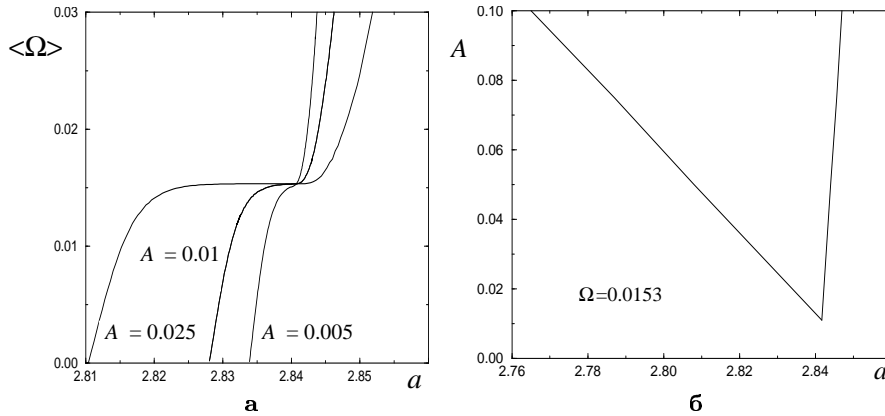


Рис. 3.35. (а) Средняя частота переключений в зависимости от параметра a для разных значений амплитуды сигнала, (б) область синхронизации частоты переключений для отображения (3.155)

Эффект захвата средней частоты переключений внешним сигналом для различных значений параметра a иллюстрирует рис. 3.35а. С ростом амплитуды сигнала воздействия область синхронизации увеличивается, как и следовало ожидать. Из рис. 3.35б видно, что данная область представляет собой типичную зону синхронизации, как и в случае триггера Шмитта (рис. 3.29). Как видно из рис. 3.35б, имеет место порог синхронизации. Таким образом, эффект внешней синхронизации частоты переключений в детерминированной хаотической системе уверенно регистрируется и оказывается качественно эквивалентным эффекту индуцированной шумом стохастической синхронизации.

Эффект захвата средней частоты переключений является универсальным и проявляет себя в широком классе динамических систем с режимом перемежаемости. Исследуем в качестве примера нелинейную систему Чуа, реализующую режим динамической перемежаемости [140]. Цепь Чуа описывается системой уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha[y - h(x)], \\ \dot{y} &= x - y + z, \\ \dot{z} &= -\beta y + F(t), \end{aligned} \tag{3.156}$$

где $h(x) = m_1x + 0.5(m_0 - m_1)(|x + 1| - |x - 1|)$ – кусочно-линейная характеристика системы, параметры которой фиксированы: $m_0 = -1/7$, $m_1 = 2/7$; $F(t) = A \cos(\Omega t)$ – внешняя периодическая сила.

Как показано в работе [46], процесс переключений в хаотической бистабильной системе (3.156) может быть индуцирован шумом либо иметь чисто динамическую природу. Применим метод двух состояний. Зафиксируем значение параметра $\beta = 14.286$. Динамика системы (3.156) будет зависеть от величины параметра α , а также от амплитуды A и частоты ω_s внешнего сигнала. В отсутствие воздействия ($A = 0$) режим перемежаемости реализуется в системе (3.156) при $\alpha \approx 8.8$. Для $\alpha > 8.8$ средняя частота переключений (аналог частоты Крамерса) монотонно возрастает с увеличением α . Выберем значение амплитуды $A = 0.1$, когда реакция системы на внешнее воздействие принципиально нелинейна.

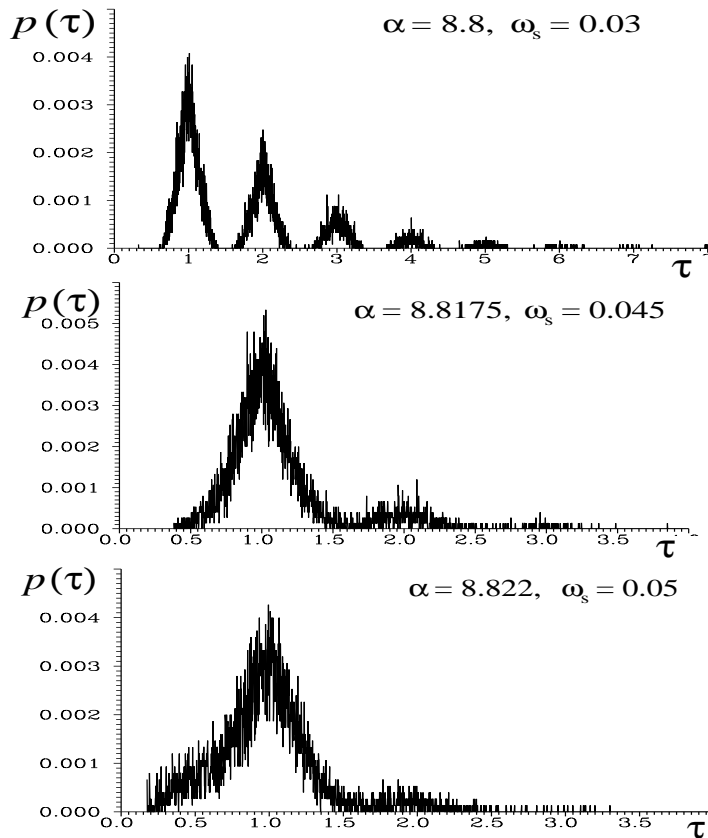


Рис. 3.36. Плотность распределения времен возврата в системе Чуа для различных значений параметра α в (3.156) и частоты внешнего сигнала ω_s . Время τ измеряется в единицах периода внешнего воздействия $T = 2\pi/\Omega$

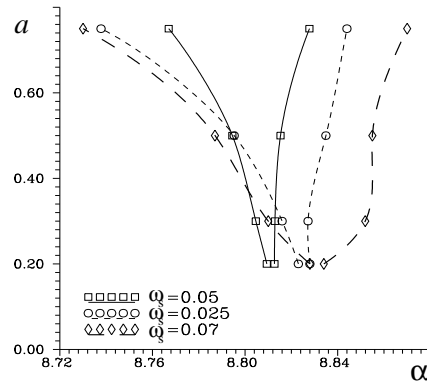


Рис. 3.37. Области синхронизации на плоскости параметров "амплитуда внешнего сигнала – управляющий параметр" для системы (3.156) для трех значений частоты внешнего сигнала ω_s

На рис. 3.36 представлены результаты расчета плотности распределения времен возврата $p(\tau)$ для различных значений параметра α [189]. Наблюдается удивительное сходство с данными, приведенными на рис. 3.30 для триггера Шмитта, и на рис. 3.34. При определенном значении параметра $\alpha = 8.8325$ распределение $p(\tau)$ имеет практически единственный гауссообразный пик с максимумом вблизи $\tau = 1$, что соответствует равенству средней частоты переключений и частоты внешней силы. Регистрируется эффект вынужденной синхронизации, проявляющийся в захвате средней частоты переключений периодическим сигналом.

На рис. 3.37 представлены области синхронизации, полученные в результате физического эксперимента, которые качественно напоминают "языки Арнольда", как и в случае триггера Шмитта (рис. 3.29). Отличия состоят лишь в том, что с ростом частоты сигнала уровень порога синхронизации здесь практически не изменяется, а ширина областей синхронизации увеличивается. Эти отличия обусловлены нелинейными свойствами исследуемой системы (3.156) и не касаются самой сущности наблюдаемого эффекта. Более детальные расчеты свидетельствуют о том, что эффекту синхронизации средней частоты переключений в системах (3.155) и (3.156) отвечает эффект фазовой синхронизации, полностью эквивалентный рассмотренным случаям триггера Шмитта и передемпфированного осциллятора.

Взаимная синхронизация. В качестве примера взаимной синхронизации процессов переключений рассмотрим динамику системы двух связанных моделей Лоренца [190]:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= \sigma(y_1 - x_1) + \gamma(x_2 - x_1), \\
 \dot{y}_1 &= r_1 x_1 - x_1 z_1 - y_1, \\
 \dot{z}_1 &= x_1 y_1 - z_1 b, \\
 \dot{x}_2 &= \sigma(y_2 - x_2) + \gamma(x_1 - x_2), \\
 \dot{y}_2 &= r_2 x_2 - x_2 z_2 - y_2, \\
 \dot{z}_2 &= x_2 y_2 - z_2 b.
 \end{aligned}
 \tag{3.157}$$

Выберем значения параметров $\sigma = 10$, $r_1 = 28.8$, $r_2 = 28$, $b = 8/3$, соответствующие случаю, когда в каждой из подсистем существует аттрактор Лоренца [175]. Этот аттрактор в парциальной системе можно рассматривать как обобщенный бистабильный осциллятор, в котором имеет место нерегулярный процесс переключений со средней частотой, контролируемой управляющим параметром γ [176]. Введение связи ($\gamma > 0$) должно вызывать изменения средних частот переключений в каждой из подсистем и приводить к эффекту взаимной синхронизации.

Как показали расчеты, проведенные в приближении динамики двух состояний, при значениях коэффициента связи $\gamma > 5$ средние частоты переключений $\langle f_1 \rangle$ и $\langle f_2 \rangle$ практически совпадают

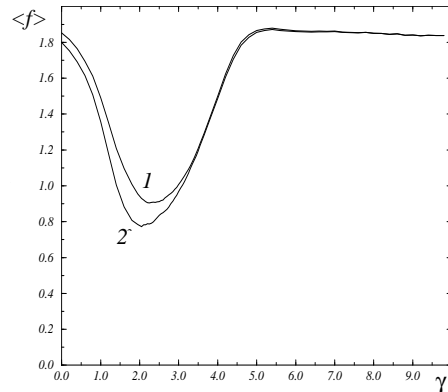


Рис. 3.38. Средние частоты переключений $\langle f_1 \rangle$ (1) и $\langle f_2 \rangle$ (2) для двух связанных неидентичных моделей Лоренца (3.157) в зависимости от степени связи. Параметры: $\sigma = 10$, $r_1 = 28.8$, $r_2 = 28$, $b = 8/3$

(рис. 3.38). Более того, численное моделирование динамики мгновенной разности фаз процессов $x_1(t)$ и $x_2(t)$ подтвердило эффект взаимной синхронизации: при $\gamma > 5$ разность фаз близка к нулю на временах, существенно превышающих среднее время переключений [190]. Таким образом, при сильной связи между двумя хаотическими бистабильными осцилляторами имеет место эффект взаимной синхронизации частот переключений.

3.2.6 Стохастическая синхронизация ансамблей стохастических резонаторов

Эффект стохастического резонанса может быть существенно усилен, если используется цепочка связанных бистабильных систем (см. раздел 3.1.5). Установлено, что при оптимальных значениях интенсивности шума и коэффициента связи увеличение отношения сигнал/шум в цепочке достигает максимального уровня, демонстрируя эффект усиленного массивом СР. Рассмотрим предельный случай слабой связи, когда взаимодействием между парциальными стохастическими резонаторами можно пренебречь.

Исследуемая модель схематически изображена на рис. 3.39 и содержит N подсистем, каждая из которых демонстрирует СР. Парциальная подсистема SR_k обладает внутренним шумом $\xi_k(t)$, при этом внутренние шумы в подсистемах статистически независимы. Вход является общим для всех элементов цепочки и представлен сигналом $s(t)$, который может быть аperiodическим. Выходы сигналов с элементов подаются на суммирующий центр, дающий коллективный отклик $x_M(t)$:

$$x_M(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k(t). \quad (3.158)$$

Представленная модель широко используется на практике как простейший способ увеличения отношения сигнал/шум. При достаточно большом количестве элементов в массиве ($N \gg 1$) внутренние шумы на коллективном выходе исчезают за счет усреднения и отношение сигнал/шум возрастает пропорционально числу элементов. Нетривиальность модели заключается в том, что каждый элемент является стохастическим резонатором. Поэтому, помимо увеличения отношения сигнал/шум [191], возможно и существенное

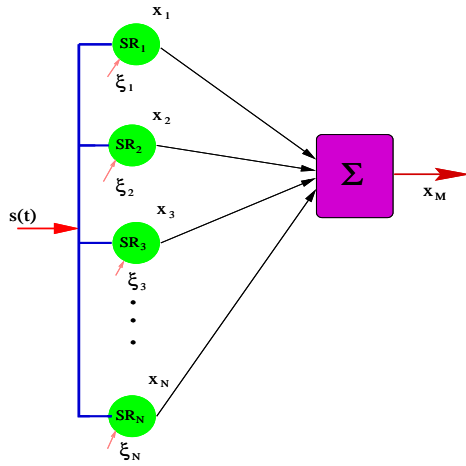


Рис. 3.39. Блок-схема исследуемой модели. SR_k – стохастические резонаторы, $s(t)$ – внешний слабый сигнал, $\xi_k(t)$ – внутренние шумы в элементах массива, x_M – коллективный выход ансамбля

усиление сигнала. Представляет интерес и проблема синхронизации ансамбля внешним сигналом. Отметим, что эта система имеет важные биологические приложения как простейшая нейронная сеть [192] и модель ионных каналов [193]. Похожая модель, где в качестве парциальных элементов использовались автоколебательные системы, исследована в работах [194, 195].

Теория линейного отклика для ансамблей стохастических резонаторов. В случае слабого сигнала $s(t)$ статистические свойства отклика отдельной стохастической системы могут быть рассчитаны с помощью теории линейного отклика. Задача состоит в вычислении спектральных характеристик коллективного отклика $x_M(t)$ [150].

Обозначим спектральную плотность на выходе k -го элемента через $G_{k,k}(\omega)$, взаимную спектральную плотность k -го и m -го элементов – через $G_{k,m}(\omega)$ и спектральную плотность суммированного выхода – через $G_{M,M}(\omega)$. Для спектральной плотности $G_{M,M}(\omega)$ непосредственно из (3.158) получаем

$$G_{M,M}(\omega) = \frac{1}{N^2} \left(\sum_{k=1}^N G_{k,k}(\omega) + \sum_{k=1}^N \sum_{\substack{m=1 \\ k \neq m}}^N G_{k,m}(\omega) \right). \quad (3.159)$$

В отсутствие сигнала $G_{k,m}(\omega) = 0$ в силу статистической независимости внутреннего шума в элементах. Пусть элементы массива характеризуются известными восприимчивостями $\chi_k(\omega, D)$, где D

– интенсивность внутреннего шума. Для спектральной плотности на выходе k -го элемента получаем

$$G_{k,k}(\omega) = G_{k,k}^{(0)}(\omega, D) + |\chi_k(\omega, D)|^2 G_{s,s}(\omega), \quad (3.160)$$

где $G_{k,k}^{(0)}(\omega, D)$ – спектральная плотность k -го элемента в отсутствие сигнала, а $G_{s,s}(\omega)$ – спектральная плотность сигнала. Взаимная спектральная плотность $G_{k,m}(\omega)$ определяется выражением [150]

$$G_{k,m}(\omega) = \chi_k^*(\omega, D) \chi_m(\omega, D) G_{s,s}(\omega), \quad (3.161)$$

где символ $*$ обозначает комплексное сопряжение. Подставляя (3.160), (3.161) в (3.159), получаем спектральную плотность коллективного выхода:

$$G_{M,M}(\omega) = \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^N G_{k,k}^{(0)}(\omega, D) + \frac{G_{s,s}(\omega)}{N^2} \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N \chi_k^*(\omega, D) \chi_m(\omega, D). \quad (3.162)$$

Взаимная спектральная плотность коллективного выхода и входного сигнала, $G_{s,M}(\omega)$, определяется выражением

$$G_{s,M}(\omega) = \frac{G_{s,s}(\omega)}{N} \sum_{k=1}^N \chi_k(\omega, D). \quad (3.163)$$

Полученные соотношения позволяют определить все необходимые меры СР, в частности, функцию когерентности и отношение сигнал/шум. Для упрощения анализа рассмотрим ансамбль идентичных элементов с восприимчивостью $\chi(\omega, D) \equiv \chi_k(\omega, D)$ и с невозмущенной спектральной плотностью $G_{x,x}^{(0)}(\omega, D) \equiv G_{k,k}^{(0)}(\omega, D)$. В этом случае получим следующие выражения для спектральных плотностей:

$$G_{M,M}(\omega) = \frac{1}{N} G_{x,x}^{(0)}(\omega, D) + |\chi(\omega, D)|^2 G_{s,s}(\omega), \quad (3.164)$$

$$G_{s,M}(\omega, D) = \chi(\omega, D) G_{s,s}(\omega). \quad (3.165)$$

В пределах больших N первый член в (3.164), отвечающий за внутренние флуктуации в элементах ансамбля, исчезает и весь ансамбль ведет себя как эквивалентная *линейная* система с передаточной характеристикой $\chi(\omega, D)$.

Представим слабый сигнал на входе в виде суммы периодической и шумовой компонент: $s(t) = n(t) + A \sin(\Omega t)$. Отношение сигнал/шум на входе фиксировано:

$$\text{SNR}_{\text{in}} = \frac{\pi A^2}{G_{n,n}(\Omega)}, \quad (3.166)$$

где $G_{n,n}(\Omega)$ – спектральная плотность шумовой компоненты на частоте сигнала. Спектральная плотность коллективного выхода также будет состоять из шумового пьедестала и δ -пика, соответствующего периодической части сигнала:

$$G_{M,M}(\omega) = \frac{1}{N} G_{x,x}^{(0)}(\omega, D) + |\chi(\omega, D)|^2 [G_{n,n}(\omega) + \pi A^2 \delta(\omega - \Omega)]. \quad (3.167)$$

Отношение сигнал/шум коллективного выхода SNR_{out} может быть легко получено из последнего выражения. Однако наибольший интерес представляет отношение отношений сигнал/шум на выходе и входе:

$$\eta = \frac{\text{SNR}_{\text{out}}}{\text{SNR}_{\text{in}}} = 1 - \frac{G_{x,x}^{(0)}(\Omega, D)}{G_{x,x}^{(0)}(\Omega, D) + N |\chi(\Omega, D)|^2 G_{n,n}(\Omega)}. \quad (3.168)$$

Это отношение всегда меньше 1. Лишь в пределах $N \rightarrow \infty$ отношения сигнал/шум на входе и выходе совпадают. Хотя, как следует из приведенного выше анализа, *отношение сигнал/шум на выходе ансамбля стохастических резонаторов не может быть улучшено по сравнению со входом*, а периодическая часть сигнала может быть усилена в $|\chi(\Omega, D)|$ раз.

Практически важной является оценка числа элементов ансамбля, необходимого для получения заданного отношения η , которое легко находится из формулы (3.168):

$$N = \frac{G_{x,x}^{(0)}(\Omega, D)}{|\chi(\Omega, D)|^2 G_{n,n}(\Omega)} \frac{\eta}{1 - \eta}. \quad (3.169)$$

Вновь рассмотрим массив бистабильных стохастических осцилляторов, на входы которых подается сигнал $s(t) = n(t) + A \sin(\Omega t)$, где $n(t)$ – гауссов цветной шум со спектральной плотностью $G_{n,n}(\omega) = \gamma Q / (\omega^2 + \gamma^2)$. Получаем

$$\eta = 1 - \frac{\Omega^2 + \gamma^2}{D^2 (\Omega^2 + \gamma^2) + N \lambda_m \langle x^2 \rangle_{\text{st}} Q \gamma} \quad (3.170)$$

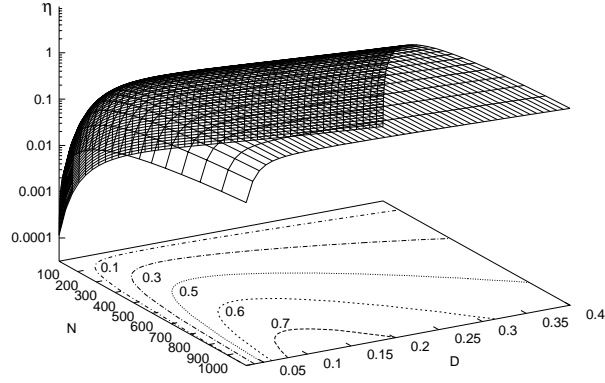


Рис. 3.40. Отношение η (3.170) для ансамбля стохастических бистабильных осцилляторов; $Q = 10^{-3}$, $\gamma = 1.0$, $A = 0.1$, $\Omega = 0.1$. Линии постоянных уровней определяются выражением (3.171)

и

$$N = \frac{D^2 (\Omega^2 + \gamma^2)}{\lambda_m \langle x^2 \rangle_{st} Q \gamma} \frac{\eta}{1 - \eta}, \tag{3.171}$$

где N – число элементов в ансамбле, необходимых для получения отношения η .

Результаты суммированы на рис. 3.40, где отношение η показано как функция интенсивности внутреннего шума D и числа элементов N . На этом же рисунке показаны линии постоянных уровней, определяющиеся выражением (3.171). Видно, что зависимость $N(D)$ характеризуется минимумом: чтобы достичь заданного значения отношения η , необходимо минимальное число элементов ансамбля при оптимальном уровне внутреннего шума. Кроме того, рис. 3.40 отражает эффект СР без настройки: при больших N отношение η практически не зависит от D .

Синхронизация ансамбля стохастических резонаторов слабым периодическим сигналом. Численное моделирование.

В пределе $N \rightarrow \infty$ и в отсутствие внешнего шума коллективный отклик ансамбля на слабый периодический сигнал является периодической функцией времени:

$$x_M^\infty(t) = A |\chi(\Omega, D)| \cos(\Omega t + \psi), \tag{3.172}$$

где ψ – фазовый сдвиг, определяемый формулой

$$\psi = - \arctan \frac{\text{Im} \chi(\Omega, D)}{\text{Re} \chi(\Omega, D)}. \tag{3.173}$$

Интересны ситуации, когда число элементов в ансамбле велико, но конечно. Примерами из области биологии могут служить популяции нейронов-рецепторов [192] и массивы ионных каналов в клеточных мембранах [193]. Насколько реализация коллективного выхода ансамбля отражает входной сигнал? Предыдущие разделы дали ответ на этот вопрос лишь в терминах усредненных характеристик, таких, как отношение сигнал/шум и функция когерентности. Для отдельного стохастического резонатора синхронизация выхода и входа, как было показано выше, возможна лишь при достаточно большой амплитуде сигнала. При оптимальном уровне внутреннего шума коллективный выход ансамбля стохастических резонаторов может быть синхронизован сколь угодно слабым периодическим сигналом [196].

Начнем с обсуждения результатов численного моделирования. В качестве элемента ансамбля возьмем триггер Шмитта:

$$x_k(t + \Delta t) = \text{sgn} [K x_k(t) - \xi_k(t) - \eta(t) - A \sin \Omega t], \quad (3.174)$$

где K – порог срабатывания триггера; $\xi_k(t)$ – внутренний шум в k -ом элементе; $\eta(t)$ – слабый внешний шум. В численных экспериментах $K = 0.2$, в качестве внутреннего шума использовался гауссов экспоненциально коррелированный шум с временем корреляции $\tau_c = 0.01$ и интенсивностью D , внешний шум был также представлен гауссовым цветным шумом с таким же временем корреляции и интенсивностью $Q = 0.03$. Для амплитуды и частоты периодического сигнала были выбраны значения $A = 0.03$, $\Omega = 0.5$, при которых явление стохастической синхронизации для отдельно взятого элемента не наблюдается. Численное моделирование проводилось на суперкомпьютере CRAY и двухпроцессорной рабочей станции SUN-Ultra/4.

Для количественного анализа синхронизации коллективного выхода используем понятие средней частоты и мгновенной фазы. На рис. 3.41а показана зависимость средней частоты $\langle \omega \rangle$ от интенсивности внутреннего шума для разного числа N элементов в ансамбле. Для отдельно взятого элемента ($N = 1$) зависимость $\langle \omega \rangle(D)$ имеет экспоненциальный вид. Однако с ростом числа элементов экспоненциальный закон нарушается и при достаточно большом количестве стохастических резонаторов ($N \geq 100$) имеет место эффект захвата частоты $\langle \omega \rangle$. Описываемая картина похожа на синхронизацию отдельного стохастического резонатора при возраста-

нии амплитуды сигнала (см. рис. 3.24а и 3.29). Однако в нашем случае амплитуда сигнала мала и синхронизация достигается за счет увеличения числа элементов в ансамбле.

Вывод о наличии синхронизации подтверждается расчетом мгновенной разности фаз коллективного выхода и периодического сигнала, представленным на рис. 3.41б. При оптимальном уровне внутреннего шума ($D \approx 0.06$) разность фаз остается постоянной в течение длительных промежутков времени. Как уже говорилось, среднее значение этих промежутков времени может быть оценено с помощью коэффициента эффективной диффузии разности фаз D_{eff} . Как показали расчеты, при оптимальной интенсивности шума коэффициент диффузии минимален. С ростом числа элементов в ансамбле N абсолютное значение коэффициента диффузии уменьшается, а оптимальное значение интенсивности внутреннего шума D сдвигается в сторону меньших значений.

Описанное явление синхронизации наблюдается для любых элементов, демонстрирующих СР при изменении внутреннего шума, в том числе и для элементов, представленных моделями нейронов.

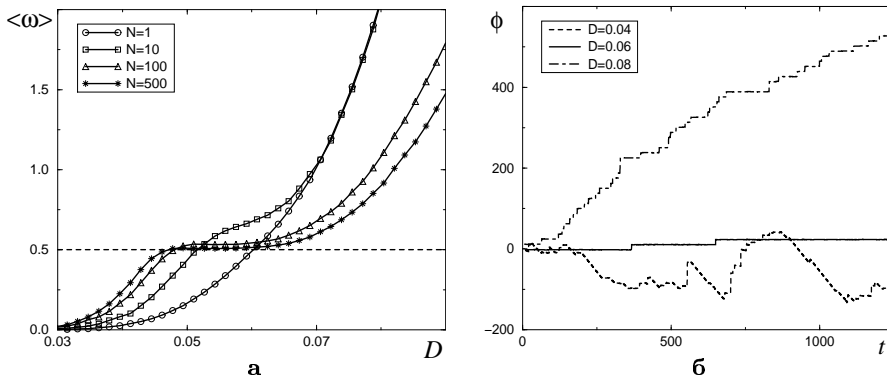


Рис. 3.41. (а) Зависимость частоты $\langle \omega \rangle$ коллективного выхода ансамбля триггеров Шмитта от интенсивности внутреннего шума D для разного числа элементов N в ансамбле. Частота внешнего сигнала $\Omega = 0.5$; (б) временные реализации разности фаз коллективного выхода и периодического входа ансамбля из 500 триггеров Шмитта для разных значений интенсивности внутреннего шума

3.2.7 Стохастическая синхронизация как индуцированный шумом порядок

Одним из основных мотивов исследований стохастического резонанса явилась идея улучшения передачи информационного сигнала путем оптимальной настройки стохастического бистабильного фильтра. Мерой, описывающей передачу информации через бистабильную систему, является спектр условных энтропий Шеннона [197, 198]. В отличие от других мер (линейной версии трансинформации), применявшихся в работах [35, 200] и измеряющих степень линейной зависимости входа и выхода системы, иерархия условных энтропий Шеннона [201, 202] характеризует корреляции всех высших порядков и в пределе является мерой упорядоченности системы.

Анализ в терминах теории информации требует введения символического алфавита, соответствующего стохастической динамике системы. Для бистабильных стохастических систем естественным является бинарный алфавит, состоящий из двух символов, например, "0" и "1", которые отвечают нахождению системы слева или справа от барьера. Пусть $\mathbf{i}_n = i_1, \dots, i_n$ – двоичная подпоследовательность или слово, состоящее из n букв. Обозначим относительную частоту повторения этого слова в данной последовательности (т.е. вероятность) через $p(\mathbf{i}_n)$. Если последовательность содержит периодическую компоненту, то временные корреляции будут отражаться в высокой структурированности функции распределения слов длины n . Аналогом здесь служит распределение времен пребывания.

Для количественной оценки степени упорядоченности этих структур используется энтропия Шеннона [201], применяемая к распределению слов длины n (n -слов):

$$H_n = - \sum_{(\mathbf{i}_n) \in \{0,1\}^n} p(\mathbf{i}_n) \log_2 p(\mathbf{i}_n). \quad (3.175)$$

H_n называются n -блоковыми энтропиями и интерпретируются как средняя информация, необходимая для предсказания появления слова (i_1, \dots, i_n) длины n .

Условные, или динамические [202, 203], энтропии вводятся для $n = 1, 2, \dots$ как

$$h_n = H_{n+1} - H_n = \langle - \sum_{i_{n+1}} p(i_{n+1} | \mathbf{i}_n) \log_2 p(i_{n+1} | \mathbf{i}_n) \rangle_{(\mathbf{i}_n)}, \quad (3.176)$$

где $\langle \rangle$ обозначает усреднение по предыстории \mathbf{i}_n . Это определение дополняется “начальным условием”: $h_0 = H_1$. В формуле (3.176) $p(i_{n+1}|\mathbf{i}_n)$ обозначает вероятность наблюдения символа i_{n+1} при условии наблюдения предшествующей последовательности n символов \mathbf{i}_n . Динамические энтропии h_n интерпретируются как средняя информация, необходимая для предсказания символа i_{n+1} (или информация, полученная после его наблюдения) при известной предыстории \mathbf{i}_n (другими словами, h_n характеризует неопределенность в предсказании следующего символа в последовательности \mathbf{i}_n). Корреляции между символами обычно уменьшают это количество информации. Предел h_n при $n \rightarrow \infty$

$$h = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n, \quad (3.177)$$

называется энтропией источника [204]. Энтропия источника определяет минимальное количество информации, необходимое для предсказания следующего символа в последовательности при наличии знания всей предыстории.

Применим подход, основанный на вычислении информационных мер, к данным, полученным из эксперимента с триггером Шмитта (см. раздел 3.2.3). Двоичные случайные последовательности, генерируемые триггером, записывались с помощью аналогоцифрового преобразователя в компьютер. Одновременно записывались последовательности на входе (сигнал и сигнал + шум), также представленные, в зависимости от знака, в виде нулей и единиц. Во всех экспериментах длина последовательностей равнялась $15000\Delta t$, где Δt – шаг выборки. Оптимальный шаг выборки, установленный в ходе вычисления энтропийных характеристик, соответствовал 12 точкам на периоде колебаний сигнала: $\Delta t = T_0/12 \approx 8.33 \cdot 10^{-4}$ s. Мы выбрали *режим синхронизации* стохастических переключений триггера и захвата средней частоты переключений, который имеет место при амплитуде сигнала $A = 100$.

Разумно предположить, что последовательность, генерируемая триггером Шмитта, будет максимально упорядочена в режиме стохастической синхронизации или СР, поэтому можно ожидать следующее поведение энтропии источника: при очень слабом шуме, когда переключения триггера крайне редки, последовательность будет характеризоваться большой степенью избыточности и энтропия будет низка; с ростом шума энтропия должна нарастать

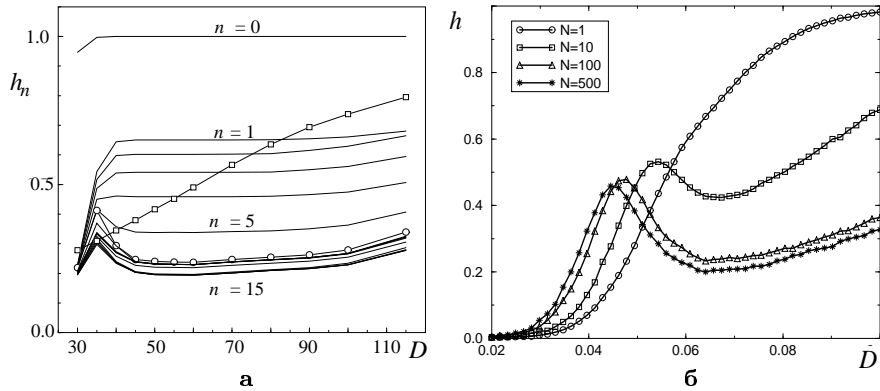


Рис. 3.42. (а) Зависимость динамических энтропий h_n ($n = 0, 1, \dots, 15$) от амплитуды шума. Символами \square показана $h_6(D)$ на входе триггера, а символами \circ – на выходе. (б) Энтропия источника двоичной последовательности, генерируемой ансамблем триггеров Шмитта, в зависимости от интенсивности внутреннего шума для разного числа элементов в ансамбле

вследствие СР, затем убывать, достигая минимума. Далее энтропия вновь нарастает, так как шум полностью контролирует динамику системы.

Описанная картина полностью подтверждается вычислениями, проведенными по экспериментальным данным [197, 198]. Все энтропийные меры рассчитывались усреднением по 20 реализациям длины $1500\Delta t$. Результаты (рис. 3.42а) показывают хорошо выраженный минимум при предполагаемой интенсивности шума. Таким образом, с увеличением интенсивности шума предсказуемость выходной последовательности увеличивается. На выходе обычных линейных фильтров этот важный результат не может наблюдаться в принципе.

Увеличение предсказуемости предполагает повышение степени порядка в выходной последовательности. В режиме СР энтропии отражают рост периодической части выходного сигнала, тогда при оптимальном уровне шума мы можем говорить об *индуцированном шумом порядке* во времени. Упорядоченное состояние означает, что максимальное количество переключений имеет место за время, равное половине периода сигнала, т.е. выход характеризуется более длительными корреляциями.

Отметим, что минимум на графике зависимости энтропии источника от интенсивности шума наблюдается лишь для достаточно больших амплитуд периодического сигнала, когда имеет место

явление синхронизации стохастических переключений триггера. В случае слабого сигнала, когда отклик стохастической системы на сигнал является практически линейным, энтропия монотонно возрастает с увеличением шума и в пределе большого шума стремится к 1 [197, 198].

Возрастание степени упорядоченности в режиме СР подтверждается и на примере анализа коллективного выхода ансамбля стохастических резонаторов, возбуждаемого слабым периодическим сигналом. Для расчета энтропии источника коллективного выхода ансамбля введем следующее символическое описание:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{if } x_M(t) < 0, \\ 1, & \text{if } x_M(t) \geq 0. \end{cases} \quad (3.178)$$

Результаты расчета энтропии источника h показаны на рис. 3.42б. Для отдельно взятого элемента ($N = 1$) энтропия монотонно растет с увеличением интенсивности внутреннего шума D , насыщаясь при больших значениях D . С ростом числа элементов в ансамбле поведение энтропии качественно меняется. При слабом внутреннем шуме времена переключения экспоненциально велики и символическая последовательность, генерируемая ансамблем, характеризуется высокой степенью избыточности. В результате энтропия близка к нулю. С увеличением D энтропия источника растет, достигая максимума при значении интенсивности внутреннего шума, соответствующей границе области синхронизации, когда захватывается средняя частота. Начиная с этого значения, энтропия источника спадает, при некотором оптимальном уровне внутреннего шума достигает минимума и далее опять возрастает. Таким образом, с увеличением интенсивности внутреннего шума коллективный выход ансамбля стохастических резонаторов упорядочивается. Подчеркнем, что в отличие от синхронизации отдельного элемента периодическим сигналом большой амплитуды, уменьшение энтропии в ансамбле стохастических резонаторов уменьшение энтропии возможно при слабых сигналах, поэтому отдельные элементы остаются несинхронизованы. Как показали результаты детального численного исследования, значения интенсивности шума, при которых энтропия источника и коэффициент диффузии минимальны, совпадают и соответствуют оптимальному уровню шума, при котором отношение сигнал/шум на выходе максимален.

3.2.8 Заключение

Результаты раздела 3.2. дают положительный ответ на основной вопрос, сформулированный в ее вводной части: эффект синхронизации процесса переключений в бистабильных системах с шумом имеет место, носит принципиально нелинейный характер (наблюдается лишь при конечных амплитудах воздействия или при достаточно сильной связи) и может быть описан на основе обобщенных представлений теории фазовой синхронизации. Влияние шума, благодаря которому переключения происходят случайным образом, требует введения понятия эффективной синхронизации, когда время захвата разности фаз ограничено и зависит от интенсивности шума.

Представления о стохастической синхронизации могут быть расширены применительно к ансамблям взаимодействующих бистабильных осцилляторов. Более того, аналогично явлению СР в хаотических системах, вопрос о синхронизации переключений может быть поставлен и решен применительно к детерминированным хаотическим системам с обобщенным типом бистабильного поведения.

Как и в классической теории колебаний, в бистабильных стохастических и хаотических системах реализуются эффекты не только внешней (принудительной), но и взаимной синхронизации процессов переключений. Важным результатом является то, что в условиях СР именно эффект синхронизации приводит к росту степени упорядоченности (самоорганизации), когда энтропия выходного сигнала имеет ярко выраженный минимум. А это означает, что и синхронизация, и самоорганизация в бистабильных системах в режимах стохастического резонанса реализуются исключительно в условиях достаточно сильного взаимодействия. Эти эффекты являются принципиально нелинейными и не могут быть исследованы в рамках линейного приближения, в частности на основе теории линейного отклика.

3.3 Конструктивная роль шума в возбудимых системах

В предыдущих разделах наше внимание было сосредоточено на свойствах зашумленной нелинейной динамики с относительно неупорядоченным поведением. В системах с СР основной источник, при-

водящий к структурированию, не содержится во внутренней динамике системы. Упорядоченное поведение возникает как отклик на периодические или случайные коррелированные входные сигналы. В данном разделе рассматривается другая ситуация, когда шум усиливает когерентность собственных колебаний системы.

3.3.1 Когерентный резонанс вблизи бифуркаций периодических решений динамической системы

Режим СР позволяет оптимизировать степень когерентности входного и выходного сигналов выбором оптимальной интенсивности шума, управляющего процессом переключений бистабильной системы. Подобные явления наблюдаются и в отсутствие бистабильности в динамических системах, возмущаемых шумом. Для этого система должна допускать движения осцилляторного типа, а соответствующий оператор Фоккера – Планка должен иметь комплексные собственные значения. Более того, шум может быть использован для усиления когерентности колебаний даже без внешних периодических сигналов. Пример такого явления был описан в [205], когда предельный цикл был усилен вблизи бифуркации Хопфа, но до возникновения предельных циклов в детерминированной динамике. При использовании цветного шума этот эффект становится более выраженным [206, 207].

В работе [208] исследовался индуцированный шумом флуктуационный пик в спектре нелинейного осциллятора с малым трением. Индуцированное когерентное движение наблюдалось также в модели автогенератора вблизи седло-узловой бифуркации [209–211] и в моделях нейронов [212, 236]. В исследованных моделях флуктуационный пик в спектре мощности имел оптимальные характеристики, т.е. был наиболее выражен на фоне шумового пьедестала при некотором оптимальном уровне шума. Это явление, очень похожее на СР, может быть названо *когерентным резонансом* [213]. В настоящем разделе рассматривается когерентный резонанс вблизи локальных бифуркаций периодических движений и обосновывается простой механизм эффекта, универсальный для широкого класса динамических систем [214].

Предположим, что шум, воздействующий на нелинейную динамическую систему, находящуюся вблизи бифуркации периодического решения, индуцирует в спектральной плотности пик на частоте ω_p , высота которого h , так что наблюдается шумовой пред-

вестник бифуркации [215]. Возникает вопрос: что произойдет с формой спектральной линии при изменении интенсивности шума? Для этого нужно принять во внимание два конкурирующих эффекта: 1) с увеличением шума фазовые траектории системы выбрасываются дальше от устойчивой периодической траектории (что и индуцирует осцилляции на частоте ω_p) и высота пика h увеличивается (в силу нелинейности системы рост h должен быть ограничен); 2) ввиду возрастания амплитудных и фазовых флуктуаций увеличение шума ведет к уширению спектральной линии, т.е. к росту относительной ширины линии $W(D) = 1/Q = \Delta\omega/\omega_p$ или к уменьшению ее добротности Q ; уширение линии затрудняет обнаружение индуцированного шумом пика и разрушает когерентность движения на частоте ω_p .

Разумно предположить, что существует оптимальный уровень шума, при котором пик в спектре имеет достаточную высоту и является достаточно узким, чтобы его можно было различить на общем шумовом фоне.

Для количественной оценки степени когерентности системы в этом случае введем в рассмотрение величину $C(D)$ [209]:

$$C(D) = h(D)/W(D) = Q(D) \cdot h(D), \quad (3.179)$$

где $Q(D)$ – добротность линии. Ниже мы покажем, что мера когерентности $C(D)$ имеет максимум при некотором уровне шума.

Рассмотрим логистическое отображение, возмущаемое шумом:

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + \sqrt{D}\xi_n, \quad (3.180)$$

где a – управляющий параметр; D – интенсивность белого шума ξ_n . В отсутствие шума последовательность бифуркаций удвоения периода 2^k имеет место для значений параметра $a = a_k$: $a_1 = 0.75$, $a_2 = 1.25$, $a_3 = 1.368099, \dots$. При значении параметра $a = 1.24$ и в отсутствие шума ($D = 0$) отображение (3.180) имеет устойчивый цикл периода 2 и в спектре наблюдается δ -пик на частоте $\omega_0 = \pi$. С включением шума проявляется шумовой предвестник бифуркации – цикл периода 4. В спектре можно различить дополнительный характерный пик на частоте субгармоники $\omega_p = \pi/2$ [216]. С ростом D этот пик становится все более заметным на шумовом фоне. Однако дальнейшее увеличение интенсивности шума ведет к тому, что этот пик становится практически неразличимым на фоне шумового пьедестала.

Зависимость меры когерентности $C(D)$ показана на рис. 3.43а и подтверждает наличие в системе эффекта когерентного резонанса. Как видно из рис. 3.43б, его относительная ширина W возрастает с ростом D практически линейно [1]. С другой стороны, высота пика растет линейно для малых значений интенсивности шума, затем рост h замедляется и, наконец, насыщается.

Таким образом, зависимости $h(D)$, $W(D)$ приближенно могут быть описаны как

$$W(D) \propto W_0 + D, \quad h(D) \propto 1 - \exp(-\alpha D), \quad (3.181)$$

где W_0 и α – некоторые постоянные. Конкуренция роста высоты пика и относительной ширины линии дает максимум когерентности:

$$C(D) \propto \frac{1 - \exp(-\alpha D)}{W_0 + D}. \quad (3.182)$$

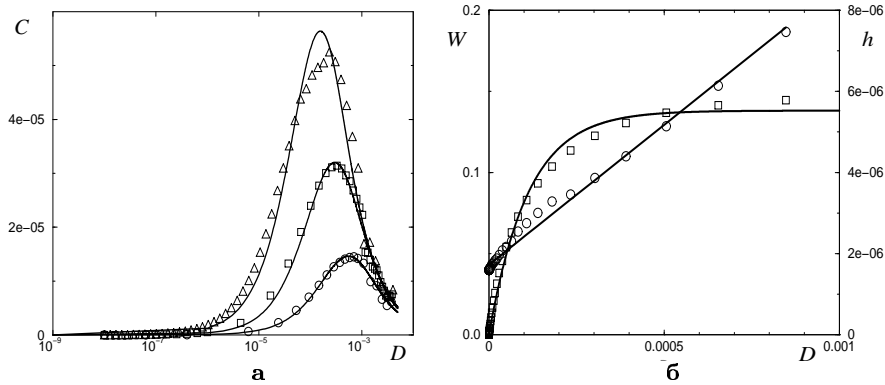


Рис. 3.43. (а) Зависимость меры когерентности C от интенсивности шума для разных значений управляющего параметра отображения Фейгенбаума a : 1.2 (○); 1.22 (□); 1.23 (△) (а) (сплошные линии представляют аппроксимацию по формуле (3.182)); (б) зависимость $h(D)$ (правая шкала, символы □) и $W(D)$ (левая шкала, символы ○) для $a = 1.23$

Поведение шумовых предвестников бифуркации при изменении управляющего параметра также представляет интерес. Введем параметр надкритичности $\varepsilon = a_k - a$, где a_k – точка бифуркации. Для любой интенсивности шума D зависимость меры когерентности от параметра надкритичности описывается законом вида $C(\varepsilon) \propto \varepsilon^{-3}$, что находится в соответствии в теоретическими предсказаниями

работы [215]. Таким образом, эффект должен усиливаться при приближении к точке бифуркации. Отметим, что оптимальная интенсивность шума D_{opt} сдвигается в сторону больших значений при удалении параметра a от точки бифуркации (см. рис. 3.43а). Численное моделирование показало, что оптимальная интенсивность шума и параметр надкритичности связаны линейно: $D_{\text{opt}} \propto \varepsilon$. Качественно эквивалентное поведение наблюдалось и для последующих бифуркаций удвоения. Действительно, тот же самый эффект можно наблюдать для других предвестников, например, вблизи бифуркации Хопфа [214].

3.3.2 Когерентный резонанс в возбудимой динамике

Динамика модели ФитцХью–Нагумо. Модель ФитцХью–Нагумо – пример системы, демонстрирующей когерентный резонанс. Она является упрощенной версией хорошо известной модели нейрона Ходжкина–Хаксли, которая описывает главные особенности регенеративных механизмов зажигания в нервной клетке [217,218]. С другой стороны, эта модель представляет собой так называемую систему "активатор – ингибитор". Динамика системы описывается следующими уравнениями:

$$\varepsilon \dot{x} = x - x^3 - y, \quad \dot{y} = \gamma x - y + b, \quad (3.183)$$

где x – быстрая переменная (активатор или переменная напряжения), y – медленная переменная (ингибитор или переменная регенерации) и ε – отношение временных масштабов активатора и ингибитора. В осцилляторной форме эти уравнения можно переписать в виде

$$\varepsilon \ddot{x} = (1 - \varepsilon - 3x^2)\dot{x} + (1 - \gamma)x - x^3 - b. \quad (3.184)$$

Модель ФитцХью–Нагумо демонстрирует достаточно сложное бифуркационное поведение с множеством неподвижных точек и предельных циклов. В нашем исследовании мы рассмотрим простейшую бифуркацию рождения предельного цикла. Параметры b и γ задают положение неподвижных точек. Выполнение условия $(\gamma - 1)^3/27 + b^2/4 > 0$ соответствует наличию единственной неподвижной точки в системе. При $4\varepsilon\gamma > (\varepsilon + 1 - 3x_0^2)$ собственные значения неподвижной точки x_0 становятся комплексно-сопряженными

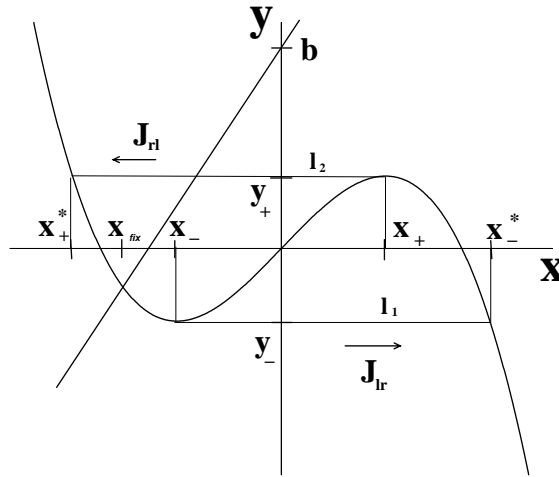


Рис. 3.44. Нуль-изоклины системы и конкретные точки, использованные в вычислениях. Система имеет одну устойчивую неподвижную точку на левой ветви кубической нулевой изоклины. Токи J_1, J_r, J_{r1} и J_{lr} , использованные в приближении, перемещаются по левой и правой сторонам кубической функции и по прямым линиям l_1 и l_2 соответственно

и, если выражение $3x_0^2 + \varepsilon - 1$ меняет свой знак, происходит бифуркация Андронова-Хопфа.

Поведение модели ФитцХью-Нагумо можно проанализировать в терминах нулевых изоклин x и y (см. рис. 3.44), т.е. кубической функции по x с максимумом $P_{\max} = (x_+, y_+)$ и минимумом $P_{\min} = (x_-, y_-)$, и прямыми линиями по y . Эта функция состоит из трех различных областей, разделяемых P_{\max} и P_{\min} : устойчивые левая и правая ветви и неустойчивая средняя ветвь. При определенных значениях γ и b обе нуль-изоклины пересекаются только один раз на левой устойчивой ветви (режим возбуждения) в единственной неподвижной точке $(x_{\text{fix}}, y_{\text{fix}})$. В работе ФитцХью [217] эта точка соответствует состоянию покоя нервной клетки, точки на правой ветви отвечают за состояние возбуждения и точки, расположенные намного выше неподвижной точки на левой стороне, – невосприимчивости (рефракторности).

Отметим, что временной масштаб переменной напряжения намного меньше, чем у переменной регенерации ($\varepsilon \ll 1/\gamma$), т.е. система быстро релаксирует по x нуль-изоклине. Так как средняя ветвь является неустойчивой, то движение системы сосредоточено в узкой области в окрестности левой и правой ветвей и двух соединяющих линий между ними.

Траектория детерминированной системы, стартовавшая с соответствующего начального состояния (например, с $y < y_-$), сделает *один* длительный оборот в фазовом пространстве. Сначала траектория быстро достигнет правой ветви, двигаясь вдоль нее вверх до вершины, затем переключится на левую ветвь, по которой она придет в неподвижную точку (на что потребуется бесконечное время). После этого наблюдается один "выброс" или "импульс" по переменной напряжения.

Динамика модели ФитцХью–Нагумо под действием шума. В действительности на нейроны постоянно воздействуют различные источники шума, например, флуктуационное открытие и закрытие ионных каналов в мембране клетки, зашумленные пресинаптические токи и флуктуации различных проводимостей в системе, – и это только некоторые из них. В качестве источника флуктуаций в уравнение по y добавляется аддитивный белый шум. Он занимает не столь важное место в динамике системы, так как сдвигает нуль–изоклины качественно похожим способом. Введением адиабатически медленной переменной s уравнения преобразуются к следующему виду:

$$\varepsilon \dot{x} = x - x^3 - y + s, \quad \dot{y} = \gamma x - y + b + \sqrt{2D} \xi(t). \quad (3.185)$$

Без потери общности, далее полагаем $s = 0$. Чувствительность модели ФитцХью–Нагумо к адиабатически медленным сигналам в токе можно выразить через зависимость от b . Преобразование переменной регенерации $y \rightarrow y - s$ (пренебрегая производными s по времени) приводит к модифицированному параметру $b \rightarrow b - s$.

Флуктуации вызывают возникновение последовательности стохастических возбуждений. В последних исследованиях конструктивной роли шума в нелинейных системах большой интерес проявлен к последовательности выбросов (спайков) и их свойствам. Например, если на вход системы подаются внешние сигналы, то наблюдаются эффекты стохастического резонанса [219–223] и синхронизации с входными сигналами [156, 224]. Если в систему дополнительно вводится гармонический шум, то, как и в реальных нейронах, реализуется "взрывное" ("bursting") поведение [225].

Подобно бистабильной динамике, наличие стационарного шума в возбуждаемых системах ведет к возникновению нового временного масштаба – среднего времени возбуждения новых спайков. Его

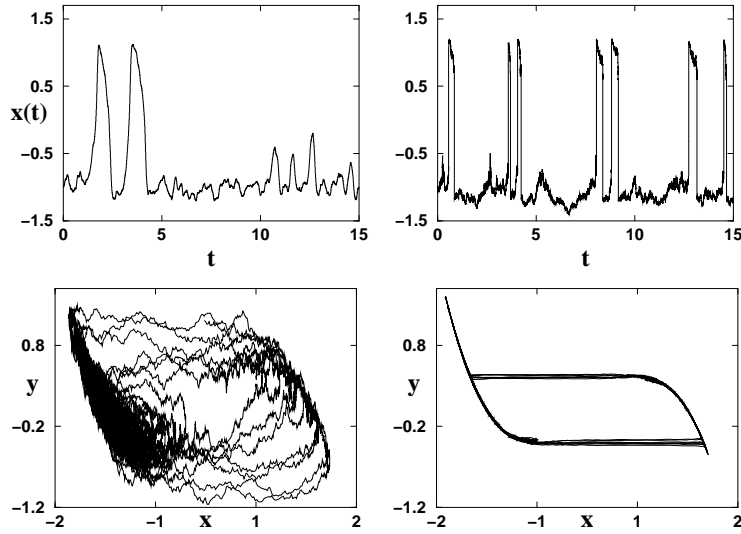


Рис. 3.45. Численное моделирование стохастических дифференциальных уравнений: зависимость переменной напряжения от времени и соответствующие траектории в фазовом пространстве при $\gamma = b = 1.5, D = 0.3$. Слева: $\varepsilon = 10^{-1}$; справа: $\varepsilon = 10^{-4}$

значение и свойства существенно зависят от характеристик действующего шума и, следовательно, этот временной масштаб управляется шумом. С другой стороны, собственное время регенерации для возвращения в неподвижную точку после зажигания сильно не меняется под действием шума.

Следовательно, возбуждаемые системы в присутствии шума демонстрируют эффект *когерентного резонанса* [213]. Нейрон не может зажечься, находясь в состоянии регенерации, и если он возбуждается в течение того же временного масштаба, то наблюдается почти колебательное поведение. Так как время возбуждения строго зависит от шума, то существует оптимальный уровень шума, при котором последовательность спайков становится наиболее регулярной.

Количественный анализ когерентного резонанса. При $D \neq 0$ и выборе начальных условий в неподвижной точке флуктуации позволяют системе после типичного времени активации (возбуждения) преодолеть собственный порог (x_-, y_-) и, как и в детермини-

рованном случае, совершить движение в фазовом пространстве с возвратом в малую окрестность неподвижной точки. В течение этого времени генерируется стохастическая последовательность спайков переменной напряжения (см. рис. 3.45), которая, с одной стороны, характеризуется частотой следования импульсов (спайков), определяемой усреднением по времени:

$$r = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{N}{T}. \quad (3.186)$$

С другой стороны, характеристикой последовательности спайков может служить среднее время между двумя импульсами (mean interspike interval (ISI)),

$$\langle T \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N T_i,$$

где T_i – временной интервал между i -м и $(i + 1)$ -м спайком.

Обе величины несут одну и ту же информацию, так как в бесконечном пределе

$$r = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{T_0}{N} + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N T_i + \frac{T_{N+1}}{N} \right)^{-1} = \frac{1}{\langle T \rangle},$$

где T_0 и T_{N+1} – интервалы времени до первого и после последнего спайка соответственно.

Как показано выше, медленный сигнал s приводит к уменьшению параметра b . Таким образом, зависимость скоростей от b можно трактовать как передаточную функцию относительно s . В [223] было показано, что наклон передаточной функции пропорционален "норме мощности", введенной в [221]. Эта величина соответствует корреляции выходного сигнала, т.е. частоте импульсов в модели ФитцХью–Нагумо, с достаточно малым сигналом s . Следовательно, чувствительность к адиабатически медленному сигналу характеризуется функцией

$$\lambda = \frac{dr}{ds} = -\frac{dr}{db}. \quad (3.187)$$

Для характеристики variability последовательности спайков используется коэффициент отклонения (вариации), предложенный в работе [213] и представляющий собой отношение стандартного отклонения ISI к среднему ISI:

$$R = \frac{\sqrt{\langle T^2 \rangle - \langle T \rangle^2}}{\langle T \rangle}. \quad (3.188)$$

В рамках данной задачи коэффициент отклонения можно трактовать как *отношение сигнал/шум*. Для пуассоновских последовательностей с независимыми отдельными возбуждениями отношение R стремится к единице. Если $R < 1$, то последовательность становится более регулярной и R обращается в нуль для периодических детерминированных возбуждений, например, в режиме детерминированного предельного цикла системы (3.185). В случае $R < 1$ движения траекторий в фазовом пространстве можно интерпретировать как движение на стохастическом предельном цикле [119, 205].

Описанный эффект был исследован численно в [213, 226, 227] и экспериментально в возбуждаемой электронной цепи [228]. Кроме этого, было проведено численное моделирование связанных нейронов и было доказано существование оптимальных значений интенсивности шума и коэффициентов связи для синхронно осциллирующего (упорядоченного) отклика в связанных сетях [119, 129, 229].

Отметим, что возникновение упорядоченных последовательностей возбуждений можно также рассматривать с точки зрения спектральных величин или корреляционных функций [205]. Для этих целей подходящей является величина (3.188), так как для ее определения необходимы первые два момента из распределения ISI, которые нетрудно получить в рамках приближения, приведенного ниже для произвольной интенсивности шума.

Анализ уравнения Фоккера–Планка. Так как модель ФитцХью–Нагумо не является потенциальной системой [230, 231], то получение аналитического решения соответствующего уравнения Фоккера–Планка (УФП) представляет собой нетривиальную задачу. Частное аналитическое решение было приведено в [232] в предположении существования специфического отношения между параметрами действующего шума и самой динамики. В статье [233] был предложен подход, основанный на теории возмущений, для непотенциальных систем в бистабильном режиме модели ФитцХью–Нагумо.

Рассмотрим модель ФитцХью–Нагумо в пределе быстрой переменной напряжения (активатор) и с источником шума, включенным в переменную регенерации (ингибитор) [234]. Применяя метод, предложенный Мельниковым [235], находим аналитически стационарную плотность вероятности непотенциальной системы и

скорость спайков по переменной напряжения (скорость импульса) [234]. Соответствующее УФП для плотности вероятности $P(x, y)$, имеющее вид

$$\partial_t P = -\frac{1}{\varepsilon} \partial_x (x - x^3 - y)P + \partial_y (y - \gamma x - b + D \partial_y)P, \quad (3.189)$$

не может быть решено аналитически даже в стационарном случае. Так же обстоит дело и с предельными плотностями

$$\rho(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy P(x, y), \quad p(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx P(x, y),$$

которые показывают, как ансамбль независимых нейронов распределяется по возбужденным состояниям и состояниям покоя или по переменной регенерации соответственно.

Однако все эти функции можно получить путем усреднения по времени численного решения уравнения (3.185). Для этого используется простой метод Эйлера с временным шагом Δt , который на два порядка меньше, чем ε , и сравниваются аналитические данные и численные результаты.

Как видно из рис. 3.45, на котором представлены результаты численного моделирования при $\varepsilon = 10^{-4}$, динамика системы становится одномерной в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$. В этом случае по крайней мере $p(y)$, $\rho(x)$, r , dr/db , T и R могут быть вычислены аналитически путем решения двух одномерных УФП, которые связаны соответствующими граничными условиями и демонстрируют постоянный поток через систему.

В данном пределе модель ФитцХью–Нагумо близко напоминает триггер Шмитта, находящийся под действием флуктуаций, описывающих процесс Орнштейна–Уленбека [19, 235]. Переменная регенерации y заменяет входную переменную триггера Шмитта, центрированную вблизи $\gamma x(t) - b$, как показано на рис. 3.46.

С другой стороны, существуют фундаментальные отличия между возбуждаемой системой и триггером Шмитта. Первое и самое важное отличие состоит в том, что возбужденное состояние представляет собой динамику, не имеющую неподвижной точки. Ее эффективный потенциал не достигает минимума. Следовательно, возбужденное состояние сохраняется даже в отсутствие шума. Второе отличие заключается в том, что выходной сигнал не является бинарным. Координата $x(y)$ строго зависит от значения медленной

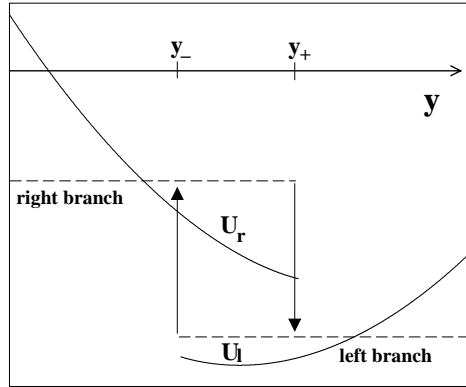


Рис. 3.46. Схематическое представление системы при $\varepsilon \rightarrow 0$. На рисунке показаны эффективные потенциалы $U_1(y), U_T(y)$ (сплошные линии) для $\gamma = b = 1.5$ и точки поглощения (абсорбции) y_+, y_- ; пунктирные линии соответствуют двум ветвям. Хотя схема напоминает триггер Шмитта, выходной сигнал в этом случае зависит от медленной переменной y и не есть константа

переменной. Кроме этого, динамика на двух ветвях является сильно нелинейной.

Плотность вероятности. При малых ε переменная x быстро релаксирует к одной из устойчивых ветвей нуль-изоклины $y = x - x^3$, где x определяется обратной величиной кубической функции в левой и правой частях соответственно:

$$\begin{aligned} x_1(y) &= 3y_- \cos\left(\frac{1}{3} \arccos(y/y_+)\right), \\ x_T(y) &= 3y_+ \cos\left(\frac{1}{3} \arccos(y/y_-)\right). \end{aligned} \quad (3.190)$$

В пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ движение ограничивается этими двумя линиями. Двумерная марковская система разделяется на две одномерные подсистемы, заменяя вероятность на токи J_{T1}, J_{1T} бесконечно быстро посредством прямых линий l_1, l_2 (см. рис. 3.44). В данном предельном случае не существует конечной вероятности на этих линиях. Таким образом, получаем два связанных УФП. Этот метод был впервые предложен Мельниковым [235], который рассматривал стохастический триггер Шмитта.

УФП двух систем содержит не только обычные слагаемые дрейфа и диффузии, но и дополнительные источники и стоки вероятности, изменяя вероятности при y_+ или y_- соответственно. Вероятности имеют вид:

$$\partial_t P_l(y) = \partial_y(y - b - \gamma x_l(y) + D\partial_y)P_l + J_{l1}\delta(y - y_+) \quad (3.191)$$

$$\partial_t P_r(y) = \partial_y(y - b - \gamma x_r(y) + D\partial_y)P_r + J_{r1}\delta(y - y_-).$$

P_{\min} и P_{\max} становятся теперь поглощающими границами для левой и правой ветвей соответственно. Это означает, что

$$J_{lr} = D\partial_y P_l(y), \quad J_{rl} = -D\partial_y P_r(y), \quad (3.192)$$

в то время как при $y \rightarrow \pm\infty$ плотности удовлетворяют естественным граничным условиям на соответствующих ветвях. Кроме того, сумма вероятностей на двух сторонах сохраняется:

$$\int_{y_-}^{\infty} P_l(y)dy + \int_{-\infty}^{y_+} P_r(y)dy = 1. \quad (3.193)$$

В устойчивом состоянии токи должны быть постоянными и совпадать по величине друг с другом и со скоростью импульса, которая была введена в (3.186):

$$J_{lr} = J_{rl} = r. \quad (3.194)$$

Из уравнений (3.186) и (3.187) находим решения для связанных УФП (3.191) [234]:

$$P_l(y) = \frac{r}{D} \exp(-U_l(y)/D) \int_{y_-}^y dz \exp(U_l(z)/D) \cdot \Theta(y_+ - z), \quad (3.195)$$

$$P_r(y) = \frac{r}{D} \exp(-U_r(y)/D) \int_y^{y_+} dz \exp(U_r(z)/D) \cdot \Theta(z - y_-), \quad (3.196)$$

где эффективные потенциалы $U_l(y)$, $U_r(y)$ определяются явно соотношениями:

$$\begin{aligned} U_l(y) &= \frac{(y-b)^2}{2} - \gamma \frac{x_l(y)}{4} [3y - x_l(y)], \\ U_r(y) &= \frac{(y-b)^2}{2} - \gamma \frac{x_{rmr}(y)}{4} [3y - x_r(y)]. \end{aligned} \quad (3.197)$$

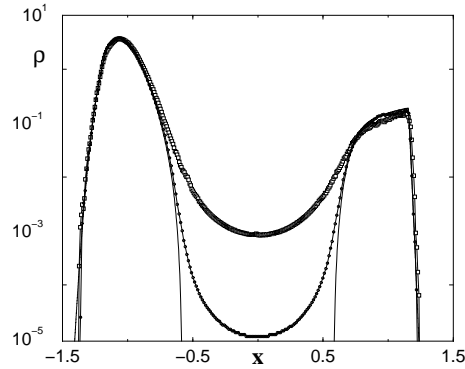


Рис. 3.47. Логарифмическая зависимость $\rho(x)$, полученная численно для различных значений ε , и ее сравнение с аппроксимацией. Параметры: $D = 0.1$, $\gamma = 1.5$, $b = 1.5$, $\varepsilon = 10^{-3}$ (\square) и $\varepsilon = 10^{-5}$ (\circ). Отметим, что правая ветвь появляется вследствие индуцированных шумом движений

Принимая во внимание изменение элемента объема, предельная плотность $\rho(x)$ определяется как $\rho(x) = p(y) \left| \frac{dy}{dx} \right|$. Она не вносит вклад между x_{\min} и x_{\max} , так как в рамках данного приближения не существует вероятности на прямых линиях между ветвями. Однако численные расчеты при конечном ε дают малую, но конечную вероятность в пределах данной области, которая уменьшается с уменьшением ε , если посмотреть на *логарифмическую* зависимость (рис. 3.47). В окрестности максимумов плотность достаточно хорошо согласуется с численными результатами.

Частота следования импульсов. Частота следования импульсов определяется из выражения (3.193) следующим образом [234]:

$$r = D \left[\int_{y_-}^{y_+} du \int_u^{\infty} dv \exp\left(\frac{U_1(u) - U_1(v)}{D}\right) + \int_{y_-}^{y_+} du \int_{-\infty}^u dv \exp\left(\frac{U_r(u) - U_r(v)}{D}\right) \right]^{-1}. \quad (3.198)$$

При очень малых D это выражение можно упростить и свести к виду закона Аррениуса:

$$r \approx U_1''(y_{\text{fix}}) \sqrt{\frac{\Delta U_1}{\pi D}} \exp\left(-\frac{\Delta U_1}{D}\right), \quad D \ll \Delta U_1. \quad (3.199)$$

Для больших D скорость удовлетворяет следующему выражению:

$$r \approx \frac{\sqrt{2D}}{4y + \sqrt{\pi}}, \quad D \gg \Delta U_1. \quad (3.200)$$

На рис. 3.48 представлены скорость импульса и ее зависимости от интенсивности шума и наклона второй нулевой изоклины γ и их сравнение с численными результатами. Для достаточно малых ε аппроксимация обеспечивает удовлетворительное соответствие. Отметим, что при конечных ε выражение (3.198) дает завышенную оценку скорости. Данные отклонения объясняются двумя причинами: переход между двумя ветвями в действительности занимает конечное время, и конечное значение ε приводит к возникновению подпороговых колебаний, которые также способствуют уменьшению скорости.

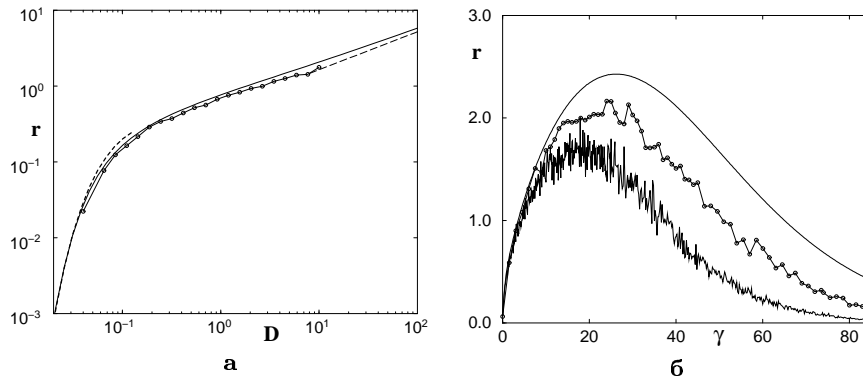


Рис. 3.48. (а) Частота следования импульсов в зависимости от уровня шума D при $\gamma = 0.8$, $b = 0.9$, $\varepsilon = 10^{-4}$. Аппроксимация (3.198) (сплошная линия) в сравнении с численными данными (о) и упрощенными выражениями (3.199) (пунктир) и (3.200) (длинный пунктир). (б) Частота следования импульсов в зависимости от величины наклона γ при $D = 0.1$ и координате неподвижной точки $x_{\text{fix}} = -0.8$, поэтому $b = b(\gamma)$. Аппроксимация (3.198) (сплошная линия) в сравнении с численными результатами при $\varepsilon = 10^{-4}$ (тонкая сплошная линия) и $\varepsilon = 10^{-5}$ (о)

Апериодический стохастический резонанс в модели Фитцхью–Нагумо. С увеличением значения параметра b положение неподвижной точки изменяется, приводя к увеличению расстояния до порога. Следовательно, увеличение b монотонно умень-

пает величину скорости импульса, которая играет роль передаточной функции для адиабатически медленных сигналов.

Величина наклона передаточной функции r при конечном значении b определяется следующим уравнением:

$$\frac{dr}{db} = - \frac{\int_{y_-}^{y_+} du \left[\int_u^\infty dv (v - u) \exp\left(\frac{U_l(u) - U_l(v)}{D}\right) + \int_{-\infty}^u dv (v - u) \exp\left(\frac{U_r(u) - U_r(v)}{D}\right) \right]}{\left(\int_{y_-}^{y_+} du \left[\int_u^\infty dv \exp\left(\frac{U_l(u) - U_l(v)}{D}\right) + \int_{-\infty}^u dv \exp\left(\frac{U_r(u) - U_r(v)}{D}\right) \right] \right)^2} \quad (3.201)$$

и свидетельствует о немонотонном поведении в зависимости от D , как показано на рис. 3.49. Подобная зависимость является характерным признаком *апериодического стохастического резонанса*. В линейном приближении величина наклона пропорциональна “норме мощности”, если принять во внимание взаимную корреляцию между адиабатически медленным сигналом $b = b_0 - b_1(t)$ и скоростью зажигания на выходе [223]. Значение интенсивности шума D_{\max} , при котором появляется максимум, оценивается как

$$D_{\max} \approx 2(2 - \sqrt{3}) \cdot (\Delta U_1)^2 \quad (3.202)$$

и показано стрелкой на рис. 3.49.

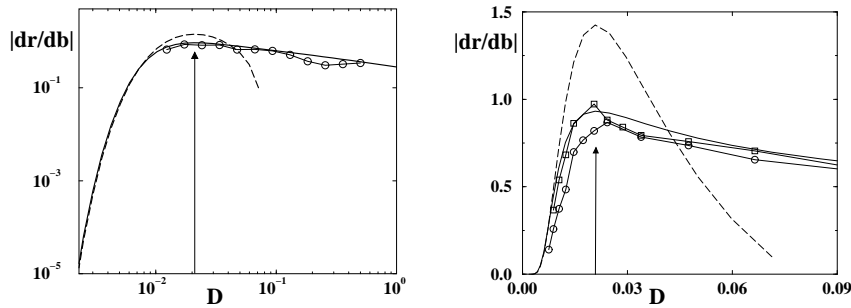


Рис. 3.49. Абсолютное значение производной частоты следования импульсов по параметру b в зависимости от интенсивности шума D при $b = 0.7$ и $\gamma = 1.0$. Выражение (3.201) (сплошная линия) и аппроксимация при малом шуме (пунктир) в сравнении с численными данными при $\varepsilon = 10^{-3}$ (о). Стрелкой указано максимальное значение интенсивности шума, вычисленное по формуле (3.202)

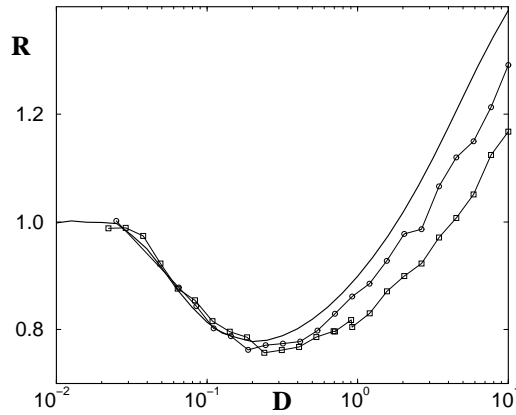


Рис. 3.50. Зависимость относительных флуктуаций от интенсивности шума D для $\gamma = 0.8$ и $b = 0.9$. Аппроксимация (сплошная линия) сравнивается с результатами численного моделирования при $\varepsilon = 10^{-3}$ (\square) и $\varepsilon = 10^{-4}$ (\circ)

Отношение шум/сигнал. Среднее время между двумя всплесками (спайками), т.е. средний ISI, определяется суммой времен перехода от точки инъекции к точке абсорбции на каждой ветви. Таким образом, при оценке временной последовательности спайков имеет место классическая проблема *среднего времени первого перехода* и в этом случае можно использовать стандартные формулы [187].

Первый и второй моменты на обоих ветвях статистически независимы и определяются следующими выражениями:

$$\langle T_1(y_+) \rangle = \frac{1}{D} \int_{y_-}^{y_+} du \exp\left(\frac{U_1(u)}{D}\right) \int_u^{\infty} dv \exp\left(-\frac{U_1(v)}{D}\right), \quad (3.203)$$

$$\langle T_1^2 \rangle = \frac{2}{D} \int_{y_-}^{y_+} du \exp\left(\frac{U_1(u)}{D}\right) \int_u^{\infty} dv \exp\left(-\frac{U_1(v)}{D}\right) \langle T_1(v) \rangle \quad (3.204)$$

Аналогичные уравнения получаются для $\langle T_1 \rangle, \langle T_1^2 \rangle$ с соответствующими границами интегрирования для правой ветви и потенциалами, определяемыми по формуле (3.197). Уравнение (3.203) вновь доказывает равенство тока (скорости импульса) величине, обратной сумме времен переходов, т.е. среднему ISI.

Используя соотношения (3.195) и (3.196), отношение шум/сигнал (3.188) можно вычислить следующим образом:

$$R(D) = \frac{\sqrt{\langle T_1^2 \rangle + \langle T_r^2 \rangle - \langle T_1 \rangle^2 - \langle T_r \rangle^2}}{\langle T_1 + T_r \rangle}. \quad (3.205)$$

Зависимость этой величины от интенсивности шума имеет минимум (рис. 3.50), свидетельствуя о когерентной (почти регулярной) последовательности спайков для данного уровня шума. Результаты численного моделирования, приведенные на том же рисунке, подтверждают аналитические данные, в частности для глубокого положения минимума и его глубины. Стоит отметить, что конечное значение ε приводит к углублению минимума и сдвигает его в область больших значений интенсивности шума D . В силу того, что когерентность несомненно разрушается при больших значениях ε , должно существовать критическое значение ε , при котором R принимает минимальное значение.

3.3.3 Усиленная шумом синхронизация связанных возбуждаемых систем

В предыдущем подразделе было описано, как внешнее шумовое воздействие может управлять собственными колебательными режимами возбуждаемой системы: когерентность собственных колебаний может достигать максимума при ненулевом уровне шума, тогда как средняя частота колебаний (например, средняя частота зажигания) является функцией интенсивности шума. Что представляют собой эффекты синхронизации в системе связанных возбуждаемых элементов, каждый из которых проявляет эффект когерентного резонанса? Первые результаты показали, что связанные идентичные элементы ФитцХью–Нагумо демонстрируют коллективные колебания, которые представлены ярко выраженным пиком в спектре мощности [129]. В этом разделе описывается взаимная синхронизация локально связанных неидентичных осцилляторов ФитцХью–Нагумо [229]. Данная дискретная решетка диффузионно связанных осцилляторов имитирует зашумленную возбуждаемую среду, к которой проявляется большой интерес в биологии, химии и физике. Данная сеть описывается следующей системой стохастических дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x}(t, n) &= x - \frac{x^3}{3} - y + \gamma \sum_{n'} [x(t, n') - x(t, n)], \\ \dot{y}(t, n) &= x + a(n) + \sqrt{2D} \xi(t, n), \end{aligned} \quad (3.206)$$

где $x(t, n)$ и $y(t, n)$ – соответственно быстрая и медленная переменные. В одномерном случае эти переменные определяются по цепочке $n = 1, \dots, N$, в двумерном случае – по квадратной решетке. Сумма по соседним элементам отвечает дискретному оператору Лапласа в одной и двух размерностях, моделируя локальные взаимодействия со степенью связи γ . Параметр $a(n)$ зависит от пространственной переменной n и предполагается равномерно распределенной случайной величиной. В этом случае численно моделируется сеть неидентичных элементов ФитцХью–Нагумо. В качестве стохастического воздействия выбран гауссовский белый шум ξ , который статистически независим по пространственной координате и имеет нулевое среднее $\langle \xi(t, n) \xi(t + \tau, m) \rangle = \delta_{m,n} \delta(\tau)$.

Число параметров модели можно уменьшить путем введения протяженности решетки l и затем ее нормировки: $l = \sqrt{\gamma} l_0$. Теперь перед Лапласианом остается один коэффициент связи, но интенсивность шума меняется. В результате, влияние шума и зависимость от степени связи можно рассматривать с использованием общего параметра $Q = D/\sqrt{\gamma^d}$, где $d = 1$ в одномерном случае и $d = 2$ – в двумерном. Например, сильная связь уменьшает силу воздействия шума, а случай большого шума соответствует пределу слабой связи. По этой причине в дальнейшем параметр γ фиксируется, а в качестве управляющего параметра используется интенсивность шума.

Очевидно ожидать, что при достаточно сильной связи моменты зажигания конкретных элементов будут происходить синхронно. Для численных расчетов выбирались $\varepsilon = 0.01$ и $\gamma = 0.05$, а параметры активации $a(n)$ представляли собой случайные числа, равномерно распределенные в интервале $[1.03, 1.1]$. В присутствии шума это приводило к распределению времен всплесков. Расчеты выполнялись в предположении свободных границ и со случайными начальными условиями. В отсутствие шума любое начальное состояние системы эволюционировало к состоянию равновесия.

В зависимости от интенсивности шума D и при достаточно большом значении степени связи наблюдаются три основных типа пространственно–временного поведения. При малом шуме центры возбуждения возникают очень редко в случайных местах среды, приводя к распространению круговых волн. Разрушение этих волн не может привести к появлению устойчивых спиральных волн, так как скорость волн при пересечении всегда направлена в сторону

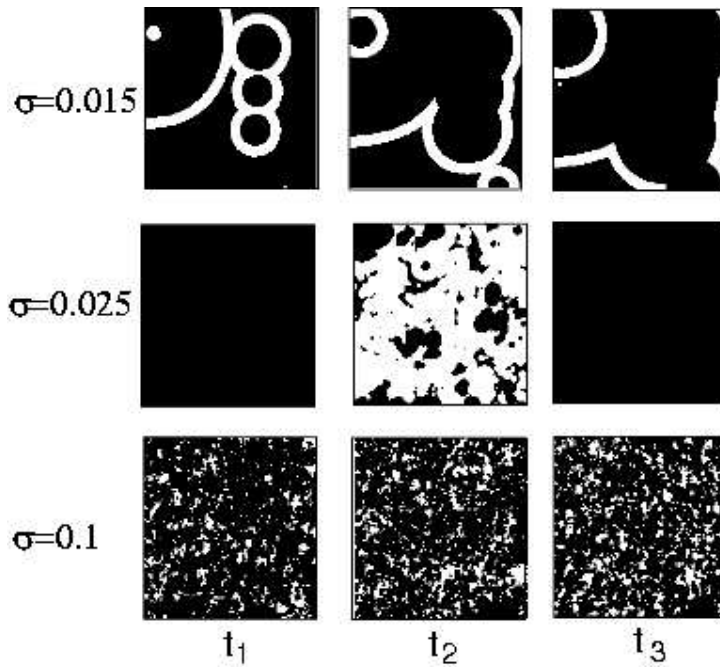


Рис. 3.51. Моментальные снимки двумерной 200×200 решетки (3.206) для трех моментов времени $t_1 < t_2 < t_3$. Белый цвет соответствует возбужденным состояниям. При оптимальной интенсивности шума (второй ряд) среда демонстрирует коллективные индуцированные шумом колебания. Первый ряд: $D = 1.1 \cdot 10^{-4}$, второй ряд: $D = 3.12 \cdot 10^{-4}$ и третий ряд: $D = 5 \cdot 10^{-3}$

от области пересечения. Таким образом, новые открытые спирали не возникают. Однако в случае параметрического шума распространяющиеся фронты могут локально возбуждать небольшие направленные области, которые разрушают распространяющиеся возбуждения и приводят к появлению спиралей [237, 238]. В этом случае различные ячейки в среде коррелированы только по короткому временному масштабу среднего времени прохождения волн. Синхронизации между отдаленными ячейками не происходит.

При большом уровне шума скорость образования возбуждений очень высока и среда представляет собой стохастически вспыхивающие ячейки. Однако при оптимальной интенсивности шума среда становится фазово-когерентной: вспыхивания различных отдаленных ячеек происходят практически синфазно. Три описанных выше случая показаны на рис. 3.51.

При оптимальном уровне шума среда осциллирует почти периодически (см. средний ряд на рис. 3.51). Случай большого шума соответствует вспыхивающим случайным образом кластерам. Подобное поведение наблюдалось в модели зрительного центра коры головного мозга [239].

Рассмотрим явление индуцированных шумом глобальных колебаний в одномерном случае в контексте фазовой синхронизации. Мгновенная фаза $\Phi(t, n)$ n -го элемента вводится с помощью представления аналитического сигнала. В качестве контрольного элемента выбирается центральная ячейка в среде ($n = N/2$) и затем вычисляется разность фаз $\phi(t, k) = \Phi(t, N/2) - \Phi(t, N/2 + k)$, $k = -N/2, \dots, N/2$. Результаты численного моделирования показали, что при оптимальном уровне шума фазы различных осцилляторов захватываются в течение времени расчетов. В случае больших расстояний между осцилляторами фазовые флуктуации возрастают. Тем не менее, разность фаз по-прежнему ограничена в определенной области в течение длительных периодов времени. При неоптимальных уровнях шума можно наблюдать частичную фазовую синхронизацию только между соседними элементами с возникающими случайным образом фазовыми сбоями. При дальнейшем увеличении расстояний между осцилляторами диффузия разностей фаз становится очень сильной и синхронизация разрушается.

В рассматриваемом случае соответствующей мерой стохастической синхронизации выступает коэффициент эффективной взаимной диффузии, который определяется следующим образом:

$$D_{\text{eff}}(k) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\langle \phi^2(t, k) \rangle - \langle \phi(t, k) \rangle^2]. \quad (3.207)$$

Данная величина описывает разброс во времени начального распределения разности фаз между $(N/2)$ -м элементом и всеми остальными. Если постоянная диффузии уменьшается, то захват фаз происходит на более продолжительном интервале времени и, следовательно, фазовая синхронизация становится сильнее. Усредняя $D_{\text{eff}}(k)$ по пространственной координате, получаем следующую величину:

$$D_{\text{eff}} = \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{N/2} D_{\text{eff}}(k). \quad (3.208)$$

Зависимость усредненного коэффициента эффективной взаимной диффузии от интенсивности шума приведена на рис. 3.52 и демон-

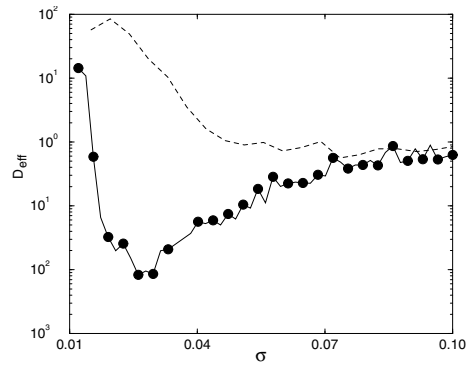


Рис. 3.52. Усредненный коэффициент эффективной взаимной диффузии как функция интенсивности шума. Пунктир соответствует несвязанному ансамблю ($\gamma = 0$)

стрирует глобальный минимум при ненулевом уровне шума. Таким образом, фазовая синхронизация может быть усилена при соответствующей подстройке уровня шума.

Синхронизация определяется также как эффект захвата частоты. В случае стохастической возбуждаемой системы необходимо использовать средние частоты осцилляторов $\langle \omega(n) \rangle = \langle \dot{\Phi}(t, n) \rangle$ [1]. В силу заданного распределения $a(n)$ элементы решетки имеют различные, случайным образом распределенные частоты при чрезвычайно малой связи. Для каждого элемента решетки численно находится средняя частота и затем строится распределение $P(\langle \omega \rangle)$ средних частот при различных интенсивностях шума. Полученные результаты показаны на рис. 3.53 и отражают яркий эффект усиленной шумом пространственно-временной синхронизации. При оптимальном уровне шума, когда фазы различных осцилляторов оказываются захваченными в течение длительных периодов времени, средние частоты подстраиваются и их распределение становится чрезвычайно узким. Для других значений интенсивности шума средние частоты демонстрируют довольно широкое распределение, что свидетельствует о потере синхронизации. На рис. 3.53 наглядно демонстрируется индуцированная шумом пространственно-временная упорядоченность в системе, обусловленная синхронизацией. Для количественной оценки подобного поведения вычисляется средне-квадратичное отклонение средних частот, усредненных по всей решетке. Результаты приведены на рис. 3.54, на котором показан глубокий минимум при той же оптимальной интенсивно-

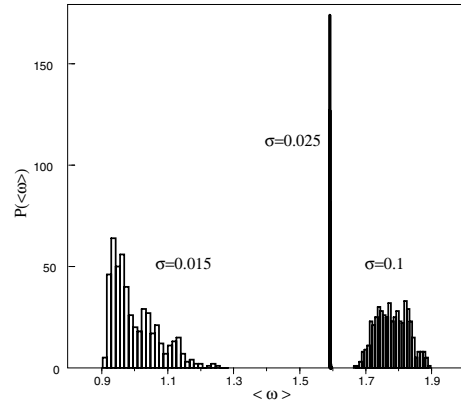


Рис. 3.53. Распределение средних частот осцилляторов для трех значений интенсивности шума. Слева направо: $D = 1.1 \cdot 10^{-4}$, $D = 3.12 \cdot 10^{-4}$, $D = 5 \cdot 10^{-3}$

сти шума, что и в случае зависимости коэффициента эффективной диффузии [229].

В основе механизма индуцированной шумом синхронизации лежит поведение отдельного несвязанного элемента. Индуцированные шумом колебания наиболее когерентны при отличной от нуля интенсивности шума, а добротность индуцированного шумом пика в спектре мощности максимальна. В этом режиме среднее время зажигания (или средняя частота) системы приближается к пику частоты в спектре мощности. В случае слабого шума средняя скорость зажигания зависит экспоненциально от управляющего параметра a ($a > 1$). Однако с ростом шума зависимость средней частоты от a становится незначительной. По этой причине при увели-

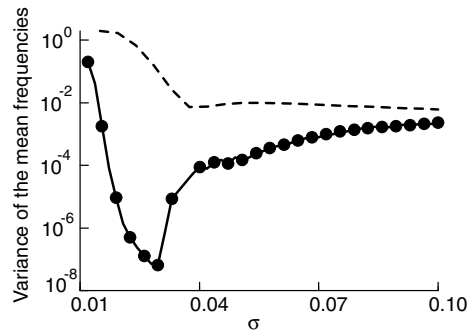


Рис. 3.54. Дисперсия средних частот осцилляторов для указанных значений дисперсии шума

чении уровня шума от очень малого значения расхождение между характерными частотами элементов в связанном ансамбле уменьшается и тем самым обеспечиваются лучшие условия для реализации взаимной синхронизации. С другой стороны, индуцированные шумом колебания становятся более когерентными. Эти эффекты способствуют синхронизации между элементами в решетке. Однако воздействие большого шума вновь разрушает когерентность локальных стохастических колебаний (частотные и фазовые флуктуации быстро возрастают) и также приводит к разрушению пространственно когерентных структур. Оптимальное значение интенсивности шума, при котором эффект синхронизации проявляется наилучшим образом, зависит от области распределения параметров активации $a(n)$. Если значения $a(n)$ увеличивать, вызывая большую степень беспорядка, то оптимальная интенсивность шума будет сдвигаться в сторону меньших значений.

3.3.4 Заключение

В данном разделе были представлены аналитические и численные результаты для модели ФитцХью–Нагумо в присутствии шума [234]. В пределе быстрой переменной напряжения были рассчитаны стационарные плотности вероятности, средний ISI и дисперсия ISI [213]. Аналитические исследования показали, что частота следования импульсов демонстрирует максимум в зависимости от наклона медленной нуль–изоклины и доказали существование минимума коэффициента вариации (отношения шум/сигнал).

Возбуждаемые системы представляют огромную важность в исследованиях ионных каналов и нейронной активности. Изучение стохастической модели ФитцХью–Нагумо, которая имитирует сложное поведение возбуждаемых биофизических элементов, может оказать помощь в понимании влияния шума в подобных компонентах. Результаты этих работ также способствуют установлению связи между исследованиями в биофизике и образованием индуцированных шумом структур в нелинейной химии и в аналоговых электронных устройствах, на которых были проведены эксперименты по данной интересной проблеме [130–134].

3.4 Индуцированный шумом транспорт

3.4.1 Введение

Большинство механических и тепловых машин выполняют направленное движение в виде периодического во времени отклика системы на внешнюю силу или источник энергии. Такая периодичность необходима для постоянного получения работы от прилагаемых сил и источников. В простых случаях подобное поведение можно описать с помощью механических систем, имеющих координаты и скорости, которые характеризуют движение в заданных периодических силовых полях. В зависимости от величины трения получаем модели либо периодического осциллятора, либо его передемпфированного аналога.

Обратимся к простому примеру, когда диссипативная сила является линейной. Случай нелинейного трения, которое играет роль энергетической накачки в системе, был изучен в работе [240]. Рассмотрим передемпфированное движение в нелинейных осцилляторах под действием внешних сил, которое описывается следующим уравнением:

$$\dot{x} = -\frac{\partial V(x, t)}{\partial x} + \sqrt{2D}\xi(t). \quad (3.209)$$

Потенциал состоит из двух слагаемых $V(x, y) = U(x) + W(x, t)$. Первый член является периодическим, $U(x + L) = U(x)$, и имеет один или несколько экстремумов за период. Второе слагаемое описывает влияние внешнего воздействия с амплитудой F_0 . В случае аддитивного воздействия $W = -F_0 x y(t)$, где $y(t)$ есть заданное временное изменение, которое отлично и в общем случае некоррелировано с гауссовским белым шумом $\xi(t)$.

В отсутствие внешнего воздействия, $F_0 = 0$, существование направленного движения в равновесном состоянии исключается по второму закону термодинамики. Как впервые было установлено Смолуховским [241], а позднее Фейнманом [242], никакие устройства не позволяют выделять работу из флуктуаций состояния равновесия. Ситуация качественно меняется, если в уравнении (3.209) F_0 отлично от нуля. Это означает, что система находится под внешним воздействием и выведено из равновесного состояния. Существование направленных потоков становится обычным, если поступательная инвариантность в пространстве или во времени разрушается и в результате нарушается детальный баланс. В работе [243]

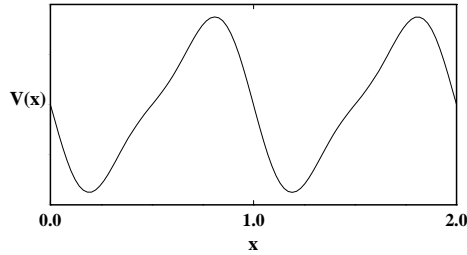


Рис. 3.55. Типичный пилообразный потенциал $U(x)$ с периодом $L = 1$ и нарушенной отражательной симметрией

обсуждаются типы симметрии внешних сил, которые возбуждают направленное движение, в зависимости от свойств потенциала $U(x)$.

Рассмотрим стохастические задачи с поступательной инвариантностью во времени. Будем предполагать, что внешнее воздействие есть случайный процесс во времени, например, процесс Орнштейна–Уленбека (см. раздел 1.2.3) со временем корреляции τ , или дихотомический процесс. Во-вторых, внешняя сила слишком мала по своей конечно-значной продолжительности, и наличие белого шума $\xi(t)$ делает возможным только переход через максимумы $U(x)$.

В предположении стационарного и симметричного шума (все нечетные моменты $y(t)$ стремятся к нулю) необходимо ввести элемент нарушения симметрии для выбора направленного движения броуновских частиц. Это будет нарушенная отражательная симметрия периодического потенциала, т.е. $U(x) \neq U(-x)$ для произвольных значений x в течение одного периода. Эта нарушенная симметрия обычно вводится путем выбора периодического, но асимметричного потенциала, который называется поступательным или пилообразным потенциалом, а в зарубежной литературе используется термин *рэтчет (храповик) потенциал* (см. рис. 3.55).

В данном разделе будет показано, что несмещенные и нетепловые флуктуации и нарушенная отражательная симметрия являются достаточными предпосылками для реализации механизма молекулярного переноса. В последнее время такие задачи привлекли большой интерес [244–275] с точки зрения современных методик разделения масс [276–280] и приложений в биологическом переносе, таких как сокращение мышц [261, 271] или движение актина

по миозину [281], молекул кинезина по микроканалам [282], биоперенос [281–290] и межмембранный перенос [291–295]. Кроме этого, имеется ряд экспериментальных результатов, которые показывают, что неравновесные флуктуации способны индуцировать направленное движение [296–301]. Как было показано в [250], рассмотренные эффекты можно обобщить на случаи потоков магнитных фаз в SQUID [302] или химических реагентов в пространствах конфигураций молекул. Отметим, что в конце 70-х годов [303] экспериментально наблюдался индуцированный шумом направленный поток в одномерных органических проводниках посредством возникновения конечного блокирующего потенциала.

В зависимости от рассматриваемой системы координата может быть непрерывной или дискретной. В пространственно непрерывных системах перенос может быть описан с помощью уравнения Фоккера–Планка (УФП) [67]. В случае дискретных моментов используются управляющие уравнения, например, для процессов рождения–гибели [304].

В рамках указанных двух методов можно строго определить центральную величину, которой является стационарный поток. Кроме этого, учет диффузии в окрестности усредненного движения дает более точную информацию. Большое количество работ посвящено исследованию возможной эффективности подобных устройств [242, 305]. Однако целью данного исследования является рассмотрение качества направленного переноса с помощью отношения между проводящим и конвективным переносами, которые выражены средним потоком через диффузионное движение за один период [306].

3.4.2 Мигающие и качающиеся рэтчет потенциалы

Необходимо отметить, что уже в древних водяных насосах использовался случай нарушенной отражательной симметрии. В настоящее время устройства с рэтчетом и детерминированной динамикой широко используются в качестве выпрямителей [307]. Новый предмет исследований представляют объекты с рэтчетом, находящиеся под действием шума или флуктуаций. Последние источники необходимы, чтобы индуцировать диффузионное движение или обеспечить переход через существующие барьеры, и моделируют тепловой шум, стохастические внешние силы или, в общем случае,

стохастические изменения реакции объекта в условиях рэтчет потенциала.

В настоящий момент в исследованиях используются два различных стохастических прототипа рэтчета [253, 255]. В первом случае внешние временные силовые поля воздействуют на механические осцилляторы с тепловым шумом. В среднем поля обращаются в нуль. Исследования проводятся в рамках теории стохастических осцилляторов, включая теорию скоростей переходов. Этот класс систем включает в себя так называемые качающиеся рэтчеты [249]. Аддитивные воздействия являются периодическими или случайными с конечным временем корреляции.

Второй класс моделей характеризуется переключением между различными профилями потенциальной энергии и называется "мигающими" рэтчетами. В этих меняющихся во времени потенциалах рассматривается броуновское движение. Например, такие флуктуирующие или периодически изменяющиеся потенциалы могут быть вызваны химическими реакциями, которые находятся под внешним воздействием и приводят к изменениям конфигураций рассматриваемых молекул [248, 250]. В теоретических минимальных моделях временное изменение не влияет на периодичность потенциала. Это имеет правдоподобное объяснение, так как химические реакции могут модифицировать общую картину потенциала, но как скалярные процессы они не индуцируют направленных сил. В большинстве биологических приложений мигающие рэтчеты рассматриваются как процессы рождения и гибели с изменяющимися во времени скоростями.

Но не каждый рэтчет может быть использован в подобной системе. Ранние исследования, проведенные в работе [308], доказали существование потока частиц при условии, что фаза мультипликативного шума в периодических системах сдвинута относительно периодического потенциала. Кроме того, вместо изменяющихся потенциалов можно использовать температуру или источники шума, интенсивностью которых можно управлять извне [309].

Броуновское движение в качающемся рэтчет потенциале.

Основной рабочий принцип качающегося рэтчета иллюстрируется на рис. 3.56. Потенциал $U(x)$ для различных $y(t)$ качается относительно начала координат под действием $W(x, t) = -F_0 y(t)$. Если максимальное отклонение $|\Delta U|$ достаточно мало, то энергетические барьеры слева и справа не исчезают и в отсутствие шума

частицы не могут перейти в другой минимум. С добавлением шума стохастические переходы через оставшиеся барьеры становятся возможными. Скорости выхода являются достаточными для обеспечения стохастических движений в соседние минимумы потенциала.

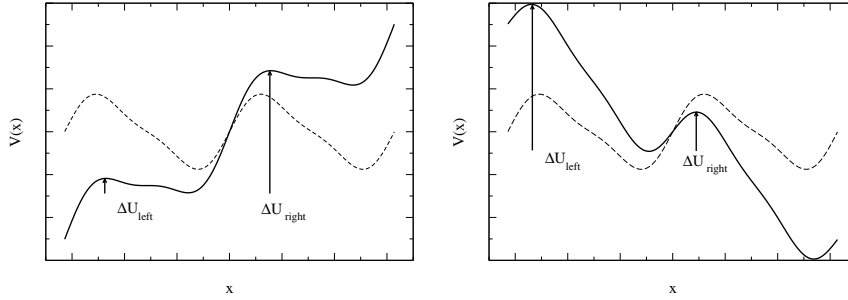


Рис. 3.56. Броуновское движение в качающемся рэзгет потенциале. *Сплошными линиями* показаны потенциалы $V(x, t) = U(x) - F_0 y(t)$ для значений y с разным знаком. Для сравнения *пунктиром* отмечен невозмущенный потенциал $U(x)$. *Стрелками* показаны различные энергетические барьеры для стохастического выхода соответственно налево и направо. В случае адиабатически медленного воздействия $y(t)$ среднее движение переноса направлено влево

Как видно из рис. 3.56, из-за нарушенной отражательной симметрии барьеры имеют различную величину, несмотря на симметричное воздействие $y(t)$. Высота левого барьера на левом рисунке значительно меньше высоты правого барьера на правом рисунке. Таким образом, частицы имеют преимущественное направление и движутся с более высокой вероятностью влево.

В случае дихотомического или периодического воздействия процесс становится строго индуцирован шумом. Движение исчезает при чрезвычайно малом аддитивном шуме. Для больших интенсивностей различие между барьерами становится незначительным. Существуют промежуточные значения уровня шума, при которых начинают работать различия, усиленные в соответствующих факторах Аррениуса, и имеет место усредненное движение влево.

Описанное выше представляет собой картину передемпфированных движений, когда временной масштаб воздействия меняется медленнее по сравнению со всеми другими временными масштабами. Необходимо отметить, что более быстрые изменения извне или

наличие слабого трения приводит к более сложному поведению с несколькими изменениями направления движения потока.

Броуновское движение в мигающем рэгчет потенциале. В простейших случаях временное изменение периодического потенциала состоит в процессе включений и выключений потенциала. В силу непрерывности этот процесс может быть описан с помощью уравнения Ланжевена:

$$\dot{x} = -\frac{\partial}{\partial x} U(x) y(t) + \sqrt{2D} \xi(t), \quad (3.210)$$

где $y(t) = 1, 0$ – дихотомический периодический или марковский процесс. Эта ситуация представлена на рис. 3.57 для малой амплитуды состояния “выключено” в целях наглядности.

В случае медленного изменения $y(t)$ перенос можно трактовать как и в предыдущем случае. Так как во “включенном” состоянии частицы располагаются вблизи минимума потенциала, то они начинают диффундировать в “выключенном” состоянии. После очередного включения потенциала, в силу асимметрии на правом “хвосте” распределения отрезается большая часть плотности вероятности, чем на левом. Эти заштрихованные части движутся к соседним минимумам потенциала, индуцируя эффективный поток, направленный вправо.

В случае D , стремящегося к нулю, частицы не будут диффундировать и общего переноса не возникает. При высоком уровне шума различие между заштрихованными областями также незначительное. Следовательно, существует некоторое оптимальное значение интенсивности шума, которое вызывает эффективный поток частиц в одном направлении.

С другой стороны, при конечных значениях интенсивности шума $D \neq 0$ медленные переключения позволяют частицам диффундировать по протяженным областям и асимметрия не принимается во внимание. Подобно этому случаю, переноса не происходит, когда переключения очень быстрые. Частицы просто не имеют времени для свободной диффузии. Следовательно, существует промежуточное значение времени переключения, которое обеспечивает максимальный поток.

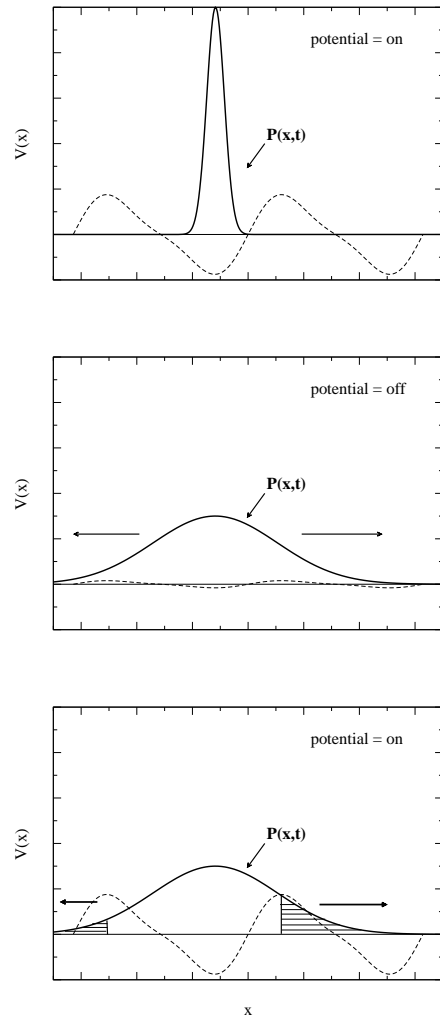


Рис. 3.57. Три последовательных этапа эволюции плотности вероятности для положения в мигающем потенциале. Сначала плотность сконцентрирована вблизи минимума. Если под действием внешнего возмущения потенциал выключается, то частица может свободно диффундировать. После включения области (показаны штриховкой), имеющие разный размер и расположенные на хвостах плотности, движутся соответственно к левым и правым соседям. В случае адиабатически медленных переключений среднее движение переноса направлено вправо. *Пунктиром* показан мигающий потенциал

3.4.3 Адиабатическое приближение

Как будет показано ниже, аналитические результаты для средних значений потоков могут быть получены с помощью дискретных

приближений. В случае непрерывной координаты решения существуют при медленном или быстром изменении воздействия $y(t)$ [249, 253], в случае кусочно-линейной динамики [250, 254] и, если на рэтчет воздействует белый дробовой шум [311, 312]. Рассмотрим первый случай применительно к задаче качающихся потенциалов с аддитивным воздействием. Медленное изменение внешних сил означает, что система способна адиабатически следовать за изменениями внешних возмущений. Тогда в асимптотическом пределе $t \rightarrow \infty$ можно получить аналитические выражения. Для анализа используются модифицированные приближения, которые представлены в разделах 1.2.6 и 1.3.4.

Уравнение Фоккера–Планка, соответствующее (3.210), имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial V(x, t)}{\partial x} P(x, t) \right) + D \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, t). \quad (3.211)$$

Из свойства периодичности потенциала $U(x) = U(x+L)$ следует, что асимптотическая плотность $P_{\text{asy}}(x, t)$ будет также периодической. В этом случае уравнение (3.211) с $\partial P_{\text{asy}}/\partial t = 0$ необходимо решать только в интервале $[0, L]$ с периодическими граничными условиями. Его решение будет неявно зависеть от времени через $y(t)$.

Выражение, стоящее под знаком производной в правой части уравнения (3.211),

$$J(x, t) = -\frac{\partial V(x, t)}{\partial x} P(x, t) - D \frac{\partial}{\partial x} P(x, t), \quad (3.212)$$

можно трактовать как поток мгновенной вероятности, который не должен зависеть от x в асимптотическом пределе $J(x, t) \rightarrow J_{\text{asy}}(t)$. Умножив уравнение (3.211) на x и проинтегрировав по пространственному периоду, получаем выражение для средней скорости:

$$\langle \dot{x}(t) \rangle_L = \int_0^L J(x, t) dx. \quad (3.213)$$

В асимптотическом приближении имеем $\langle \dot{x} \rangle_L = L J_{\text{asy}}(t)$. Как и в случае эффекта СР, в присутствии периодического воздействия среднюю скорость необходимо усреднить по одному периоду. В противоположность этому, для стохастического стационарного $y(t)$

асимптотические значения не зависят от времени, но должны быть усреднены по стационарной плотности воздействия.

Асимптотическое решение УФП (3.211), которое справедливо при медленном изменении $y(t)$, имеет вид [1]:

$$P_{\text{asy}}(x, y) = P^0(x, y) \left(C(y) - \frac{J_{\text{asy}}(y)}{D} \int_0^x dx' \frac{1}{P^0(x', y)} \right) \quad (3.214)$$

при $P^0(x, y) = \exp[-\Phi(x, y)]$, где $\Phi(x, t) = V(x, y)/D$. Потоки $J_{\text{asy}}(y)$ и $C(y)$ являются константами, получаемыми в результате интегрирования по пространственной переменной в адиабатическом приближении медленного изменения y . Соотношение между ними следует из периодического граничного условия:

$$J_{\text{asy}}(y) = C(y) D \left(1 - \frac{P^0(0, y)}{P^0(L, y)} \right) \left(\int_0^L dx \frac{1}{P^0(x, y)} \right)^{-1}. \quad (3.215)$$

Принимая во внимание нормировку, $C(y)$ есть

$$C(y) = \left(\int_0^L dx P^0(x, y) \int_x^{x+L} dx' \frac{1}{P^0(x', y)} \right)^{-1} \int_0^L dx \frac{1}{P^0(x, y)}. \quad (3.216)$$

После соответствующей подстановки и проведения некоторых несложных преобразований, получаем выражение для средней асимптотической скорости [249]:

$$\frac{\langle \dot{x}(y) \rangle_L}{LD} = \left(1 - \frac{P(0, y)}{P(L, y)} \right) \left(\int_0^L dx P^0(x, y) \int_x^{x+L} dx' \frac{1}{P^0(x', y)} \right)^{-1}. \quad (3.217)$$

Эту скорость также необходимо усреднить:

$$\langle \langle \dot{x} \rangle_L \rangle_y = \int dy \langle \dot{x}(y) \rangle_L \rho(y), \quad (3.218)$$

где $\rho(y)$ – заданное распределение. В случае периодического воздействия с $y(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$ получаем явное выражение

$$\langle \langle \dot{x} \rangle_L \rangle_y = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi_0 \langle \dot{x}(A \cos(\omega t + \varphi_0)) \rangle_L, \quad (3.219)$$

которое в результате адиабатического приближения не зависит от ω .

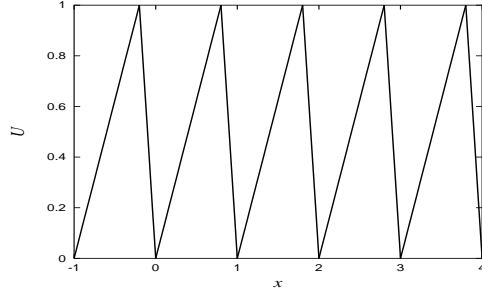


Рис. 3.58. Типичная иллюстрация кусочно-линейного потенциала

В качестве приложения данного приближения рассмотрим систему с кусочно-линейным потенциалом [126]:

$$f(x) = -\frac{\partial}{\partial x} U(x) = \begin{cases} a_1, & \text{если } nL < x < nL + x_1, \\ -a_2, & \text{если } nL - x_2 < x < nL, \end{cases} \quad (3.220)$$

на которую действует периодическая аддитивная сила с амплитудой A и малой частотой. Потенциал показан на рис. 3.58. $U_0 = a_1x_1 = a_2x_2$ – есть высота потенциального барьера, $x_1 + x_2 = L$. В случае малой амплитуды воздействия

$$\max y(t) \ll \frac{a_1a_2}{a_2 - a_1} \min \left(1, \frac{D}{U_0} \right), \quad (3.221)$$

приближенно находим среднюю скорость [313]

$$\overline{\langle \dot{x} \rangle} \approx \frac{U_0^2(a_2 - a_1)A^2}{8D^2a_1a_2 \sinh^2(U_0/2D)} \left(\frac{U_0^2}{4D^2 \sinh^2(U_0/2D)} + \frac{U_0}{2D \tanh(U_0/2D)} - 2 \right), \quad (3.222)$$

которая стремится к нулю как при высоком уровне шума, так и в отсутствие шума.

Примеры зависимостей $\overline{\langle \dot{x} \rangle} / A^2$ от D/U_0 , аппроксимированные значениями соответствующих интегралов [313], показаны на рис. 3.59 для различных значений амплитуды A . Физическая картина меняется при $A < \min(a_1, a_2)$ и $A > \min(a_1, a_2)$. В первом случае максимум наблюдается относительно D/U_0 , который уменьшается с увеличением амплитуды A . Во втором случае нормированная средняя скорость стремится к определенному конечному

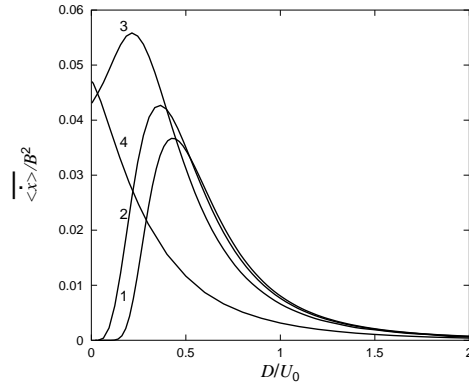


Рис. 3.59. Зависимость средней скорости $\overline{\langle \dot{x} \rangle} / A^2$ от D/U_0 в рамках адиабатической теории. $a_1 = 1.25$, $a_2 = 5$, $x_1 = 0.8$, $x_2 = 0.2$, $A = 0.1$ (кривая 1), $A = 1$ (кривая 2), $A = 2$ (кривая 3) и $A = 5$ (кривая 4) [126]

значению при $D/U_0 \rightarrow 0$, которое было вычислено в рамках теории детерминированного вибрационного переноса [275, 307]. При $A < 0.5$ полученные зависимости практически совпадают с аппроксимацией малой амплитуды (3.222).

Необходимо отметить, что задачи с периодически качающимися рэтчет потенциалами были решены численно [249] с помощью метода матричных цепных дробей (the matrix continued fraction (MCF)). На низких частотах численные результаты совпадают с адиабатической аппроксимацией. В случае высоких частот возникают изменения направления движения потока, которые нельзя получить в рамках адиабатической теории.

3.4.4 Передемпфированный коррелированный рэтчет

Во многих прикладных задачах биофизики частица движется в среде с высокой вязкостью. Таким образом, передемпфированный случай представляет собой особую важность. В работе [244] было предположено, что процесс Орнштейна–Уленбека, имеющий конечное время корреляции и играющий роль внешней силы, может индуцировать направленное движение броуновских частиц. Анализ этого индуцированного шумом движения приведен в [260]. Подытожим некоторые результаты.

Обратимся к уравнению, которое описывает передемпфированную динамику броуновской частицы с большим трением γ :

$$\dot{x} = \frac{1}{\gamma} \left(-V'(x) + F + y(t) + \sqrt{2D}\xi(t) \right). \quad (3.223)$$

В этом уравнении $y(t)$ представляет экспоненциально коррелированную случайную силу:

$$\langle y(t)y(t') \rangle = \frac{Q}{\tau} \exp\left(-\frac{|t-t'|}{\tau}\right), \quad (3.224)$$

τ – есть время корреляции и Q – интенсивность внешнего воздействия (см. раздел 1.2.3). Интерес представляют средняя скорость $\langle \dot{x} \rangle$ или стационарный поток вероятности $J_0 = \langle \dot{x} \rangle / L$, и ее зависимость от параметров источника шума, действующей силы и трения. К сожалению, соответствующее УФП для марковской динамики в двумерном фазовом пространстве (x, y) не может быть решено в явном виде.

В численном моделировании уравнения (3.216) и (3.217) могут быть решены с помощью быстрого алгоритма, разработанного Фоксом [143, 314, 315]. Улучшенный метод для определения потока путем решения УФП высокой размерности был предложен Рисkenом, Юнгом и Бартуссеком [67, 316]. В этом полуаналитическом приближении стационарная неравновесная плотность и поток представляются в виде разложения в ряд по соответствующим собственным функциям. Такое представление приводит к системе бесконечного числа алгебраических уравнений для амплитуд собственных функций, которая демонстрирует хорошую сходимость при ее представлении в форме МСФ.

Результаты [315], полученные в рамках данного приближения с использованием 50 собственных функций, свидетельствуют о влиянии параметров шума Q и τ . Положим $F = 0$ и $\gamma = 1$ и выберем форму потенциала, приведенного на рис. 3.55:

$$U(x) = \frac{1}{(2\pi)} [\sin(2\pi x) + 0.25 \sin(4\pi x)]. \quad (3.225)$$

На рис. 3.60 показана зависимость средней скорости от интенсивности шума и времени корреляции, которая демонстрирует максимумы относительно Q и τ . Поток равен нулю при стремящемся к нулю (белый шум) и бесконечном временах корреляции, если $\langle y^2 \rangle = 0$. Зафиксировав τ , можно получить максимум относительно интенсивности шума Q , так как чрезвычайно малые и бесконечно большие значения амплитуды разрушают слабый рэтчет потенциал. В данном случае поток не изменяет своего направления на

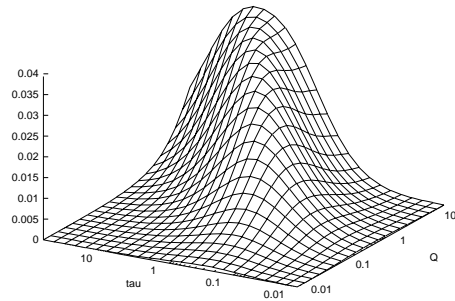


Рис. 3.60. Поток частиц в зависимости от времени корреляции и интенсивности шума Q . Параметры: $\gamma = 1.0$ и $D = 0.1$ [315]

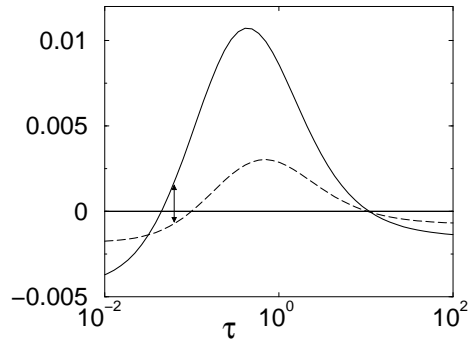


Рис. 3.61. Поток частиц разного размера в зависимости от времени корреляции для конечного отклонения. Параметры: $D = 0.1$, $Q = 0.2$, $F = -0.005$, $\gamma_1 = 1.0$ и $\gamma_2 = 2.0$

противоположное. Однако это происходит, когда потенциалы имеют более сложную форму, например, с тремя Фурье модами [260], или в случае более сложного внешнего воздействия [148, 259, 263].

Конкретной привлекательной особенностью броуновских машин является их способность сортировать частицы, разделяя по степени трения или массе [255]. Передемпфированная модель позволяет провести анализ влияния трения. Изменение трения моделирует различные размеры частиц по закону Стокса. С увеличением степени трения γ подвижность частиц уменьшается, так же как и влияние белого шума. Первый фактор уменьшает среднюю скорость; второй также уменьшает скорость во многих областях изменения параметров.

Возможная сортировка частиц разного размера [317] предполагает наличие в уравнении (3.223) дополнительной постоянной силы $F \neq 0$. Эта сила должна быть направлена против преимущественного направления потенциала. При конечных временах корреляции поступательное движение подавляет эффект внешнего воздействия и частицы движутся "в гору". Времена корреляции будут различными для разной степени трения, что значит, что большие частицы будут следовать за воздействием, тогда как частицы меньшего размера будут дугаться вверх. Эти предположения подтверждаются результатами, полученными методом МСФ. В области $\tau = 0.1$, показанной стрелкой на рис. 3.61, слабые потоки частиц различного размера имеют противоположные направления.

3.4.5 Сортировка частиц в рэтчет потенциале под действием цветного шума

Более детальное описание свойств частиц можно получить из исследований, учитывающих зависимость потока частиц от массы. Исследования подобных проблем, включая динамические инерционные эффекты, можно найти только в нескольких работах [317–322].

Как будет показано, для инерционных потенциалов имеют место изменения направления движения потока в зависимости от массы частицы. По этой причине такие потенциалы являются идеальными для сортировки частиц по массе и, следовательно, учитывают работу "молекулярных челноков" [320]. В этом отношении инерционный броуновский носитель может переносить массивный груз вперед и назад по заранее определенным маршрутам.

Рассмотрим модель инерционного рэтчета, которая была исследована в [322]. Обозначим через x и v соответственно пространственную координату и скорость частицы массы m . γ – есть степень вязкого трения. Уравнения стохастической динамики имеют вид:

$$\dot{x} = v, \quad m\dot{v} = -\gamma v - U'(x) + F + y(t) + \sqrt{2D}\xi_1(t). \quad (3.226)$$

$y(t)$ – цветной несмещенный шум, моделирующий стохастические неравновесные воздействия, $\xi_1(t)$ – тепловые флуктуации интенсивности D . Используя нормировку

$$\tilde{t} = \frac{t}{t_0}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{x_0}, \quad \tilde{v} = \frac{vt_0}{x_0}, \quad \tilde{y} = \frac{yV_0}{x_0}, \quad V(\tilde{x}) = \frac{U(x)}{V_0}, \quad \tilde{F} = \frac{x_0F}{V_0},$$

можно записать уравнения движения в потенциале V с $V(\tilde{x}) = V(\tilde{x} + 1)$ в безразмерной форме. Для того, чтобы безразмерный коэффициент трения был равен 1, полагаем $t_0 = \gamma x_0^2 / V_0$. Перенормированные масса и параметры шума имеют следующий вид:

$$\mu = \frac{mV_0}{x_0^2\gamma^2}, \quad \tilde{D} = \frac{D}{V_0\gamma}, \quad \tilde{Q} = \frac{Q}{V_0\gamma}, \quad \tilde{\tau} = \frac{\tau V_0}{\gamma x_0^2}.$$

В результате уравнения движения в безразмерной форме записываются следующим образом:

$$\dot{x} = v, \quad \mu \dot{v} = -v - V'(x) + F + y(t) + \sqrt{2\tilde{D}}\xi_1(t), \quad \dot{y} = -\frac{y}{\tilde{\tau}} + \frac{\sqrt{2\tilde{Q}}}{\tilde{\tau}}\xi_2(t) \quad (3.227)$$

(здесь и далее знаки "•" опускаются).

Наибольший интерес представляют средняя скорость $\langle v \rangle$ или поток стационарной вероятности погруженных броуновских частиц и ее зависимости от параметров шума и, в частности, от массы частицы. Результаты представлены для потенциала (3.225). Трехмерную марковскую динамику можно исследовать несколькими методами. Исследования в рамках адиабатического приближения были проведены в работе [321] и первый вклад в разложение $\propto 1/\gamma$ относительно большого трения был сделан в работе [320]. Эту динамику можно изучать с помощью методов аналитических приближений, таких как унифицированное приближение цветного шума (unified colored noise approximation (UCNA)). Численно марковская динамика исследуется либо прямым компьютерным моделированием уравнения (3.227), либо путем применения метода МСФ к соответствующему УФП.

Унифицированное приближение цветного шума. Рассмотрим формулировку приближенного марковского описания в общем случае нетривиальной немарковской динамики [323]. Этот метод исследования был разработан для передемпфированной стохастической динамики под воздействием процесса Орнштейна–Уленбека [324], который в общем случае справедлив при малых и больших временах корреляции τ . Улучшенные и обобщенные приближения, предложенные в [143, 325], были использованы в работах [148, 260] для изучения направленного переноса в присутствии цветного шума.

Вначале нелинейные координаты x, v, y преобразуются в линейно несвязанные стохастические переменные. Затем посредством

разделения временных масштабов новых переменных, предполагая адиабатическое исключение "быстрых" переменных, получают марковское описание только для координаты x .

Применяя данное обобщение к (3.227), приходим к одному уравнению Ланжевена с источниками белого шума. Можно записать выражения для малых времен корреляций τ и одновременно для сильно передемпфированной динамики $\mu \rightarrow \infty$. В интерпретации Стратоновича имеем следующее выражение [315]:

$$\dot{x} = \frac{1}{g(x)} \left(-V'(x) + F + \sqrt{2(Q + D)} \xi(t) \right), \quad (3.228)$$

где функция $g(x)$, зависящая от состояния и массы, имеет вид

$$g(x) = 1 + \frac{d}{dx} \frac{\tau Q [V'(x) - F]}{(D + Q)(1 + \mu/\tau) + \tau V''(x)}. \quad (3.229)$$

Используя стандартные методы [1], можно вычислить поток стационарной вероятности J . Для $\langle v \rangle = \langle \dot{x} \rangle = J$ находим

$$\langle \dot{x} \rangle = \frac{L(Q + D) \left[1 - \exp \left(\Phi(1)/(Q + D) \right) \right]}{\int_0^1 dx g(x) \exp \left(-\Phi(x)/(Q + D) \right) \int_x^{x+1} dy g(y) \exp \left(\Phi(y)/(Q + D) \right)}. \quad (3.230)$$

В данном выражении присутствует эффективный потенциал, имеющий вид:

$$\Phi(x) = \int_0^x g(y) [V'(y) - F] dy. \quad (3.231)$$

В пределе белого шума $\tau \rightarrow 0$ из (3.229) следует, что $g(x) \rightarrow 1$. Таким образом, поток $\langle \dot{x} \rangle_{\tau=0}$ стремится к нулю согласно [303, 326], если $F \neq 0$ независимо от массы μ . Иначе, то есть при $0 < \tau < \infty$, поток в общем случае отличен от нуля для несимметричных потенциалов $V(x)$ даже при $F = 0$. Асимптотическое поведение (3.230) при малых τ и в отсутствие воздействия $F = 0$ имеет вид

$$\langle \dot{x} \rangle = -\frac{\hat{\tau}^2 Q}{A(0)(D + Q)^2} \int_0^1 V'(y) V''(y)^2 dy, \quad (3.232)$$

$$A(F) = \int_0^1 dx \int_x^{x+1} dy \exp \left([V(y) - V(x) + (x - y)F]/(D + Q) \right). \quad (3.233)$$

Нормированное время корреляции $\hat{\tau} = \tau/(1+\mu/\tau)$ полностью включает в себя зависимость от μ результата (3.230), полученного в рамках используемого приближения.

На рис. 3.62 сравниваются результаты, полученные с использованием описанного приближения, и данные численного моделирования соответствующих уравнений Ланжевена (3.226) для различных значений μ . С увеличением массы максимум графика аппроксимации сдвигается относительно численных данных в сторону больших τ . Максимальное значение потока в приближении UCNA не зависит от массы в силу упомянутой выше зависимости от $\hat{\tau}$.

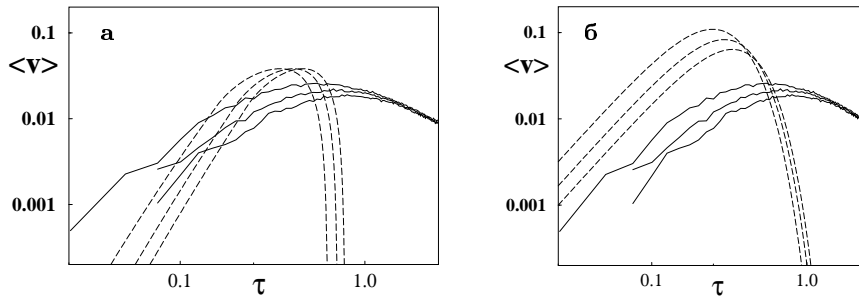


Рис. 3.62. Сравнение результатов, полученных (а) в рамках приближения UCNA и (б) метода интеграла по траекториям, с численными данными. Сплошными линиями показаны результаты моделирования уравнений Ланжевена (3.226). Пунктир соответствует аналитическим аппроксимациям (а) (3.233) и (б) (3.236)

Приближение интеграла по траекториям для инерционных рэтчет потенциалов. Подобно квантовой механике переформулировка стохастической динамики дает удобное представление с помощью интегралов по траекториям [327]. В рамках ограничения слабого теплового шума поток броуновских частиц можно аппроксимировать с помощью описания скоростей:

$$\langle \dot{x} \rangle = k_+ - k_-, \quad (3.234)$$

где k_+ (k_-) – индуцированная шумом скорость перескоков в следующую соседнюю правую (левую) яму, которая имеет зависимость, подобную закону Аррениуса $k_{\pm} = \zeta_{\pm} \exp -\Delta\Phi_{\pm}/D$. $\Delta\Phi_{\pm}$ определяет эффективные барьеры, независимые от D , $x^{\#}$ – положение

локального максимума потенциала $V(x) - xF$, и x_+ и $x_- = x_+ - 1$ – положения соответствующих соседних минимумов справа и слева. В случае малых τ [328] точные результаты имеют следующий вид [322]

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_{\pm}(\tau) &= \Delta\Phi_{\pm}^{(0)} + \Delta\Phi_{\pm}^{(1)}(\tau) \\ &= \frac{V(x^{\#}) - V(x_{\pm}) + (x_{\pm} - x^{\#})F}{1 + R} + \tau^2 \frac{R}{(1 + R)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{q}_{\pm}^2(t) dt \end{aligned} \quad (3.235)$$

и $R = Q/D$. Функции $q_{\pm}(t)$ соответствуют траекториям седловых точек, полученным из динамики в отсутствие шума $\mu\ddot{q}_{\pm}(t) = -\dot{q}_{\pm}(t) - V'(q_{\pm}(t)) + F$ и с начальными условиями в максимуме, которые имеют исчезающе малую скорость и приходят в один из возможных минимумов при $t \rightarrow \infty$.

Префакторы ζ_{\pm} можно аппроксимировать в нулевом приближении $\zeta(\tau) \simeq \zeta(\tau = 0)$ эффективным шумом $(D + Q)$ [329]. Таким образом, можно заключить, что

$$\langle \dot{x} \rangle = k_+^0 [\exp(-\Delta\Phi_+^{(1)}/D) - \exp(-[\Delta\Phi_-^{(1)} + LF/(1+R)]/D)], \quad (3.236)$$

где $k_+^0 = k_+(\tau = 0)$, что соответствует переходу через барьер $\Delta\Phi_+^{(0)}$ в присутствии двух источников белого шума [см. (1.213)].

Интересно отметить, что $\Delta\Phi_+^{(1)} - \Delta\Phi_-^{(1)}$ может менять свой знак в зависимости от μ в режиме малого затухания. Следовательно, выражение (3.236) предсказывает изменение направления движения потока на обратное в случае слабого трения ($\mu \gg 1$), что подтверждается результатами МСФ анализа. Однако изменение направления происходит в режиме ограниченной диффузии энергии, где (3.236) не выполняется с качественной точки зрения. В этом случае возникают длительные прохождения через многочисленные барьеры, которые не учитываются в выражении (3.234). В хорошем приближении их возникновение определяется скоростями k_{\pm} и зависит от асимметрии рэчкет потенциала. Этот факт можно было бы рассматривать в качестве индикатора изменения направления движения потока. Результаты, полученные с помощью метода интеграла движения (3.236), сравнивались с численными данными на рис. 3.62. Кроме абсолютного значения потока, которое точнее вычисляется с помощью UCNA, величина среднего потока сходится вполне удовлетворительно вплоть до значений $\tau = 0.5$. Качественно описываются сдвиг относительно τ и изменение максимума с увеличением инерционности μ .

Анализ с помощью метода матричных цепных дробей (МСФ).

На первом шаге в МСФ анализе стационарная плотность $P(x, v, y)$ представляется в виде разложения на Эрмитовы функции по v и y и Фурье-моды по координате x , и затем решаются алгебраические уравнения относительно амплитуд. Точные значения потоков, вычисленные для двух значений Q , приведены на рис. 3.63, где значения интенсивности Q выбирались меньше и больше интенсивности белого шума D .

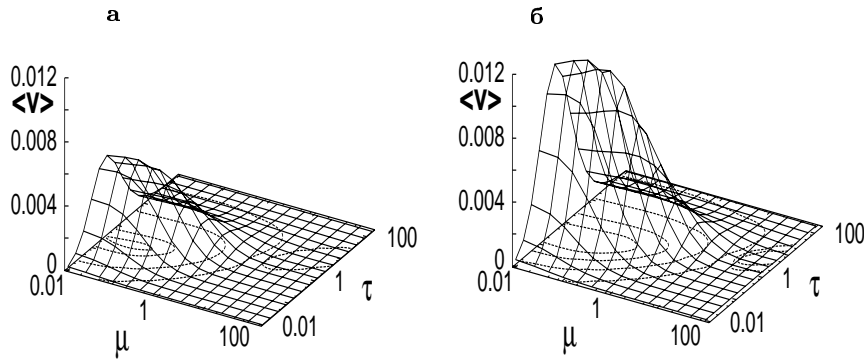


Рис. 3.63. Потоки, вычисленные путем МСФ анализа, в зависимости от массы и времени корреляции: (а) $Q/D < 1$ и (б) $Q/D > 1$, где Q и D – интенсивности стохастической внешней силы (процесс Орнштейна–Уленбека) или белого шума в (3.226)

Конечная инерционность приводит к сложному поведению потока, что можно установить из всех последующих рисунков. Поток стремится к нулю при $\mu \rightarrow \infty$, так же как и в случае малых и больших τ . Начиная с небольших значений μ , в определенной области значений τ можно наблюдать новое неожиданное увеличение потока в зависимости от μ . Возникает глобальный максимум относительно μ и τ при конечной массе, появление которого не предсказывалось в рамках аналитических приближений.

Дальнейшее увеличение $\mu \approx 0.1$ приводит к быстрому уменьшению потока. При заданном μ максимум относительно τ сдвигается в сторону больших значений, что согласуется с двумя используемыми приближениями. Подобное резкое уменьшение потока понятно. Влияние флуктуаций и внешних сил ослабевает, если частицы имеют большую массу. С увеличением массы движение частиц замед-

ляется. Это может компенсироваться большим значением времени корреляции τ , что объясняет сдвиг максимума.

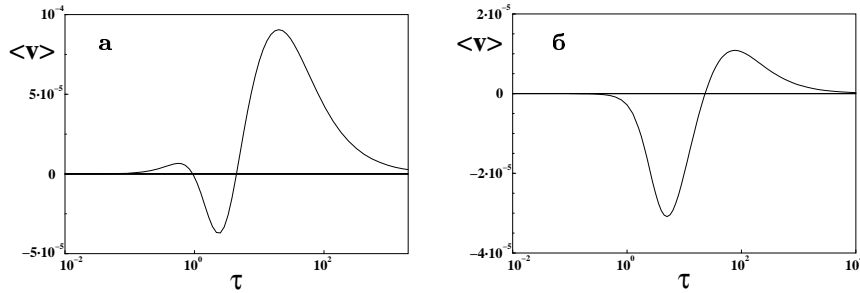


Рис. 3.64. Изменение направления потока в зависимости от времени корреляции τ . (а) Средние значения μ с несколькими изменениями направления потока, (б) тяжелые частицы с единственным изменением направления движения

В случае очень малого трения при произвольных R возникают отрицательные скорости при средних значениях τ . Для средних значений μ скорость дважды меняет свое направление на обратное в зависимости от времени корреляции (см. рис. 3.64а). Отрицательные потоки наблюдаются в конечном интервале значений τ . При больших μ происходит единственное изменение направления потока (рис. 3.64б). Но из рис. 3.65 немедленно следует, что абсолютные значения реверсивных потоков намного меньше, чем в случае максимального потока при малой массе.

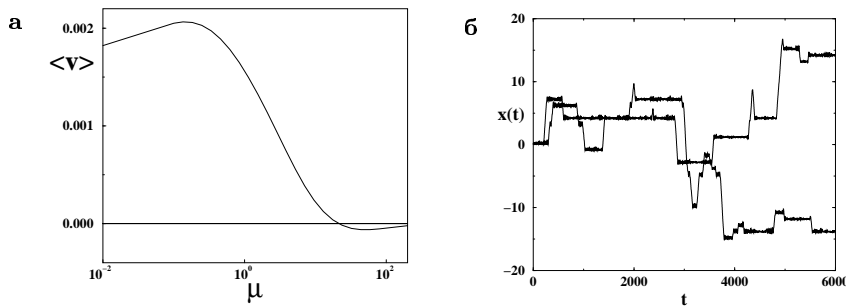


Рис. 3.65. Изменение направления потока частиц из (а) МСФ анализа и (б) численного моделирования в режиме слабого трения (см. пояснения в тексте)

Изменение направления движения потока в случае слабого трения было подтверждено численным моделированием [322]. Временные реализации для двух отдельных траекторий демонстрируют эффект сильной инерции (рис. 3.65б). В случае слабого трения можно разделить два типа состояний: "бегущие состояния" и "захваченные состояния". Но, как было проверено численно и подтверждено методом интегралов движения, изменение направления происходит из-за асимметрии потенциала. Это выражается через обратную разность скоростей k_+ и k_- для переходов из захваченного состояния в лево- или правобегущее состояние.

3.4.6 Двумерный рэтчет

Большинство теоретических моделей потенциала рассматривают случаи одномерных периодических структур. В таких задачах зависящие от времени силы направлены параллельно движению индуцированных потоков. С другой стороны, большинство экспериментов по переносу в пилообразных потенциалах имеют дело с двумерными задачами. Например, в [296, 297, 301] наблюдалось направленное движение частиц в двумерной структуре препятствий, которая имела вид "рождественской ели".

Обоснованием для построения таких систем является необходимость в эффективной методике для сортировки макромолекул [277–279, 330, 331]. Было обнаружено, что в присутствии помех, имеющих геометрию в форме рэтчет потенциала, в двумерных системах с постоянными силами может возникнуть перенос ортогонально направлению действующей силы. Более того, если форма препятствий симметрична в направлении действующей силы, то индуцированный поток является четной функцией внешнего воздействия [331]. Данная особенность делает этот эффект более интересным для практических приложений, так как поток не зависит от направления внешней силы, и поэтому может быть использовано периодическое воздействие [330].

Индукцированное шумом движение, трансверсальное действующей силе. Рассмотрим следующую физическую ситуацию [332]: симметрия двумерного пилообразного потенциала нарушается в направлении координаты x . Постоянное отклонение действует в направлении y и ведет систему в неравновесное состояние. Предполагаются периодические граничные условия по x и y .

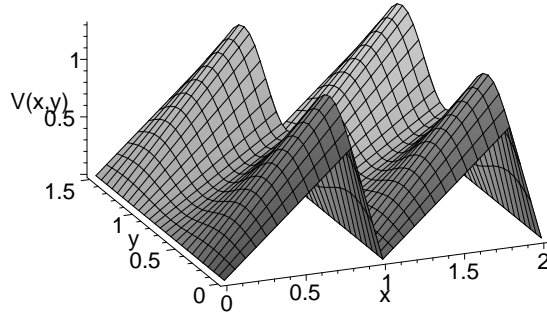


Рис. 3.66. Двумерный потенциал $V(x, y)$ при $A = 0.3$, $L = 1$, $F = 0$ и $k = 0.8$

Потенциал $V(x, y)$, который удовлетворяет нашим требованиям в интервалах $x \in [0, 1]$, $y \in [0, L]$, показан на рис. 3.66. В вычислениях потенциал представляется в явном виде следующим образом:

$$V(x, y) = V_0(x, y) - Fy = \{1 - A \sin(2\pi y/L)\} U(x) - Fy. \quad (3.237)$$

$U(x)$ обозначает одномерный кусочно-линейный пилообразный потенциал единичной высоты с параметром асимметрии $k \in (0, 1)$; если $k = 1/2$, то $U(x)$ – симметричный. $U(x)$ периодически модулируется в y направлении с амплитудой A . Линейный член отвечает за постоянное отклонение, которое уводит систему от состояния равновесия.

Динамика описывается системой двух одномерных уравнений Ланжевена

$$\dot{x} = f_x(x, y) + \sqrt{2D}\xi_x(t), \quad \dot{y} = f_y(x, y) + \sqrt{2D}\xi_y(t). \quad (3.238)$$

с независимыми источниками гауссовского белого шума ξ_i . $f_i(x, y)$ задают силовые поля, обусловленные потенциалом (3.237). Из этих уравнений можно сразу получить двумерное уравнение Смолуховского, описывающее эволюцию плотности вероятности $p(x, y, t)$.

В асимптотическом случае и с периодическими граничными условиями $p^s(x, y) = p^0(x + 1, y)$, $p^s(x, y) = p^s(x, y + L)$ уравнение Смолуховского решается численно с помощью метода конечных элементов [332, 333]. Стационарная плотность $p^s(x, y)$ содержит всю информацию, необходимую для определения потоков системы, в частности:

$$\begin{aligned} J_x(x, y) &= f_x(x, y)p^s(x, y) - D_x \frac{\partial}{\partial x} p^s(x, y), \\ J_y(x, y) &= f_y(x, y)P^0(x, y) - D_y \frac{\partial}{\partial y} P^0(x, y). \end{aligned} \quad (3.239)$$

Вычислив среднюю скорость $\langle v_x \rangle$, можно оценить общий перенос за один период в направлении координаты x . Учитывая условие нормировки, среднюю скорость можно выразить через общий поток следующим образом:

$$\langle v_x \rangle = J_x^{\text{tot}} = \int_0^1 \int_0^L J_x(x, y) dx dy. \quad (3.240)$$

Отличный от нуля наклон $F \neq 0$ индуцирует усредненные потоки в системе. Наряду с ожидаемым потоком в направлении y возникает также поток в направлении x . Векторное поле плотности вероятности потока изображено на рис. 3.67. Направления движения потока на всей плоскости $[0, 1] \times [0, L]$ показаны стрелками единичной длины. Видно, что компонента по x локального потока принимает положительные и отрицательные значения.

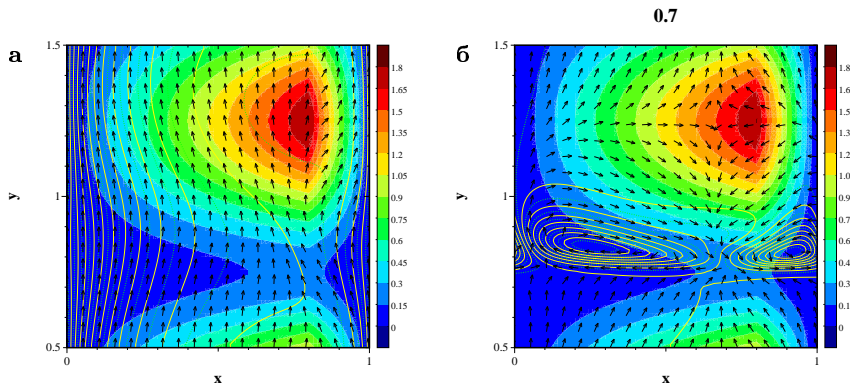


Рис. 3.67. Векторное поле потока вероятности $[J_x(x, y), J_y(x, y)]$. Стрелки и линии показывают направление потока, который у основания является потенциалом без наклона. (а) Изотропная диффузия при $D = 0.2$, $A = 0.8$, $L = 1$, $F = 5$ и $k = 0.8$; (б) сложные локальные потоки в системе при $D_x = 0.3$ и $D_y = 0.01$. $F = 1$, $L = 1$, $k = 0.8$ и $A = 0.8$

Основной вклад в общий поток вносит поток, проходящий через седловую точку потенциала ($x = 0.8$ и $y = 0.75$). В глобальном рассмотрении доминирующим оказывается поток, направленный в левую сторону. На рис. 3.68а показана усредненная скорость. В силу симметрии потенциала $V_0(x, y)$ в y направлении поток не меняется при замене $F \rightarrow -F$. При малых F поток $J_x^{\text{tot}}(F)$ есть $O(\propto F^2)$ [331]. Увеличение F приводит к возникновению отрица-

тельного потока, и J_x^{tot} достигает своего максимального абсолютного значения при $F \simeq 5.5$. Это происходит вблизи критического значения внешней силы, выше которого потенциал монотонно затухает в направлении y . При больших значениях F эффект подавляется.

Результаты численного моделирования уравнений Ланжевена (3.238) с помощью метода Монте–Карло также представлены на рис. 3.68а и подтверждают полученные данные. Хорошее соответствие результатов различных численных методов гарантирует справедливость используемых алгоритмов. Однако в работе [332] было отмечено, что моделирование с помощью метода Монте–Карло в общем случае является менее точным и требует очень большой вычислительной мощности по сравнению с решением уравнения Смолуховского методом конечных элементов.

Сравнение с одномерным мигающим рэтчет потенциалом. Рассмотренную систему с двумерным рэтчетом можно интерпретировать как распространение концепции одномерного мигающего рэтчета. Частицы, движущиеся в y направлении, обеспечивают периодическую модуляцию таким же способом, как частица в периодически мигающем одномерном потенциале. Это соответствие становится точным, если динамику второго уравнения Ланжевена (3.238) заменить на $\dot{y} = F$.

Данная ситуация моделируется с помощью добавления анизотропного шума по x и y направлениям, имеющего соответственно интенсивности D_x и D_y . На рис. 3.68б сравниваются три случая в присутствии такого типа шума: одномерный мигающий рэтчет $D_y = 0$ и двумерный рэтчет с изотропной диффузией ($D_x = D_y$) и анизотропной диффузией ($D_x \gg D_y = 0.01$).

Из рисунка видно, что при амплитудах внешней силы, превышающих порог ($F \simeq 5$), значения потоков совпадают. Если F принимает значения порядка 10, то интенсивностями шума, как $D_x = 0.3$, так и $D_y = 0.01$, можно пренебречь, и реализуется ситуация, подобная случаю с периодически мигающим потенциалом.

Однако при меньших значениях F поведение двумерных систем меняется и становится отличным от простой модели. Двумерный рэтчет с изотропной диффузией дает более слабый поток, чем мигающий потенциал. Это происходит в силу того, что на движение частицы в y направлении значительное влияние оказывают внешние воздействия, идущие от потенциала V_0 , и остается режим с

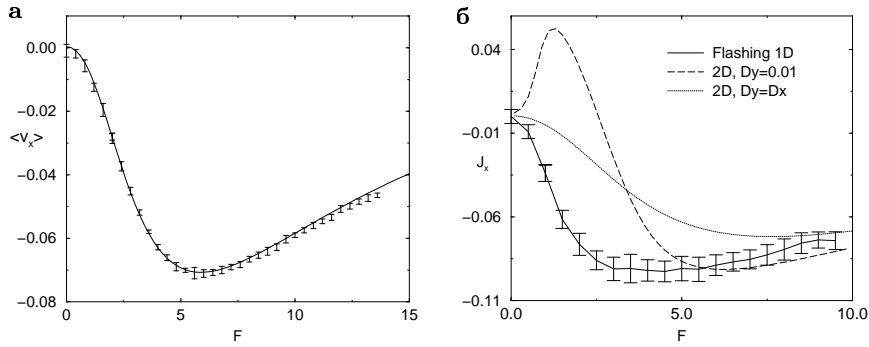


Рис. 3.68. (а) Общий поток в направлении координаты x как функция внешнего воздействия F . Результаты моделирования методом Монте-Карло представлены в виде соответствующих интервалов достоверности. (б) Сравнение одномерного мигающего рэтчет потенциала и двумерного потенциала с коэффициентом симметричной и несимметричной диффузии. Параметры: $D_x = 0.3$, $k = 0.8$ и $A = 0.8$

постоянной средней скоростью вдоль координаты y . Этому движению препятствуют высокие барьеры, и частицы могут двигаться свободно только вдоль направления y , преодолевая барьеры с помощью тепловой активации.

В анизотропном случае $D_x \gg D_y$, наблюдается более сложное поведение системы. Происходит неожиданный эффект: при небольших значениях F общий поток становится положительным, что качественно отличается от системы с одномерным мигающим рэтчет потенциалом. В этом случае локальный поток вероятности отражает сложную динамику броуновских частиц (см. рис. 3.68б). Изменение направления потока сопровождается возникновением циркулирующих потоков. Теперь векторное поле имеет многочисленные сингулярности.

Подчеркнем тот факт, что подобные циркуляции возникают только в случае анизотропной диффузии. Они сохраняются при чрезвычайно малых внешних воздействиях F , но в отсутствие общего потока. При больших значениях F сложная структура локального потока исчезает и поток вновь становится ламинарным.

3.4.7 Дискретный рэтчет

В данном подразделе приведены результаты для направленного переноса с дискретными перескоками. Такое рассмотрение используется при исследовании биофизических ситуаций с числом частиц и

приведением динамики макромолекул или ионных каналов к малому множеству (ряду) дискретных конфигураций. В данном подразделе рассматриваются основные модели, которые можно обобщить на случаи прикладных задач.

Целью является изучение простого рэтчет потенциала, который задается особыми скоростями перехода $W_\sigma(i \rightarrow i \pm 1)$ для дискретных моментов. Нижний индекс $\sigma = \pm 1$ соответствует внешнему временному воздействию. Как будет показано далее, использование базовых систем позволяет обсуждать такие интересные явления как отношение между направленным переносом и диффузией, разупорядоченные потенциалы и связанные потенциалы, имеющие свойство формирования структур.

Минимальный дискретный мигающий рэтчет потенциал. Нарушенная симметрия отражения с нулевым потоком в равновесном состоянии требует по крайней мере наличия трех состояний в течение периода [334]. При периодических граничных условиях закон действующих масс выполняется, если умножение на прямые скорости равно произведению обратных скоростей. Тогда в случае двух состояний симметричные скорости очевидно удовлетворяют только закону действующих масс и условию периодичности. Следовательно, модели потенциалов с двумя состояниями включают внешние силы и движение даже в равновесном состоянии [262].

Предположим, что скорости переходов между различными состояниями $i = 1, 2, 3$ могут быть представлены в виде экспоненциальных функций и время нормируется с помощью общего префактора. Периодичность и нарушенная симметрия отражения имеют место, если две скорости прямых перескоков $i \rightarrow i + 1$ меньше 1; и наоборот, остальные больше 1. Этого достаточно для того, чтобы определить

$$W_\sigma(1 \rightarrow 2) = W_\sigma(2 \rightarrow 3) = k_\sigma \quad (3.241)$$

и

$$W_\sigma(3 \rightarrow 4) = k_\sigma^{-2} = 1/[W_\sigma(1 \rightarrow 2) \times W_\sigma(2 \rightarrow 3)], \quad (3.242)$$

и в силу периодичности состояние “4” совпадает с состоянием “1”. Обратные прыжки будут определены в виде обратных функций

$$W_\sigma(i \rightarrow i - 1) = \frac{1}{W_\sigma(i - 1 \rightarrow i)}. \quad (3.243)$$

Мигание или качание рэтчет потенциала предполагает временное воздействие, которое выражается через временные изменения ско-

ростей. При рассмотрении самой простой мигающей моды, $\sigma = 1$ соответствует потенциалу в состоянии “включен” и $\sigma = -1$ – потенциалу в состоянии “выключен”. Можно предположить наличие двух чередующихся наборов скоростей (см. рис. 3.69) между переключениями системы со скоростью γ .

Согласно используемым обозначениям, $\sigma = 1$ соответствует скоростям $k < 1$, а для $\sigma = -1$ просто полагается $k = 1$. В этой ситуации сохраняется простая диффузия. Таким образом, остаются две константы: k и скорость переключений γ , – при фиксированном периоде $L = 1$.

Минимальный дискретный мигающий рэтчет описывается моделью, имеющей 6 состояний, и с периодическими граничными условиями [306, 334]. Полагая, что $\sigma(t)$ есть дихотомический процесс, определенный скоростью переключений γ , можно смоделировать стохастические переключения между двумя потенциалами. Эволюция зависящей от времени вероятности $P_\sigma(j, t)$ нахождения отдельной частицы в состоянии j , в потенциале σ , определяется следующим управляющим уравнением:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_\sigma(j, t)}{\partial t} = & W_\sigma(j+1 \rightarrow j)P_\sigma(j+1, t) + W_\sigma(j-1 \rightarrow j)P_\sigma(j-1, t) \\ & - [W_\sigma(j \rightarrow j+1) + W_\sigma(j \rightarrow j-1)]P_\sigma(j, t) - \gamma P_\sigma(j, t) + \gamma P_{-\sigma}(j, t). \end{aligned} \quad (3.244)$$

Скорости перехода $W_\sigma(i \rightarrow j)$ можно представить, если рассмотреть два чередующихся потенциала, как показано на рис. 3.69, и определить

$$k_\sigma = \exp\left(-\frac{\sigma(t)+1}{2} \Delta U/D\right). \quad (3.245)$$

Таким образом, произведение скоростей преобразуется в сумму по показателям кусочно-гладких линейных сегментов, которая должна быть равной нулю. Задание нулевого значения потенциала в “выключенном” состоянии подтверждается нормировкой времени.

Используя рис. 3.69, можно объяснить возникновение неравновесного состояния [257]. Предположение постоянных скоростей γ между различными формами потенциала независимо от значения потенциала для различных i служит источником неравновесного состояния. Для равновесного состояния требуется наличие определенных скоростей γ_i , подчиняющихся закону Аррениуса.

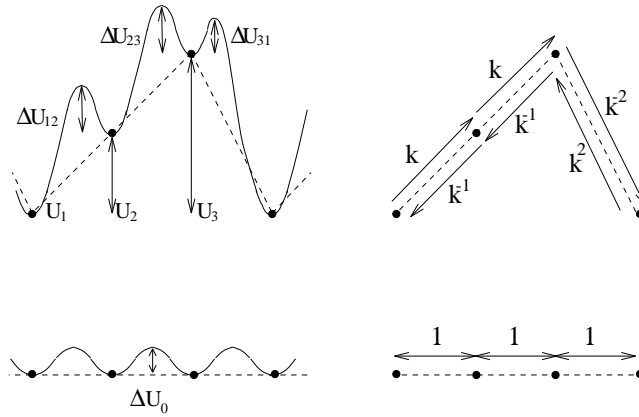


Рис. 3.69. Два чередующихся потенциала $\sigma = +1$ (верхние рисунки) и $\sigma = -1$ (нижние рисунки) с периодическими граничными условиями ($1 \leftrightarrow 3$) мотивируют данный выбор скоростей перехода

Управляющее уравнение (3.244) для шести состояний можно представить в форме матричного уравнения:

$$\dot{P} = WP, \tag{3.246}$$

где вектор P состоит их шести компонент и W есть матрица перехода. Суммируя все строки матрицы, можно легко увидеть, что ранг W меньше шести. Это говорит о сохранении вероятности. Однако условие нормировки дает независимое шестое уравнение.

Стационарное решение уравнения (3.246) при $\dot{P} = 0$ можно получить аналитически путем решения линейных алгебраических уравнений. Поток $J(i, t)$ между состояниями i и $i + 1$ имеет вид:

$$J(i, t) = [W_{+1}(i \rightarrow i + 1) P_{+1}(i, t) - W_{+1}(i + 1 \rightarrow i) P_{+1}(i + 1, t)] + [W_{-1}(i \rightarrow i + 1) P_{-1}(i, t) - W_{-1}(i + 1 \rightarrow i) P_{-1}(i + 1, t)]. \tag{3.247}$$

Безусловно, при $t \rightarrow \infty$ стационарный поток J_0 не зависит от расположения, т.е. $J_0 = J(1) = J(2) = J(3)$. Это отражено на рис. 3.70 в зависимости от скорости переключения γ и скорости перехода k .

Немонотонный характер зависимостей становится очевидным, если рассмотреть предельные случаи. При исчезающе малой скорости переключений статистическая задача соответствует двум несвязанным ансамблям с различными потенциалами. Так как отдельный ансамбль не демонстрирует общего переноса, то в силу

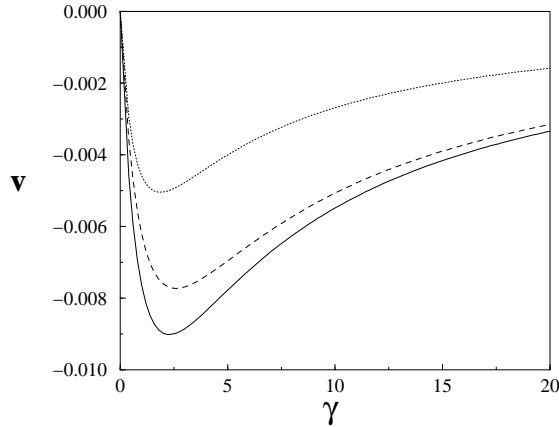


Рис. 3.70. Стационарный поток при изменении скорости переключений γ для трех различных значений скорости перехода: $k = 0.1$ (пунктир), $k = 0.2$ (сплошная линия) и $k = 0.4$ (точечная линия). Максимум соответствует исчезающе малому потоку, а минимум в окрестности $\omega \approx 2$ и $k \approx 0.2$ – максимальному потоку, направленному влево

детального баланса очевидно не существует потока, который бы связывал оба ансамбля. При очень высоких скоростях переключений величина потока стремится к нулю, так как время, проведенное в состоянии $\sigma = -1$, слишком мало для достижения соседнего барьера с помощью диффузии. В промежуточном случае существует оптимальное значение скорости переключения, с которой диффузия в сторону правого минимума оказывается более эффективной, чем в сторону левого.

Значение скорости $k = 1$ означает выбор гладкого потенциала в состоянии $\sigma = +1$. Однако в этом случае пространственная асимметрия и, как следствие, поток исчезают. Случай $k \rightarrow 0$ соответствует увеличению высоты барьеров в состоянии "включено", превышающих все пределы. Концентрация распределения в минимуме не может быть преодолена с помощью диффузии, поэтому поток исчезает. В промежуточном состоянии существует оптимальное значение скорости перехода.

Описание дискретных потенциалов с помощью огибающей. При рассмотрении цепочки идентичных потенциалов может возникнуть вопрос об эволюции некоторого изначально определенного распределения. В огрубленном масштабе ожидалось бы, что

распределение будет перемещаться со средней скоростью в направлении, определенном асимметрией потенциала, и в то же время расширяться в силу диффузии [306, 318, 335].

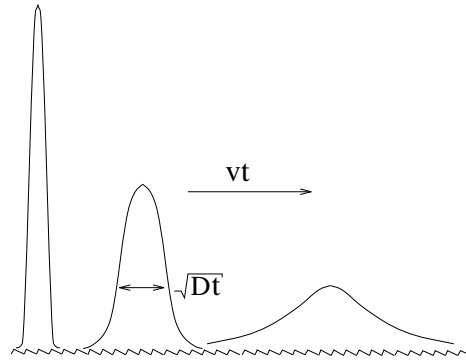


Рис. 3.71. Аппроксимация огибающей броуновского движения в потенциале

Использование Гауссовой огибающей являлось основой для приближенного описания, применяемого к дихотомическому мигающему передемпфированному рэтчет потенциалу [266]. Тот же подход был адаптирован на случай дискретной модели 3-х состояний, предложенной выше [306], преимущество которого состоит в том, что можно аналитически установить связь между скоростью, коэффициентом диффузии и параметрами системы, как показано в [336, 337].

Диффузия препятствует распространению желаемого переноса молекулярной системы, которая требует, чтобы груз был надежно доставлен в пункт назначения, т.е. за короткий промежуток времени. Большая диффузия приводит к большим отклонениям времени доставки, т.е. к малой надежности. Кроме того, в задачах сортировки диффузия оказывает влияние на эффективность механизма сортировки [278, 330].

Конкуренция между дрейфом v и диффузией D в задачах адвекция–диффузия часто выражается безразмерным числом – числом Пекле:

$$Pe = \frac{|v|L}{D} . \quad (3.248)$$

L – типичный масштаб длины, обозначающий в нашем случае длину отдельного элемента рэтчет потенциала. Чем больше число Пе-

кле, тем в большей степени общий (суммарный) дрейф превосходит диффузию. Точка, выше которой дрейф побеждает диффузию, определяет критическую длину $L_c = 2D/v$. Так как эта длина не должна превышать длины отдельного элемента рэтчет потенциала a , то числа Пекле не должны быть меньше 2.

Для последовательного объяснения эволюции огибающей рассмотрим вначале подход градиентного разложения:

$$P_\sigma(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_\sigma^n(x) \partial_x^n \mathcal{P}(x/\lambda, t). \quad (3.249)$$

Независящие от времени функции $p_\sigma^n(x)$ отражают периодичность потенциалов, тогда как функция $\mathcal{P}(x/\lambda, t)$ описывает огибающую, которая эволюционирует во времени в некотором грубом масштабе $\lambda \gg L$ (см. рис. 3.71). Улучшенная структура точного решения, которая имеет четкие изгибы, объясняется производными огибающей более высокого порядка $\partial_x^n \mathcal{P}(x/\lambda, t)$.

Эволюция огибающей в грубом масштабе λ описывается эффективным УФП:

$$\partial_t \mathcal{P}(x/\lambda, t) = \partial_x (v - D \partial_x) \mathcal{P}(x/\lambda, t), \quad (3.250)$$

которое справедливо только в приближенном смысле по степеням $1/\lambda$. Параметры v и D обозначают скорость дрейфа и коэффициент диффузии расширяющегося Гауссиана. Соотношение между ними и выходной динамикой устанавливается с помощью подстановки приближения (3.249) в основное динамическое уравнение – управляющее уравнение (3.244).

Эту связь можно получить, используя следующее разложение:

$$P(x, \sigma, t) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)}(x, \sigma) \partial_x^n \mathcal{P}(x/\lambda, t). \quad (3.251)$$

Данное разложение состоит из бесконечного набора периодических функций $p^{(n)}$ периода L . Члены ряда с малым n описывают гладкие компоненты и, следовательно, получаем только первые функции $p^{(0)}$, $p^{(1)}$ и $p^{(2)}$, которые используются в описании огибающей. Действительно, приравнивая члены порядка $1/\lambda^n$, имеем

$$[W + \Gamma] p^{(0)} = 0, \quad (3.252)$$

$$[W + \Gamma] p^{(1)} = -(v - \hat{V}) p^{(0)}, \quad (3.253)$$

$$[W + \Gamma] p^{(2)} = (D - \hat{T}) p^{(0)} - (v - \hat{V}) p^{(1)}, \quad (3.254)$$

где \hat{V} и \hat{T} – два оператора (матрицы), включающие в себя скорости $w(n \rightarrow m, \sigma)$ и γ (см. [306]). Уравнение (3.252) показывает, что $p^{(0)}$ представляет собой стационарное решение управляющего уравнения (3.244). Записав след матрицы и выполнив соответствующую нормировку,

$$\text{Tr}\{p^{(n)}\} = \sum_{\sigma=-1}^{+1} \sum_{i=1}^3 p^{(n)}(i, \sigma) = \delta_{n,0}, \quad (3.255)$$

получаем искомые соотношения для эффективных коэффициентов:

$$v = \text{Tr}\{\hat{V} p^{(0)}\}, \quad (3.256)$$

$$D = \text{Tr}\{\hat{T} p^{(0)}\} - \text{Tr}\{\hat{V} p^{(1)}\}. \quad (3.257)$$

То обстоятельство, что функция $p^{(2)}$ не используется в проведенных действиях, становится понятным, если записать след матрицы (3.245)–(3.247). Так как оператор $[W + \Gamma]$ имеет свойство сохранения абсолютного значения, след в левых частях стремится к нулю одинаковым образом. Значения функций $p^{(0)}$ и $p^{(1)}$ находятся путем решения соответственно уравнений (3.252) и (3.253). Выражения (3.256) и (3.257) можно получить, проведя все необходимые действия в рамках линейной алгебры. Их можно осуществить с помощью компьютерной программы алгебраических вычислений. Получающиеся в результате выражения имеют достаточно длинную форму записи и не могут быть упрощены. Однако их особенность состоит в том, что с аналитической точки зрения они являются точными и явными. В частности, можно вычислить точные пределы.

Диффузия или дрейф. Опуская детали аналогичных вычислений, приведем конечные выражения для скорости v и коэффициента диффузии D [306]:

$$v = \frac{1}{3} \sum_{\sigma=\pm} \sum_{i=1,2,3} [W_{\sigma}(i \rightarrow i + 1) - W_{\sigma}(i \rightarrow i - 1)] p_{\sigma}^0(i), \quad (3.258)$$

$$D = \frac{1}{6} \sum_{\sigma=\pm} \sum_{i=1,2,3} [W_{\sigma}(i \rightarrow i + 1) + W_{\sigma}(i \rightarrow i - 1)] p_{\sigma}^0(i) - \frac{1}{3} \sum_{\sigma=\pm} \sum_{i=1,2,3} [W_{\sigma}(i \rightarrow i + 1) - W_{\sigma}(i \rightarrow i - 1)] p_{\sigma}^1(i) \quad (3.259)$$

Отметим, что скорость v идентична стационарному потоку J_0 , что можно было ожидать. Стационарное решение $p_\sigma^0(i)$, так же как $p_\sigma^1(i)$, можно получить, если решить две системы линейных уравнений. Необходимые алгебраические действия выполнялись с помощью вычислительной алгебраической программы (maple). Явная формула для $v(k, \gamma)$ и $D(k, \gamma)$ состоит из множества членов. Тем не менее, ценность данной модельной системы состоит в том, что результаты все же остаются аналитическими.

Кроме зависимости скорости дрейфа как функции скорости переключений γ , показанной на рис. 3.70, на рис. 3.72 приведен график зависимости коэффициента диффузии $D(k, \gamma)$ для той же области значений γ и параметра k .

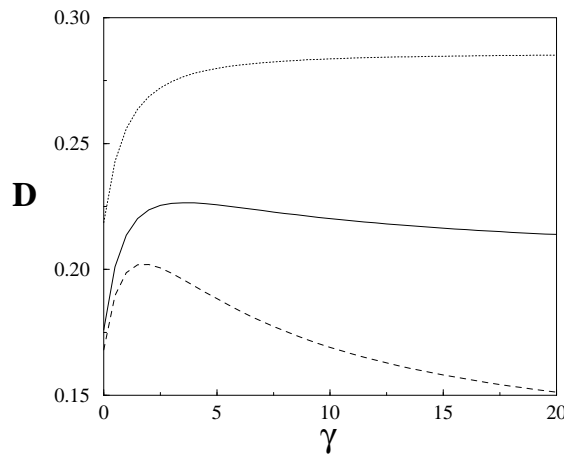


Рис. 3.72. Коэффициент диффузии огибающей в зависимости от скорости переключений γ для трех различных значений скорости перехода: $k = 0.1$ (пунктир), $k = 0.2$ (сплошная линия), $k = 0.4$ (точечная линия); отметим, что стационарный поток и коэффициент диффузии одновременно демонстрируют пик при $\gamma \approx 2$

Из рисунка видно, что коэффициент диффузии становится независимым от γ при $k = 1$, что является очевидным, так как соответствует наличию плоских потенциалов в каждом из двух чередующихся случаев. Здесь значение $D(k = 1, \gamma) = 1/3$. С ростом γ диффузия становится все более и более ограниченной, так как часто включаемый потенциал всегда стягивает распределение в минимуме. При очень малых k , т.е. для случаев довольно крутых

наклонов, локальный максимум возникает при отличных от нуля γ . Если рассмотреть этот результат в контексте задачи эффективной сортировки, то условие максимального потока при $k \approx 0.2$ и $\gamma \approx 3$ связано, к сожалению, с довольно высокой диффузией. Действительно, максимальное абсолютное значение v и относительный максимум D почти совпадают.

На рис. 3.73 приведены соответствующие числа Пекле, Pe .

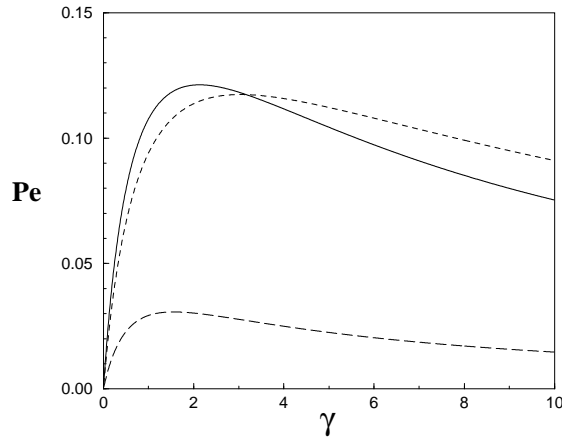


Рис. 3.73. Число Пекле, Pe , для мигающего потенциала при изменении скорости "мигания" γ для трех различных значений параметра асимметрии: $k = 0.1$ (пунктир), $k = 0.2$ (сплошная линия) и $k = 0.5$ (длинный пунктир)

Видно, что числа Пекле никогда не достигают значений порядка 1. Этот основной пример ясно показывает, что эффекты диффузии нельзя не учитывать. Отметим, что тот же самый качественный результат был получен при анализе дискретного качающегося рэтчет потенциала при добавлении соответствующих скоростей в управляющее уравнение.

Таким образом, общая особенность стохастического движения в рэтчет потенциалах состоит в том, что максимальный дрейф связан с довольно высокой диффузией [306]. Ограничение, накладываемое диффузией на эффективность переноса, можно исследовать количественно, используя безразмерное число Пекле.

3.4.8 Среды с пилообразной зависимостью потенциала

В предыдущем подразделе рассматривался отдельный зубец пилообразного потенциала с периодическими граничными условиями. Очевидно, подобные типы моделей описывают также стационарные потоки в ландшафтах потенциала, состоящих из множества зубцов, которые совершают когерентные колебания между двумя состояниями. В любом месте ландшафта потенциал находится либо в состоянии "включен", либо "выключен". Следовательно, задавая отдельный зубец, индивидуальный номер его состояния есть σ_i , где i – положение отдельного зубца. Предыдущая модель предполагает, что $\sigma_i = \sigma_j$ для произвольных i, j . Эта ситуация называется коррелированным рэтчетом.

Перейдем от случая отдельного зубца к рассмотрению цепочки, состоящей из множества зубцов. Возможный способ обобщения данной проблемы состоит в учете нарушений периодической компоненты цепочки зубцов [266]. Другой подход предполагает различные пространственные корреляции между состояниями соседних зубцов [334]. Возможными предельными случаями являются

- (1) коррелированные состояния: $\sigma_{i+1} = \sigma_i$ ($\langle \sigma_{i+1} \sigma_i \rangle = 1$);
- (2) анти-коррелированные состояния: $\sigma_{i+1} = -\sigma_i$ ($\langle \sigma_{i+1} \sigma_i \rangle = -1$);
- (3) некоррелированные состояния: $\langle \sigma_{i+1} \sigma_i \rangle = 0$.

Угловые скобки обозначают усреднение по дихотомическому шуму. Случай (1) соответствует когерентному переключению всех сегментов, как обсуждалось ранее. В анти-коррелированном случае (2) цепочка вновь принимает только два состояния. Действительно, потенциал имеет период двух зубцов. Например, в первом состоянии левый зубец переключается в состояние "включен", а правый – в состояние "выключен". Соответственно во втором состоянии правый находится в состоянии "включен", а левый – в состоянии "выключен".

В сравнении с предыдущими исследованиями, некоррелированный случай (3) является качественно новой ситуацией. Переключение каждого зубца происходит независимо от его соседа, как показано на рис. 3.74.

Как описано ниже [334], анализ новых ситуаций проводится аналогичным образом и его можно свести к рассмотрению отдельного зубца. В анти-корреляционном случае этот способ дает точный результат. Для анализа некоррелированного случая используется

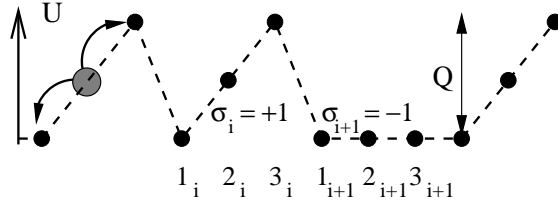


Рис. 3.74. В некоррелированном потенциале каждый зубец i переключается в состояния “включен” ($\sigma_i = +1$) и “выключен” ($\sigma_i = -1$) независимо от своих соседей. Точками схематически показаны три уровня энергии дискретной модели

приближение среднего поля. Новым пунктом в данном исследовании являются соответствующая формулировка граничных условий, которые устанавливают связь между левой и правой частями зубца, и используемое решение стационарного управляющего уравнения. Теперь это решение зависит от правил переключений, выбранных соответствующими состояниями $\sigma_{i\pm 1}$ соседних зубцов.

В анти-коррелированном случае необходимо применить антисимметричные граничные условия. Если i -ый зубец находится в состоянии “включен”, то соседний зубец – в состоянии “выключен”, и наоборот. Это означает, что потоки вероятностей при $\sigma_i = 1$ должны быть связаны с потоками при $\sigma_{i\pm 1} = -1$. Получается простая картина для одного зубца, направленные в сторону потоки являются входными потоками на другом конце зубца, но в состояние с другим σ_i .

Для некоррелированного случая баланс потоков вероятностей можно сформулировать аналогичным образом. Но теперь эти вероятностные потоки являются случайными и зависят от текущего состояния соседнего зубца. Обозначим через $J(\sigma_i - 1, \sigma_i)$ четыре возможных потока между состояниями $n = 3$ для $(i - 1)$ -го зубца и $n = 1$ i -го зубца, направленных от $i - 1 \rightarrow i$. Потоки $J(\sigma_i - 1, \sigma_i)$ определяются следующим образом:

$$J(\sigma_{i-1}, \sigma_i) = W(3 \rightarrow 1, \sigma_{i-1})P^{\bar{\sigma}_{i-1}}(3, \sigma_{i-1}) - W(1 \rightarrow 3, \sigma_{i-1})P^{\bar{\sigma}_i}(1, \sigma_i), \tag{3.260}$$

где $P^{\bar{\sigma}_i}(n, \sigma_i)$ есть функция вероятности для состояния (n, σ_i) i -го элемента, которая зависит от заданной среды $\bar{\sigma}_i = \{\sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}\}$.

Тогда общая формулировка граничного условия на правой стороне между зубцами с индексами i и $i + 1$ имеет вид:

$$J(\sigma_{i-1}, \sigma_i) = \frac{1}{2}(1 + \sigma_{i-1}\sigma_i)J(\sigma_i, \sigma_i) + \frac{1}{2}(1 - \sigma_{i-1}\sigma_i)J(-\sigma_i, \sigma_i). \quad (3.261)$$

В случае коррелированных элементов второй член стремится к нулю, тогда как для случая анти-коррелированных соседних зубцов пропадает первый член. В случае некоррелированной среды можно найти приближенное выражение путем усреднения, например, в предположении равной вероятности для состояний “включен” и “выключен” соседних элементов и без учета корреляции с зубцом.

Учет рассмотренных трех возможных состояний переключений завершает набор граничных условий. Для случаев (1) и (2) произведение заменяется соответственно на $+1$ и -1 . В обоих случаях зависимость от $\bar{\sigma}_i$ является формальной и определяется текущим состоянием σ_i . В некоррелированном состоянии усреднение проводится по возможным состояниям смежных зубцов. Произведение $\sigma_{i-1}\sigma_i$ в среднем стремится к нулю и зависимость от $\bar{\sigma}_i$ пропадает.

На рис. 3.75 показаны стационарные потоки для трех рассмотренных случаев при заданном $k = 0.2$ [334]. Для всех значений скорости переключений γ абсолютное значение потока для некоррелированной и анти-коррелированной ситуаций растет по сравнению с рассматриваемым обычно коррелированным случаем. Этот результат качественно остается справедливым для всех соответствующих

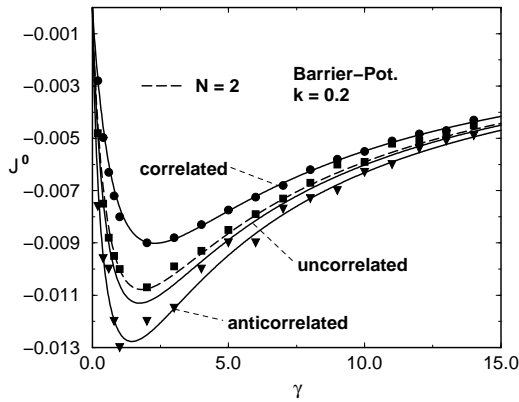


Рис. 3.75. Поток J в зависимости от скорости переключения γ ($k = 0.2$) для коррелированного, некоррелированного и анти-коррелированного потенциалов (сверху вниз). Линиями показаны результаты аналитических вычислений, описанных в тексте, точками — данные численного моделирования ($N = 10$)

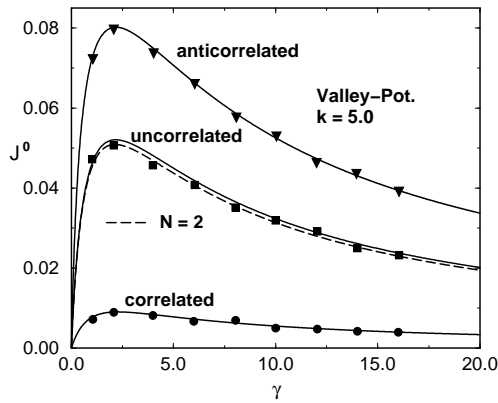


Рис. 3.76. Потоки частиц при изменении положения потенциала

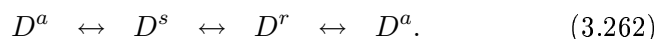
значений $0 < k < 1$. Большой по значению поток получается в результате следующего. В коррелированном случае диффузионный перенос частицы между различными сегментами происходит только тогда, когда потенциал находится в положении “выключен”. Частица должна оставаться в пределах одного сегмента по крайней мере в течение времени $\tau = \gamma^{-1}$ длительности состояния “включен”. Следовательно, процесс переноса прерывается. Наоборот, в других случаях перенос может происходить в любое время. В предельном анти-коррелированном случае частица способна достичь следующего, но одного сегмента в течение двух моментов переключения τ .

Значительное усиление потока частиц наблюдается в том случае, если изменяется знак потенциала [$U(x) \rightarrow -U(x)$] или, что эквивалентно, если произвести замену $k \rightarrow k^{-1}$. Графики потоков показаны на рис. 3.76. В коррелированной ситуации меняется только направление движения потоков, а его значение остается неизменным. В случаях некоррелированной и анти-коррелированной цепочек абсолютное значение потока значительно возрастает. В последнем случае поток увеличивается по величине почти на порядок. Это показано на рис. 3.76 при $k = 5.0$. Причиной подобного поведения является форма потенциала. Тогда как при обычной форме потенциала ($U > 0$) области постоянных плато (в отсутствие воздействия) заполнены отталкивающими сегментами, то при смене

положения потенциала на обратное ($U < 0$) эти области окружены притягивающими силами.

3.4.9 Формирование пространственных структур с помощью рэтчет потенциала

Три состояния рэтчет потенциала можно интерпретировать как конфигурации состояний молекулы, претерпевающей круговую химическую реакцию:



Для реализации мигания можно дополнительно предположить воздействие переключения внешних временных возмущений между двумя состояниями $\sigma(t) = \pm 1$ со средним временем τ .

В частности, будет показано, что эффект воздействия возмущения приводит к изменению во времени скоростей перехода между различными конфигурациями. Предположим вновь, что для двух состояний σ набор скоростей удовлетворяет закону действующих масс. Следовательно, в пределе адиабатически медленного воздействия ($\tau \rightarrow \infty$) реакция в обоих случаях достигает состояния равновесия, данное детальным балансом. В состоянии равновесия круговая реакция не имеет общего потока.

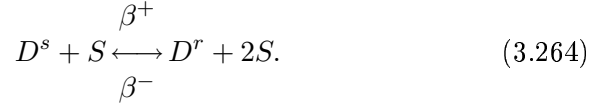
Однако, если скорости выбраны асимметрично, то круговая реакция представляет собой прототип рэтчета. При средних временах переключения τ индуцируется поток реакции, направленный по часовой стрелке. Как будет показано, этот круговой поток приводит к формированию неравновесных структур [339]. В отсутствие возмущения, $\tau \rightarrow \infty$, или, если переключения происходят бесконечно быстро, $\tau \rightarrow 0$, структура исчезает. Таким образом, предполагается, что рэтчет можно рассматривать в качестве источника формирования неравновесных структур [338], что будет показано далее.

Круговые химические реакции и рэтчет потенциал. Пусть в круговую реакцию будет включено еще одно инертное химическое препятствие S . D^a способно реагировать на препятствие S , формируя комплекс D^s , когда препятствие убрано с поверхности.



α^+ обозначает скорость прямой реакции, α^- – скорость обратной реакции.

Предполагается, что совокупность D^s является вторым состоянием частиц D . Если в течение своего случайного блуждания совокупность сталкивается с другим препятствием S , то комплекс распадается на частицу D в ее третьем состоянии D^r и помеху S , которая располагается в окрестности встречного препятствия,



Как и в первом случае (3.263), эта реакция может быть осуществлена и в обратном направлении. β^+ и β^- обозначают соответственно скорости в прямом и обратном направлениях.

На последнем этапе частицы, находящиеся в состоянии D^r , возвращаются вновь в состояние D^a с некоторой скоростью γ^+ и становятся вновь активными. Скорость соответствующей обратной реакции есть γ^- .



Общее число N реагентов D и M препятствий S сохраняется. Обозначая прописными буквами плотности реагентов D и препятствий S , получаем следующие уравнения:

$$\frac{1}{A} \int_A dA (d^a + d^s + d^r) = 1; \quad \frac{1}{A} \int_A dA (s + d^s) = 1, \quad (3.266)$$

где $\int_A dA$ обозначает интеграл по поверхности A и суммарные плотности нормируются на 1.

Внешнее воздействие: рэтчет потенциал. В данном подразделе мы упростим задачу, положив $s = \text{const}$. Пусть $\sigma(t)$ представляет собой дихотомический марковский процесс. Предположим, что все прямые и обратные скорости зависят от текущей реализации двух возможных значений σ . Для каждого значения σ можно записать три кинетических уравнения для системы реакции:

$$\begin{aligned}
\dot{d}_\sigma^a &= -(\alpha_\sigma^+ s + \gamma_\sigma^- + \frac{1}{\tau}) d_\sigma^a + \alpha_\sigma^- d_\sigma^s + \gamma_\sigma^+ d_\sigma^r + \frac{1}{\tau} d_{-\sigma}^a, \\
\dot{d}_\sigma^s &= \alpha_\sigma^+ s d_\sigma^a - (\alpha_\sigma^- + \beta_\sigma^+ s - \frac{1}{\tau}) d_\sigma^s + \beta_\sigma^- s^2 d_\sigma^r + \frac{1}{\tau} d_{-\sigma}^s, \\
\dot{d}_\sigma^r &= \gamma_\sigma^- s d_\sigma^a + \beta_\sigma^+ s d_\sigma^s - (\beta_\sigma^- s^2 + \gamma_\sigma^+ + \frac{1}{\tau}) d_\sigma^r + \frac{1}{\tau} d_{-\sigma}^r.
\end{aligned} \tag{3.267}$$

Здесь $d_\sigma^{a,s,r}$ – плотности для трех состояний D и $\alpha_\sigma, \beta_\sigma, \gamma_\sigma$ – скорости для заданного значения σ . Для константы s систему (3.267) можно решить аналитически в стационарном пределе после уравнений (3.244) и (3.247). Поток определяется следующим выражением

$$J = \langle \alpha_\sigma^+ s d_\sigma^a - \alpha_\sigma^- d_\sigma^s \rangle = \langle \beta_\sigma^+ s d_\sigma^s - \beta_\sigma^- s^2 d_\sigma^r \rangle = \langle \gamma_\sigma^+ d_\sigma^r - \gamma_\sigma^- d_\sigma^a \rangle, \tag{3.268}$$

в которое должны быть введены стационарные плотности, а $\langle \dots \rangle$ означает суммирование по σ .

Поток J показан на рис. 3.77 в зависимости от времени переключения τ для трех плотностей помех s . Можно видеть колокообразную зависимость относительно τ . Потоки исчезают в случае медленных и быстрых воздействий. Таким образом, при оптимальном значении τ на химическую реакцию оказывается максимальное воздействие со стороны внешних возмущений с целью приближения к неравновесному состоянию. Происходит стационарный

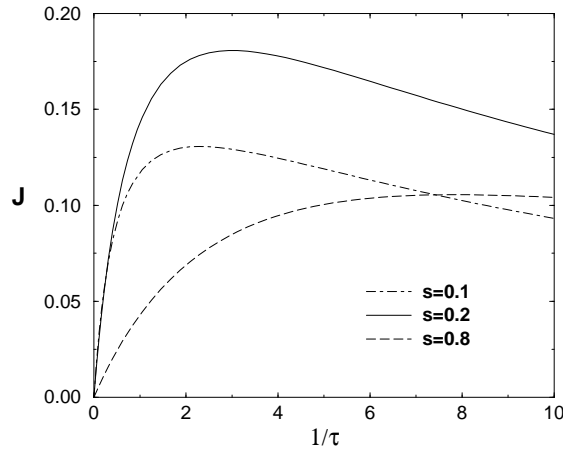
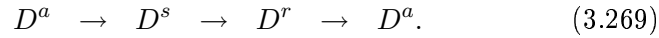


Рис. 3.77. Стационарный поток в пространстве конфигураций в зависимости от среднего времени переключения τ для трех значений плотности помех s , $\alpha_{+1}^+ = \beta_{+1}^+ = 10$ и $\alpha_{-1}^+ = \gamma_{-1}^+ = 10$, другие параметры: $\alpha_\sigma^+ = 1/\alpha_\sigma^-$; $\beta_\sigma^+ = 1/\beta_\sigma^-$; $\gamma_\sigma^+ = 1/\gamma_\sigma^- = 1/(\alpha_\sigma^+ \beta_\sigma^+)$

необратимый обмен



Эффективная скорость реакций пропорциональна потоку J .

Распределенная система: формирование неравновесных структур. Назовем D молекулы реагентами, которые могут совершать диффузионное движение на двумерной плоскости. Рассматривая реагенты как броуновские частицы, их движение можно описать с помощью уравнений Ланжевена [340, 341]:

$$\dot{x}_i = \sqrt{2\varepsilon} \xi_i^x, \quad \dot{y}_i = \sqrt{2\varepsilon} \xi_i^y. \quad (3.270)$$

$\xi_i^{x,y}$ – источники гауссовского белого шума, $i = 1, \dots, N$ обозначает число реагентов. Эти уравнения моделируют диффузионное движение, где ε представляет собой коэффициент диффузии реагентов D , который в численных экспериментах фиксируется $\varepsilon = 10^4$.

В то время как движение реагентов D непрерывно в пространстве, положения препятствий S ограничены решеткой, сторона которой имеет единичную длину $\Delta L = 1$; решетка имеет размер 200×200 и периодические граничные условия. Каждая ячейка этой решетки может содержать одно или ни одного препятствия, что означает, что препятствия имеют объем по размеру ячейки. На каждом временном шаге проверяется, в какую ячейку попала частица: содержащую помеху или нет. Если частица находится в ячейке с помехой, то происходит реакция, нуждающаяся в помехе. В противном случае имеет место реакция, которая не нуждается в помехе.

Первоначально препятствия, так же как и реагенты, распределены на поверхности случайным образом с равномерной вероятностью. Приложение переключений во времени дихотомического сигнала σ приводит к возникновению эффективного прямого потока координаты реакции. Система демонстрирует процесс формирования кластеров препятствий S в определенной области значений времени переключения τ . Последовательность моментальных снимков, приведенная на рис. 3.78, иллюстрирует данный эффект для значения времени переключения $\tau = 1.25$. Первый снимок (верхнее левое изображение) был сделан спустя время $t = 500$, которое соответствует 100 000 итераций, и отражает начало формирования плотных областей. Следующие изображения иллюстрируют

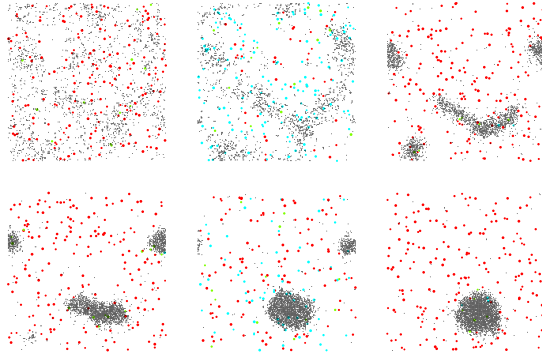


Рис. 3.78. Временная последовательность выходных моментальных снимков, полученная численным моделированием при $\tau = 1.25$. Черными точками показаны положения препятствий S . Другие параметры: $\varepsilon = 10^4$ и скорости, как на рис. 3.77. От верхнего левого снимка к нижнему правому: $t = 500, 1000, 2000, 4000, 8000, 9000$. При $t = 9000$ возникает единственный устойчивый кластер

процесс эволюции системы от наличия более плотных областей до образования нескольких кластеров, который заканчивается формированием одного единственного сферического кластера спустя время $t = 9000$.

Результаты численного моделирования для различных времен переключения τ демонстрируют, что процесс формирования кластеров препятствий наиболее ярко выражен для максимального потока J при некотором оптимальном значении времени переключения. Кластеры не появляются в случае исчезающе малых потоков при очень больших и очень малых значениях времен переключения τ .

Потенциалы, создающие структуры. Начало процессу формирования структур дает неравновесный поток между различными состояниями реагентов D . Для доказательства данного факта, рассмотрим упрощенную модель (3.269), включающую диффузию. Для данной системы анализируется направленный поток с прямыми скоростями $\alpha^+, \beta^+, \gamma^+ \propto J(\tau)$ и с исчезающе малыми обратными скоростями $\alpha^- = \beta^- = \gamma^- = 0$. Добавление диффузии реагентов D и препятствий S дает

$$\begin{aligned} \dot{d}^a &= \gamma^+ d^r - \alpha^+ s d^a + \varepsilon \Delta d^a, \quad \dot{d}^s = \alpha^+ s d^a - \beta^+ s d^s + \varepsilon \Delta d^s, \\ \dot{d}^r &= \beta^+ s d^s - \gamma^+ d^r + \varepsilon \Delta d^r, \quad \dot{s} = \beta^+ s d^s - \alpha^+ s d^a + \varepsilon_0 \varepsilon \Delta s, \end{aligned} \quad (3.271)$$

где $\varepsilon_0 \ll 1$ есть отношение между степенями подвижности реагентов и препятствий (малая подвижность S имитирует конечный объем препятствий).

Уравнения (3.271) имеют максимум три однородных решения. Обычный анализ устойчивости доказывает либо моностабильность положительных стационарных решений $s_{\text{stat}} > 0$ и $d_{\text{stat}}^{a,s,r} > 0$, либо бистабильность с дополнительным устойчивым состоянием при $s_{\text{stat}} = 0$.

Устойчивое состояние свободных препятствий с отличной от нуля плотностью $s_{\text{stat}} \neq 0$ можно дестабилизировать с помощью диффузии реагентов D в случае ненулевого потока J . Действительно, предполагая наличие неоднородных возмущений, можно доказать неустойчивость данного состояния при изменении $J/(\varepsilon * k^2)$, где k есть волновое число неоднородных возмущений. Интересно заметить, что область неустойчивости увеличивается, если поток J (3.268) реакции с тремя состояниями возрастает.

Аналитические результаты анализа устойчивости представлены на рис. 3.79. Приведенный график иллюстрирует зависимость критических значений $\varepsilon_0^{\text{crit}}$ (отношения подвижности реагентов и препятствий) от $J/(\varepsilon * k^2)$. Ниже построенной кривой система усиливает неоднородные возмущения. Таким образом, при конечном заданном ε_0 необходим сверхкритический поток J реакции для $\varepsilon * k^2 > 0$.

С увеличением τ от первого критического значения индуцируется требуемый поток J . Выше следующего критического τ поток вновь становится небольшим и никаких структур не возникает. При оптимальном сверхкритическом J довольно быстро возникают слабо неоднородные распределения с конечными волновыми числами (см. рис. 3.78). Позже, за пределами линейного анализа устойчивости, конкуренция между возникающими кластерами приводит к установлению небольшого числа более крупных кластеров, и в конечном итоге система приходит к одному большому кластеру, состоящему из всех препятствий S . В этой области зависимостью скоростей от s нельзя пренебречь, как было сделано в данном приближении.

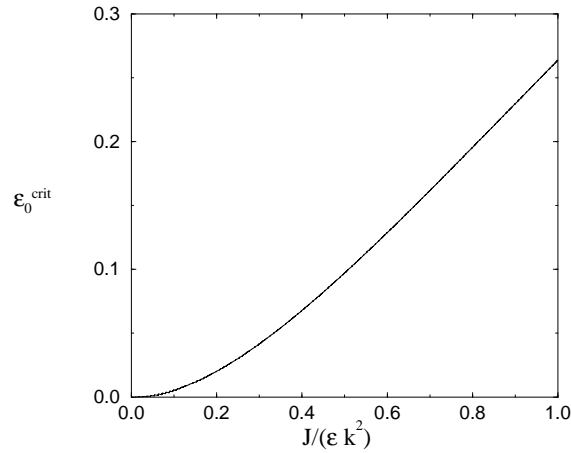


Рис. 3.79. Результаты анализа устойчивости ненулевого устойчивого однородного состояния уравнения (3.271). Ниже показанных критических значений ϵ_0 неоднородные возмущения усиливаются. Скорости $\alpha^+ = J\alpha^0$, $\beta^+ = J\beta^0$ и $\gamma^+ = J\gamma^0$, где $\alpha^0 = \beta^0 = \gamma^0 = 1$

3.4.10 Заключение

Кроме множества возможных биофизических приложений, приведенные в данном разделе исследования индуцированного шумом движения представляют собой фундаментальные проблемы статистической физики. Нарушение детального баланса в кинетических уравнениях особенно понятно описывается в рамках данных исследований. Представленные выше модели позволяют провести детальное рассмотрение перехода от равновесного состояния к неравновесному и процесса возникновения минимального порядка.

Наиболее перспективные исследования в этом направлении касаются связи и сочетания с другими нелинейными стохастическими явлениями, изученными в данном разделе. Конечно, эффект синхронизации как вращения фаз можно интерпретировать в виде упорядоченного потока в периодических структурах и охарактеризовать с помощью чисел Пекле [342]. Исследования, начатые в работах [343–346], показали взаимосвязь между индуцированными шумом фазовыми переходами и рэтчет-эффектом, как это было проделано в случае стохастического резонанса (см. подраздел 3.1.6) [135]. Подобная связь между различными индуцированными шумом явлениями будет способствовать получению множества интересных и удивительных результатов в будущем и прольет новый

свет на исключительную роль шума в нелинейной и неравновесной динамике.

Литература

1. Р.Л. Стратонович, *Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике* (Сов. радио, Москва 1961)
2. S.M. Rytov, Ya.A. Kravtsov, V.I. Tatarskii, *Principles of Statistical Radiophysics* (Springer-Verlag, Berlin, 1987).
3. А.Н. Малахов, *Флуктуации в автоколебательных системах* (Наука, Москва 1968).
4. П.С. Ланда, А.А. Заикин, *ЖЭТФ* **84**, 197 (1997).
5. W. Horsthemke, R. Lefever, *Noise-induced Transitions. Theory and Applications in Physics, Chemistry and Biology* (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1984).
6. R. Benzi, A. Sutera, A. Vulpiani, *J Phys. A: Math. Gen.* **14**, L453 (1981).
7. R. Benzi, G. Parisi, A. Sutera, A. Vulpiani, *Tellus* **34**, 10 (1982).
8. С. Nicolis, *Tellus* **34**, 1 (1982).
9. В.С. Анищенко, А.Б. Нейман, Ф. Мосс, Л. Шиманский-Гайер, *УФН* **169**, 7 (1999).
10. F. Moss, D. Pierson, D. O'Gorman, *Int. J. Bif. Chaos.* **4**, 1383 (1994).
11. A. Bulsara A., L. Gammaitoni, *Physics Today* **49** 36 (1996).
12. L. Gammaitoni, P. Hänggi, P. Jung, F. Marchesoni, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 223 (1998).
13. F. Moss, P.V.E. McClintock (eds.), *Noise in Nonlinear Dynamical Systems* Vols. 1–3 (Cambridge University Press, Cambridge 1990).
14. Proc. NATO Adv. Res. Workshop on Stochastic Resonance in Physics and Biology, *J. Stat. Phys.* **70** (1993).
15. Proc. Int. Workshop on Fluctuations in Physics and Biology: Stochastic Resonance, Signal Processing and Related Phenomena (1995). *Il Nuovo Cimento D* **17**.
16. L. Schimansky-Geier and T. Pöschel (eds.), *Stochastic Dynamics*, Ser. "Lecture Notes on Physics", issue 484 (Springer, Berlin, Heidelberg, 1997).
17. J.B. Kadtko, and A.R. Bulsara (Eds.), *Applied Nonlinear Dynamics and Stochastic Systems Near the Millennium* (AIP Press, 151, 1997).
18. J. A. Freund and T. Pöschel (eds.), *Stochastic Processes in Physics Chemistry and Biology*, Ser. "Lecture Notes on Physics", issue 557 (Springer, Berlin, Heidelberg, 1997).
19. S. Fauve, F. Heslot, *Phys. Lett. A* **97**, 5 (1983).
20. B. McNamara, K. Wiesenfeld, R. Roy, *Phys. Rev. Lett.* **60** 2626 (1988).
21. A.N. Grigorenko, P.I. Nikitin, A.N. Slavina, P.Y. Zhou, *J. Appl. Phys.* **76**, 6335 (1994).
22. M.I. Dykman, A.L. Velikovich, G.P. Golubev, D.G. Luchinsky, S.V. Tsupikov, *JETP Lett.* **53**, 193 (1991).
23. L. Gammaitoni, M. Martinelli, L. Pardi, S. Santucci, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 1799 (1991).
24. A. Simon, A. Libchaber, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 3375 (1992).
25. M.L. Spano, M. Wun-Fogle, W.L. Ditto, *Phys. Rev. A* **46**, R5253 (1992).
26. R.N. Mantegna, B. Spagnolo, *Phys. Rev. E* **49**, R1792 (1994).
27. A.D. Hibbs, E.W. Jacobs, A.R. Bulsara, J.J. Bekkedahl, F. Moss, *IL Nuovo Cimento* **17**, 811 (1995).

28. A. Perez-Madrid, J.M. Rubi, Phys. Rev. E **51**, 4159 (1995).
29. Z. Neda, Phys Lett A **210**, 125 (1996).
30. А.Е. Дубинов, К.Е. Михеев, И.Б. Нижегородцев, Изв. АН. Сер. Физика **60**, 76 (1996).
31. D.E. Leonard, L.E. Reichl, Phys. Rev. E **49**, 1734 (1994).
32. M.I. Dykman, T. Horita, J. Ross, J. Chem. Phys. **103**, 966 (1995).
33. W. Hohmann, J. Muller, F.W. Schneider, J. Phys. Chem. **100**, 5388 (1996).
34. J. Douglass, L. Wilkens, E. Pantazelou, F. Moss, Nature **365**, 337 (1993).
35. J.E. Levin, J.P. Miller, Nature **380**, 165 (1996).
36. J.J. Collins, T.T. Imhoff, P. Grigg, J. Neurophysiol. **76**, 642 (1996).
37. S. Bezrukov, I. Vodyanoy, Nature **378**, 362 (1995).
38. J.J. Collins, T.T. Imhoff, P. Grigg, Nature **383**, 770 (1996).
39. D.F. Russell, L.A. Wilkens, F. Moss, Nature **402**, 291 (1999).
40. J. A. Freund, J. Kienert, L. Schimansky-Geier, B. Beisner, A. Neiman, D. F. Russell, T. Yakusheva, and F. Moss, Phys. Rev. E **63**, 031910 (2001).
41. R.F. Fox, Phys. Rev. A **39**, 4148 (1989).
42. N.G. Stocks, N.D. Stein, P.V.E. McClintock, J. Phys. A **26**, L385 (1993).
43. Z. Gingl, L.B. Kiss, F. Moss, Europhys. Lett. **29**, 191 (1995).
44. P. Jung, Phys. Lett. A. **207**, 93 (1995).
45. S.M. Bezrukov, I. Vodyanoy, Nature **385**, 319 (1997).
46. V.S. Anishchenko, A.B. Neiman, M.A. Safonova, J. Stat. Phys. **70**, 183 (1993).
47. V.S. Anishchenko, M.A. Safonova, L.O. Chua, Int. J. Bif. Chaos **2**, 397 (1992).
48. H.A. Kramers, Physica **7**, 284 (1940).
49. P. Hänggi, P. Talkner, and M. Borkovec, Rev. Mod. Phys. **62**, 251 (1990).
50. P. Jung, P. Hänggi, Phys. Rev. A **144**, 8032 (1991).
51. P. Jung, Phys. Rep. **234** (1993).
52. T. Zhou, F. Moss, P. Jung, Phys. Rev. A **42**, 3161 (1990).
53. L. Gammaitoni, F. Marchesoni, E. Menichella-Saetta, S. Santucci, Phys. Rev. Lett. **62**, 349 (1989).
54. L. Gammaitoni, F. Marchesoni, S. Santucci, Phys. Rev. Lett. **74**, 1052 (1995).
55. A. Neiman, L. Schimansky-Geier, Phys. Rev. Lett. **72**, 2988 (1994).
56. P. Hänggi, P. Jung, C. Zerbe, F. Moss, J. Stat. Phys. **70**, 25 (1993).
57. A. Neiman, W. Sung, Phys. Lett. A **224**, 341 (1996).
58. F. Moss, *Stochastic Resonance: From the Ice Ages to the Monkey Ear* In: Contemporary Problems in Statistical Physics, ed. by G.H. Weiss, pp. 205–253 (SIAM, Philadelphia, 1994).
59. P. Jung, P. Hänggi, Phys. Rev. A **41**, 2977 (1990).
60. P. Talkner, New J. Phys. **1**, 4 (1999).
61. B. McNamara, K. Wiesenfeld, Phys. Rev. A **39**, 4854 (1989).
62. L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *Statistical Physics* Part 1. (Pergamon Press, Oxford, 1980).
63. P. Hänggi, H. Thomas, Phys. Rep. **88**, 207 (1982).
64. М.И. Дыкман и др., ЖЭТФ **52**, 141 (1990).
65. M.I. Dykman, et al., Phys. Lett. A **180**, 332 (1993).
66. R. Kubo, M. Toda, and N. Hashitsume, *Statistical Physics II*, Springer Series in Solid State Sciences, Vol. 31, (Springer, Berlin, New York, 1985).
67. H. Risken, *The Fokker-Plank Equation* (Springer, Berlin, Heidelberg, 1988).
68. P. Jung, U. Behn, E. Pantazelou, and F. Moss, Phys. Rev. **A46**, R1709 (1992).
69. A. Bulsara and G. Schnera, Phys. Rev. **E47**, 3734 (1993).
70. A. Neiman and L. Schimansky-Geier, Phys. Lett. **A197**, 379 (1995).
71. M. Morillo, J. Gómez-Ordoñez, and J. M. Casado, Phys. Rev. **E52**, 316 (1995).
72. F. Marchesoni, L. Gammaitoni, and A. Bulsara, Phys. Rev. Lett. **76**, 2609 (1996).

73. I. Dikshtein, A. Neiman, and L. Schimansky-Geier, *J. of Magn. and Magn. Mat.* **188**, 301 (1998).
74. R. Rozenfeld and L. Schimansky-Geier, *Chaos, Solitons & Fractals* **11**, 1937 (2000).
75. J. Lindner, B. Meadows, W. Ditto, M. Inchiosa, and A. Bulsara, *Phys. Rev.-Lett.* **75**, 3 (1995); *Phys. Rev. E* **53**, 2081 (1996).
76. L. Schimansky-Geier and U. Siewert, in [16].
77. U. Siewert and L. Schimansky-Geier, *Phys. Rev. E* **58**, 2843 (1998).
78. R. J. Glauber, *J. Math. Phys.* **4**, 294 (1963).
79. J.J. Brey, and A. Prados, *Phys. Lett.* **A216**, 240 (1996).
80. Z. Nédá, *Phys. Rev.* **E51**, 5315 (1995).
81. Kwan-tai Leung, Z.Nédá, *Phys. Rev. E* **59**, 2730 (1999).
82. P. Ruzsyczynski, Diploma thesis, Humboldt-University at Berlin (1999).
83. V.G. Makhankov, *Phys. Rep.* **35**, 1 (1978).
84. J.F. Currie, J.A. Krumhansl, A.R. Bishop and S.F. Trullinger, *Phys. Rev. B* **22**, 477 (1980).
85. W. Ebeling und R. Feistel, *Physik der Selbstorganisation und Evolution*, (Akademie-Verlag, Berlin 1982).
86. R. Rajaraman, *Solitons and Instantons. An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory*, (North Holland, Amsterdam 1982).
87. R.K. Dold, J.C. Ellbeck, J.D. Gibson, H.C. Morris, *Solitons and Nonlinear Wave Equations* (Academic Press, London, 1989).
88. H. Malchow, L. Schimansky-Geier, *Noise and Diffusion in Bistable Nonequilibrium Systems*, Teubner Texte zur Physik 5 (Teubner Verlag, Leipzig 1986).
89. A.S. Mikhailov *Foundations on Synergetics I* (Springer, Berlin-Heidelberg, 1989).
90. F. Schlögl, *Z. Phys.* **253**, 147 (1972).
91. E. W. Montroll, in *Statistical Mechanics*, ed. by S.A. Rice, K.F. Freed, and J.C. Light (Chicago-University Press, Chicago, 1972).
92. A.S. Mikhailov, L. Schimansky-Geier, W. Ebeling, *Phys. Lett. A* **96**, 453 (1983).
93. L. Schimansky-Geier, A.S. Mikhailov, W. Ebeling, *Ann. Phys.* **40**, 277 (1983).
94. L. Schimansky-Geier and Ch. Zülicke, *Z. Phys. B* **82**, 157 (1991).
95. J. Garcia-Ojalvo and J.M. Sancho, *Noise in Spatially Extended Systems* (Springer, New York, 1999).
96. I. Dikshtein and A. Neiman, *Bulletin of the American Physical Society, Series II*, **42**, 338 (1997).
97. I. Dikshtein, A. Neiman, and L. Schimansky-Geier, in: *Studies in Applied Electromagnetics and Mechanics*, ed. by V. Kose and J. Sievert (IOS Press, Amsterdam, 1998).
98. A.N. Grigorenko and P.I. Nikitin, *Applied Surface Science* **92**, 466 (1996).
99. А.Н. Григоренко, Г.В. Рошечкин, *ЖЭТФ* **112**, 628 (1997).
100. I. Dikshtein, A. Neiman and L. Schimansky-Geier, *Phys. Lett. A* **246**, 259 (1998).
101. P. Ruzsyczynski, L. Schimansky-Geier, I. Dikshtein *Europhys. J. B* **14**, 569 (2000).
102. J.A. Gonzales, B.A. Mello, L.I. Reyes, and L.E. Guerrero, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 1361 (1998).
103. K.A. Gorshkov, L.A. Ostrovsky, *Physica D* **3**, 428 (1981).
104. D.J. Kaup and A.C. Newell, *Proc. R. Soc. London* **A361**, 413 (1978); D.W. McLaughlin and A.C. Scott, *Phys. Rev. A* **18** 1652 (1978); F.G. Bass, Yu.S. Kivshar, V.V. Konotop and Ya.A. Sinitsyn, *Phys. Rep.* **157**, 63 (1988); Yu.S. Kivshar and B.A. Malomed, *Rev. Mod. Phys.* **61**, 763 (1989).

105. M. Büttiker, R. Landauer, Phys. Rev. A **23**, 1397 (1994).
106. F. Marchesoni, Phys. Rev. Lett. **73**, 2394 (1994).
107. A counter example in a conservative dynamics was reported by F. Marchesoni and L. Vazquez, Physica D **14**, 273 (1985).
108. A. Kulka, M. Bode, and H.-G. Purwins, Phys. Lett. A **203**, 33 (1995).
109. P. Landa and A. Zaikin, Phys. Rev. E **54**, 3535 (1996).
110. V. Berdichevsky, M. Gitterman, Phys. Rev. E **60**, 1494 (1999).
111. P.S. Landa, A.A. Zaikin, V.G. Ushakov, and J. Kurths, Phys. Rev. E **61**, 4809 (2000).
112. A.S. Mikhailov, Phys. Lett. A **73**, 143 (1979).
113. A.S. Mikhailov, Z. Phys. B **41**, 277 (1981).
114. J. García-Ojalvo, J.M. Sancho, and L. Ramirez-Piscina, Phys. Lett. A **168**, 35 (1992).
115. J. Garcia-Ojalvo, A. Hernández-Machado, and J.M. Sancho, Phys. Rev. Lett. **71**, 1542 (1993).
116. C. Van den Broeck, J. M. R. Parrondo, J. Amero and A. Hernández-Machado, Phys. Rev. E **49**, 2639 (1994).
117. C. Van den Broeck, J. M. R. Parrondo, and R. Toral, Phys. Rev. Lett **73**, 3395 (1994).
118. P. Jung, G. Mayer-Kress, Phys. Rev. Lett. **74**, 2130 (1995).
119. Ch. Kurrer and K. Schulten, Phys. Rev. E **51**, 6213 (1995).
120. J. García-Ojalvo, J. M. R. Parrondo, J. M. Sancho , and C. Van den Broeck, Phys. Rev. E **54**, 6918 (1996).
121. J. M. R. Parrondo, C. Van den Broeck C., J. Buceta, and E. Javier de la Rubia, Physica A **224**, 153 (1996).
122. C. Van den Broeck, J.M.R. Parrondo , R. Toral, and R. Kawai, Phys. Rev. E **55**, 4084 (1997).
123. R. Müller, K. Lippert, A. Kehhnel, and U. Behn, Phys. Rev. E **56**, 2658 (1997).
124. C. Van den Broeck, in [16].
125. S. Mangioni, R. Deza, H. S. Wio, and R. Toral, Phys. Rev. Lett. **79**, 2389 (1997).
126. P. S. Landa, A. A. Zaikin, and L. Schimansky-Geier, Chaos, Solitons & Fractals **9**, 1367 (1998).
127. A. Zaikin and L. Schimansky-Geier, Phys. Rev. E **58**, 4355 (1998).
128. A.A. Zaikin, J. García-Ojalvo and L. Schimansky-Geier, Phys. Rev. E **60**, R6275 (1999).
129. H. Hempel, L. Schimansky-Geier, and J. Garcia-Ojalvo Phys. Rev. Lett. **82**, 3713-3716 (1999).
130. S. Kadar, J. Wang, and K. Showalter, Nature **391**, 770 (1998); F. Moss, Nature **391**, 743 (1998).
131. P. Jung, A. Cornell-Bell, F. Moss, S. Kadar, J. Wang, and K. Showalter, *Chaos* **8**, 567 (1998).
132. J. Wang, S. Kadar, P. Jung, and K. Showalter, Phys. Rev. Lett. **82**, 855 (1999).
133. M. Löcher, D. Cigna, and E.R. Hunt, Phys. Rev. Lett. **80**, 5212 (1998).
134. I. Sendiña-Nadal, S. Alonso, V. Perez-Muñuzuri, M. Gomez-Gesteira, V. Perez-Villar, L. Ramirez-Piscina, J. Casademunt, J.M. Sancho, and F. Sagués. Phys. Rev. Lett. **84**, 2734 (2000).
135. A. Zaikin, J. Kurths and L. Schimansky-Geier, Phys. Rev. Lett. **85**, 227 (2000).
136. L.D. Landau, E.M. Lifschitz, *Theoretische Mechanik*, Lehrbuch zur Theoretischen Physik, Bd. I., (Akademie-Verlag, Berlin 1984).
137. A.A. Zaikin, K. Murali, and J. Kurths, Phys. Rev. E **63**, 020103R (2001).
138. M. Dykman et al., Il Nuovo Cimento D. **17** 661 (1995).

139. V.S. Anishchenko, A.B. Neiman, M.A. Safonova, I.A. Khovanov, In: *roc. of Euromech Colloquium on Chaos and Nonlinear Mechanics* ed. by T. Kapitaniak and J. Brindley (World Scientific, Singapore, 1995).
140. V.S. Anishchenko, *Dynamical Chaos – Models and Experiments* (World Scientific, Singapore 1995).
141. V.S. Anishchenko, M.A. Safonova, L.O. Chua, *Int. J. Bif. Chaos* **4**, 441 (1994).
142. W. Ebeling and L. Schimansky-Geier, in [13].
143. L. Schimansky-Geier, C. Zülicke, *Z. Phys. B* **79**, 451 (1990).
144. J.J. Hesse, L. Schimansky-Geier, *Z. Phys. B* **84**, 467 (1991).
145. M.I. Dykman, P.V.E. McClintock, N.D. Stein and N.G. Stocks, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 933 (1991).
146. M.I. Dykman, R. Mannella, P.V.E. McClintock, N.D. Stein and N.G. Stocks, *Phys. Rev. E* **47**, 3996 (1993).
147. S.J.B. Eincomb and A.J. McKane, *Phys. Rev. E* **49**, 259 (1994).
148. R. Bartussek, P. Hanggi, B. Lindner, and L. Schimansky-Geier *Physica D* **109**, 17 (1997).
149. J.J. Collins, C.C. Chow, T.T. Imhoff, *Phys. Rev. E* **52**, R3321 (1995).
150. A. Neiman, L. Schimansky-Geier, F. Moss, *Phys. Rev. E* **56**, R9 (1997).
151. L. Gammaitoni, M. Löcher, A. Bulsara, P. Hänggi and J. Neff , *Phys. Rev. Lett.* **82** , 4574 (1999).
152. M. Löcher , M. E. Inchiosa , J. Neff, A. Bulsara, K. Wiesenfeld, L. Gammaitoni , P. Hänggi and W. Ditto, *Phys. Rev. E* **62**, 317 (2000).
153. U. Zürcher and Ch. Doering, *Phys. Rev. E* **E47**, 3862 (1993).
154. C. Van den Broeck, *Phys. Rev. E* **E47** , 3862 (1993).
155. R. Rozenfeld, A. Neiman, L. Schimansky-Geier, *Phys. Rev. E* **62**, R3031 (2000).
156. A. Neiman, L. Schimansky-Geier, F. Moss, B. Shulgin and J. Collins, *Phys. Rev. E* **E60** , 284 (1999).
157. J. Freund, A. Neiman and L. Schimansky-Geier, *Europhys. Lett.* **50**, 8 (2000).
158. M.I. Dykman, D.G. Luchinsky, P.V.E. McClintock, N.D. Stein and N.G. Stocks, *Phys. Rev. A* **46**, 1713 (1992).
159. В.С. Анищенко, *Сложные колебания в простых системах* (Наука, Москва 1990).
160. Ю.И. Кифер, *Изв. АН СССР. Сер. Мат.* **38**, 1091 (1974).
161. Е.Б. Вуль, Я.Г. Синай, К.М. Ханин, *УМН* **39**, 3 (1984).
162. V.S. Anishchenko, W. Ebeling, *Z. Phys. B* **81**, 445 (1990).
163. M.I. Freidin, A.D. Wentzell, *Random Perturbations of Dynamical Systems* (Springer-Verlag, New York 1984).
164. R. Graham, and T. Tel, *Phys. Rev. A* **31**, 1109 (1985).
165. R. Graham, In: [13], vol 1.
166. R. Graham, A. Hamm A., T. Tel, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 3089 (1991).
167. Yu.L. Klimontovich, *Statistical Physics* (Harwood Acad. Publ., 1986).
168. В.С. Анищенко, *Письма в ЖТФ* **10** 266 (1984).
169. В.С. Анищенко, А.Б. Нейман, *Письма в ЖТФ* **13**, 444 (1987).
170. В.С. Анищенко, А.Б. Нейман, *ЖТФ* **35**,1 (1990).
171. V.S. Anishchenko, A. Neiman, L.O. Chua, *Int. J. Bif. Chaos* **4**, 99 (1994).
172. E.N. Lorenz, *J. Atmos. Sci.* **20**, 130 (1963).
173. Ю.Л. Климонтович (ред.), *Волновые и флуктуационные процессы в лазерах* (Наука, Москва 1974).
174. H.M. Ito, *J. Stat. Phys.* **35**, 151 (1984).
175. В.В. Быков, Л.П. Шильников, в сб. *Методы качественной теории и теория бифуркаций*, под ред. Л.П. Шильникова (Изд-во Горьк. ун-та, Горький 1989), с. 151–159.

176. В.С. Анищенко, А.Б. Нейман, Письма в ЖТФ **17**, 510 (1991).
177. М.И. Рабинович, УФН **21**, 443 (1978).
178. T. Zhou and F. Moss, Phys. Rev. A. **41**, 4255 (1990).
179. В.С. Анищенко, Д.Э. Постнов, И.А. Хованов, Б.В. Шульгин, Изв. вузов – Прикладная нелинейная динамика **3**, 16 (1995).
180. Б.В. Шульгин, *Стохастический резонанс в бистабильных радиофизических системах*, канд. дисс. (Сарат. ун-т, Саратов 1995).
181. V. Shneidman, P. Jung, and P. Hänggi Weak-noise limit of stochastic resonance. Phys. Rev. Lett. **72**, 2682 (1994).
182. G.N. Milstein and M.V. Tretyakov, Physica D **140**, 244 (2000).
183. A. Neiman, Phys. Rev. E **49**, 3484 (1994).
184. B. Shulgin, A. Neiman, V.S. Anishchenko, Phys. Rev. Lett. **75**, 4157 (1995).
185. A. Neiman, A. Silchenko, V.S. Anishchenko, and L. Schimansky-Geier, Phys. Rev. E **58**, 7118 (1998).
186. V.I. Melnikov, Phys. Rev. E **48**, 2481 (1993).
187. C.V. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry, and the Natural Sciences* (Springer-Verlag, Berlin 1983).
188. V.S. Anishchenko, A. Neiman, A. Silchenko, I.A. Khovanov, Dynamics and Stability of Systems **14**, 211 (1999).
189. И.А. Хованов, В.С. Анищенко, Письма в ЖТФ **22**, 854 (1996).
190. V.S. Anishchenko, A.N. Silchenko, I.A. Khovanov, Phys. Rev. E **57**, 316 (1997).
191. J.J. Collins, C.C. Chow C.C., and T.T. Imhoff, Nature (London) **376**, 236 (1995).
192. X. Pei, L. Wilkens, F. Moss, Phys. Rev. Lett. **77**, 4679 (1996).
193. P.C. Gailey, A. Neiman A., J.J. Collins, F. Moss, Phys. Rev. Lett. **79**, 4701 (1997).
194. А.С. Пиковский, Радиопизика и квантовая электроника **27**, 576 (1984).
195. A.S. Pikovsky, In: *Nonlinear and Turbulent Processes in Physics*, ed. R.Z.Sagdeev, vol.3, (Harwood Acad. Publ., 1984).
196. A. Neiman, F. Moss, L. Schimansky-Geier, and W. Ebeling, In: [17].
197. A. Neiman, B. Shulgin, V.S. Anishchenko, W. Ebeling, L. Schimansky-Geier, and J. Freund, Phys. Rev. Lett. **76**, 4299 (1996).
198. L. Schimansky-Geier, J. Freund, A. Neiman, and B. Shulgin, Int. J. Bif. Chaos **8**, 869 (1998).
199. J.E. Levin, J.P. Miller, Nature **380**, 165 (1996).
200. A. Bulsara, A. Zador, Phys. Rev. E **54**, R2185 (1996).
201. W.J.A. Sloane, A.D. Wyner (Eds.) *Claude Elwood Shannon: Collected Papers* (IEEE Press, New York, 1993).
202. W. Ebeling, G. Nicolis, Chaos, Solitons & Fractals **2**, 635 (1995).
203. W. Ebeling, J. Freund, K. Rateitschak, Int. J. Bif. Chaos **6**, 611 (1996).
204. А.Я. Хинчин, УМН **11**, 17 (1956).
205. W. Ebeling, H. Herzog, W. Richert, L. Schimansky-Geier, ZAMM **66**, 141 (1986).
206. K. Lekkas, L. Schimansky-Geier, H. Engel-Herbert, Z. Phys. B **70**, 517 (1988).
207. L. Schimansky-Geier, F. Moss, G. Schmeta, in: *Irreversible Processes and Selforganization*, ed. by W. Ebeling and H. Ulbricht, Teubner Series on Physics (Teubner-Verlag, Leipzig 1989).
208. S.M. Soskin, Physica A **155**, 401 (1989).
209. G. Hu, T. Ditzinger, C. Z. Ning and H. Haken, Phys. Rev. Lett. **71**, 807 (1993).
210. T. Ditzinger, C. Z. Ning, and G. Hu, Phys. Rev. E **50**, 3508 (1994).
211. B. Lindner and L. Schimansky-Geier, Phys. Rev. E **61**, 6103 (2000).

212. A. Longtin, Phys. Rev. E **55**, 868 (1997).
213. A. Pikovsky and J. Kurths Phys. Rev. Lett. **78**, 775 (1997).
214. A. Neiman, P. Saparin, L. Stone, Phys. Rev. E **56**, 270 (1997).
215. K. Wiesenfeld, J. Stat. Phys. **38**, 1071 (1985).
216. A. Neiman, V.S. Anishchenko, J. Kurths, Phys. Rev. E **49**, 3801 (1994).
217. R. A. FitzHugh, Biophys. J. **1**, 445 (1961)
218. A. C. Scott, Rev. Mod. Phys. **47**, 487 (1975)
219. A. Longtin, J. Stat. Phys. **70** 309 (1993).
220. A. Longtin, Nuovo Cimento D **17** 835 (1995).
221. J. J. Collins, C. C. Chow, and T. T. Imhoff, Phys. Rev. E **52**, 3321 (1995).
222. X. Pei, K. Bachmann, F. Moss, Phys. Lett. A **206**, 61 (1995).
223. D. R. Chialvo, A. Longtin and J. Müller-Gerking, Phys. Rev. E **55**, 1798 (1997).
224. A. Longtin, D. R. Chialvo, Phys. Rev. Lett. **81**, 4012 (1998).
225. J. B. Baltanas, J. M. Casado, Physica D **122**, 231 (1998).
226. J. M. Casado Phys. Lett. A **235**, 489 (1997).
227. S. R. Massanés and C. J. P. Vicente, Phys. Rev. E **59**, 4490 (1999).
228. D. E. Postnov, S. K. Han, T. Y. Yim, O.V. Sosnovtseva, Phys. Rev. E **59**, 3791 (1999).
229. A. Neiman, L. Schimansky-Geier, A. Cornell-Bell, and F. Moss, Phys. Rev. Lett. **83**, 4896 (1999).
230. R. Graham and H. Haken, Z. Phys. **243** 289 (1971).
231. R. Graham, *Statistical Theory of Open Systems in Stationary Nonequilibrium Systems with Applications to Lasers and Nonlinear Optics*, Springer Tracts on Modern Physics, Vol. 66 (Springer, Berlin–Heidelberg 1973).
232. G. G. Izus, R. R. Deza, and H. S. Wio, Phys. Rev. E **58**, 93 (1998).
233. T. Alarcon, A. Perez-Madrid, and J. M. Rubi, Phys. Rev. E **57**, 4879 (1998).
234. B. Lindner and L. Schimansky-Geier, Phys. Rev. E **60**, 7270 (1999).
235. V. I. Melnikov, Phys. Rev. E **48**, 2481 (1993).
236. A. Longtin, A. Bulsara, and F. Moss, Phys. Rev. Lett. **67**, 656 (1991).
237. J. García-Ojalvo, L. Schimansky-Geier, Europhys. Letters **47**, 298 (1999).
238. J. García-Ojalvo, L. Schimansky-Geier, J. Stat. Phys. **101**, 473 (2000)
239. W.M. Kistler, R. Seitz, and L. van Hemmen, Physica D **114**, 73 (1998).
240. F. Schweitzer, W. Ebeling, B. Tilch, Phys. Rev. Lett. **80**, 5044 (1998).
241. M. Smoluchowski, Physik. Zeitschr. **XIII**, 1069 (1912).
242. R. Feynman, R. Leighton, and M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, vol. 46, (Addison-Wesley, 1963).
243. S. Flach, O. Yevtushenko, Y. Zolotaryuk, Phys. Rev. Lett. **84**, 2358 (2000).
244. M.O. Magnasco, Phys. Rev. Lett. **71**, 1477 (1993).
245. J. Maddox, Nature **365**, 203 (1993).
246. S. Leibler, Nature **370**, 412 (1994).
247. M.O. Magnasco, Phys. Rev. Lett. **72**, 2656 (1994).
248. C.R. Doering, W. Horsthemke, and J. Riordan. Phys. Rev. Lett. **72**, 2984 (1994).
249. R. Bartussek, P. Hänggi, and J. G. Kissner, Europhys. Lett. **28**, 459 (1994).
250. R.D. Astumian and M. Bier, Phys. Rev. Lett. **72**, 1766 (1994).
251. M. M. Millonas and M. I. Dykman, Phys. Lett. A **185**, 65 (1994).
252. J. Luczka, R. Bartussek, and P. Hänggi, Europhys. Lett. **31**, 431 (1995).
253. C.R. Doering, Il Nuovo Cimento **17 D**, 685 (1995).
254. A. Mielke, Ann. Physik **4**, 476 (1995).
255. P. Hänggi and R. Bartussek, in *Nonlinear Physics of Complex Systems – Current Status and Future Trends*, edited by J. Parisi, S. C. Müller, and W. Zimmermann (Springer, Berlin, 1996).

256. T.C. Elston and C.R. Doering, *J. Stat. Phys.* **83**, 359 (1996).
257. M. Bier and R. D. Astumian, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 4277 (1996).
258. F. Marchesoni, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 2364 (1996).
259. M. Bier, *Phys. Lett. A* **211**, 12 (1996).
260. R. Bartussek, P. Reimann, and P. Hänggi, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 1166 (1996).
261. F. Jülicher, A. Ajdari, and J. Prost, *Rev. Mod. Phys.* **69**, 1269 (1997).
262. R. D. Astumian, *Science* **276**, 917 (1997).
263. T. Hondou, Y. Sawada, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3269 (1995).
264. M. R. Evans, D. P. Foster, C. GodrXche, and D. Mukamel, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 208 (1995).
265. I. Derényi and T. Viscek, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 374 (1995).
266. T. Harms and R. Lipowsky, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 2895 (1997).
267. I. M. Sokolov and A. Blumen, *J. Phys. A* **30**, 3021 (1997).
268. T. E. Dyalynas, Katja Lindenberg and G. P. Tsironis, *Phys. Rev. E*, **56**, 3976 (1997).
269. C. R. Doering, *Physica A* **254**, 1 (1998).
270. G. P. Tsironis, K. Lindenberg, *Adv. in Structural Biology* **5**, 271 (1998).
271. H. Qian, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3063 (1998).
272. V. Berdichevsky, M. Gitterman, *Phys. Rev. E* **60**, 7562 (1999).
273. Y. Aghababaie, G. I. Menon, and M. Plischke, *Phys. Rev. E* **59**, 2578 (1999).
274. M. Porto, M. Urbakh, and J. Klafter, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 491 (2000).
275. P.S. Landa and P.V.E. McClintock, *Phys. Reports.* **323**, 4 (2000).
276. J. Prost, J.-F. Chauwin, L. Peliti, and A. Ajdari, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 2652 (1994).
277. W.D. Volkmuth, T. Duke, M. C. Wu, and R. H. Austin, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 2117 (1994).
278. T. A. Duke and R.H. Austin, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 1552 (1998).
279. D. Ertas, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 1548 (1998).
280. C. Kettner, P. Reimann, P. Hänggi and F. Müller, *Phys. Rev. E* **61**, 312 (2000).
281. J. Finer, R. M. Simmons, and J. A. Spudich, *Nature* **368**, 113 (1994).
282. K. Svoboda, C. F. Schmidt, B. J. Schnapp, and S. M. Block, *Nature* **365**, 721 (1993).
283. N. Cordova, B. Ermentrout and G. Oster, *Proc. Natl. Acad. Sci. (USA)* **89**, 339 (1992).
284. C. Peskin, G. Odell and G. Oster, *Biophys. J.* **65**, 316 (1993).
285. C.R. Doering, B. Ermentrout and G. Oster, *Biophys. J.* **69**, 2256 (1995).
286. J.F. Chauwin, G. Oster, B. Glick, *Biophys. J.* **74**, 1732 (1997).
287. A. Mogilner, G. Oster, *Eur. J. Biophys.* **28**, 235 (1998).
288. A. van Oudenaarden and S. G. Boxer, *Science* **285**, 1046 (1999).
289. A. van Oudenaarden and J. A. Theriot, *Nature Cell Biology* **1**, 493 (1999).
290. A. van Oudenaarden and J. A. Theriot, *Biophysical Journal* **78**, 241A (2000).
291. R. D. Astumian, P. B. Chock, T. Y. Tsong, and H. V. Westerhoff, *Phys. Rev. A* **39**, 6416 (1989).
292. D. S. Liu, R. D. Astumian, and T. Y. Tsong, *J. Biol. Chem.* **265**, 7260 (1990).
293. T. D. Xie, P. Marszalek, Y. Chen, and T. Y. Tsong, *Biophys. J.* **67** 1247 (1994).
294. R. D. Astumian and M. Bier, *Biophys. J.* **70**, 637 (1996).
295. R. D. Astumian, *J. Phys. Chem.* **100**, 19075 (1996).
296. A. Ajdari and J. Prost, *Proc. Natl. Acad. Sci USA* **88**, 4468 (1991).
297. A. Ajdari and J. Prost, *C. R. Acad. Sci. Paris* **315**, 1635 (1992).
298. J.-F. Chauwin, A. Ajdari and J. Prost, *Europhys. Lett.* **27**, 421 (1994).
299. J. Rousset, L. Salome, A. Ajdari, and J. Prost, *Nature* **370**, 446 (1994).

300. L. P. Faucheux, L. S. Bourdieu, P. D. Kaplan, and A. J. Libchaber, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 1504 (1995).
301. L. Gorre, E. Ioannidis, and P. Silberzan, *Europhys. Lett.*, **33**, 267 (1996).
302. I. Zapata, B. Bartussek, F. Sols, and P. Hänggi, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 2292 (1996).
303. K. Seeger and W. Maurer, *Sol. State Commun.* **27**, 603 (1978).
304. N. G. van Kampen, *Stochastic Processes in Physics and Chemistry* (North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1981).
305. J.M.R. Parrondo and P. Español, *American Journal of Physics* **64**, 1125 (1996); K. Sekimoto, *J. Phys. Soc. Jpn.* **66**, 1234 (1997); J.M.R. Parrondo, J.M. Blanco, F.J. Cao, and R. Brito, *Europhys. Lett.* **43**, 248 (1998); J.M.R. Parrondo, *Phys. Rev. E* **57**, 7297 (1998); ; A. Parmeggiani, F. Jülicher, A. Ajdari, and J. Prost, *Phys. Rev. E* **60**, 2127 (1999); I. M. Sokolov, *Phys. Rev. E* **63**, 021107 (2001).
306. J. A. Freund, and L. Schimansky-Geier, *Phys. Rev. E* **60**, 1304 (1999).
307. И. Блехман, *Синхронизация динамических систем* (Наука, Москва 1971); И. Блехман, *Синхронизация в науке и технике* (Наука, Москва 1981).
308. M. Büttiker, *Z. Phys. B* **68**, 161 (1987).
309. P. Reimann, R. Bartussek, R. Häussler, and P. Hänggi, *Phys. Lett. A* **215**, 26 (1996).
310. V. Berdichevsky, M. Gitterman, *Phys. Rev. E* **59**, R9 (1999).
311. P. Hänggi, R. Bartussek, P. Talkner, and J. Luczka, *Europhys. Lett.* **35**, 315 (1996).
312. C. Jarzynski and O. Mazonka, *Phys. Rev. E* **59**, 6448 (1999).
313. P.S. Landa, A. Zaikin, and L. Schimansky-Geier, *Chaos, Solitons & Fractals* (2001).
314. R. F. Fox, I. R. Gatland, R. Roy, and G. Vemuri, *Phys. Rev. A* **38**, 5938 (1988).
315. B. Lindner, Diploma thesis, Humboldt University at Berlin (1996).
316. R. Bartussek, in [16].
317. B. Lindner, L. Schimansky-Geier, P. Reimann, and P. Hänggi, in [17].
318. P. Jung, J. G. Kissner, and P. Hänggi, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 3436 (1996).
319. P. Reimann, M. Grifoni, and P. Hänggi, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 10 (1997).
320. F. Marchesoni, *Phys. Lett. A* **237**, 126 (1998).
321. P. S. Landa, *Phys. Rev. E* **58**, 1325 (1998).
322. B. Lindner, L. Schimansky-Geier, P. Reimann, P. Hänggi, and M. Nagaoka, *Phys. Rev. E* **59**, 1417 (1999).
323. P. Hänggi and P. Jung, *Adv. Chem. Phys.* **89**, 239 (1995).
324. P. Jung, P. Hänggi, *Phys. Rev. A* **35**, 4464 (1987).
325. L. H'walisz, P. Jung, P. Hänggi, P. Talkner, L. Schimansky-Geier, *Z. Phys. B* **77**, 471 (1989); A. J. R. Madureira, P. Hänggi, V. Buonomano, and W. A. Rodrigues Jr., *Phys. Rev. E* **51**, 3849 (1995); R. Bartussek, A. J. R. Madureira, and P. Hänggi, *Phys. Rev. E* **52**, 2149 (1995).
326. W. Wonneberger and H.-J. Breymayer, *Z. Physik B* **56**, 241 (1984); H.-J. Breymayer, H. Risken, H. D. Vollmer and W. Wonneberger, *Appl. Phys. B* **28**, 335 (1982).
327. S. B. J. Eichcomb and A. J. McKane, *Phys. Rev. E* **51**, 2974 (1995).
328. R. Reimann, *Phys. Rev. E* **52**, 1579 (1995); Rattay, K. M. and McKane, A. J., *J. Phys. A* **24**, 1215 (1991).
329. E. Pollak and P. Talkner, *Phys. Rev. E* **47**, 922 (1993).
330. D. Astumian I. Derenyi, *Phys. Rev. E* **58**, 7781 (1998).
331. M. Bier, M. Kostur, I. Derenyi, and R.D. Astumian, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 903 (1999).
332. M. Kostur and L. Schimansky-Geier, *Phys. Lett. A* **265**, 337 (2000).

333. O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor. *The Finite Element Method, Vol I & II*. (McGraw-Hill, 1989/91).
334. L. Schimansky-Geier, M. Kschicho, and T. Fricke, Phys. Rev. Lett. **79**, 3335 (1997).
335. H. Gang, A. Daffertshofer, and H. Haken, Phys. Rev. Lett. **76**, 4874 (1996).
336. B. Derrida, J. Stat. Phys. **31**, 433 (1983).
337. I. Claes and C. Van den Broeck, J. Stat. Phys. **70**, 1215 (1993).
338. I. Derényi and R. D. Astumian, Phys. Rev. Lett. **80**, 4602 (1998).
339. L. Schimansky-Geier, S. Seefeld, and V. Bucholtz, Ann. Physik **9**, 705 (2000).
340. L. Schimansky-Geier, M. Mieth, H. Rosé, and H. Malchow, Phys. Lett. A **207**, 140 (1995).
341. R. Feistel, W. Ebeling, *Physics of Complex Systems* (Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1989).
342. B. Lindner, M. Kostur and L. Schimansky-Geier, Fluct. and Noise Lett. **1**, R25 (2001).
343. P. Reimann, R. Kawai, C. Van den Broeck and P. Hänggi, Europhys. Lett. **45**, 545 (1999).
344. C. Van den Broeck, P. Reimann, R. Kawai and P. Hanggi, in *Statistical Mechanics of Biocomplexity*, Eds. D. Reguera, J.M.G. Vilar and J.M. Rubi (Springer, Berlin, Heidelberg 1999).
345. J. Buceta, J. M. R. Parrondo, C. Van den Broeck and J. de la Rubia, Phys. Rev. E **61**, 6287 (2000).
346. C. Van den Broeck, I. Bena, P. Reimann and J. Lehmann, Ann. Phys. **9**, 713 (2000).